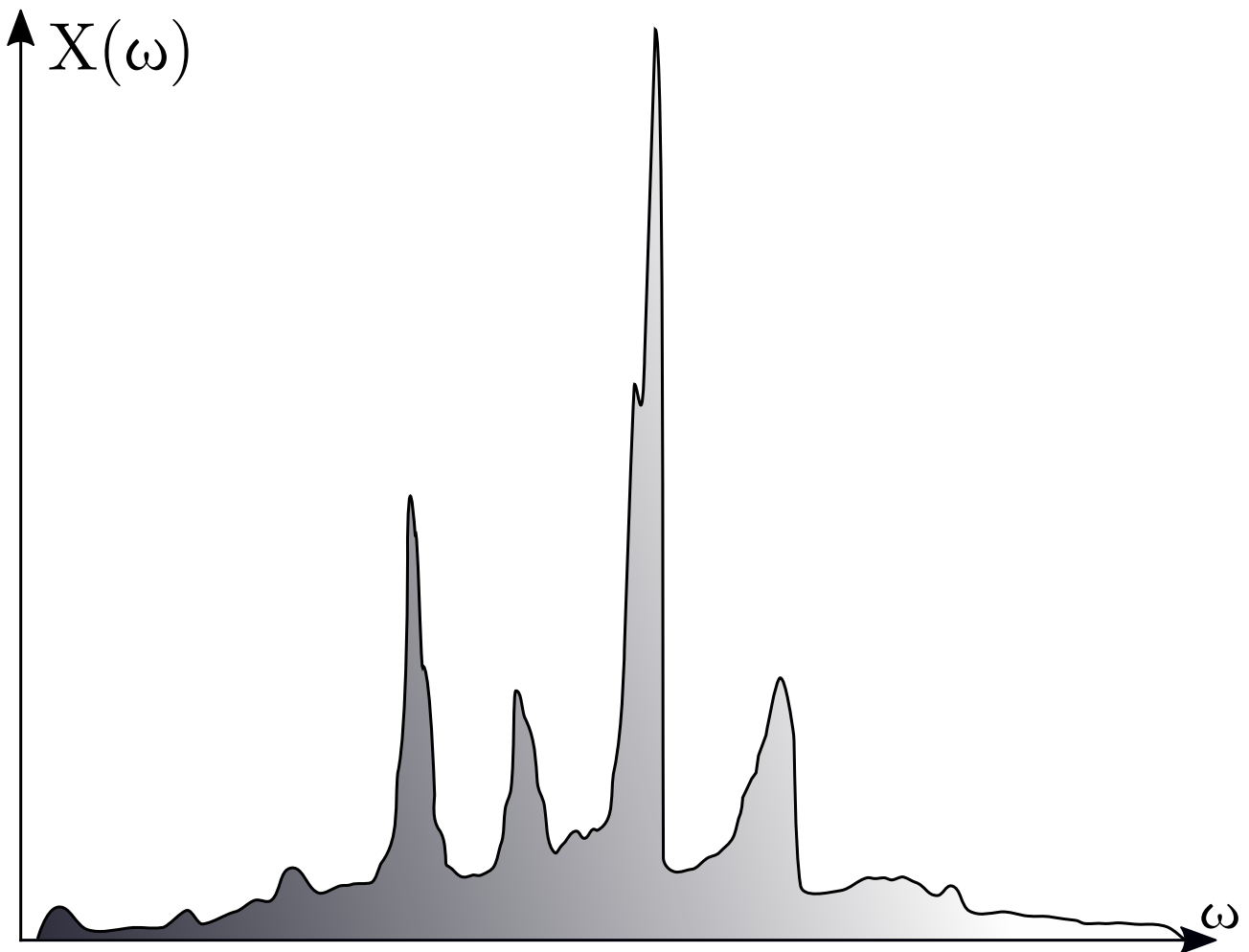


Sinais e Sistemas Lineares

Apostila do Monitor

Autor: Vitor Probst Curtarelli



Introdução

Antes de tudo, eu gostaria de deixar claro que esse material é um material complementar, para auxílio da compreensão do conteúdo da disciplina, e de maneira nenhuma é capaz de suprir todo o conhecimento da matéria. Em hipótese alguma ele dispensa a leitura do livro-texto e dos materiais dos professores.

