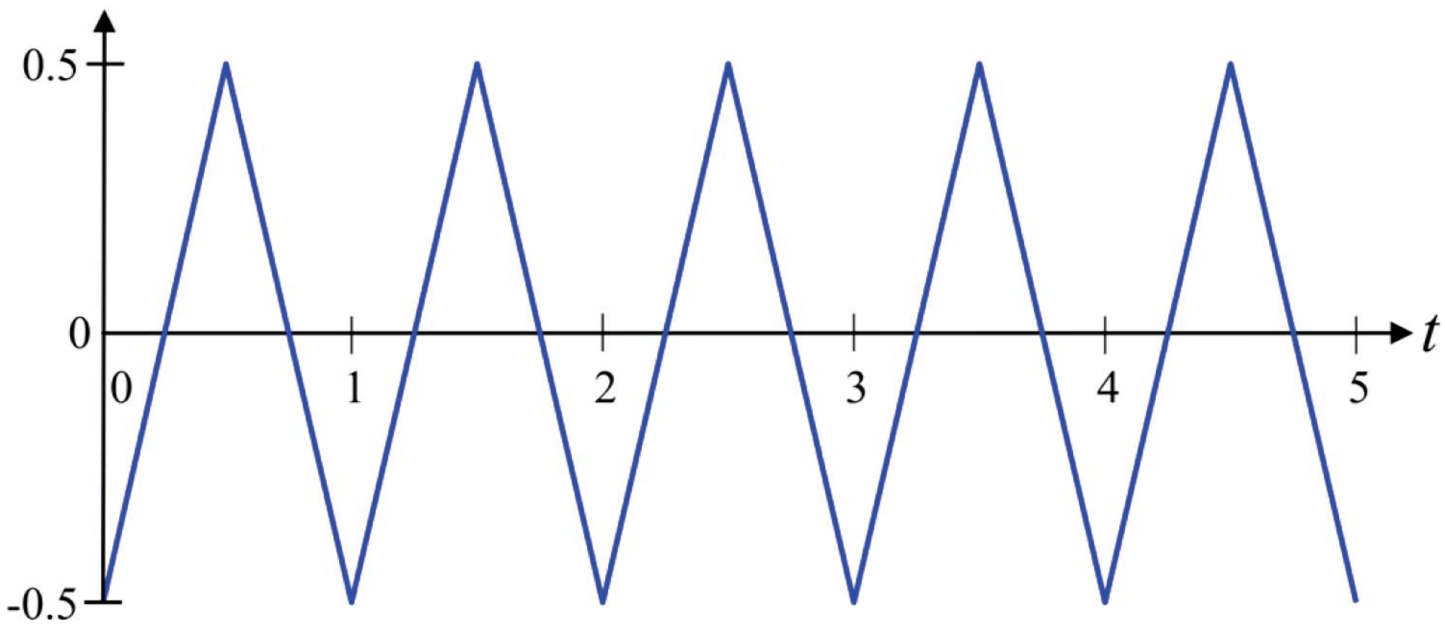
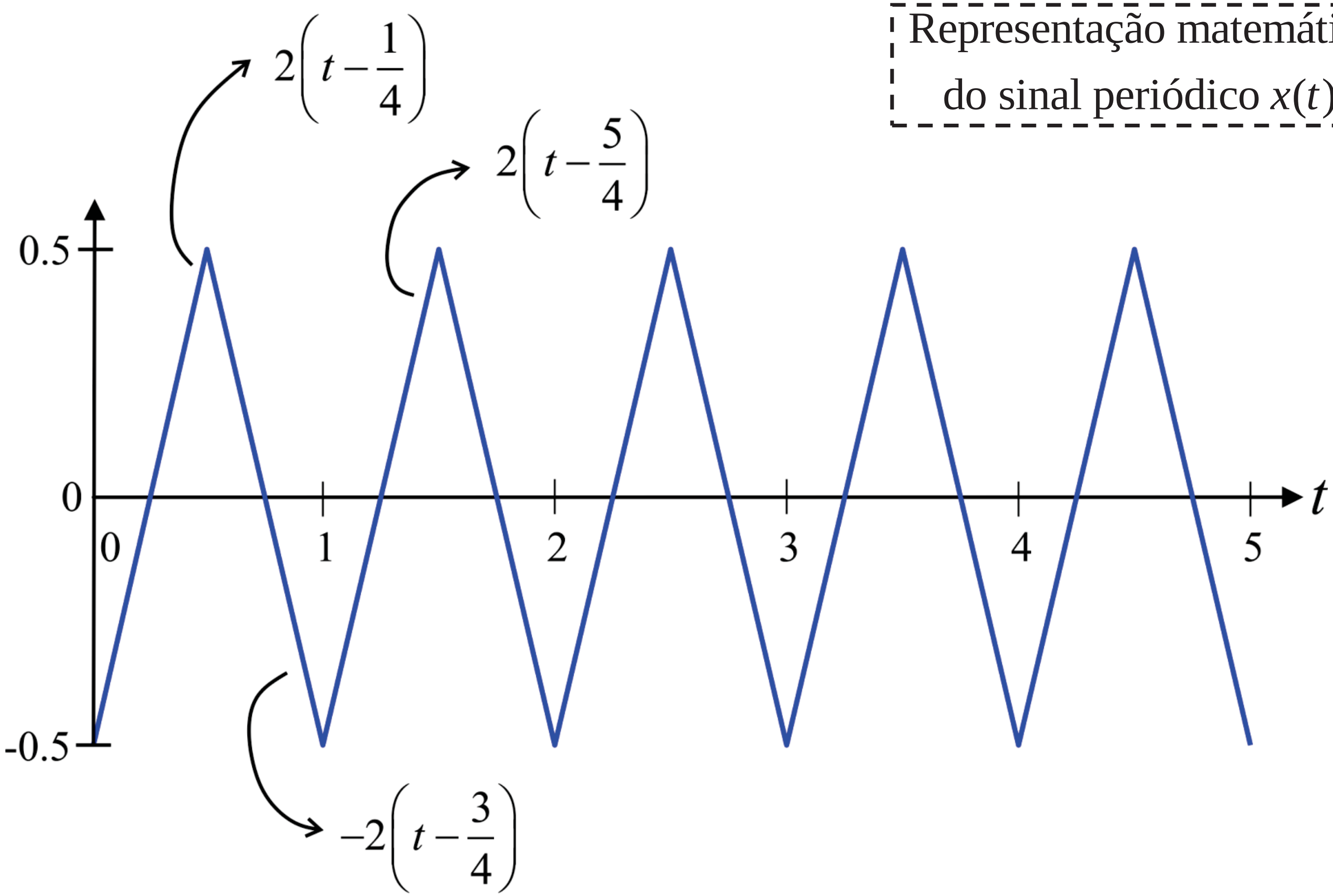
Série de Fourier

