Roteiro da Simulação 6:
Filtragem de Sinais

Objetivos

- Ilustrar, através de exemplos simples, a filtragem de sinais para eliminar interferências e ruído.

Introdução Teórica

Em diversas aplicações, é interessante mudar as amplitudes relativas dos componentes de frequência de um sinal ou talvez eliminar por completo alguns componentes de frequência. Tal processo é conhecido como filtragem. Os sistemas lineares invariantes no tempo (LIT), que mudam a forma do espectro, são conhecidos como filtros conformadores de frequência.

1. Característica de Filtragem de Sistemas Lineares

Para um determinado sistema LIT, com resposta ao impulso $h(t)$, um sinal de entrada $f(t)$ produz um sinal de resposta $r(t)$=$f(t)$*$h(t)$, sendo o sinal $f(t)$ processado de uma forma que é característica do sistema. A função de densidade espectral do sinal de entrada é dada por $F(j\omega)=\mathfrak{F}\{f(t)\}$, enquanto que a função de densidade espectral da resposta é dada por $R(j\omega)=\mathfrak{F}\{r(t)\}=\mathfrak{F}\{f(t)*h(t)\}= F(j\omega)H(j\omega)$ (Fig. 1). Portanto, o sistema modifica a função de densidade espectral do sinal de entrada. É evidente que o sistema atua como uma espécie de filtro, para as diferentes componentes de frequência. A intensidade de algumas componentes de frequência aumenta, a de outras atenua e a de outras ainda pode permanecer inalterada. Da mesma forma, cada componente de frequência sofre um deslocamento de fase diferente no processo de filtragem. Assim, o sistema modifica a função de densidade espectral de acordo com as suas características de filtragem. A modificação depende da função de transferência $H(j\omega)$, que representa a resposta do sistema às diferentes componentes de frequência. Portanto, $H(j\omega)$ atua como uma função ponderada para as diferentes frequências.

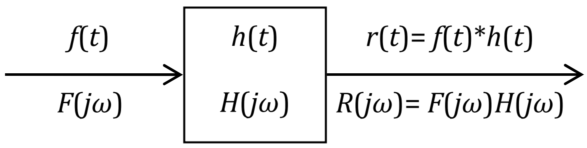


Fig. 1: Filtragem de sinais

2. Filtros Ideais

Um filtro ideal passa-baixas transmite, sem qualquer distorção, todos os sinais de frequências inferiores a uma determinada frequência W (rad/s). Os sinais de frequências superiores a W são completamente atenuados (Fig. 2a). Portanto, a resposta em frequência (característica de amplitude) de um filtro passa-baixas ideal é uma função porta $G_{2W}(j\omega)$. Quanto à resposta de fase do filtro ideal, admitindo-se pelo mesmo um atraso de tempo, a função de fase correspondente é $-\omega t_0$. Logo, a função de transferência desse filtro é dada por

$$H(j\omega) = |\, H(j\omega)|\, e^{j\theta(\omega)}$$

$$= G_{2W}(j\omega)\, e^{-j\omega t_0}.$$

Pode-se encontrar a resposta $h(t)$ ao impulso unitário desse filtro, calculando-se a transformada inversa de Fourier de $H(j\omega)$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{G_{2W}(j\omega)\, e^{-j\omega t_0}\} \\
&= \frac{W}{\pi} Sa[W(t - t_0)].
\end{aligned}
$$

A Fig. $2b$ mostra que a resposta ao impulso existe para os valores negativos de t. Certamente, esse resultado parece estranho, tendo-se em vista o fato de que a função de excitação (impulso unitário) foi aplicada em $t = 0$. Portanto, a resposta aparece mesmo antes de se aplicar a função de excitação. O sistema parece antecipar-se à função de excitação. Infelizmente, é impossível construir na prática um sistema com essa propriedade (não causalidade). Por isso, conclui-se que, embora um filtro ideal passa-baixas seja muito desejável, ele não é fisicamente realizável. Da mesma forma, pode-se mostrar que outros filtros ideais, como os filtros passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa, também são fisicamente irrealizáveis. As respostas em frequência dos filtros ideais passa-altas e passa-faixa são mostradas na Fig. 3.