O objetivo, aqui, é trazer uma outra perspectiva quanto ao conteúdo, com algumas ideias diferentes, exemplos e extras, quanto a o que é mostrado em sala de aula. Pouco do que está escrito aqui não é apresentado nas aulas, tendo esse material tendo sido baseado nas minhas notas de aula.

Uma notação importante a deixar claro aqui é a de equações em corpo de texto: sempre que você encontrar uma equação no meio de texto $\left(x(t) = e^{\cos(x)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt\right)$, ela estará sempre denotada entre $\langle \rangle$ (ou seja, $\left\langle x(t) = e^{\cos(x)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \right\rangle$).

Esse material não é definitivo, muito menos impecável. Ele ainda está sendo construído e, portanto, ainda podem haver erros. Caso haja discordância dele ao material-fonte, sugiro buscar mais fontes.

Qualquer dúvida quanto à ele, estou aberto à sugestões e críticas. Boa sorte a todos nessa disciplina,

Vitor Curtarelli

Conteúdo

1	O que é um Sistema Linear	5
2	Funções Fundamentais	6
3	Sinais	8
3.1	Intensidade de um Sinal	8
3.2	Operações Básicas sobre Sinais	10
3.3	Classificação de um Sinal	11
4	Sistemas	12
4.1	Classificação de Sistemas	12
4.2	Análise no Domínio-Tempo de Sistemas <i>LIT</i>	13
4.2.1	Método Clássico	13
4.2.2	Método do Operador D	14
4.2.3	Resposta à Entrada Nula	15
4.2.4	Convolução e Resposta ao Impulso	16
4.2.5	Caracterização do Sistema pela Resposta ao Impulso	17
4.2.6	Obtenção da Resposta ao Impulso	17
4.2.7	Resposta ao Estado Nulo	18
4.2.8	Resposta de Sistema LIT à Entrada e^{st}	18
5	Transformadas	19
5.1	Transformada de Laplace	19
5.1.1	Condição de Convergência e Abcissa de Convergência	19
5.1.2	Propriedades da Transformada de Laplace	20
5.1.3	Teorema do Valor Inicial	21
5.1.4	Teorema do Valor Final	21
5.1.5	Transformada Inversa de Laplace	21
5.2	Transformada Unilateral de Laplace	22
5.3	Resolução de E.D.O. usando Transformada de Laplace	23
5.3.1	Função de Transferência e Respostas do Sistema	23
5.3.2	Estabilidade de um Sistema	23
5.3.3	Estabilidade por Análise dos Polos	24
5.3.4	Estabilidade por Análise da Resposta ao Impulso	24
5.4	Caracterização do Sistema pela Resposta ao Impulso	25
5.5	Resposta em Frequência de um Sistema	26
5.6	Diagrama de Bode	26
5.7	Série de Fourier	27
5.7.1	Existência e Convergência da Série de Fourier	28
5.7.2	Resposta em Frequência à Entrada Periódica	28
5.7.3	Transformada de Laplace de Sinais Periódicos	29
5.8	Transformada de Fourier	30
5.8.1	Extensão da Série de Fourier	30
5.8.2	Caso particular da Transformada de Laplace	30
5.8.3	Transformada Inversa de Fourier	30
5.8.4	Propriedades da Transformada de Fourier	31
5.8.5	Transformadas Importantes	32
5.8.6	Análise de Fourier	33