- Considere um sinal **periódico** $x(t)$ de período fundamental T_0 (e frequência $\omega_0 = 2\pi/T_0$).



Série de Fourier

Representação matemática do sinal periódico $x(t)$.



Série de Fourier

- Um sinal periódico pode ser representado com uma soma de funções senoidais, da seguinte maneira (série de Fourier):

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$

onde:

$$\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

Série de Fourier

- A série de Fourier pode também ser descrita de uma forma mais compacta (forma exponencial), dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

onde:

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$

$$F_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$ → **Número Complexo**

$$\boxed{F_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt}$$

Série de Fourier – Forma senoidal – Função par

- Caso o sinal periódico $x(t)$ seja **simétrico** (**par** ou **ímpar**) , o cálculo dos coeficientes da série de Fourier pode ser **simplificado**.
- Caso $x(t)$ seja uma **função par**, ou seja, $\boldsymbol{x(-t) = x(t)}$, então os coeficientes da série trigonométrica podem ser calculados como:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$b_k = 0$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t)}$$

Série de Fourier – Forma senoidal – Função ímpar

- Caso $x(t)$ seja uma **função ímpar**, ou seja, $\boldsymbol{x(-t) = -x(t)}$, então os coeficientes da série trigonométrica podem ser calculados como:

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt = \frac{4}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}/2} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{b}_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)}$$

Série de Fourier – Forma exponencial – Função par

- Caso $x(t)$ seja uma **função par**, ou seja, ***x*(-*t*) = *x*(*t*)**, então para os coeficientes da série exponencial, temos:

$$F_k = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - \underbrace{\mathrm{j}\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t) \mathrm{sen}(k\omega_0 t) dt}_{=0}$$

$$= \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}/2} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

