


Universidade Federal
de Santa Catarina

EEL7020 – Sistemas Digitais

Aula 2: Álgebra Booleana

Prof. Djones Vinicius Lettnin
lettnin@eel.ufsc.br
<http://lettnin.paginas.ufsc.br/>

Disclaimer: slides adapted for EEL7020 by D. Lettnin from the original slides made available by the authors E. Batista, J. Guntzel and J. Fraga.


Universidade Federal
de Santa Catarina

Revisão

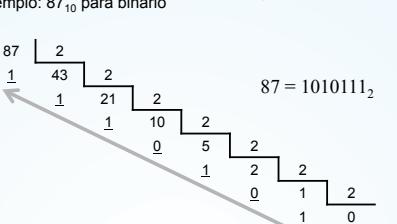
- Analógico x Digital
- Bases
 - Binário, Decimal, Octal, Hexadecimal
- Convertendo para decimal:
 $100110_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 38$
- Convertendo de binário para octal:
 $\begin{array}{r} 1011001100111_2 \\ \hline 1_8 \quad 3_8 \quad 1_8 \quad 4_8 \quad 7_8 \end{array}$
- Convertendo de binário para hexa:
 $\begin{array}{r} 11110011_2 \\ \hline F_{16} \quad 3_{16} \quad 2 \end{array}$


Universidade Federal
de Santa Catarina

Revisão

- Dividir sucessivamente o número por **B** e agrupar os restos das divisões de trás para frente.
- Exemplo: 87_{10} para binário

base alvo



$87 = 1010111_2$

© E. Batista – Adapted by D. Lettnin


Universidade Federal
de Santa Catarina

Plano de Aula



- Álgebra Booleana
- Circuitos Lógicos
- Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana e Minimização Algébrica
- Portas lógicas e portas universais

4


Universidade Federal
de Santa Catarina

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

- Proposta pelo matemático inglês **George Boole**, em 1854
- Assume um número finito de valores possíveis para as variáveis
- Definida por operações básicas sobre os valores possíveis e por teoremas
- Em 1934, **Claude Shannon** propôs o uso de um subconjunto da Álgebra Booleana para modelar o funcionamento de circuitos a relés

5

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettnin


Universidade Federal
de Santa Catarina

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Álgebra Booleana

- Associação da Álgebra Booleana com Eletrônica Digital:

Valor lógico	Nível lógico	Nível de tensão (tec. 2.0 μm)	Nível de tensão (tec. 0.5 μm)	Nível de tensão (tec. 0.13 μm)
F	0	0 V	0 V	0 V
V	1	5 V	3.3 V	1.5 V

6

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettnin

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Complemento (“NOT”)**
 - (Também denominada de “negação” ou “inversão”)
- É uma operação unária (i.e., só pode ser aplicada sobre uma variável por vez)
- Tem como resultado, o valor oposto ao valor original da variável de entrada

Símbolos:	Tabela-verdade:	Porta Lógica (representação gráfica):						
$\{\bar{A}, \neg A, \overline{A}, A', \text{NOT}(A)\}$ (lê-se “A negado”)	<table border="1"> <tr> <td>A</td> <td>\bar{A}</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	A	\bar{A}	0	1	1	0	
A	\bar{A}							
0	1							
1	0							

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

7

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “E” (“AND”)**
 - (Também denominada de “multiplicação lógica”)
- Definição 1: a operação binária “E” resulta 1 se e somente se **todas** as variáveis de entrada valerem 1.
- Definição 2: a operação binária “E” resulta 0 se ao menos **uma** das variáveis de entrada valer 0.

Símbolos:	Tabela-verdade:	Porta Lógica (representação gráfica):															
$\{\wedge, \cdot, \&\}$	<table border="1"> <tr> <td>A</td> <td>B</td> <td>$A \cdot B$</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	A	B	$A \cdot B$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
A	B	$A \cdot B$															
0	0	0															
0	1	0															
1	0	0															
1	1	1															

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

8

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “OU” (“OR”)**
 - (Também denominada de “adição lógica”)
- Definição 1: a operação binária “OU” resulta 1 se ao menos **uma** das variáveis de entrada valer 1.
- Definição 2: a operação binária “OU” resulta 0 se e somente se **todas** variáveis de entrada valerem 0.