5.8.7	Filtragem de Sinais pelo Espectro em Frequência	34
5.8.8	Dualidade Tempo-Frequência	35
6	Amostragem e Sinais Amostrados	36
6.1	Funções Importantes	37
6.2	Tipos de Amostragem	38
6.3	Análise no Domínio da Frequência	39
6.3.1	Teorema da Amostragem de Nyquist	39
6.3.2	Amostragem ideal	39
6.3.3	Amostragem Natural	41
6.3.4	Amostragem Sample'n'Hold	43
6.3.5	Desrespeitando o Teorema da Amostragem	45
7	Sinais e Sistemas Discretos	47
7.1	Discretização e Notações	47
7.2	Sinais Fundamentais	48
7.3	Operações sobre Sinais Discretos	48
7.3.1	Operadores Atraso e Avanço	48
7.3.2	Diferenciador Discreto	49
7.3.3	Integrador Discreto	49
7.3.4	Convolução Discreta ou Soma de Convolução	49
7.3.5	Reversão, Compressão e Dilatação	50
7.4	Diagrama de Blocos	51
7.4.1	Blocos Fundamentais	51
7.5	Transformada Z	52
7.5.1	Particularização da Transformada de Laplace	53
7.5.2	Região de Convergência	53
7.5.3	Propriedades da Transformada de Z	54
7.5.4	Tabela de Transformadas	55
7.5.5	Regime Permanente Oscilatório	55
7.6	Transformada Unilateral Z	56
7.6.1	Deslocamento no Tempo	56
7.6.2	Resolução de Equações de Diferenças	56
7.7	Transformada Discreta de Fourier	57
7.7.1	Discretização da Transformada de Fourier	57
7.7.2	Particularização da Transformada Z	58
7.7.3	Periodicidade da Transformada Discreta de Fourier	58
7.8	Estabilidade de Sistemas Discretos	59
7.9	Filtros Discretos	60
7.9.1	Filtros com Resposta Finita ao Impulso	60
7.9.2	Filtros com Resposta Infinita ao Impulso	61

1 O que é um Sistema Linear

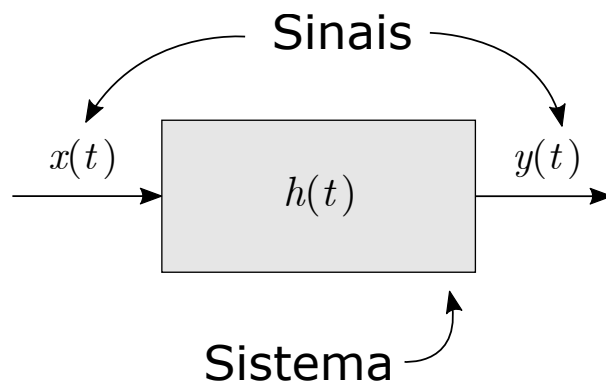
Um sistema linear, tema-foco da disciplina, é um mecanismo que realiza uma operação sobre um sinal de entrada (que será comumente chamado $\langle x(t) \rangle$, ao longo das aulas e desse material), e que gera um sinal de saída (denotado $\langle y(t) \rangle$). São exemplos de sistemas lineares: Uma caixa de som, responsável por ampliar o volume da música que entra nela; Um filtro, que remove sons de determinadas frequências de um sinal de áudio; Um processamento gráfico que, quando você amplia uma imagem, interpola os valores dos pixels que estão sendo gerados.

Como funciona um sistema linear, as ferramentas para analisá-lo e estudá-lo, bem como uma introdução à teoria de como construí-los fisicamente e aplicá-los, são abordados nessa disciplina.

Alguns conceitos importantes a serem introduzidos aqui:

Sinal - toda e qualquer entidade portadora de informação. Uma mensagem de áudio, uma sequência de bits em um disco rígido, uma onda eletromagnética viajando pelo espaço, são exemplos de sinais. Normalmente representados por funções (aqui, funções no domínio do tempo).

Sistema - ferramenta (ou método) para transformação de um sinal (exemplos já foram citados anteriormente).



A entrada e a saída, em um sistema linear, relacionam-se por $\langle h(t) \rangle$, que caracteriza o sistema ($\langle h(t) \rangle$ também é uma função). Como é obtida a função, como ela opera para relacionar a entrada e a saída, e o que ela representa, serão analisados posteriormente.

Se a entrada de um sistema é $\langle x(t) \rangle$, e a sua saída é $\langle y(t) \rangle$, denotar-se-á que $\langle x(t) \mapsto y(t) \rangle$. A entrada $\langle x(t) \rangle$ não necessariamente é unidimensional. Um sistema pode ter uma entrada $\langle x(t) \rangle$ de dimensão n , e uma saída $\langle y(t) \rangle$ de dimensão m . Nessa disciplina, serão estudados somente sistemas SISO (Single Input Single Output).