F_k → **Coeficiente Real**

$$\measuredangle F_k = 0 \text{ ou } \pm \pi$$

Série de Fourier – Forma exponencial – Função ímpar

- Caso $x(t)$ seja uma **função ímpar**, ou seja, $\boldsymbol{x(-t) = -x(t)}$, então para os coeficientes da série exponencial, temos:

$$F_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

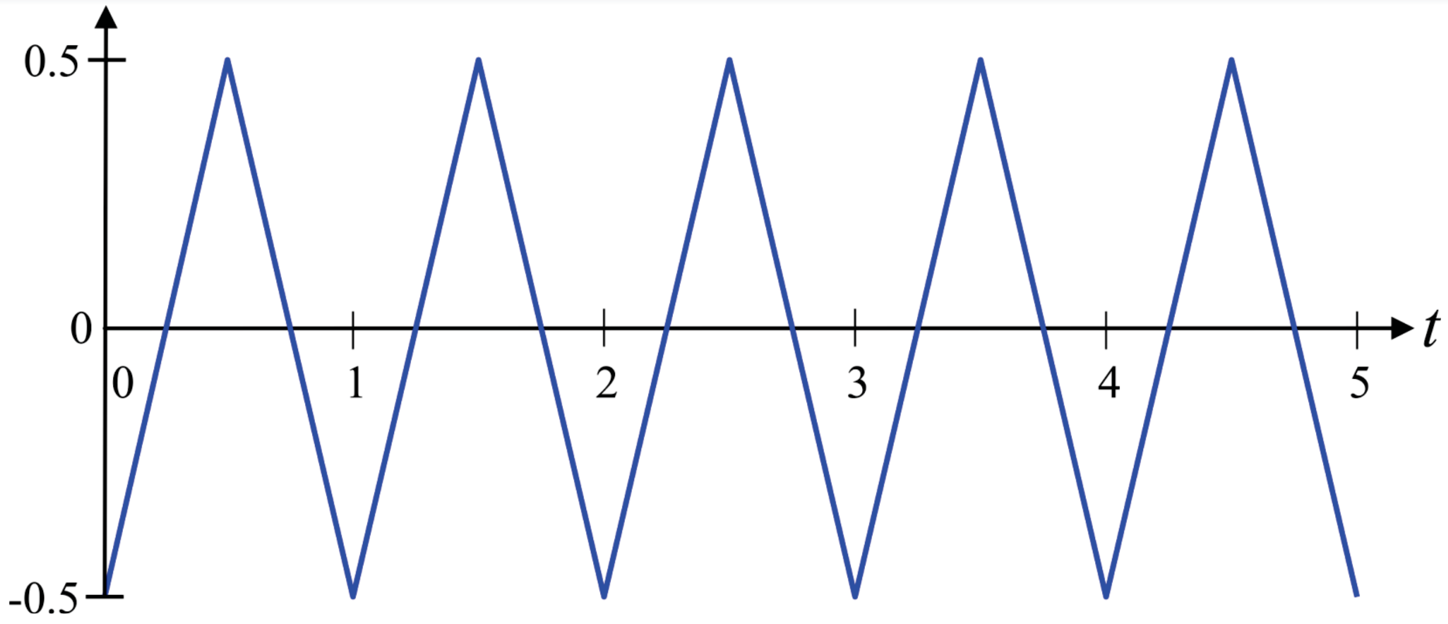
$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt}_{=0} - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

