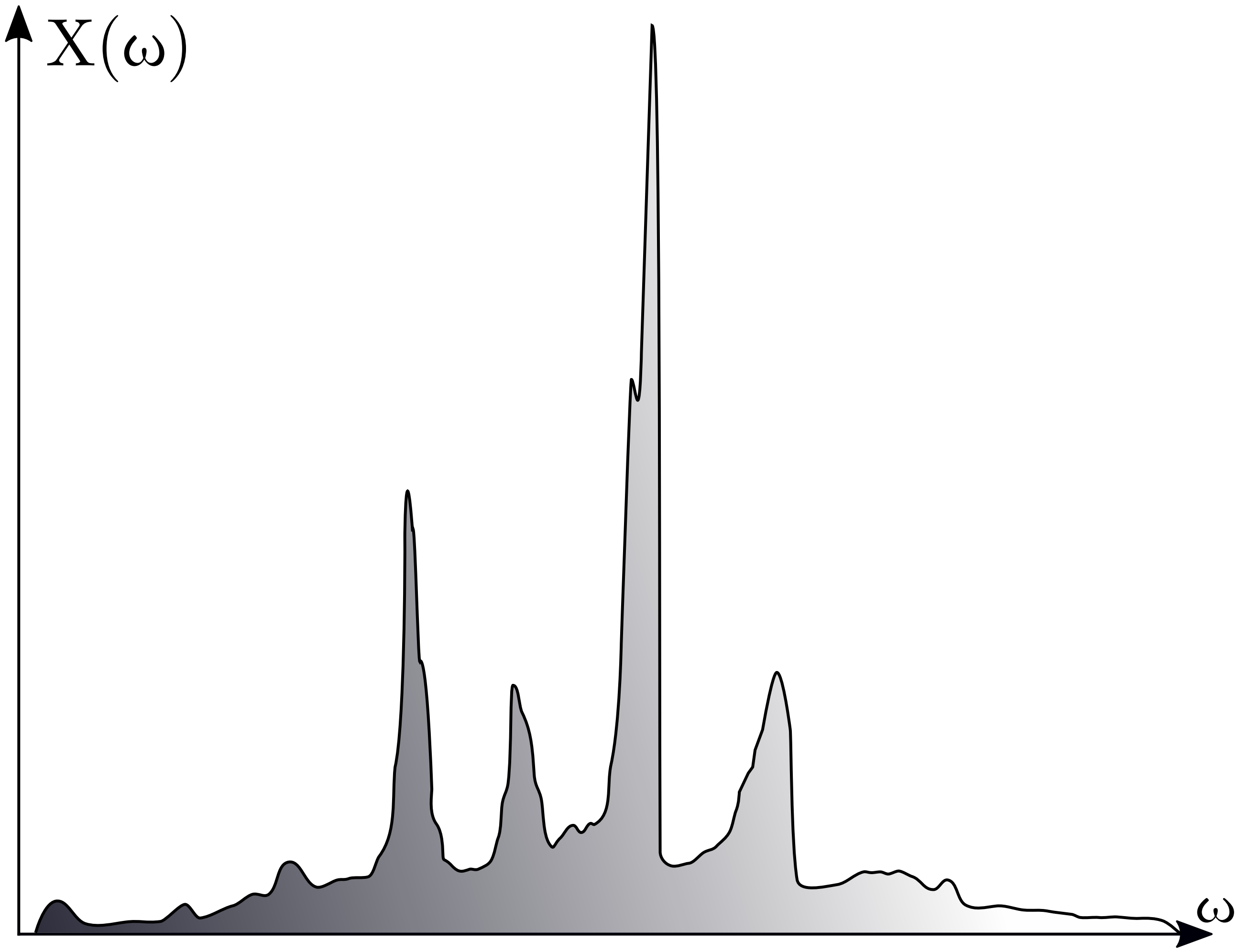
Sistemas Lineares - Módulo I

Autor: Vitor Probst Curtarelli

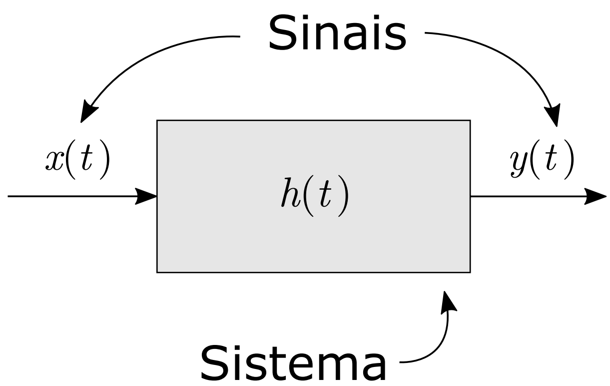


Conteúdo

1 O que é um Sistema Linear

Um sistema linear, tema-foco da disciplina, é uma operação que se aplica sobre um sinal de entrada (que será comumente chamado $\langle\, x(t)\, \rangle$, ao longo das aulas e desse material), e que gera um sinal de saída (denotado $\langle\, y(t)\, \rangle$). São exemplos de sistemas lineares: Uma caixa de som, responsável por ampliar o volume da música que entra nela; Um filtro, que remove sons de determinadas frequências de um sinal de áudio; Um processamento gráfico que, quando você amplia uma imagem, interpola os valores dos pixels que estão sendo gerados.
Como funciona um sistema linear, as ferramentas para analisá-lo e estudá-lo, bem como uma introdução à teoria de como construí-los fisicamente e aplicá-los, são abordados nessa disciplina.

Alguns conceitos importantes a serem introduzidos aqui:
Sinal - toda e qualquer entidade portadora de informação. Uma mensagem de áudio, uma sequência de bits em um disco rígido, uma onda eletromagnética viajando pelo espaço, são exemplos de sinais. Normalmente representados por funções (aqui, funções no domínio do tempo).
Sistema - ferramenta (ou método) para transformação de um sinal (exemplos já foram citados anteriormente).



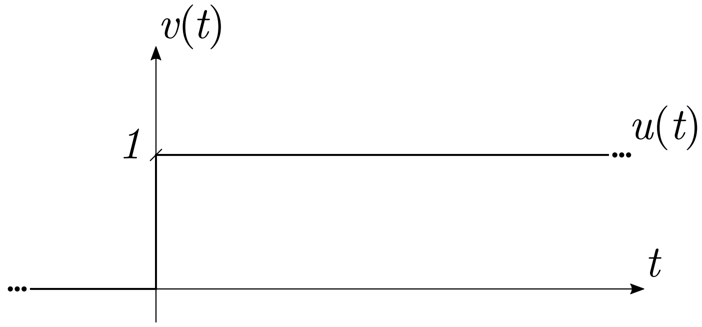
A entrada e a saída, em um sistema linear, relacionam-se por uma função $\langle\, h(t)\, \rangle$, que caracteriza o sistema ($\langle\, h(t)\, \rangle$ também é uma função). Como é obtida a função, como ela opera para relacionar a entrada e a saída, e o que ela representa, serão analisados posteriormente.
Se a entrada de um sistema é $\langle\, x(t)\, \rangle$, e a sua saída é $\langle\, y(t)\, \rangle$, denotar-se-á que $\langle\, x(t) \mapsto y(t)\, \rangle$.
A entrada $\langle\, x(t)\, \rangle$ não necessariamente é unidimensional. Um sistema pode ter uma entrada $\langle\, x(t)\, \rangle$ de dimensão n, e uma saída $\langle\, y(t)\, \rangle$ de dimensão m. Nessa disciplina, serão estudados somente sistemas SISO (Single Input Single Output).