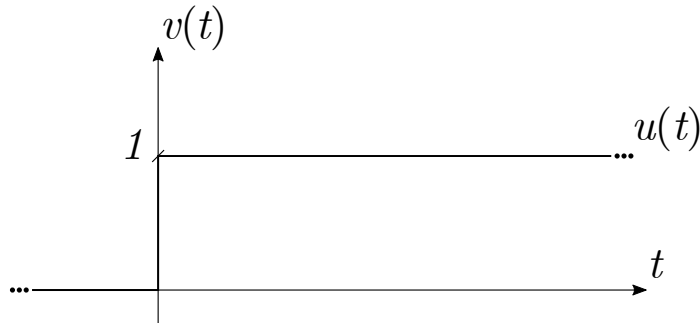
2 Funções Fundamentais

Existem algumas funções pouco conhecidas, mas que serão usadas bastante ao longo do curso.

Essas são:

Degrau unitário:

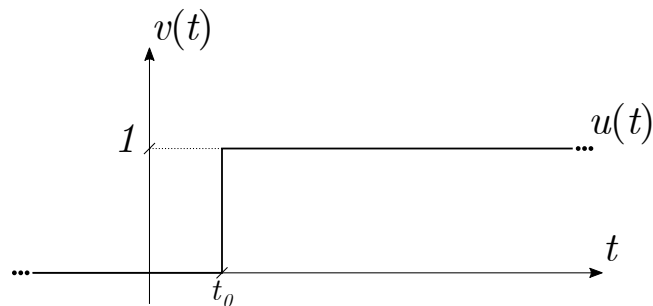
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



O degrau unitário é uma função convencionada criada para representar matematicamente descontinuidades de funções, e outros eventos que podem acontecer que não possuem representação adequada.

Obs.: Pode-se deslocar $\langle u(t) \rangle$, tal que

$$u(t - t_o) = \begin{cases} 0 & t < t_o \\ 1 & t > t_o \end{cases}$$



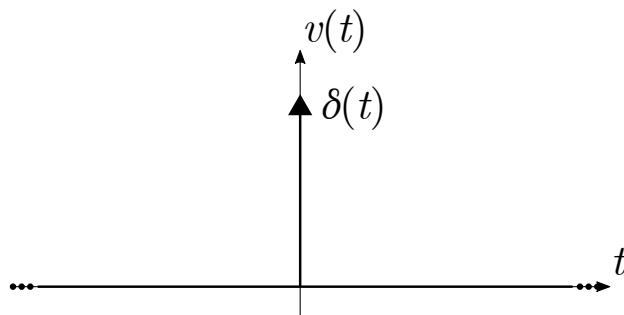
Impulso unitário de Dirac:

$$\delta(t) = 0 \quad \forall \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_o) dt =$$

$$\int_{t_o^-}^{t_o^+} x(t) \delta(t - t_o) dt = x(t_o)$$



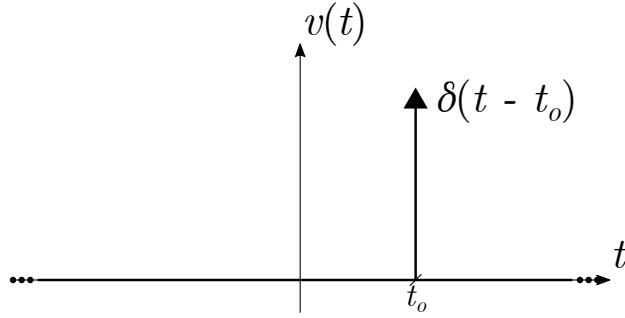
O impulso de Dirac é outra função convencionada. Ele possui valor $\langle 0 \rangle$ para todo $\langle t \neq 0 \rangle$, valor “infinito” em $\langle t = 0 \rangle$, e uma área (integral) de $\langle 1 \rangle$.