$$= -j\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

F_k → **Coeficiente Imaginário**

$$\measuredangle F_k = \pm\frac{\pi}{2}$$

Série de Fourier – Sinal Triangular

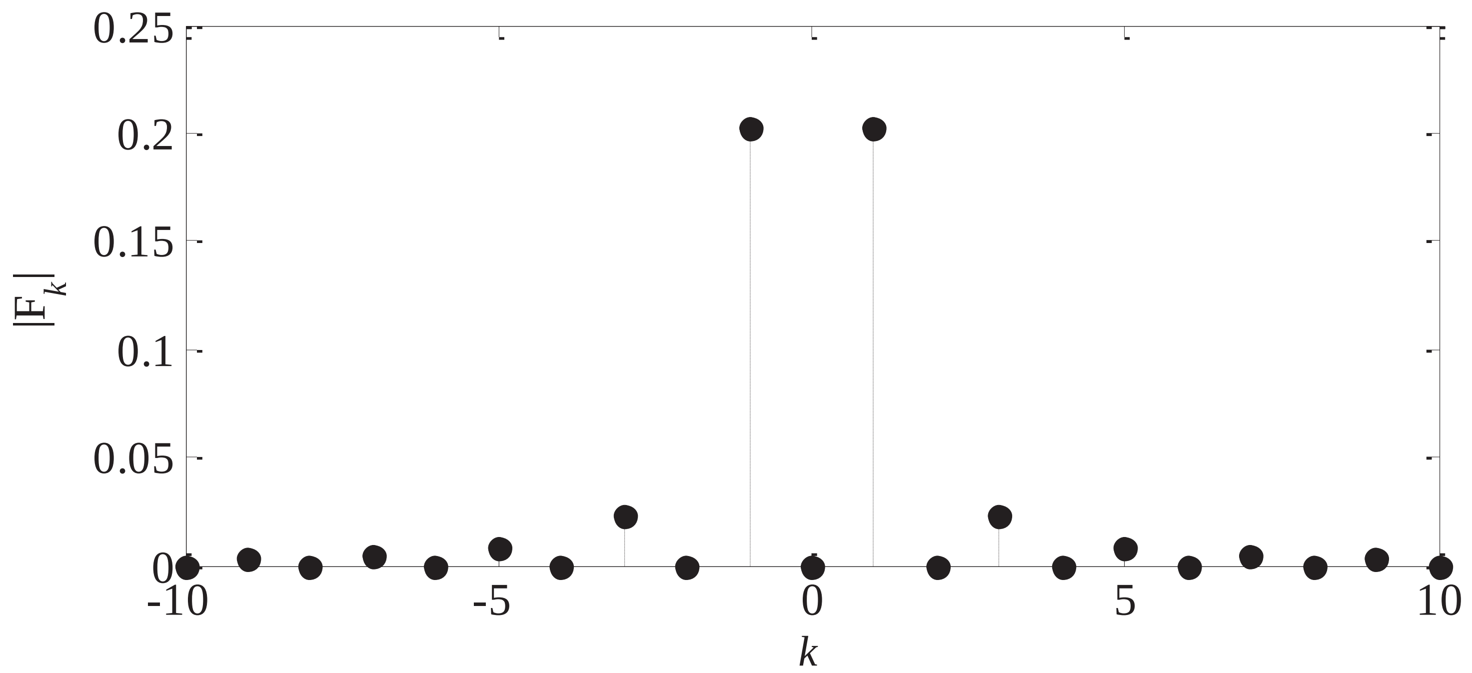


- Para o sinal triangular com período unitário e amplitude igual a 0,5, tem-se a seguinte série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{com:} \quad F_k = \begin{cases} 0 & \text{para } k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ \dfrac{2}{\pi^2 k^2} e^{\pm j\pi} & \text{para } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \ldots \end{cases}$$

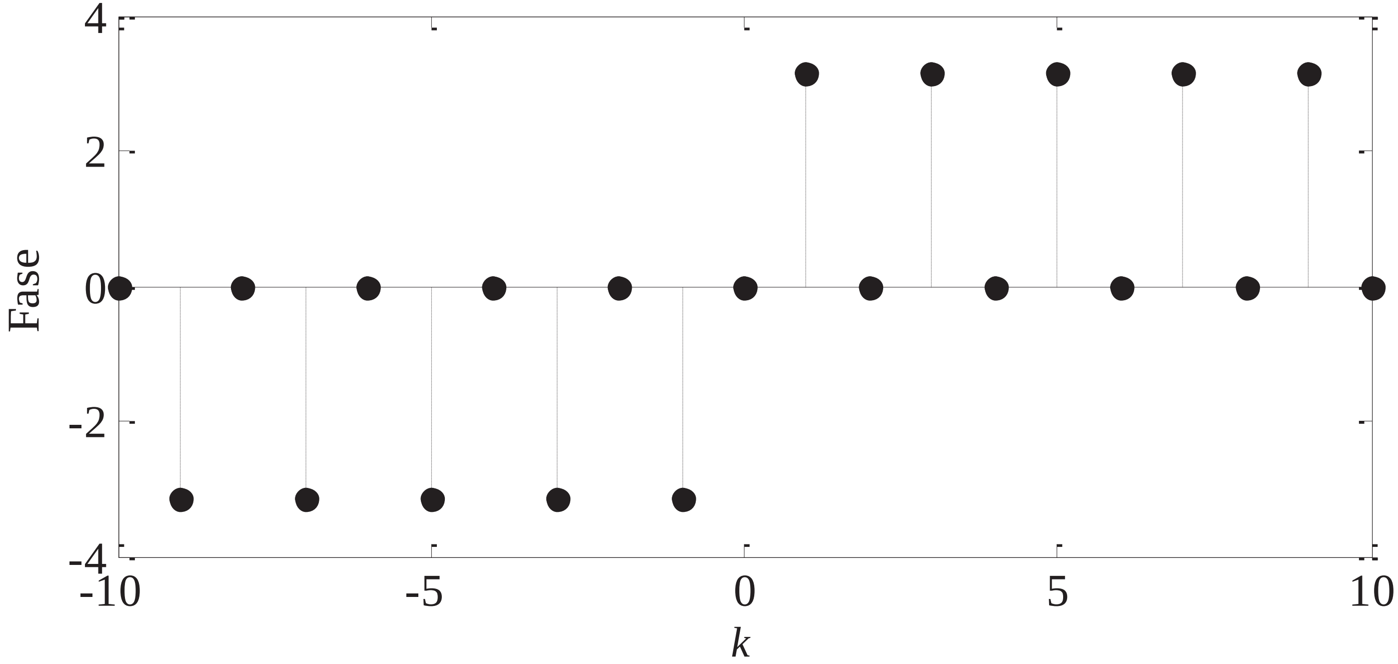
Série de Fourier – Sinal Triangular

- Para o sinal triangular temos o seguinte espectro.