Símbolos:	Tabela-verdade:	Porta Lógica (representação gráfica):															
$\{+, \vee\}$	<table border="1"> <tr> <td>A</td> <td>B</td> <td>$A + B$</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table>	A	B	$A + B$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
A	B	$A + B$															
0	0	0															
0	1	1															
1	0	1															
1	1	1															

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

9

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Comparando as Definições...

Operação “E”	Operação “OU”
Definição 1: a operação “E” resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.	Definição 1: a operação “OU” resulta 1 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 1.
Definição 2: a operação “E” resulta 0 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 0.	Definição 2: a operação “OU” resulta 0 se e somente se todas variáveis de entrada valerem 0.

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

10

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “E” (“AND”) com 3 variáveis de entrada

Definição 1: a operação “E” resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.			
A	B	C	$A \cdot B \cdot C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Porta Lógica

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

11

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “E” (“AND”): Propriedade Comutativa**
 - As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$B \cdot A \cdot C$	$C \cdot A \cdot B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

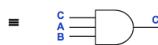
© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

12

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “E” (“AND”): Propriedade Comutativa
 - Em termos de portas lógicas, isto equivale a ...

	≡	
	≡ ...	

Conclusão: as entradas da porta “E” são funcionalmente equivalentes.

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

13

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “E” (“AND”): Propriedade Associativa
 - As variáveis de entrada podem ser operadas de duas em duas (ou de três em três, ou de quatro em quatro...)

A	B	C	$A \cdot B \cdot C$	$(A \cdot B) \cdot C$	$A \cdot (B \cdot C)$	$(A \cdot C) \cdot B$...
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

Os parêntesis indicam ordem de precedência

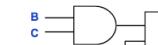
© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

14

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “E” (“AND”): Propriedade Comutativa
 - Em termos de portas lógicas, isto equivale a ...

	≡	
	≡ ...	

Conclusão: é possível decompor-se uma operação “E” de mais de duas entradas em uma associação de operações “E” de duas entradas.

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

15

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “OU” (“OR”) com 3 variáveis de entrada
 - Definição 1: a operação “OU” resulta 1 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 1.

Porta Lógica

	≡	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>$A+B+C$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	$A+B+C$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
A	B	C	$A+B+C$																																			
0	0	0	0																																			
0	0	1	1																																			
0	1	0	1																																			
0	1	1	1																																			
1	0	0	1																																			
1	0	1	1																																			
1	1	0	1																																			
1	1	1	1																																			

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

16

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “OU” (“OR”): Propriedade Comutativa
 - As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>$A+B+C$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	$A+B+C$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	≡	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>$B+A+C$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	$B+A+C$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
A	B	C	$A+B+C$																																																																							
0	0	0	0																																																																							
0	0	1	1																																																																							
0	1	0	1																																																																							
0	1	1	1																																																																							
1	0	0	1																																																																							
1	0	1	1																																																																							
1	1	0	1																																																																							
1	1	1	1																																																																							
A	B	C	$B+A+C$																																																																							
0	0	0	0																																																																							
0	0	1	1																																																																							
0	1	0	1																																																																							
0	1	1	1																																																																							
1	0	0	1																																																																							
1	0	1	1																																																																							
1	1	0	1																																																																							
1	1	1	1																																																																							
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>$C+A+B$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	$C+A+B$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	≡ ...																																					
A	B	C	$C+A+B$																																																																							
0	0	0	0																																																																							
0	0	1	1																																																																							
0	1	0	1																																																																							
0	1	1	1																																																																							
1	0	0	1																																																																							
1	0	1	1																																																																							
1	1	0	1																																																																							
1	1	1	1																																																																							

Conclusão: as entradas da porta “OU” são funcionalmente equivalentes.

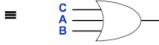
© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

17

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação “OU” (“OR”): Propriedade Comutativa
 - Em termos de portas lógicas, isto equivale a ...

	≡	
	≡ ...	

Conclusão: as entradas da porta “OU” são funcionalmente equivalentes.