Assim como o degrau unitário, o impulso de Dirac também pode ser deslocado, obtendo-se

$$\delta(t - t_o) = 0 \quad \forall \quad t \neq t_o$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt =$$

$$\int_{t_o^-}^{t_o^+} \delta(t - t_o) dt = 1$$



Impulso P_{Δ} :

$$P_{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & t \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \\ 0 & t \notin \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \end{cases}$$

Obs.: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t) = \delta(t)$

$$u(t - t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \delta(t)$$

Função exponencial:

$$x(t) = \kappa e^{st}; \quad s = \sigma + j\omega$$

$$s = 0 \quad x(t) = \kappa e^{0t} = \kappa$$

Constante

$$s = \sigma \quad x(t) = \kappa e^{\sigma t}$$

Exp. monotônica

$$s = j\omega \quad x(t) = \kappa e^{j\omega t} = \kappa [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

Exp. complexa

$$s = \sigma + j\omega \quad x(t) = \kappa e^{(\sigma + j\omega)t} = \kappa e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

Exp. espiralar

Também é importante observar que

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t)$$

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} = \sin(\omega t)$$

3 Sinais

3.1 Intensidade de um Sinal

Dado um sinal $\langle x(t) \rangle$, é possível calcular sua energia como

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Também é possível calcular sua potência média ao longo da existência dele, dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

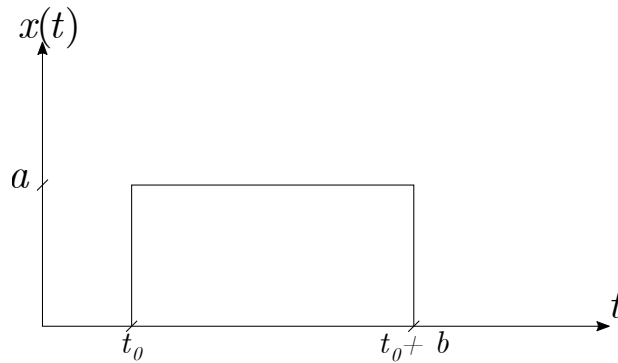
Um sinal é dito um **sinal de energia** se $\langle E_x \neq 0 \rangle$, o que implica que $\langle P_x = 0 \rangle$.

Por outro lado, um sinal é dito um **sinal de potência** se $\langle P_x \neq 0 \rangle$, o que implica que $\langle E_x \rightarrow \infty \rangle$.

Um sinal não-nulo é sempre ou um sinal de energia, ou um sinal de potência.

Obs.: Como um sinal de potência possui energia infinita, então todo sinal real ou físico é um sinal de energia.

Por exemplo, no sinal abaixo



$$\begin{aligned} \text{Temos que } E_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{t_0} x^2(t) dt + \int_{t_0}^{t_0+b} x^2(t) dt + \int_{t_0+b}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \right] \\ E_x &= \int_{t_0}^{t_0+b} x^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+b} A^2 dt = A^2 \cdot t \Big|_{t_0}^{t_0+b} = A^2 \cdot b \end{aligned}$$

Da mesma maneira, pode-se calcular $\langle P_x \rangle$ mas, como já explicado anteriormente, Se $\langle E_x \neq 0 \rangle$, então $\langle P_x = 0 \rangle$. Esse é um sinal de energia.

Agora, considera-se $\langle x(t) = C_o \cos(\omega t + \phi) \rangle$, para $\langle \omega \neq 0 \rangle$ (se $\langle \omega = 0 \rangle$, $\langle x(t) \rangle$ é uma constante). Disso, conclui-se que

$$\begin{aligned}
E_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [C_o \cos(\omega t + \phi)] dt \\
E_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} C_o^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2}{2} \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\phi)}{2\omega} \right]_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \\
&\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2}{2} \left[T + \frac{2 \sin(\omega T + 2\phi)}{2\omega} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2 T}{2} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Por outro lado, é possível calcular a potência:

$$\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [C_o \cos(\omega t + \phi)] dt \\
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2}{2T} \left[t + \frac{\sin(2\omega t + 2\phi)}{2\omega} \right]_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2}{2T} \left[T + \frac{2 \sin(\omega T + 2\phi)}{2\omega} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2 T}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_o^2}{2} = \frac{C_o^2}{2}
\end{aligned}$$

Obs.: Em ambos os cálculos da potência de $\langle x(t) = C_o \cos(\omega t + \phi) \rangle$, $\left\langle \frac{2 \sin(\omega T + 2\phi)}{2\omega} \right\rangle$ foi cancelado pois seu valor está sempre no intervalo $[-1, 1]$, e é desprezível comparado ao $\langle T \rightarrow \infty \rangle$.