Série de Fourier – Sinal Triangular

- Fase dos coeficientes



Série de Fourier – Sinal Triangular

- Expandindo o somatório, obtemos:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{\pm j\pi} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{j(k\omega_0 t \pm \pi)} \quad (k \text{ ímpar})$$

$$= \ldots + 0{,}0081e^{-j(5\omega_0 t - \pi)} + 0{,}0225e^{-j(3\omega_0 t - \pi)} + 0{,}2026e^{-(j\omega_0 t - \pi)} +$$

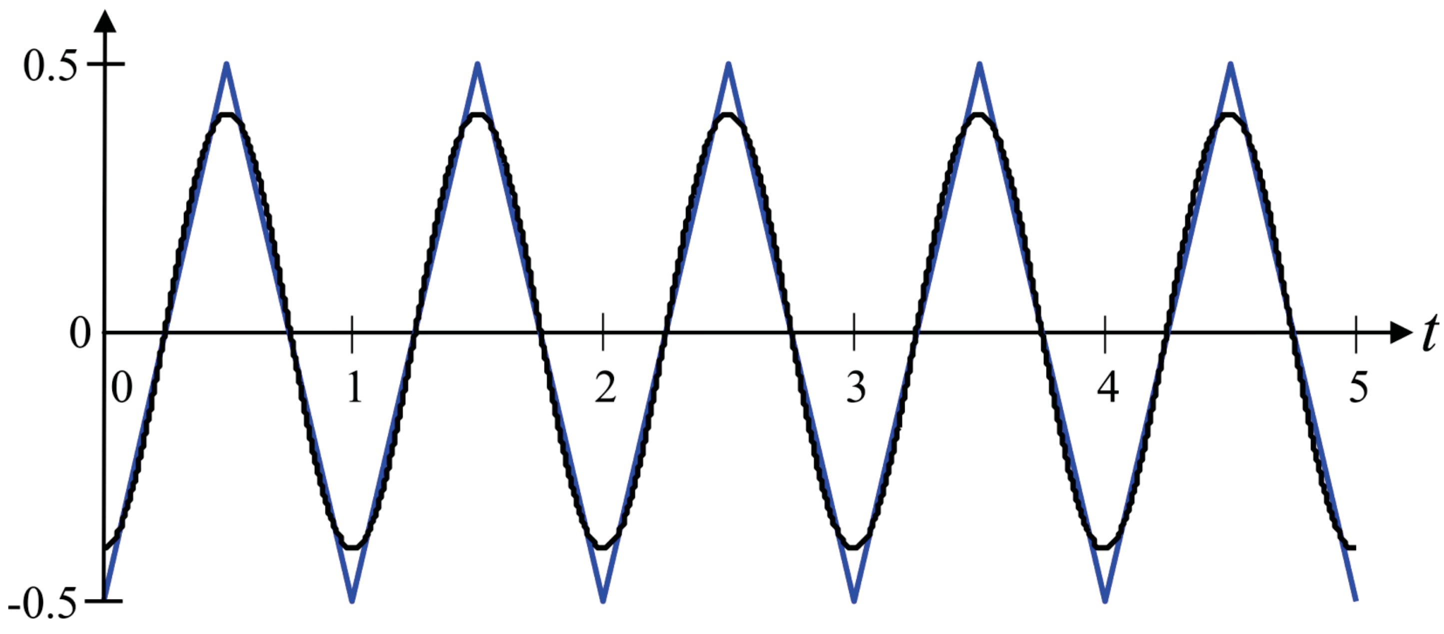
$$+ 0{,}2026e^{j(\omega_0 t - \pi)} + 0{,}0225e^{j(3\omega_0 t - \pi)} + 0{,}0081e^{j(5\omega_0 t - \pi)} + \ldots$$

- Sabendo que $e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j\text{sen}(k\omega_0 t)$, temos:

$$x(t) = 0{,}4053\cos(\omega_0 t - \pi) + 0{,}0450\cos(3\omega_0 t - \pi) + 0{,}0162\cos(5\omega_0 t - \pi) + \ldots$$