2 Funções Fundamentais

Existem algumas funções pouco conhecidas, mas que serão usadas bastante ao longo do curso. Essas são:

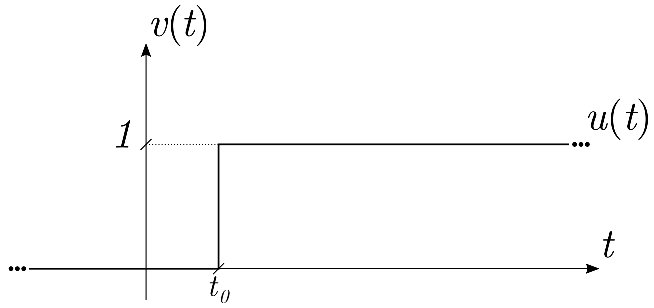
Degrau unitário:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Obs.: Pode-se deslocar $\langle\, u(t) \,\rangle$, tal que

$$u(t - t_o) = \begin{cases} 0 & t < t_o \\ 1 & t > t_o \end{cases}$$



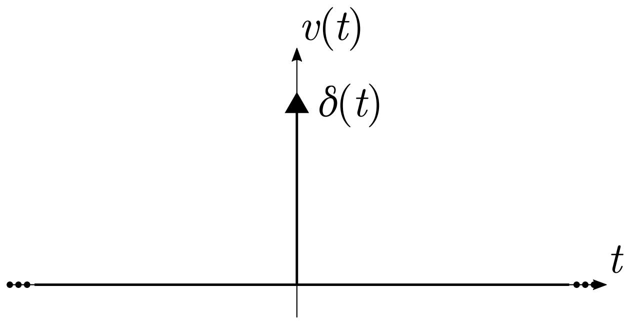
Impulso unitário de Dirac:

$\delta(t) = 0 \quad \forall \quad t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_o^-}^{t_o^+} x(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t = x(t_o)$$



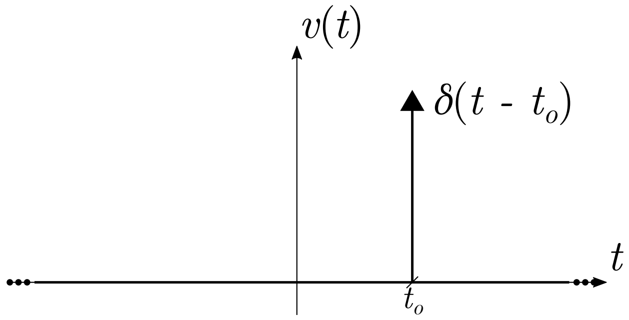
O impulso de Dirac é uma função convencionada criada para representar matematicamente descontinuidades de funções, e outros eventos que podem acontecer que não possuem representação adequada. Ele possui valor $\langle\, 0 \,\rangle$ para todo $\langle\, t \neq 0 \,\rangle$, valor "infinito" em $\langle\, t = 0 \,\rangle$, e uma área (integral) de $\langle\, 1 \,\rangle$.

Assim como o degrau unitário, o impulso de Dirac também pode ser deslocado, obtendo-se

$\delta(t - t_o) = 0 \quad \forall \quad t \neq t_o$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o)\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_o^-}^{t_o^+} \delta(t - t_o)\mathrm{d}t = 1$$



Impulso $\mathbf{P_\Delta}$:

$$P_\Delta = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & t \in \left[-\dfrac{\Delta}{2}, \dfrac{\Delta}{2}\right] \\ 0 & t \notin \left[-\dfrac{\Delta}{2}, \dfrac{\Delta}{2}\right] \end{cases}$$

Obs.: $\lim\limits_{\Delta \to 0} P_\Delta(t) = \delta(t)$

$$u(t - t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \delta(t)$$

Função exponencial:

$x(t) = \kappa e^{st}; \qquad s = \sigma + j\omega$

$s = 0$	$x(t) = \kappa e^{0t} = \kappa$	Constante
$s = \sigma$	$x(t) = \kappa e^{\sigma t}$	Exp. monotônica
$s = j\omega$	$x(t) = \kappa e^{j\omega t} = \kappa\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$	Exp. complexa
$s = \sigma + j\omega$	$x(t) = \kappa e^{(\sigma + j\omega)t} = \kappa e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$	Exp. espiralar

Também é importante observar que

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t) \qquad \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} = \sin(\omega t)$$

3 Sinais

3.1 Intensidade de um Sinal

Dado um sinal $\langle\, x(t) \,\rangle$, é possível calcular sua energia como

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Também é possível calcular sua potência média ao longo da existência dele, dada por

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,\mathrm{d}t$$

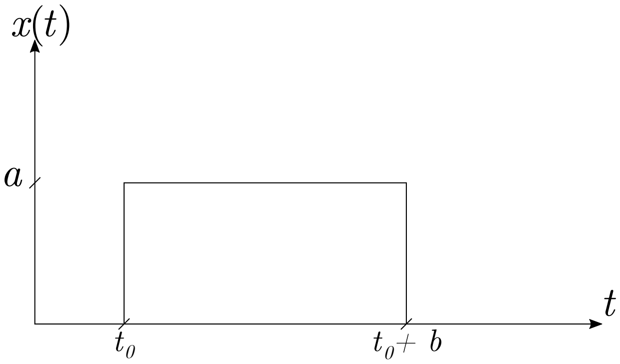
Um sinal é dito um **sinal de energia** se $\langle\, E_x \neq 0 \,\rangle$, o que implica que $\langle\, P_x = 0 \,\rangle$.

Por outro lado, um sinal é dito um **sinal de potência** se $\langle\, P_x \neq 0 \,\rangle$, o que implica que $\langle\, E_x \to \infty \,\rangle$.

Um sinal não-nulo é sempre ou um sinal de energia, ou um sinal de potência.

Obs.: Como um sinal de potência possui energia infinita, então todo sinal real ou físico é um sinal de energia.

Por exemplo, no sinal abaixo



Temos que $E_x = \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{T\to\infty} \left[\cancelto{0}{\int_{-\frac{T}{2}}^{t_o} x^2(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{t_o}^{t_o+b} x^2(t)\,\mathrm{d}t + \cancelto{0}{\int_{t_o+b}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,\mathrm{d}t} \right]$

$$E_x = \int_{t_o}^{t_o+b} x^2(t)\mathrm{d}t = \int_{t_o}^{t_o+b} A^2\mathrm{d}t = A^2.t \,\Big|_{t_o}^{t_o+b} = A^2.b$$

Da mesma maneira, pode-se calcular $\langle\, P_x \,\rangle$ mas, como já explicado anteriormente, Se $\langle\, E_x \neq 0 \,\rangle$, então $\langle\, P_x = 0 \,\rangle$. Esse é um sinal de energia.