Se $\langle x(t) = C \rangle$ (que pode ser analisado como um cosseno, mas $\langle \omega = 0 \rangle$), temos que:

$$\begin{aligned}
E_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} C^2 t \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rightarrow \infty \\
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{T} t \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{C^2}{T} T = C^2
\end{aligned}$$

Outro exemplo interessante é $\langle x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \neq 0 \rangle$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
E_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\lambda t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda \frac{T}{2}}}{\lambda} \rightarrow \infty \\
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\lambda t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda T} \Big|_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda \frac{T}{2}}}{\lambda T} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Nesse caso, o sinal $\langle x(t) = e^t \rangle$ não é um sinal de energia, nem de potência.

Se $x(t)$ for um sinal complexo qualquer, então

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t) dt \qquad P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

Obs.: Por $\langle x^*(t) \rangle$, denota-se o sinal conjugado de $\langle x(t) \rangle$, pontualmente.

3.2 Operações Básicas sobre Sinais

Dado um sinal qualquer $\langle x(t) \rangle$, é possível realizar operações sobre ele, obtendo o sinal resultante $\langle \bar{x}(t) \rangle$, que pode ser expresso como uma “alteração” de $\langle x(t) \rangle$. As 3 operações básicas são:

$$\text{Deslocamento} \quad x(t) \rightarrow \bar{x}(t - t_o) \quad \rightarrow \quad x(t_o) = \bar{x}(0)$$

$$\text{Escalonamento} \quad x(t) \rightarrow \bar{x}(at)$$

$$\text{Reversão} \quad x(t) \rightarrow \bar{x}(-t)$$

Observe que reversão é somente um escalonamento por um fator de -1 .

Além disso, a combinação dessas operações básicas também é uma operação. Um fato importante a se observar é que, para um dado $\langle t_i \rangle$, nos 3 casos anteriores, temos que $\langle x(t_i) = \bar{x}(t_i - t_o) / x(t_i) = \bar{x}(at_i) / x(t_i) = \bar{x}(-t_i) \rangle$. Dessa maneira, é sempre possível observar se a operação que foi realizada analiticamente é coerente e está correta, testando valores úteis para $\langle t_i \rangle$.

Por exemplo: $\langle x(t) = g\left(\frac{t}{2} - 1\right) \rangle$. Se $\langle t = 2 \rangle$, então $\langle x(2) = g\left(\frac{2}{2} - 1\right) = g(0) \rangle$.

Substituindo $\langle t \rightarrow 2v \rangle$, temos que $\langle x(2v) = g(v - 1) \rangle$. Antes $\langle t = 2 \rangle$, agora devemos fazer $\langle v = 1 \rangle$ (manter a coerência), logo $\langle x(2.1) = g(1 - 1) \rightarrow x(2) = g(0) \rangle$. Continua igual a antes.

Deve-se observar a ordem na qual se faz as operações, já que elas não são comutativas. Por exemplo: primeiro aplicar-se um deslocamento $\langle t = t' - 5 \rangle$, e depois um escalonamento $\langle t' = \frac{t''}{2} \rangle$ (portanto, $\langle t = \frac{t''}{2} - 5 \rangle$), é diferente de aplicar o mesmo escalonamento $\langle t = \frac{t'}{2} \rangle$, e posteriormente o deslocamento $\langle t' = t'' - 5 \rangle$ (que implica $\langle t = \frac{t'' - 5}{2} \neq \frac{t''}{2} - 5 \rangle$).

3.3 Classificação de um Sinal

Existem diversas maneiras de se classificar um sinal. Uma delas, já vista, é quanto ao tipo de sinal (de energia ou de potência). Outras classificações muito úteis, e que serão usadas extensivamente no estudo da matéria, são:

Modo físico do sinal:

Sinal causal	$x(t) = 0 \quad \forall \quad t \leq 0$
Sinal anticausal	$x(t) = 0 \quad \forall \quad t \geq 0$
Sinal não-causal	Nada pode ser dito

Dado $\langle x(t) \rangle$ qualquer, pode-se decompor $\langle x(t) = x_c(t) + x_{ac}(t) \rangle$, sendo $\langle x_c(t) \rangle$ uma função causal e $\langle x_{ac}(t) \rangle$ uma função anticausal.

