<u>Roteiro da Simulação 2:</u>
<u>Sistemas de Primeira e Segunda Ordem</u>

Objetivos

- Verificar a resposta ao degrau de sistemas de primeira e segunda ordem, buscando inferir sobre algumas de suas propriedades básicas, a partir da posição dos pólos da função de transferência no plano complexo.

Introdução

Sistemas contínuos LIT (lineares e invariantes no tempo) descritos por equações lineares com coeficientes constantes têm grande importância prática, pois muitos sistemas físicos podem ser modelados por tais equações. Por diversos motivos práticos, os sistemas de ordem elevada usualmente são implementados ou representados por combinações de sistemas de primeira e segunda ordem em arranjos em cascata ou paralelos. Consequentemente, as propriedades dos sistemas de primeira e segunda ordem desempenham um papel importante na análise, projeto e entendimento do comportamento no domínio do tempo e no domínio da frequência dos sistemas de ordem elevada.

Descrição dos Sistemas de Primeira e Segunda Ordem

1) Sistemas de Primeira Ordem

A equação diferencial para um sistema de primeira ordem usualmente é expressa na forma:

$$\tau\frac{\partial y(t)}{\partial t} + y(t) = x(t) \tag{1}$$

onde o coeficiente τ é um número positivo cujo significado se tornará mais claro em breve. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial acima, chega-se a função de transferência correspondente para o sistema de primeira ordem:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s+1} \tag{2}$$

tendo como resposta ao impulso (esboçada na Figura 1):

$$h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t). \tag{3}$$

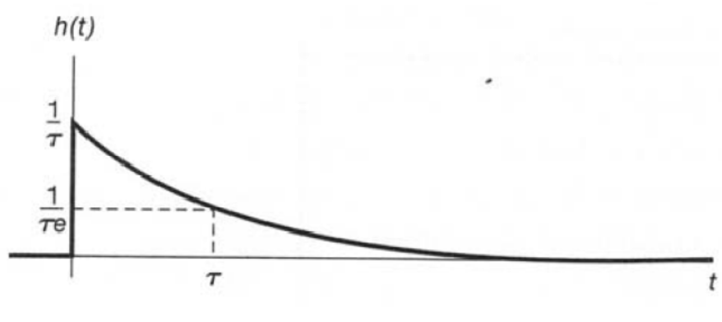

Figura 1: Resposta ao impulso de sistemas de primeira ordem.

A resposta ao degrau do sistema, esboçada na Figura 2, é

$$s(t) = u(t) * h(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u(t). \tag{4}$$

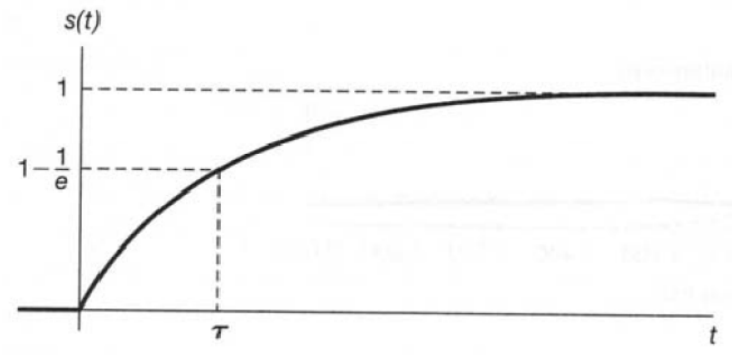

Figura 2: Resposta ao degrau de sistemas de primeira ordem.

O parâmetro τ é a constante de tempo do sistema e controla a taxa em que o sistema de primeira ordem responde. Por exemplo, como ilustrado nas figuras, em t=τ, a resposta ao impulso atinge $1/e$ do seu valor em t=0, e a resposta ao degrau está a $1/e$ de seu valor final. Portanto, à medida que τ é diminuído, a resposta ao impulso cai mais bruscamente e o tempo de subida da resposta ao degrau torna-se mais curto, ou seja, ela sobe mais rapidamente para o seu valor final. Observe, também, que a resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem não exibe qualquer oscilação.