Agora, considera-se $\langle\, x(t) = C_o\, \cos(\omega t + \phi) \,\rangle$, para $\langle\, \omega \neq 0 \,\rangle$ (se $\langle\, \omega = 0 \,\rangle$, $\langle\, x(t) \,\rangle$ é uma constante). Disso, conclui-se que

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [C_o\ \cos(\omega t + \phi)]\,\mathrm{d}t$$

$$E_x = \lim_{T\to\infty} {C_o}^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\,[1 + \cos(2\omega t + 2\phi)]\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2}{2} \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\phi)}{2\omega} \right|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2}{2} \left[T + \cancel{\frac{2\ \sin(\omega T + 2\phi)}{2\omega}} \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2 T}{2} \to \infty$$

Por outro lado, é possível calcular a potência:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [C_o\ \cos(\omega t + \phi)]\,\mathrm{d}t$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\,[1 + \cos(2\omega t + 2\phi)]\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2}{2T} \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\phi)}{2\omega} \right|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2}{2T} \left[T + \cancel{\frac{2\ \sin(\omega T + 2\phi)}{2\omega}} \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2 \cancel{T}}{2\ \cancel{T}} = \lim_{T\to\infty} \frac{{C_o}^2}{2} = \frac{{C_o}^2}{2}$$

Obs.: Em ambos os cálculos da potência de $\langle\, x(t) = C_o\ \cos(\omega t + \phi)\,\rangle$, $\left\langle\, \frac{2\ \sin(\omega T + 2\phi)}{2\omega}\,\right\rangle$ foi cancelado pois seu valor está sempre no intervalo $[-1, 1]$, e é desprezível comparado ao $\langle\, T \to \infty\,\rangle$.

Se $\langle\, x(t) = C\,\rangle$ (que pode ser analisado como um cosseno, mas $\langle\, \omega = 0\,\rangle$), temos que:

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} C^2\ t \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \to \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{C^2}{T}\ t \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{C^2}{\cancel{T}}.\cancel{T} = C^2$$

Outro exemplo interessante é $\left\langle\, x(t) = e^{\lambda t},\ \lambda \neq 0\,\right\rangle$. Nesse caso,

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\lambda t} \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{\lambda \frac{T}{2}}}{\lambda} \to \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\lambda t} \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda T} \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{\lambda \frac{T}{2}}}{\lambda T} \to \infty$$

Nesse caso, o sinal $\left\langle\, x(t) = e^t\,\right\rangle$ não é um sinal de energia, nem de potência.

Se $x(t)$ for um sinal complexo qualquer, então

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).x^*(t)\mathrm{d}t \qquad P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).x^*(t)\mathrm{d}t$$

Obs.: Por $\langle\, x^*(t)\,\rangle$, denota-se o sinal conjugado de $\langle\, x(t)\,\rangle$, pontualmente.

3.2 Operações Básicas sobre Sinais

Dado um sinal qualquer $\langle\, x(t)\, \rangle$, é possível realizar operações sobre ele, obtendo o sinal resultante $\langle\, \overline{x}(t)\, \rangle$, que pode ser expresso como uma "alteração" de $\langle\, x(t)\, \rangle$. As 3 operações básicas são:

Deslocamento $\quad x(t) \rightarrow \overline{x}(t - t_o) \quad \rightarrow \quad x(t_o) = \overline{x}(0)$

Escalonamento $\quad x(t) \rightarrow \overline{x}(at)$

Reversão $\quad x(t) \rightarrow \overline{x}(-t)$

Observe que reversão é somente um escalonamento por um fator de -1.

Além disso, a combinação dessas operações básicas também é uma operação. Um fato importante a se observar é que, para um dado $\langle\, t_i\, \rangle$, nos 3 casos anteriores, temos que $\langle\, x(t_i) = \overline{x}(t_i - t_o) \;/\; x(t_i) = \overline{x}(at_i) \;/\; x(t_i) = \overline{x}(-t_i)\, \rangle$. Dessa maneira, é sempre possível observar se a operação que foi realizada analiticamente é coerente e está correta, testando valores úteis para $\langle\, t_i\, \rangle$.

Por exemplo: $\left\langle\, x(t) = g\left(\frac{t}{2} - 1\right) \right\rangle$. Se $\langle\, t = 2\, \rangle$, então $\left\langle\, x(2) = g\left(\frac{2}{2} - 1\right) = g(0) \right\rangle$.
Substituindo $\langle\, t \rightarrow 2v\, \rangle$, temos que $\langle\, x(2v) = g(v - 1)\, \rangle$. Antes $\langle\, t = 2\, \rangle$, agora devemos fazer $\langle\, v = 1\, \rangle$ (manter a coerência), logo $\langle\, x(2.1) = g(1 - 1) \rightarrow x(2) = g(0)\, \rangle$. Continua igual a antes.

3.3 Classificação de um Sinal

Existem diversas maneiras de se classificar um sinal. Uma delas, já vista, é quanto ao tipo de sinal (de energia ou de potência). Outras classificações muito úteis, e que serão usadas extensivamente no estudo da matéria, são:

Modo físico do sinal:

Sinal causal	$x(t) = 0 \quad \forall \quad t \leq 0$
Sinal anticausal	$x(t) = 0 \quad \forall \quad t \geq 0$
Sinal não-causal	Nada pode ser dito

Dado $\langle\, x(t) \,\rangle$ qualquer, pode-se decompor $\langle\, x(t) = x_c(t) + x_a c(t) \,\rangle$, sendo $\langle\, x_c(t) \,\rangle$ uma função causal e $\langle\, x_a c(t) \,\rangle$ uma função anticausal.

Valores temporais:

Contínuo	$\langle\, t \,\rangle$ pode assumir qualquer valor
Discreto	Domínio de $\langle\, t \,\rangle$ está restrito a valores discretos $(1, 2, 3, 4...)$

Valores do sinal:

Analógico	$\langle\, x(t) \,\rangle$ pode assumir qualquer valor
Digital	Domínio de $\langle\, x(t) \,\rangle$ está restrito a valores discretos

Periodicidade:

Periódico	Se $\exists\, T_o \in \mathbb{R}^* \quad \mid \quad x(t) = x(t + T_o) \quad \forall \quad t$
Aperiódico	$\nexists\, T_o$

Período Fundamental $[T_o]$ $\quad\rightarrow\quad$ Menor intervalo, para o qual $\langle\, x(t) = x(t + T_o) \quad \forall \quad t \,\rangle$.