Valores temporais:

Contínuo	$\langle t \rangle$ pode assumir qualquer valor
Discreto	Domínio de $\langle t \rangle$ está restrito a valores discretos (1, 2, 3, 4...)

Valores do sinal:

Analógico	$\langle x(t) \rangle$ pode assumir qualquer valor
Digital	Domínio de $\langle x(t) \rangle$ está restrito a valores discretos

Periodicidade:

Periódico	Se $\exists T_o \in \mathbb{R}^* \quad \quad x(t) = x(t + T_o) \quad \forall \quad t$
Aperiódico	$\nexists T_o$

Período Fundamental $[T_o] \rightarrow$ Menor intervalo, para o qual $\langle x(t) = x(t + T_o) \quad \forall \quad t \rangle$.

Se $\langle x(t) \rangle$ é periódico com período fundamental $\langle T_o \rangle$, então

$\int_a^{a+T_o} x(t)dt = \int_b^{b+T_o} x(t)dt$ <p>Notação: $\int_a^{a+T_o} x(t)dt = \int_{T_o} x(t)dt$</p>	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) ^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t) ^2 dt$
--	---

Paridade:

Par	$x(t) = x(-t) \quad \forall \quad t \in \text{Dom}\{x\}$
Ímpar	$-x(t) = x(t) \quad \forall \quad t \in \text{Dom}\{x\}$

Qualquer sinal $\langle x(t) \rangle$ pode ser decomposto em $\langle x(t) = x_p(t) + x_i(t) \rangle$, sendo $\left\langle x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \right\rangle$ um sinal par, e $\left\langle x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \right\rangle$ um sinal ímpar.

4 Sistemas

4.1 Classificação de Sistemas

Linear:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \mapsto y_1(t) \\ x_2(t) \mapsto y_2(t) \end{array} \right\} a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \mapsto a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

Se essa regra não é respeitada, o sistema não é linear, e não se encaixa no escopo dessa disciplina.

Invariante no tempo:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad x(t - t_o) \mapsto y(t - t_o)$$

Se essa regra não é respeitada, o sistema é variante no tempo, e deve ser analisado de maneira diferente da estudada nessa disciplina.

Instantâneo ou com memória:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad x(t_o) \delta(t - t_o) \mapsto y(t_o) \delta(t - t_o)$$

Se essa regra é respeitada, o sistema é instantâneo, e a saída a cada instante independe de qualquer outro instante.

Caso contrário, o sistema tem memória. Um sistema com memória não é necessariamente um sistema que se “lembra” do passado.

Causal ou não-causal:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad x(t_o) \cdot u(-t - t_o) \mapsto y(t_o)$$

Se essa regra é respeitada, o sistema é causal, e a saída depende somente de tempos anteriores a $\langle t_o \rangle$.

Caso contrário, o sistema depende de momentos futuros.

Todo sistema físico é causal, pois é fisicamente impossível um sistema prever qual o valor que $\langle x(t) \rangle$ assumirá em qualquer instante futuro.

Inversível:

$$\exists k\{y(t)\} \quad | \quad x(t) \mapsto y(t) \quad \rightarrow \quad y(t) \stackrel{k}{\mapsto} x(t)$$

Se essa regra é respeitada, o sistema é invertível. Senão, não.

4.2 Análise no Domínio-Tempo de Sistemas *LIT*

Obs.: Especifica-se um Sistema **LIT** como um sistema **L**inear e **I**nvariante no **T**empo.

Grande parte dos sistemas físicos de interesse na engenharia pode ser modelada matematicamente por equações lineares diferenciais, da forma $\left\langle \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^M a_m \frac{d^m x}{dt^m} \right\rangle$

4.2.1 Método Clássico

Problema Equações diferenciais
Solução Método clássico
Possibilidade Soma de exponenciais

Esse método já foi extensivamente estudado em outras disciplinas, como Cálculo e Circuitos.