2) Sistemas de Segunda Ordem

A equação diferencial com coeficientes constantes para um sistema de segunda ordem é

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 2\zeta\omega_n \frac{\partial y(t)}{\partial t} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t). \tag{5}$$

Equações desse tipo surgem em muitos sistemas físicos, incluindo circuitos RLC e sistemas mecânicos. A função de transferência para o sistema de segunda ordem da Equação (5) é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s-c_1)(s-c_2)}\,, \tag{6}$$

onde

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{7}$$

e

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \tag{8}$$

Para $\zeta \neq 1$, c_1 e c_2 são diferentes, e pode-se realizar uma expansão em frações parciais na forma

$$H(s) = \frac{M}{s-c_1} - \frac{M}{s-c_2}, \tag{9}$$

com

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}. \tag{10}$$

Da Equação (9), a resposta ao impulso correspondente para o sistema é

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t). \tag{11}$$

Se $\zeta = 1$, então $c_1 = c_2 = -\omega_n$,

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \tag{12}$$

e

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t). \tag{13}$$

O parâmetro ζ é chamado de fator de amortecimento e o parâmetro ω_n de frequência natural não amortecida. A motivação para essa terminologia torna-se clara quando examinamos mais detalhadamente a resposta ao impulso e a resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem. Primeiro, da Equação (9), vê-se que, para $0 < \zeta < 1$, c_1 e c_2 são complexos e pode-se reescrever a resposta ao impulso da Equação (11) na forma:

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right]u(t). \tag{14}$$

Assim, para $0 < \zeta < 1$, o sistema de segunda ordem tem uma resposta ao impulso com comportamento oscilatório amortecido e, nesse caso, o sistema é chamado de subamortecido. Se$\zeta > 1$, tanto c_1 quanto c_2 são reais e negativos, e a resposta ao impulso é a diferença entre duas exponenciais decrescentes. Nesse caso, o sistema é superamortecido. O caso $\zeta = 1$, quando $c_1 = c_2$, é chamado caso criticamente amortecido. As respostas ao impulso (multiplicadas por $1/\omega_n$) para sistemas de segunda ordem com diferentes valores de ζ são representada na Figura 3(a).