Série de Fourier – Sinal Triangular

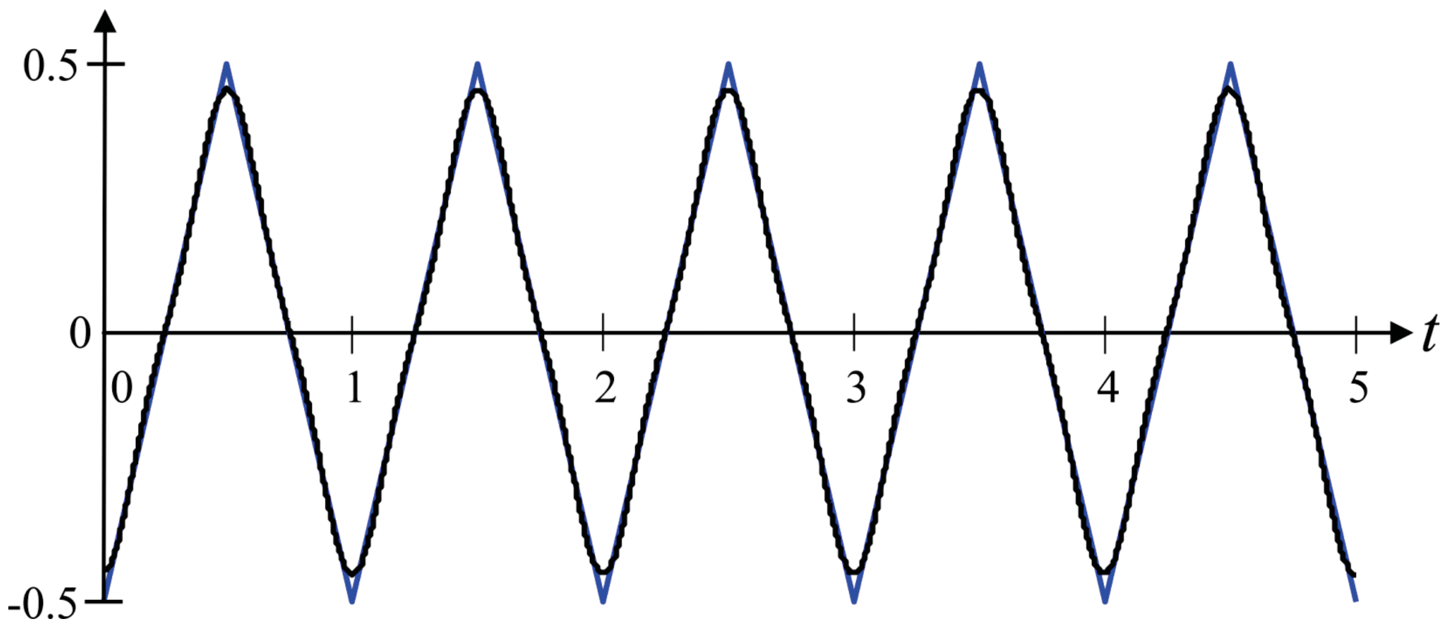
- Sinal triangular e série de Fourier (1 componente)



$$\hat{x}(t) = 0,4053\cos(\omega_0 t - \pi)$$

Série de Fourier – Sinal Triangular

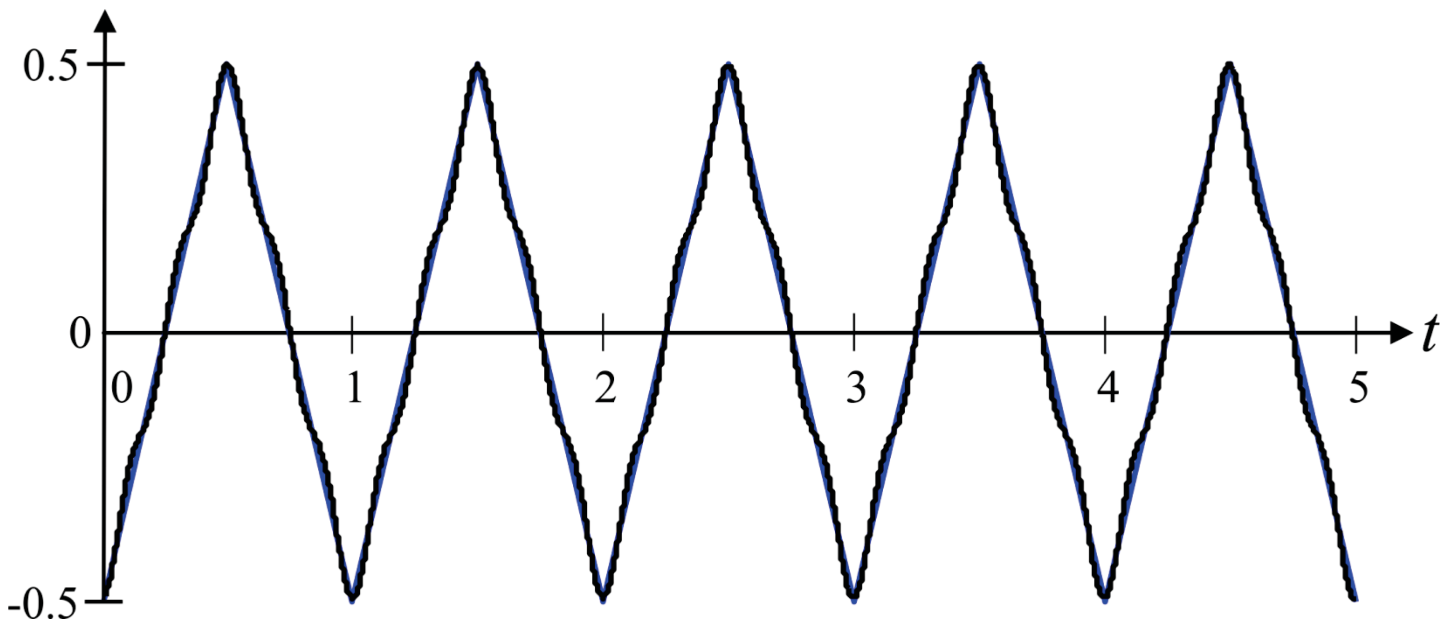
- Sinal triangular e série de Fourier (2 componentes)