Se $\langle\, x(t) \,\rangle$ é periódico com período fundamental $\langle\, T_o \,\rangle$, então

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{a+T_o} x(t)\mathrm{d}t = \int_b^{b+T_o} x(t)\mathrm{d}t \\ \text{Notação: } \displaystyle\int_a^{a+T_o} x(t)\mathrm{d}t = \int_{T_o} x(t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Paridade:

Par	$x(t) = x(-t) \quad \forall \quad t \in \mathrm{Dom}\{x\}$
Ímpar	$-x(t) = x(t) \quad \forall \quad t \in \mathrm{Dom}\{x\}$

Qualquer sinal $\langle\, x(t) \,\rangle$ pode ser decomposto em $\langle\, x(t) = x_p(t) + x_i(t) \,\rangle$, sendo $\left\langle\, x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2} \,\right\rangle$ um sinal par, e $\left\langle\, x_i(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2} \,\right\rangle$ um sinal ímpar.

4 Sistemas

4.1 Classificação de Sistemas

Linear:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\mapsto y_1(t) \\ x_2(t) &\mapsto y_2(t) \end{aligned}\right\} a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \mapsto a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

Se essa regra não é respeitada, o sistema não é linear, e não se encaixa no escopo dessa disciplina.

Invariante no tempo:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad x(t - t_o) \mapsto y(t - t_o)$$

Se essa regra não é respeitada, o sistema é variante no tempo, e deve ser analisado de maneira diferente da estudada nessa disciplina.

Instantâneo ou com memória:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad x(t_o)\delta(t - t_o) \mapsto y(t_o)\delta(t - t_o)$$

Se essa regra é respeitada, o sistema é instantâneo, e a saída a cada instante independe de qualquer outro instante.
Caso contrário, o sistema tem memória.

Causal ou não-causal:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad x(t_o).u(-t - t_o) \mapsto y(t_o)$$

Se essa regra é respeitada, o sistema é causal, e a saída depende somente de tempos anteriores a $\langle\, t_o \,\rangle$.
Caso contrário, o sistema depende de momentos futuros.

Todo sistema físico é causal, pois é fisicamente impossível um sistema prever qual o valor que $\langle\, x(t) \,\rangle$ assumirá em qualquer instante futuro.

Inversível:

$$\exists\; k\{y(t)\} \quad | \quad x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad y(t) \overset{k}{\mapsto} x(t)$$

Se essa regra é respeitada, o sistema é invertível. Senão, não.

4.2 Análise no Domínio-Tempo de Sistemas *LIT*

Obs.: Especifica-se um Sistema **LIT** como um sistema **L**inear e **I**nvariante no **T**empo.

Grande parte dos sistemas físicos de interesse na engenharia pode ser modelada matematicamente por equações lineares diferenciais, da forma $\left\langle \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{m=0}^{M} a_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} \right\rangle$

4.2.1 Método Clássico

Problema	Equações diferenciais
Solução	Método clássico
Possibilidade	Soma de exponenciais

Esse método já foi extensivamente estudado em outras disciplinas, como Cálculo e Circuitos.

Consiste em determinar a resposta natural e a resposta forçada da saída $\langle\, y(t)\,\rangle$, dada uma entrada $\langle\, x(t)\,\rangle$. Assim, $\langle\, y(t)\,\rangle$ pode ser expresso como $\langle\, y(t) = y_n(t) + y_f(t)\,\rangle$.

$\langle\, y_n(t)\,\rangle$ é a resposta natural, e corresponde aos modos característicos do sistema.
$\langle\, y_f(t)\,\rangle$ é a resposta forçada, e corresponde à entrada do sistema.
Dessa maneira, $\left\langle \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n y_n}{\mathrm{d}t^n} = 0 \right\rangle$, o que implica que $\left\langle \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n y_f}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} \right\rangle$.

Para obter-se a resposta forçada $\langle\, y_f(t)\,\rangle$, utiliza-se o método dos coeficientes indeterminados.

$x(t)$	$y_f(t)$	
$e^{\beta t}$	$\beta e^{\beta t}$	$\mid\ \beta \neq S_i \quad \forall \quad S_i \in \text{sol}\left[y_n(t)\right]$
$e^{\beta t}$	$t\beta\, e^{\beta t}$	$\mid\ \beta = S_i$

4.2.2 Método do Operador D

Problema	Equações diferenciais
Solução	Métodos transformados
Possibilidade	Operador "D"

Obs.: $\left\langle D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right\rangle$ NÃO é uma variável, mas sim uma operação a ser realizada sobre uma variável dada.

Dessa forma, teremos que

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = \left\{\sum_{n=0}^{N} a_n D^n\right\} \triangleright y(t) \\ \downarrow \\ {}^{[1]} \quad Q\{D\} \triangleright y(t) = P\{D\} \triangleright x(t) \end{array}}$$

Sendo que $\langle\, Q\{D\}\,\rangle$ e $\langle\, P\{D\}\,\rangle$ são operadores aplicados sobre os sinais $\langle\, y(t)\,\rangle$ e $\langle\, x(t)\,\rangle$, respectivamente. Tal operação é denotada por $\langle \triangleright \rangle$

Obs.: Mais adiante será demonstrado que a equação diferencial [1] funciona como um diferenciador de ordem $\langle\, M - N\,\rangle$.

Define-se um sistema *diferenciador* como um sistema em que $\langle\, y(t)\,\rangle$ dependa mais das derivadas de $\langle\, x(t)\,\rangle$ do que de suas integrais (ou seja, $\langle\, N < M\,\rangle$).
Analogamente, um sistema *integrador* é um sistema em que $\langle\, y(t)\,\rangle$ depende mais das integrais de $\langle\, x(t)\,\rangle$ do que de suas derivadas ($\langle\, M < N\,\rangle$).

Sistemas diferenciadores são extremamente instáveis, em função de serem muito sensíveis a variações de alta frequência, e serem facilmente abalados por ruídos.
Por essa razão, sistemas físicos e práticos apresentam-se como sistemas integradores. Dessa maneira, $\langle\, M < N\,\rangle$.

Obs.: Todo sistema linear apresenta

$$\text{Resposta Total} = \begin{array}{c}\text{Resposta à entrada nula} \\ + \\ \text{Resposta ao estado nulo}\end{array} \qquad y(t) = y_o(t) + y_\rho(t)$$

4.2.3 Resposta à Entrada Nula

É a solução da equação [1] para $\langle\, x(t) = 0 \,\rangle$. Nesse caso, existem condições iniciais da forma $\langle\, y(t) = z_0 \quad y'(t) = z_1 \quad ... \rangle$ Dessa forma, temos que $\langle\, Q\{D\} \triangleright y(t) = 0 \quad \forall \quad t \in \text{ Dom} \,\rangle$.
Pelo método *Heurístico*, observamos que a combinação lineare ponderada de $\langle\, y(t) \,\rangle$ com suas derivadas deve ser nula para todo $\langle\, t \,\rangle$. Tal evento só acontece se $\langle\, y(t) \,\rangle$ e todas as suas derivadas sucessivas até grau $\langle\, N \,\rangle$ forem da mesma morfologia. Ou seja,

$$y(t) = ce^{\lambda t} \quad \longrightarrow \quad D^n y(t) = c\lambda^n e^{\lambda t} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n \right\} y(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n = 0 \qquad [2]$$

Considerando que $\langle\, y(t) \,\rangle$ não seja um sinal identicamente nulo (ou seja, $\langle\, y(t) \neq 0 \,\rangle$ para algum $\langle\, t \,\rangle$), a sequência de operações acima é válida.
A equação [2] é uma equação algébrica, e pode ser facilmente resolvida, obtendo-se $\langle\, N \,\rangle$ valores de zeros da função. Assim,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n = \prod_{n=0}^{N} (\lambda - \lambda_n)$$

$Q(\lambda)$	Polinômio característico
$Q(\lambda) = 0$	Equação característica
λ_n	Raízes características
$e^{\lambda_n t}$	Modos característicos (M.C.)