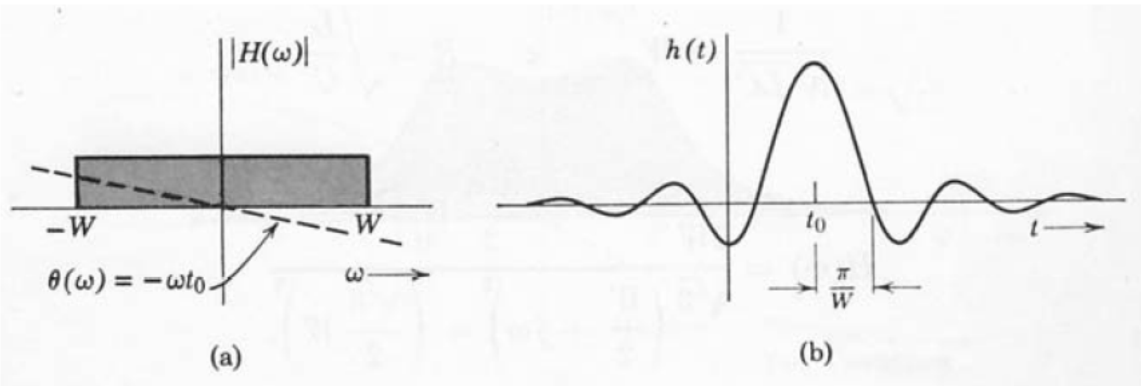


Fig. 2: Característica de um filtro ideal passa-baixas e a sua resposta ao impulso

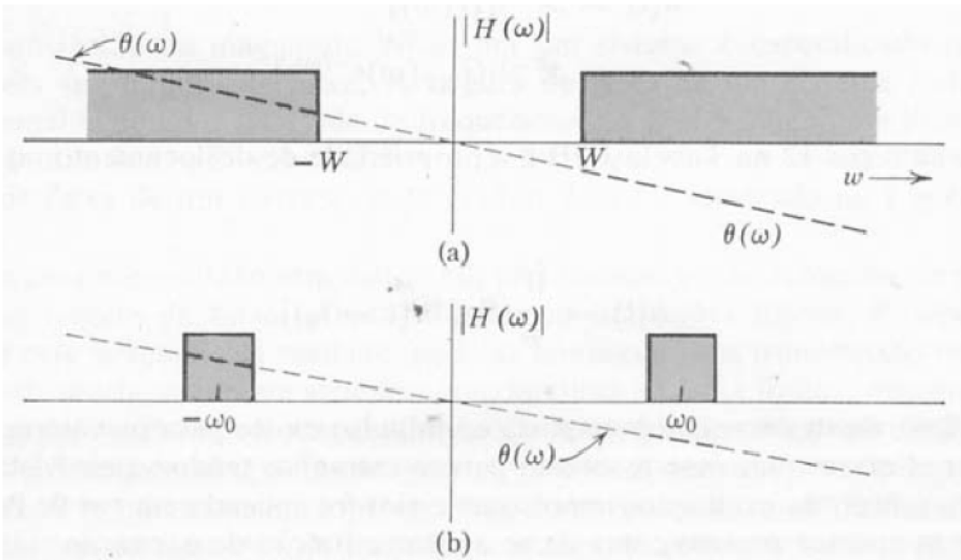


Fig. 3: Características dos filtros ideais passa-altas e passa-faixa

3. Filtros RLC

Na prática, implementa-se filtros cujas características se aproximem das características dos filtros ideais. A Fig. 4 ilustra uma das formas de implementar um filtro passivo passa-baixas, utilizando apenas um resistor, um indutor e um capacitor, sendo, assim, conhecido como filtro passa-baixas RLC. Em baixas frequências, o indutor se comporta como um curto circuito, e o capacitor como um circuito aberto. Ao contrário, em altas frequências, o capacitor se comporta como um curto circuito, e o indutor como um circuito aberto. Logo, as componentes do sinal de tensão $x(t)$ com frequências relativamente baixas aparecerão na saída $y(t)$, a qual é tomada nos terminais do capacitor (devido à sua alta impedância em baixas frequências), e as componentes com frequências relativamente altas praticamente não estarão presentes em $y(t)$. O ajuste dos valores de R, L e C possibilita determinar as frequências das componentes de $x(t)$ que o filtro atenua ou deixa passar.