$$\hat{x}(t) = 0,4053\cos(\omega_0 t - \pi) + 0,0450\cos(3\omega_0 t - \pi)$$

Série de Fourier – Sinal Triangular

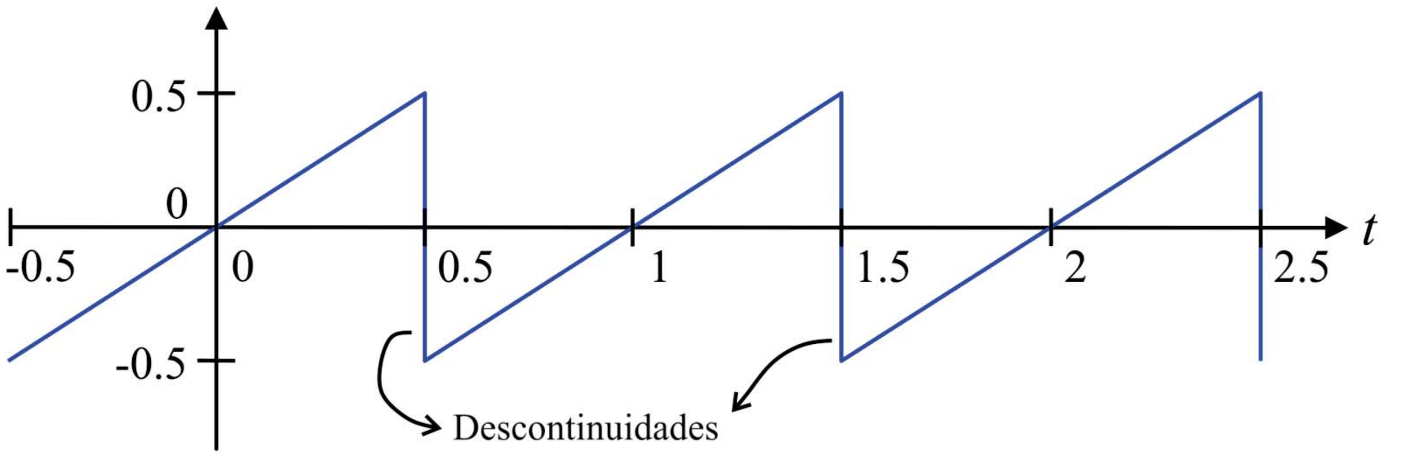
- Sinal triangular e série de Fourier (3 componentes)



$$\hat{x}(t) = 0,4053\cos(\omega_0 t - \pi) + 0,0450\cos(3\omega_0 t - \pi) + 0,0162\cos(5\omega_0 t - \pi)$$