Raízes simples:
Se $\langle\, \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall \quad i,\ j \in \ [0,\text{N}] \,\rangle$, então $\left\langle\, m_i = e^{\lambda_i t} \,\right\rangle$

Raízes repetidas:
Se $\langle\, \lambda_i = \lambda_j \,\rangle$ para algum par $\langle\, i,\ j \,\rangle$, então $\left\langle\, m_i = e^{\lambda_i t} \,\right\rangle$ e $\left\langle\, m_j = t\ e^{\lambda_i t} \,\right\rangle$

Raízes complexas:
Se $\langle\, \lambda_i \in \{\mathbb{C} - \mathbb{R}\} \,\rangle$, e $\langle\, x(t) \in \mathbb{R} \,\rangle$, então $\left\langle\, \exists\ \lambda_j = \overline{\lambda_i} \,\right\rangle$ e, portanto, $\left\langle\, m_{i,j} = c_i e^{\lambda_i t} + c_j e^{\lambda_j t} \in \mathbb{R} \,\right\rangle$ se, e somente se, $\langle\, c_i = \overline{c_j} \,\rangle$.
Dessa maneira, temos que $\left\langle\, y(t) = \sum_{i=0}^{N} m_i \,\right\rangle$, prestando atenção nos casos particulares apresentados acima.

4.2.4 Convolução e Resposta ao Impulso

Um operador novo que será introduzido nessa disciplina é o operador de *convolução.* Dados dois sinais $\langle\, a(t)\,\rangle$ e $\langle\, b(t)\,\rangle$, a convolução entre os dois, dada por $\langle\, c(t)\,\rangle$, é denotada $\langle\, c(t) = a(t) \circledast b(t)\,\rangle$, e obtida algebricamente por $\left\langle\, c(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)b(t-\tau)\mathrm{d}\tau \,\right\rangle$

As principais propriedades da convolução, que serão utilizadas nesse curso, são:

Comutatividade	$a(t) \circledast b(t) = b(t) \circledast a(t)$
Associatividade	$\big[a(t) \circledast b(t)\big] \circledast c(t) = a(t) \circledast \big[b(t) \circledast c(t)\big]$
Associatividade escalar	$k\ a(t) \circledast b(t) = \big[k\ a(t)\big] \circledast b(t) = a(t) \circledast \big[k\ b(t)\big]$
Distributividade	$a(t) \circledast \big[b(t) + c(t)\big] = a(t) \circledast b(t) + a(t) \circledast c(t)$
Elemento neutro	$a(t) \circledast \delta(t) = a(t)$

A convolução pode ser entendida graficamente como uma "varredura" do sinal $\langle\, b(t)\,\rangle$ sobre o sinal $\langle\, a(t)\,\rangle$ (ou o contrário, devido à comutatividade), ao longo do tempo. É importante observar que, para $\langle\, t = t_o\,\rangle$, $\langle\, c(t_o)\,\rangle$ não depende somente de $\langle\, a(t_o)\,\rangle$ e $\langle\, b(t_o)\,\rangle$, mas sim da integral do produto entre os dois, com $\langle\, b(t)\,\rangle$ revertido, e deslocado para $\langle\, t_o\,\rangle$.
Exemplo para cálculo de convolução:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}\,u(t) \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}\,u(t) \qquad x_1(t) \circledast x_2(t) = ?$$

$$x_1(t) \circledast x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_1 \tau}\,e^{\lambda_2(t-\tau)}\,u(\tau)\,u(t-\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$e^{\lambda_2 t}\int_{0}^{t} e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

A *resposta ao impulso* de um sistema é a saída dele quando $\langle\, x(t) = \delta(t)\,\rangle$, e será denotada $\langle\, h(t)\,\rangle$ (considera-se sempre que as condições iniciais do sistema são nulas). Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\mapsto h(t) \\
\delta(\tau) &\mapsto h(\tau) \\
\delta(t-\tau) &\mapsto h(t-\tau) \\
x(\tau)\delta(t-\tau) &\mapsto x(\tau)h(t-\tau) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
x(t) &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Como $\langle\, x(\tau)\,\rangle$ é constante em relação à $\langle\, t\,\rangle$, o 4º passo é válido. Também usou-se a propriedade do elemento neutro da convolução.

Assim, demonstra-se um dos resultados mais importantes desse curso:

$\langle\, x(t) \mapsto x(t) \circledast h(t) \,\rangle$ e, portanto, $\langle\, y_\rho(t) = x(t) \circledast h(t) \,\rangle$

Dado um sistema $\langle\, x(t) \mapsto y(t) \,\rangle$, para descobrir-se a resposta ao impulso $\langle\, h(t) \,\rangle$, pode-se fazer a análise Heurística de que, se a entrada do sistema for $\langle\, \delta(t) \,\rangle$, então $\langle\, h(t) \,\rangle$ será a resposta do sistema devida às condições iniciais impostas à ele pelo impulso, analisadas a partir de $\left\langle\, t = 0^+ \,\right\rangle$.

$$h(t) = \begin{cases} 0 & | \quad t < 0 \\ \delta(t)\, A_o & | \quad t = 0 \\ \text{termos de M.C.} & | \quad t > 0 \end{cases}$$

Assim, $\langle\, h(t) \,\rangle$ é da forma $\langle\, h(t) = \delta(t) + \text{ M.C.} \,\rangle$

Tomando $\langle\, x(t) = \delta(t) \,\rangle$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n h}{\mathrm{d}t^m} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{\mathrm{d}^m \delta}{\mathrm{d}t^m}$

Dadas as condições acima $\left\langle\, x(t) = \delta(t) \qquad h(t) = b_o \delta(t) + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n e^{\lambda_n t}\, u(t) \,\right\rangle$, e sabendo que $\langle\, Q\{D\} \triangleright h(t) = P\{D\} \triangleright \delta(t) \,\rangle$, pode-se encontrar os valores de $\left[c_1 \to c_n\right]$.

4.2.5 Resposta ao Estado Nulo

É qualquer solução que resolva $\langle\, Q\{D\} \triangleright y_\rho(t) = P\{D\} \triangleright x(t)\,\rangle$, em que as condições iniciais do sistema são nulas, e $\langle\, x(t) \neq 0\,\rangle$ para algum $\langle, t\,\rangle$.