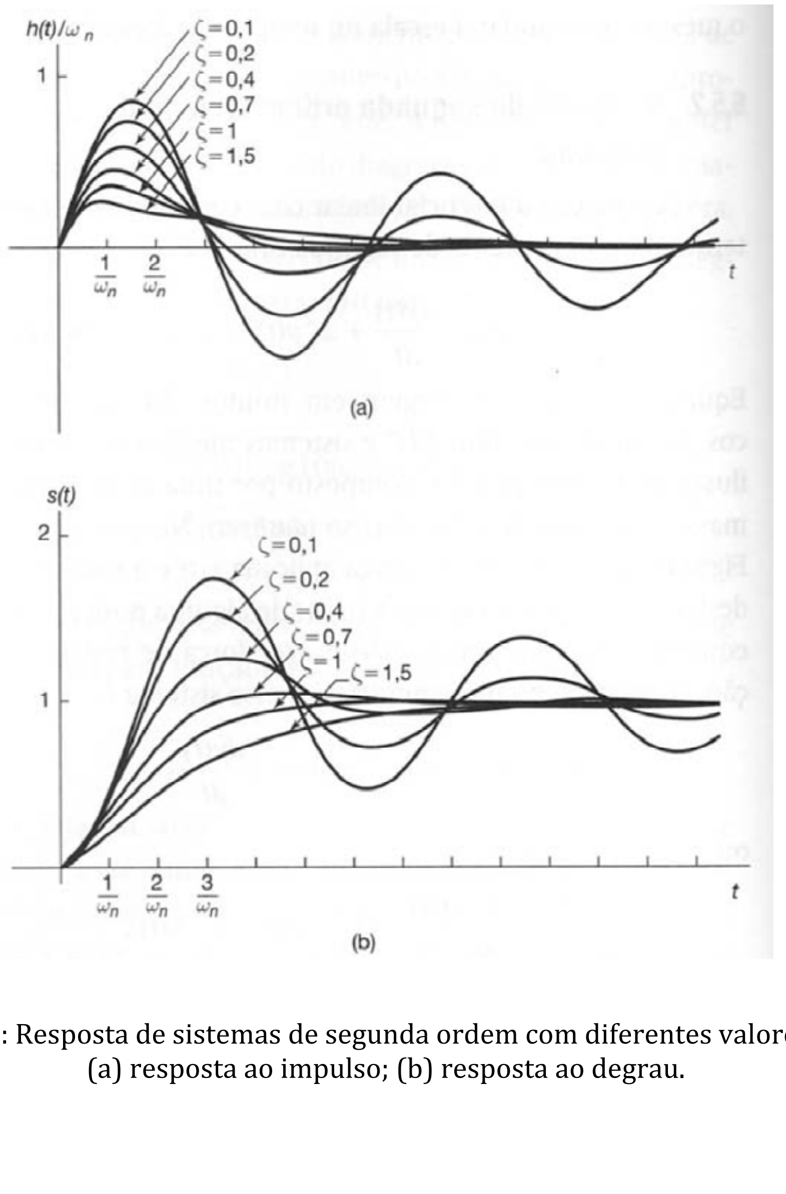

Figura 3: Resposta de sistemas de segunda ordem com diferentes valores de ζ
(a) resposta ao impulso; (b) resposta ao degrau.

A resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem pode ser calculada a partir da Equação (11) para $\zeta \neq 1$. Assim, obtém-se a expressão

$$s(t) = u(t) * h(t) = \left\{1 + M\left[\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2}\right]\right\} u(t). \tag{15}$$

Para $\zeta = 1$, pode-se usar a Equação (13) para obter

$$s(t) = [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}] u(t). \tag{16}$$

A resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem é representada na Figura 3(b) para diferentes valores de ζ. Por essa figura, vê-se que, no caso subamortecido, a resposta ao degrau apresenta um *overshot* (ou seja, a resposta ao degrau excede seu valor final) e oscilações (*ringing*). Para $\zeta = 1$, a resposta ao degrau tem a resposta mais rápida (ou seja, menor tempo de subida) que é possível sem o *overshot* e, portanto, tem o menor tempo de acomodação. À medida que ζ aumenta além de 1, a resposta torna-se mais lenta.

Por fim, note que o valor de ω_n basicamente controla a escala de tempo das respostas $h(t)$ e $s(t)$. Por exemplo, no caso subamortecido, quanto maior ω_n, mais compactada a resposta ao impulso como uma função de t e mais alta a frequência das oscilações em $h(t)$ e $s(t)$. Note, porém, que essa frequência depende explicitamente do fator de amortecimento e não é igual a (e de fato é menor que) ω_n, exceto no caso não amortecido, $\zeta = 0$. É por esse motivo que o parâmetro ω_n é tradicionalmente chamado de frequência natural não amortecida.

Simulação

1) Sistema de Primeira Ordem

Simule no Simulink um sistema de primeira ordem com função de transferência

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1},$$

onde K é o ganho do sistema e p=-1/τ o seu pólo. Proceda da seguinte forma:

a) Para p negativo, observe o que varia na resposta ao degrau do sistema quando o valor de K é diferente de um;
b) Aumente o valor de p, aproximando-o de zero, e observe o tempo que a resposta ao degrau leva para alcançar seu valor de regime;
c) Em seguida, iguale o pólo a zero e observe a resposta ao degrau;
d) Simule agora para p positivo e observe.

2) Sistema de Segunda Ordem

Simule no Simulink um sistema de segunda ordem com função de transferência

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + bs + c}.$$

Com os valores de b e c definidos no pré-estudo, proceda da seguinte forma:

a) Para raízes reais e negativas, observe a resposta ao degrau do sistema para diferentes valores de K;
b) Em seguida, simule o sistema com ganho K=1 e um ou dois pólos reais positivos, observando a resposta ao degrau;
c) Observe a resposta ao degrau com as raízes formando um par complexo conjugado, com parte real igual a -2, -0,5 e 0, mantendo-se as partes imaginárias fixas, iguais a 1 e -1;
d) Com a parte real nula, observe a resposta do sistema a uma excitação sinusoidal cuja frequência é igual à parte imaginária dos pólos;
e) Com a parte real das raízes positiva observe a resposta ao degrau do sistema;

f) Considere agora a adição de um zero na função de transferência do sistema de segunda ordem:

$$H(s) = \frac{s-Z}{s^2+bs+c},$$

onde Z define a posição do zero no plano complexo. Utilizando os mesmos valores de b e c do item a), observe a resposta ao degrau para Z=-10 e Z=-0,1. Caso seja necessário, atribua outros valores a Z de modo a visualizar melhor o seu efeito.