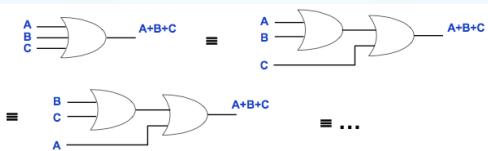
© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

18

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Operações Básicas da Álgebra Booleana

- Operação "OU" ("OR"): Propriedade Comutativa
 - Em termos de portas lógicas, isto equivale a ...



Conclusão: é possível decompor-se uma operação "OU" de mais de duas entradas em uma associação de operações "OU" de duas entradas.

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

19

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- Montando a tabela-verdade de uma equação
 - Identificar as variáveis de entrada
 - Para cada variável de entrada, destinar uma coluna mais à esquerda, na tabela-verdade
 - Criar colunas à direita, conforme a ordem de precedência das operações contidas na equação que se está avaliando
 - montando a tabela-verdade de uma equação

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

20

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- Exemplo: monte a tabela-verdade para a equação
 - $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - Há três variáveis de entrada: X, Y e Z.
 - Então, a tabela-verdade para esta equação conterá três colunas à esquerda
 - De modo geral, a tabela-verdade para uma equação com n variáveis de entrada conterá 2^n linhas à esquerda

X	Y	Z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

21

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- Nestas colunas deve-se enumerar todas as combinações das variáveis de entrada (normalmente, em ordem crescente do número binário que elas podem representar)

X	Y	Z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

22

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- Do nível de parêntesis mais interno para o nível mais externo
 - 1. Complemento de variável individual
 - 2. Operação "E"
 - 3. Operação "OU"

OBS: complemento de expressão deve ser analisado assim que a expressão a ser complementada for avaliada. Ordem de Avaliação de Expressões Booleanas (Ordem Precedência dos Operadores)

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

23

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$

X	Y	Z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

© J. Guntzel – Adapted by D. Lettin

24

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - Criar uma coluna para avaliar \bar{Z}

X	Y	z	\bar{z}
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettmann

25

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - Criar uma coluna para avaliar $(Y + \bar{Z})$

X	Y	z	\bar{z}	$(Y + \bar{z})$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettmann

26

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Avaliação de Expressões Booleanas

- $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - Criar uma coluna para avaliar $X \cdot (Y + \bar{Z})$

X	Y	z	\bar{z}	$(Y + \bar{z})$	$X \cdot (Y + \bar{z}) = F$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettmann

27

Plano de Aula

- Álgebra Booleana
- Circuitos Lógicos
- Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana e Minimização Algébrica
- Portas lógicas e portas universais

28

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

- Dada uma equação que representa uma função Booleana, é possível representá-la graficamente, por meio de uma associação apropriada de portas lógicas, recebendo o nome de circuito lógico.
- Com o desenho do circuito lógico, é possível implementar fisicamente uma função Booleana.
- O desenho de um circuito lógico deve obedecer à ordem de precedência das operações mostradas na equação lógica que se deseja implementar.

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettmann

29

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

- Exemplo: desenhe o circuito lógico para a equação
 - $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - 1. Desenhar a porta inversora que implementa \bar{Z} .

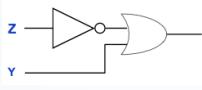
© J. Güntzel – Adapted by D. Lettmann

30

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

- Exemplo: desenhe o circuito lógico para a equação
 - $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - 2. Desenhar a porta "OU" que implementa $(Y + \bar{Z})$.



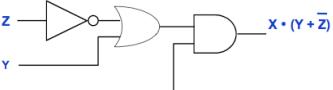
© J. Günzel – Adapted by D. Lettmann

31

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Circuitos Lógicos

- Exemplo: desenhe o circuito lógico para a equação
 - $F = X \cdot (Y + \bar{Z})$
 - 3. Desenhar a porta "E" que implementa $X \cdot (Y + \bar{Z})$.