Por exemplo, se $\left\langle\, \dfrac{\mathrm{d}y_\rho}{\mathrm{d}t} + a\, y_\rho(t) = b\, x(t)\,\right\rangle$, e $\left\langle\, x(t) = \kappa\, e^{\alpha t}\,\right\rangle$, então considerando-se $\left\langle\, y_\rho(t) = \beta e^{\alpha t}\,\right\rangle$:

$\alpha\beta\, e^{\alpha t} + a\beta\, e^{\alpha t} = b\kappa\, e^{\alpha t} \quad \rightarrow \quad \beta = \dfrac{b\kappa}{\alpha + a}$

Como já avisto anteriormente, a resposta à entrada nula se dá por $\left\langle\, y_o(t) = A\, e^{-at}\,\right\rangle$, sendo que $\langle\, A = y(0)\,\rangle$ e, portanto, $\left\langle\, y(t) = y_o(t) + y_\rho(t) = A\, e^{-at} + \dfrac{b\kappa}{\alpha + a}\left[e^{\alpha t} - e^{-at}\right]\,\right\rangle$.

Entretanto, pode-se obter a resposta ao estado nulo através da resposta ao impulso $\langle\, h(t)\,\rangle$, sendo que $\langle\, y_\rho(t) = x(t) \circledast h(t)\,\rangle$.

Por fim, de modo geral, pode-se descrever a saída

$$\boxed{y(t) = y_o(t) + y_\rho(t) = \left[\sum_{n=0}^{N} c_n\, e^{S_n t}\right] + x(t) \circledast h(t)}$$

4.2.6 Resposta de Sistema LIT à Entrada $e^{i\Phi}$

Considerando-se $\left\langle\, x(t) = e^{st}\,\right\rangle$ um sinal complexo ($\langle\, s \in \mathbb{C}\,\rangle$), temos que

$y(t) = x(t) \circledast h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau = e^{st}\, H(s)$

Dessa maneira, define-se $\left\langle\, x(t) = e^{st}\,\right\rangle$ como uma autofunção (ou função autovalor) de $\langle\, y(t)\,\rangle$

Vale ressaltar que $\langle\, H(s)\,\rangle$ é independente de $\langle\, t\,\rangle$ e, portanto, somente uma constante, em relação ao tempo, podendo ser complexa ou não.

Por isso, diz-se que $\langle\, H(s)\,\rangle$ caracteriza o sistema, já que para qualquer entrada $\left\langle\, x(t) = e^{st}\,\right\rangle$, a saída é um múltiplo da entrada.

5 Transformadas

Define-se como uma *Transformada* uma operação linear sobre um sinal desejado. No nosso caso, serão utilizadas *Transformadas Integrais* que, de forma geral, são:

$X(u) = \mathcal{T}\{x(t)\}(u) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x(t)\, K(t,u)\, \mathrm{d}t$

Por simplicidade, será usado $\langle\, x(t) \Leftrightarrow X(s) \,\rangle$

$\mathcal{T}(u)$ é o operador da transformada linear

$x(t)$ é o sinal no domínio t

$X(u)$ é o sinal no domínio u

$K(t,u)$ é o núcleo da transformada

$t_1,\ t_2$ são os limites da transformada

O objetivo de uma transformada é, dado o sinal $\langle\, x(t) \,\rangle$, obter outro sinal $\langle\, X(u) \,\rangle$ que contenha a mesma informação do sinal original, porém "disposta" de uma maneira que seja possível obter-se outras informações, ou visualizá-las mais claramente.
Toda transformada é caracterizada pelo seu núcleo $\langle\, K(t,s) \,\rangle$, que é a função responsável por transformar o sinal de um domínio para o outro. Núcleos diferentes, bem como limites diferentes, caracterizam transformadas cujos objetivos e saídas tem propósitos distintos, e apresentem as informações do sinal original dispostas de maneiras diferentes.

5.1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace, definida por $\left\langle\ \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t,\ s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}\ \right\rangle$, é uma transformada de grande aplicação prática na resolução de sistemas de equações diferenciais, por ser capaz de simplificar significantemente a complexidade do sistema.

5.1.1 Condição de Convergência e Abscissa de Convergência

Dado que $\left\langle\ X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t\ \right\rangle$, procura-se condições a serem impostas sobre $\langle\, x(t) \,\rangle$ (aqui, tomado como um sinal causal), para que $\langle\, |X(s)| < \infty \,\rangle$.

$|X(s)| = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t\right| \le \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, |e^{-st}|\mathrm{d}t = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma t}\mathrm{d}t$

Dessa maneira, se $\left\langle\, |x(t)| \le M\, e^{\sigma_o t} \quad \forall \quad M \in \mathbb{R} \,\right\rangle$ e $\langle\, \forall\, \sigma_o < \sigma \,\rangle$, então a transformada de $\langle\, x(t) \,\rangle$ converge para $\langle\, \mathrm{Re}(s) > \sigma_o \,\rangle$ (se $\langle\, x(t) \,\rangle$ for anticausal, $\langle\, \sigma_o > \sigma \,\rangle$; e $\langle\, \mathrm{Re}(s) < \sigma_o \,\rangle$).
$\langle\, \sigma_o \,\rangle$ é denominado a abscissa de convergência que delimita a região de convergência ($\langle\, R.C. \,\rangle$).
Se $\left\langle\ \lim\limits_{s\to p} X(s) \to \infty\ \right\rangle$, então $\langle\, p \,\rangle$ é denominado um polo de $\langle\, X(s) \,\rangle$.

5.1.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Deslocamento no Tempo:

$$\left|\begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) & \vdots\ R.C._1 \\ x(t-t_o) & \Leftrightarrow & e^{-st_o}\,X(s) & \vdots\ R.C._2 = R.C._1 \end{array}\right.$$

Deslocamento no Domínio s:

$$\left|\begin{array}{llll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) & \vdots\ R.C._1 \\ e^{s_o t}\,x(t) & \Leftrightarrow & X(s-s_o) & \vdots\ R.C. = R.C._1 + \mathrm{Re}\{S_o\} \end{array}\right.$$

Escalonamento de variável:

$$\left|\begin{array}{llll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) & \vdots\ R.C._1 \\ x(at) & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{s}{a}) & \vdots\ R.C._2 = a * R.C._1 \end{array}\right.$$

Convolução:

$$\left|\begin{array}{llll} x_1(t) & \Leftrightarrow & X_1(s) & \vdots\ R.C._1 \\ x_2(t) & \Leftrightarrow & X_2(s) & \vdots\ R.C._2 \\ x_1(t) \circledast x_2(t) & \Leftrightarrow & X_1(s)X_2(s) & \vdots\ R.C. \supseteq R.C._1 \cap R.C._2 \end{array}\right.$$

Derivação no tempo :

$$\left|\begin{array}{llll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) & \vdots\ R.C._1 \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) & \Leftrightarrow & s\,X(s) & \vdots\ R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array}\right.$$

Multiplicação no tempo por t:

$$\left|\begin{array}{llll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) & \vdots\ R.C._1 \\ t\,x(t) & \Leftrightarrow & -\dfrac{\mathrm{d}X}{s}(s) & \vdots\ R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array}\right.$$

Integração no tempo:

$$\left|\begin{array}{llll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) & \vdots\ R.C._1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{s}X(s) & \vdots\ R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array}\right.$$

5.1.3 Teorema do Valor Inicial

Dado $\langle\, x(t)\,\rangle$ uma função causal e limitada, e $\langle\, X(s)\,\rangle$ uma função própria tal que $\langle\, \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)\,\rangle$, então $\left\langle\, \lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\,X(s)\,\right\rangle$.