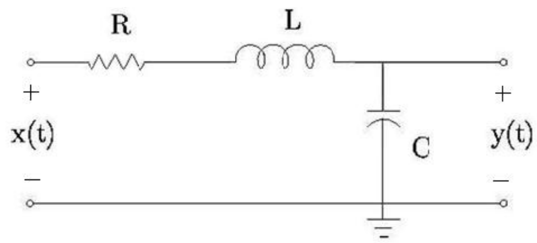


Fig. 4: Filtro passa-baixas RLC

No domínio do tempo, a equação diferencial de segunda ordem da malha do filtro é dada por

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Através da aplicação da transformada de Laplace em ambos os lados da equação acima, obtém-se a função de transferência do filtro:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $\xi = \frac{1}{2}R\sqrt{C/L}$. Sua resposta em frequência, $H(j\omega)$, pode ser obtida fazendo-se na expressão acima $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

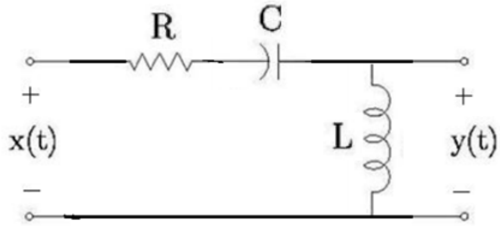
A frequência de corte ω_c de um filtro (ou frequência de 3dB, ω_{3dB}) é definida quando

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

o que equivale a dizer que, na frequência de corte, a resposta de magnitude do filtro está 3dB abaixo daquela na banda passante:

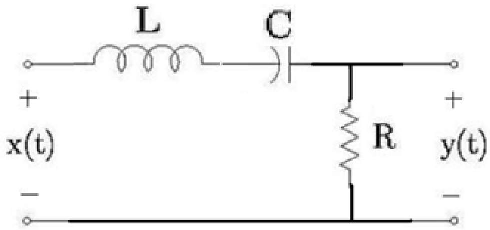
$$20log_{10}|H(\omega_c)| = 20log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong -3\text{dB}$$

Os filtros RLC passa-altas, passa faixa e rejeita faixa, com suas respectivas equações diferenciais de segunda ordem, são mostrados na Fig. 5.



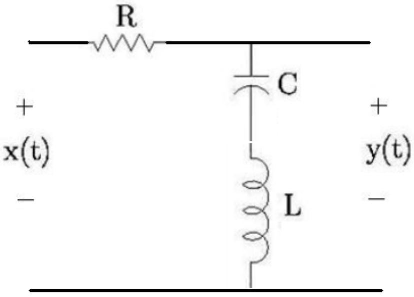
$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = LC\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

(a)



$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = RC\frac{dx(t)}{dt}$$

(b)



$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = LC\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t)$$

(c)

Fig. 5: Filtros RLC (a) passa-altas, (b) passa faixa e (c) rejeita faixa

Simulação

Execute no MatLab o programa “respfreq” e visualize as respostas em frequência dos filtros RLC projetados no pré-estudo. Em seguida, implemente no Simulink o filtro passa-baixas, através de sua função de transferência, $H(s)$ (programa “funtransfer”). Verifique o processo de filtragem, aplicando na entrada do filtro a soma de duas senóides, uma com frequência na faixa de passagem do filtro e outra com frequência em sua faixa de rejeição, acrescida de ruído branco. Varie apenas a relação sinal-ruído (SNR_ signal-to-noise ratio): $SNR_{dB}=10log_{10}(P_s/P_r)$, procurando perceber a interferência do ruído e a atenuação de sua potência pelo filtro. Procure escutar os sinais de entrada e saída do filtro para perceber o processo de filtragem. Para tal, após a execução do programa, execute os seguintes comandos na janela de comando do MatLab:

>> sound(entrada.signals.values) (para escutar o sinal de entrada –> desejado+interferência+ruído)

>> sound(saida.signals.values) (para escutar o sinal de saída)

>> sound(desejado.signals.values) (para escutar apenas o sinal desejado)

>> sound(interferencia.signals.values) (para escutar apenas o sinal de interferência)

>> sound(ruido.signals.values) (para escutar apenas o ruído)