© J. Günzel – Adapted by D. Lettmann

32

 Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Exercícios

- Exercício 1: avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico.

$$S = \bar{A} \cdot C + (B \cdot C + A \cdot \bar{B})$$

© J. Günzel – Adapted by D. Lettmann

33

 Plano de Aula



- Álgebra Booleana
- Circuitos Lógicos
- Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana e Minimização Algébrica**
- Portas lógicas e portas universais

34

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana

- Propriedades da Adição Lógica

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(1) $A+0=A$
 (2) $A+1=1$
 (3) $A+A=A$
 (4) $A+\bar{A}=1$

© J. Günzel – Adapted by D. Lettmann

35

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana

- Propriedades da Multiplicação Lógica

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(5) $A \cdot 0 = 0$
 (6) $A \cdot 1 = A$
 (7) $A \cdot A = A$
 (8) $A \cdot \bar{A} = 0$

© J. Günzel – Adapted by D. Lettmann

36

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
Universidade Federal de Santa Catarina

- Propriedade da Complementação

$$(9) \overline{\overline{A}} = A$$

- Propriedade da Comutatividade

$$(10) A + B = B + A$$

$$(11) A \cdot B = B \cdot A$$

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettin 37

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
Universidade Federal de Santa Catarina

- Propriedade da Associatividade

$$(12) A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B$$

$$(13) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B$$

- Propriedade Distributiva (da multiplicação em relação à adição)

$$(14) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

expansão ← fatoração

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettin 38

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
Universidade Federal de Santa Catarina

- Teoremas de De Morgan
 - Forma Geral

$$(1) \overline{A \cdot B \cdot C \cdot \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots$$

$$(2) \overline{A + B + C + \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \dots$$

- Em particular, para duas variáveis:

$$(1) \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$(2) \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettin 39

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
Universidade Federal de Santa Catarina

- Simplificação Algébrica
 - Redução do número de literais ou de operações na equação Booleana, através da aplicação das propriedades da Álgebra Booleana

$$F = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + ABC$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$F = \overline{AB}(\overline{C} + C) + \overline{ABC} + ABC$$

Pela prop. (4), $\overline{C} + C = 1$

$$F = \overline{AB} \cdot 1 + \overline{ABC} + ABC$$

Pela prop. (6), $\overline{AB} \cdot 1 = \overline{AB}$

$$F = \overline{AB} + \overline{ABC} + ABC$$

Soma de Produtos simplificada

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettin 40

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
Universidade Federal de Santa Catarina

- Simplificação Algébrica

Entretanto, o termo \overline{ABC} poderia ter sido simplificado com o termo ABC

$$F = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + ABC$$

Como fazer isso?

Utilizando a propriedade (3), que permite a seguinte manipulação:

$$\overline{ABC} = \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettin 41

 Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana
Universidade Federal de Santa Catarina

- Simplificação Algébrica

$$F = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + ABC$$

Pela prop. (3), $\overline{ABC} = \overline{ABC} + \overline{ABC}$

$$F = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + ABC$$

Pela prop. (14)

$$F = \overline{AB}(\overline{C} + C) + \overline{ABC} + (A + A)\overline{BC}$$

Pela prop. (4)

$$F = \overline{AB} \cdot 1 + \overline{ABC} + 1 \cdot \overline{BC}$$

Pela prop. (6)

$$F = \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{BC}$$

© J. Güntzel – Adapted by D. Lettin 42

Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana

Universidade Federal de Santa Catarina

- Círcuito Lógico

$$F = \bar{A}B + A\bar{B}C + BC$$

custo:
2x2 + 2x3 = 10

Círculo com (lógica de) 2 níveis

43

Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana

Universidade Federal de Santa Catarina

- Simplificação Algébrica

As vezes, a **fatoração** pode reduzir o número de operações, resultando num círculo mais simples

$$\begin{aligned} F &= \bar{A}B + A\bar{B}C + BC \\ &\downarrow \\ F &= B(\bar{A} + \bar{C}) + A\bar{B}C \end{aligned}$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Forma Fatorada (Não-padrão)

44

Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana

Universidade Federal de Santa Catarina

- Círcuito Lógico

$$F = B(\bar{A} + \bar{C}) + A\bar{B}C$$

custo:
3x2 + 1x3 = 9

Forma fatorada → **Círculo (lógica) multinível**

45

Exercícios – Simplificar as seguintes expressões:

(i) $y = \bar{A}\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}$	(v) $y = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
(ii) $y = (\bar{A} + B)(A + B)$	(vi) $y = \overline{(\bar{A} + C)(B + \bar{D})}$