Demonstração:
Seja $\left\langle\, g(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\right\rangle$, temos que $\left\langle\, \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t\,\right\rangle$
$= x(t)\,e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}\mathrm{d}t = 0 - \lim_{t\to 0^-} x(t) + sX(s)$
Por outro lado, temos que

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t = \left(\int_{0^-}^{0^+} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t\right) + \left(\int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t\right) = x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) - \lim_{t\to 0^-} x(t) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t = -\lim_{t\to 0^-} x(t) + sX(s)$$

$$\lim_{s\to\infty}\left(\lim_{t\to 0^+} x(t) - \cancel{\lim_{t\to 0^-} x(t)} + 0\right) = \lim_{s\to\infty}\left(-\cancel{\lim_{t\to 0^-} x(t)} + sX(s)\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

5.1.4 Teorema do Valor Final

Dado $\langle\, x(t)\,\rangle$ uma função limitada, $\left\langle\, \lim\limits_{t\to\infty} x(t) < \infty\,\right\rangle$, e $\langle\, X(s)\,\rangle$ uma função própria tal que $\langle\, \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)\,\rangle$, então $\left\langle\, \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} s\,X(s)\,\right\rangle$.

Demonstração:
Seja $\left\langle\, g(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\right\rangle$, temos que $\left\langle\, \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t\,\right\rangle$
$= x(t)\,e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}\mathrm{d}t = 0 - \lim_{t\to 0^-} x(t) + sX(s)$
Portanto, $\left\langle\, \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t = -\lim_{t\to 0^-} x(t) + sX(s)\,\right\rangle$. No limite $\langle\, s \to 0^+\,\rangle$, temos que

$$\lim_{s\to 0^+} \int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cancelto{1}{e^{-st}}\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \int_{0^-}^{\infty} \mathrm{d}x(t) = \lim_{s\to 0^+}\left[\lim_{t\to\infty} x(t) - \cancel{\lim_{t\to 0^-} x(t)} = -\cancel{\lim_{t\to 0^-} x(t)} + sX(s)\right]$$

Dessa maneira, conclui-se que $\left\langle\, \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} sX(s)\,\right\rangle$

5.1.5 Transformada Inversa de Laplace

Dada a transformada de Laplace, e sabendo que ela é uma transformada linear de $\langle\, x(t)\,\rangle$ para $\langle\, X(s)\,\rangle$, então $\left\langle\, \exists\, \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) \mid \mathcal{L}\{(x(t)\}(s) = X(s) \implies \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = x(t)\,\right\rangle$
A transformada inversa é descrita por $\left\langle\, \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{C}} X(s)e^{st}\mathrm{d}s \,\right\rangle$

5.2 Transformada Unilateral de Laplace

Define-se como a *Transformada Unilateral de Laplace* a transformada $\left\langle\, X_u(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) = \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t \,\right\rangle$. Logicamente, para que ela exista, $x(t)$ não pode ser anticausal.
É importante observar que, se $\langle\, x(t) \quad\Leftrightarrow\quad X(s)\,\rangle$, não necessariamente $\left\langle\, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad\Leftrightarrow\quad sX(s)\,\right\rangle$:

Seja $\left\langle\, p(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\right\rangle$. Assim, $\left\langle\, \mathcal{L}_u\{p(t)\}(s) = P_u(s) = \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} p(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\, e^{-st}\mathrm{d}t \,\right\rangle$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \qquad e^{-st} = v \qquad\qquad \displaystyle\int v\mathrm{d}u = uv - \int u\mathrm{d}v$
$\displaystyle\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\, e^{-st}\mathrm{d}t = \big[x(t)\, e^{-st}\big]_{t\,=\,0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)\, e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{t\to 0^-}\,[-x(t)] + sX(s)$. Logo,

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{t\to 0^-}\,[-x(t)] + sX(s).$

Seja $q(t) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t)$. Assim, $\left\langle\, \mathcal{L}_u\{q(t)\}(s) = Q_u(s) = \displaystyle\int_{0^-}^{\infty} q(t)\, e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\, e^{-st}\mathrm{d}t \,\right\rangle$
$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \qquad e^{-st} = v \qquad\qquad \displaystyle\int v\mathrm{d}u = uv - \int u\mathrm{d}v$
$\displaystyle\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\, e^{-st}\mathrm{d}t = \big[p(t)\, e^{-st}\big]_{t\,=\,0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} p(t)(-s)\, e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{t\to 0^-}\,[-p(t)] + sP(s).$
Entretanto, já foi mostrado que $\left\langle\, P(s) = sX(s) - \displaystyle\lim_{t\to 0^-}\,[-x(t)]\,\right\rangle$ e, logo, fazendo $\left\langle\, p(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\right\rangle$,
$\displaystyle\int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\, e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{t\to 0^-}\left[\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right) + (-s\, x(t))\right] + s^2X(s)$

Se repetido sucessivamente, pode-se demonstrar que

$$\frac{\mathrm{d}^Nx}{\mathrm{d}t^N}(t) \Leftrightarrow s^N\, X(s) - \lim_{t\to 0^-}\sum_{n=1}^{N}\left(s^{N-n}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t)\right)$$

5.3 Resolução de E.D.O. usando Transformada de Laplace

Uma das principais utilizações de ambas as formas da Transformada de Laplace é na resolução de E.D.O.'s, já que elas são capazes de transformar diferenciais $\left(\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t)\right)$ em algébricos $(s^n\, X(s))$, com a vantagem de que a Tranformada Unilateral considera as condições iniciais que se impõe sobre $\langle\, x(t)\,\rangle$. Se $\langle\, x(t)\,\rangle$ não possui condições iniciais, ou essas são todas nulas, pode-se usar a Transformada de Laplace; o resultado será o mesmo.

Dado um sistema descrito por $\langle\, Q\{D\} \triangleright y(t) = P\{D\} \triangleright x(t)\,\rangle$, o que antes eram operadores diferenciais descritos polinomialmente, agora são polinômios $\langle\, Q(s)\,\rangle$ e $\langle\, P(s)\,\rangle$. Ou seja

$$\boxed{\begin{array}{c} Q\{D\} \triangleright y(t) = P\{D\} \triangleright x(t) \\ \Updownarrow \\ Q(s)\, Y(s) = P(s)\, X(s) \end{array}}$$

Sendo $\langle\, Q(s)\,\rangle$ e $\langle\, P(s)\,\rangle$ polinômios sobre o domínio $\langle\, s\,\rangle$, é possível manipulá-los como tal e, portanto, tem-se que $\left\langle\, Y(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}\, X(s)\,\right\rangle$ e, como já visto anteriormente, $\langle\, Y(s) = X(s)\, H(s)\,\rangle$. Portanto, $\left\langle\, H(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}\,\right\rangle$.