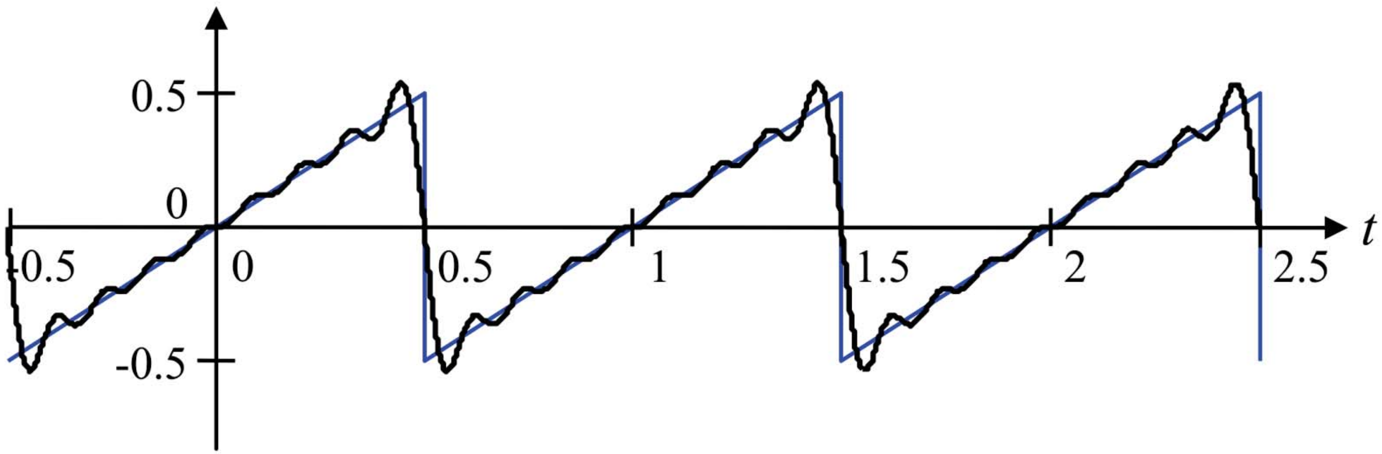
Série de Fourier – Efeito da descontinuidade

- Considere a função “**Dente de Serra**” mostrada abaixo:

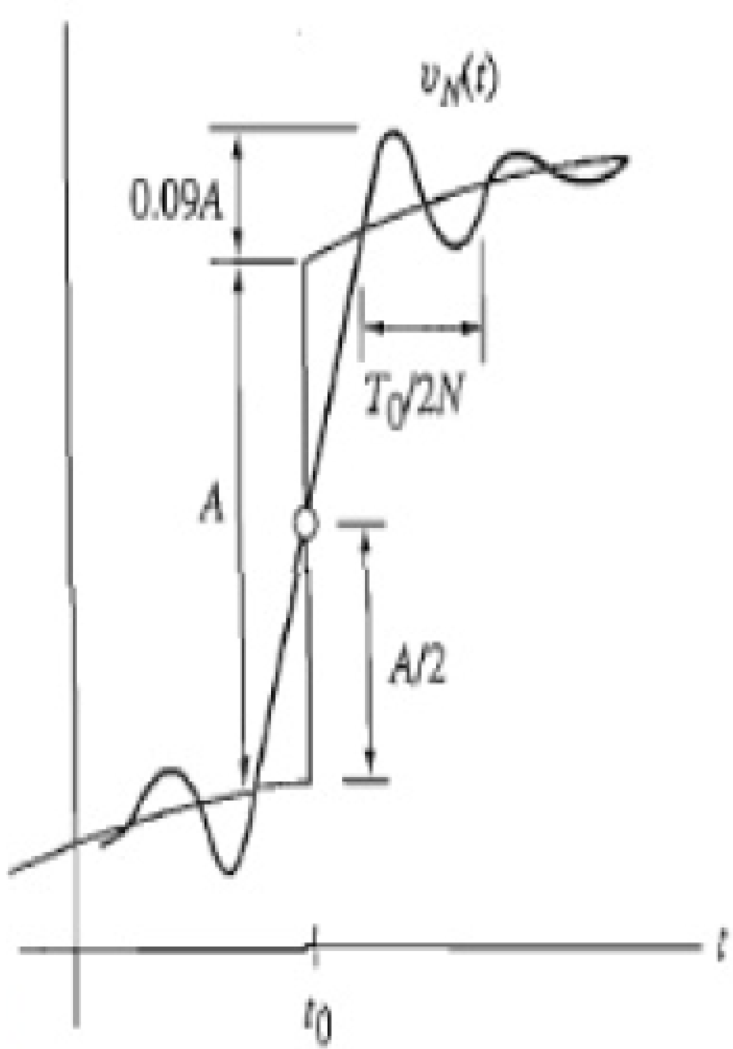


Série de Fourier – Efeito da descontinuidade

- A aproximação da função "**Dente de Serra**" por sua série de Fourier considerando **8 componentes senoidais** é mostrada abaixo.



Fenômeno de Gibss



Série de Fourier

Forma senoidal

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

$$\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$$

Forma exponencial

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

$$F_k = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t} dt$$

$$\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + \mathrm{j}\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$