46

Plano de Aula

Universidade Federal de Santa Catarina

- Álgebra Booleana
- Circuitos Lógicos
- Propriedades e Teoremos da Álgebra Booleana e Minimização Algébrica
- Portas lógicas e portas universais

47

Álgebra Booleana
Outras Portas

Universidade Federal de Santa Catarina

- XOR (OU-EXCLUSIVO):

$S = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

48

Álgebra Booleana
Outras Portas

UFSC
Universidade Federal de Santa Catarina

- XOR (OU-EXCLUSIVO):**



$$S = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- XNOR (NÃO-OU-EXCLUSIVO):**



$$S = \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$$

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

49

Álgebra Booleana
Outras Portas

UFSC
Universidade Federal de Santa Catarina

- NAND (NÃO-E):**



$$S = \overline{A \cdot B}$$

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

50

Álgebra Booleana
Outras Portas

UFSC
Universidade Federal de Santa Catarina

- NAND (NÃO-E):**



$$S = \overline{A \cdot B}$$

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- NOR (NÃO-OU):**



$$S = \overline{A + B}$$

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

51

Álgebra Booleana
Universalidade das Portas NAND e NOR

UFSC
Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

52

Álgebra Booleana
Universalidade das Portas NAND e NOR

UFSC
Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- Inversor:**



$$A \rightarrow S = \bar{A}$$



© E. Batista – Adapted by D. Lettin

53

Álgebra Booleana
Universalidade das Portas NAND e NOR

UFSC
Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- Inversor:**



$$A \rightarrow S = \bar{A}$$



© E. Batista – Adapted by D. Lettin

54

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- Inversor:**

$$A \rightarrow S = \bar{A}$$

$$A \rightarrow S = \overline{A \cdot A} = \bar{A}$$

$$A \rightarrow S = \overline{A + A} = \bar{A}$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

55

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- OR ("OU"):**

$$A \quad B \rightarrow S = A + B$$

$$A \quad B \rightarrow S = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

56

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- OR ("OU"):**

$$A \quad B \rightarrow S = A + B$$

$$A \quad B \rightarrow S = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

57

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- OR ("OU"):**

$$A \quad B \rightarrow S = A + B$$

$$A \quad B \rightarrow S = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

58

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- OR ("OU"):**

$$A \quad B \rightarrow S = A + B$$

$$A \quad B \rightarrow S = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$$

$$= \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A + B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

59

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- AND ("E"):**

$$A \quad B \rightarrow S = A \cdot B$$

$$A \quad B \rightarrow S = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

60

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- AND ("E"):**

$$S = A \cdot B$$

$$S = \overline{A \cdot \overline{B}} = A \cdot B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

61

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- AND ("E"):**

$$S = A \cdot B$$

$$S = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

62

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

- Somente com portas NAND ou somente com portas NOR, é possível implementar qualquer função lógica.
- AND ("E"):**

$$S = A \cdot B$$

$$S = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cdot B$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

63

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

$$S = AB+CD$$

- Exemplo: Implementar usando somente NAND

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

64

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

$$S = AB+CD$$

- Exemplo: Implementar usando somente NAND

$$S = AB+CD$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

65

Álgebra Booleana
Universidade das Portas NAND e NOR

Universidade Federal de Santa Catarina

$$S = AB+CD$$

- Exemplo: Implementar usando somente NAND

$$S = AB+CD$$

© E. Batista – Adapted by D. Lettin

66

 Universidade Federal de Santa Catarina

Álgebra Booleana

Universidade das Portas NAND e NOR

$S = AB + CD$

- Exemplo: Implementar usando somente NAND



© E. Batista – Adapted by D. Lettnin

67

 Universidade Federal de Santa Catarina

Circuitos Lógicos

Exemplo: desenhe o circuito lógico para a equação usando somente NAND

$$\begin{aligned} S &= A \oplus B \\ &= \bar{A}B + A\bar{B} \end{aligned}$$

68

 Universidade Federal de Santa Catarina

EEL7020 – Sistemas Digitais

Aula 2: Álgebra Booleana

Prof. Djones Vinicius Lettnin
 lettnin@eel.ufsc.br
<http://lettnin.paginas.ufsc.br/>

Disclaimer: slides adapted for EEL7020 by D. Lettnin
 from the original slides made available by the author
 E. Batista and J. Guntzel.