$\langle\, Q(s)\,\rangle$ é chamado polinômio numerador de $\langle\, H(s)\,\rangle$, e suas raízes são demoninadas *zeros da função*. Por outro lado, $\langle\, P(s)\,\rangle$ é chamado polinômio denominador de $\langle\, H(s)\,\rangle$, e suas raízes são denominadas *polos da função*. Os polos são responsáveis por determinar a região de convergência da função.

5.3.1 Estabilidade de um Sistema

Um sistema é dito *estável* se, para uma entrada $\langle\, x(t)\,\rangle$ tal que

$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad | \quad x(t) < M \quad \forall \quad t \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, N \in \mathbb{R} \quad | \quad y(t) < N \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$

Em outras palavras, um sistema é estável se toda entrada limitada implica em uma saída limitada.

Se $\langle\, x(t)\,\rangle$ é uma função causal, então os polos de $\langle\, H(s)\,\rangle$ devem estar localizados nos quadrantes dos reais negativos pois, dessa forma, a transformada inversa $\left\langle\, \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)\,\right\rangle$ terá a forma de $\left\langle\, e^{-\sigma t}\, e^{j\omega t}\,\right\rangle$, que é uma função limitada para todos os valores de $t > 0$ e, portanto, estável em seu domínio.

Por outro lado, se $\langle\, x(t)\,\rangle$ é uma função anticausal, os polos de $\langle\, H(s)\,\rangle$ devem estar nos quadrantes dos reais positivos pois, assim, $\left\langle\, \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)\,\right\rangle$ terá a forma $\left\langle\, e^{\sigma t}\, e^{j\omega t}\,\right\rangle$, que é uma função limitada para todo $\langle\, t < 0\,\rangle$ e, assim, estável.

Se $\langle\, x(t)\,\rangle$ é não-causal, a *R.C.* deve possuir polos causais à esquerda do eixo complexo, e polos anticausais à direita dele. Portanto, a *R.C.* deve conter o eixo $\langle\, j\omega\,\rangle$.

Se houver uma raíz $\langle\, S_k \,\rangle$ sobre o eixo $\langle\, j\omega \,\rangle$, então $\left\langle\, H(s) = \dfrac{1}{s - j\omega_o} \Leftrightarrow h(t) = e^{j\omega_o t} \,\right\rangle$. Se tivermos como entrada $\langle\, x(t) = e^{j\omega_o t} \,\rangle$, então teremos que $\left\langle\, y(t) = x(t) \circledast h(t) = \lim\limits_{\lambda_1 \to \lambda_2} \dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \,\right\rangle$. Usando-se L'Hopital, pode-se obter que $\langle\, y(t) = t\, e^{j\omega_o t} \,\rangle$, que é uma saída instável.

Entretanto, por ser o caso de somente um sinal de entrada resultar em uma saída instável (na chamada frequência de ressonância), esse sistema é dito *marginalmente instável.*

5.3.2 Resposta em Frequência de um Sistema

Dado um sistema com resposta ao impulso $\langle\, h(t) \,\rangle$, ele terá uma *Resposta em Frequência* dada por $\langle\, H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s) \,\rangle$. Dado $\langle\, x(t) \,\rangle$ como uma exponencial complexa ($\langle\, x(t) = e^{st} \,\rangle$) então, como já visto anteriormente (pág. 16), a saída $\langle\, y(t) \,\rangle$ será dada por $\langle\, e^{st}\, H(s) \,\rangle$.

$$
\begin{array}{lcl|l}
\cos(\omega t) & \mapsto & \overline{y}(t) & \\
e^{st} & \mapsto & y(t) & \overline{y}(t) = \mathrm{Re}\{y_c(t)\} = \mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\, H(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\, (|H(j\omega)|\, e^{j\theta_H})\} \\
e^{j\omega t} & \mapsto & y_c(t) & \overline{y}(t) = \mathrm{Re}\{e^{j(\omega t + \theta_H)}\, |H(j\omega)|\} = \cos(\omega t + \theta_H)\, |H(j\omega)|. \\
\mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\} & \mapsto & \mathrm{Re}\{y_c(t)\} &
\end{array}
$$

Portanto, $\langle\, \cos(\omega t) \mapsto \cos(\omega t + \theta_H)\, |H(j\omega)| \,\rangle$

Pode-se expandir $\langle\, Q(s) \,\rangle$ e $\langle\, P(s) \,\rangle$ em termos de suas raízes, de forma que:

$$Q(s) = a_o + a_1 s + a_2 s^2 + ...a_n s^n = a_n(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)$$
$$P(s) = b_o + b_1 s + b_2 s^2 + ...b_m s^m = b_m(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_m).$$

Portanto, $\left\langle\, H(s) = \dfrac{P(s)}{a_n \prod(s - s_j)} \,\right\rangle$ e, usando-se $\left\langle\, x(t) = e^{j\omega_o t} \Leftrightarrow X(s) = \dfrac{1}{s - j\omega_o} \,\right\rangle$, teremos que $\left\langle\, Y(s) = X(s)\, H(s) = \dfrac{P(s)}{a_n \prod(s - s_j)\,(s - j\omega_0)} \,\right\rangle$. Expandindo em frações parciais, temos que $Y(s) = c \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \dfrac{k_n}{(s - p_n)} + \dfrac{H(j\omega_o)}{s - j\omega_o} \right] \Leftrightarrow y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} k_n\, e^{p_n t} + |H(j\omega_o)|\, e^{j(\omega_o t + \theta_H)}$.

Obs.: Sempre se considera que o grau do polinômio $\langle\, Q(s) \,\rangle$ seja maior que o do polinômio $\langle\, P(s) \,\rangle$ ($\langle\, N > M \,\rangle$), como já requerido anteriormente para avaliar estabilidade (pág. 12).

5.3.3 Diagrama de Bode

Diagrama de Bode é um mecanismo para desenho e plotagem do gráfico da resposta em frequência $\langle\, H(s)\,\rangle$ de um sistema, em uma escala logarítmica. Assim, $\Big\langle\, \log(H(j\omega)) = \log\big(|H(j\omega)|\, e^{j\theta_H}\big) = \log\, H(j\omega) + j\theta_H\, log(e)\,\Big\rangle$. Dessa maneira, pode-se separar a análise de $\langle\, H(jw)\,\rangle$ em duas partes:

a) Análise de magnitude (parte real de $\langle\, \log[H(j\omega)]\,\rangle$)

b) Análise de fase (parte complexa de $\langle\, \log[H(j\omega)]\,\rangle$)

Além disso, o gráfico (em escala logarítmica) pode ser muito bem aproximado por assíntotas, que estão relacionadas aos polos e aos zeros de $\langle\, H(j\omega)\,\rangle$. Dessa maneira é possível interpretar graficamente a resposta em frequência do sistema.

Também é possível usar a o Diagrama de Bode para projeto de sistemas reais (sejam circuitos ou digitais) com determinada resposta em frequência desejada.

Utiliza-se a escala de $\langle\, 20\text{dB}\,\rangle$ para representação e análise de gráficos de $\langle\, H(j\omega)\,\rangle$