Consiste em determinar a resposta natural e a resposta forçada da saída $\langle y(t) \rangle$, dada uma entrada $\langle x(t) \rangle$. Assim, $\langle y(t) \rangle$ pode ser expresso como $\langle y(t) = y_n(t) + y_f(t) \rangle$.

$\langle y_n(t) \rangle$ é a resposta natural, e corresponde aos modos característicos do sistema.

$\langle y_f(t) \rangle$ é a resposta forçada, e corresponde à entrada do sistema.

Dessa maneira, $\left\langle \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y_n}{dt^n} = 0 \right\rangle$, o que implica que $\left\langle \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y_f}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m x}{dt^m} \right\rangle$.

Para obter-se a resposta forçada $\langle y_f(t) \rangle$, utiliza-se o método dos coeficientes indeterminados.

$$\begin{array}{ll} x(t) & y_f(t) \\ e^{\beta t} & \beta e^{\beta t} \quad | \quad \beta \neq S_i \quad \forall \quad S_i \in \text{sol} [y_n(t)] \\ e^{\beta t} & t\beta e^{\beta t} \quad | \quad \beta = S_i \end{array}$$

4.2.2 Método do Operador D

Problema	Equações diferenciais
Solução	Métodos transformados
Possibilidade	Operador “D”

Dessa forma, teremos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y}{dt^n} &= \left\{ \sum_{n=0}^N a_n D^n \right\} \triangleright y(t) \\ &\downarrow \\ [1] \quad Q\{D\} \triangleright y(t) &= P\{D\} \triangleright x(t) \end{aligned}$$

Define-se um sistema *diferenciador* como um sistema em que $\langle y(t) \rangle$ dependa mais das derivadas de $\langle x(t) \rangle$ do que de suas integrais (ou seja, $\langle N < M \rangle$).

Analogamente, um sistema *integrador* é um sistema em que $\langle y(t) \rangle$ depende mais das integrais de $\langle x(t) \rangle$ do que de suas derivadas ($\langle M < N \rangle$).

Obs.: Todo sistema linear apresenta

$$\text{Resposta Total} = \text{Resposta à entrada nula} + \text{Resposta ao estado nulo}$$

Obs.: $\left\langle D = \frac{d}{dt} \right\rangle$ NÃO é uma variável, mas sim uma operação a ser realizada sobre uma variável dada.

Sendo que $\langle Q\{D\} \rangle$ e $\langle P\{D\} \rangle$ são operadores aplicados sobre os sinais $\langle y(t) \rangle$ e $\langle x(t) \rangle$, respectivamente. Tal operação é denotada por $\langle \triangleright \rangle$

Obs.: Mais adiante será demonstrado que a equação diferencial ^[1] funciona como um diferenciador de ordem $\langle M - N \rangle$.

Sistemas diferenciadores são extremamente instáveis, em função de serem muito sensíveis a variações de alta frequência, e serem facilmente abalados por ruídos.

Por essa razão, sistemas físicos e práticos apresentam-se como sistemas integradores. Dessa maneira, $\langle M < N \rangle$.

$$y(t) = y_o(t) + y_\rho(t)$$

4.2.3 Resposta à Entrada Nula

Denotada por $\langle y_i(t) \rangle$ (zero input), é a solução da equação ^[1] para $\langle x(t) = 0 \rangle$. Nesse caso, existem condições iniciais da forma $\langle y(t) = z_0 \quad y'(t) = z_1 \quad \dots \rangle$ e, portanto, temos que $\langle Q\{D\} \triangleright y_i(t) = 0 \quad \forall \quad t \in \text{Dom} \rangle$.

Pelo método *Heurístico* (ou seja, na intuição [não, não é chute]), observamos que a combinação linear e ponderada de $\langle y_i(t) \rangle$ com suas derivadas deve ser nula para todo $\langle t \rangle$. Tal evento só acontece se $\langle y_i(t) \rangle$ e todas as suas derivadas sucessivas até grau $\langle N \rangle$ forem da mesma morfologia. Ou seja,

$$y_i(t) = ce^{\lambda t} \longrightarrow D^n y_i(t) = c\lambda^n e^{\lambda t} \longrightarrow \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n \right\} y_i(t) = 0 \longrightarrow \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n = 0 \quad [2]$$

Considerando que $\langle y_i(t) \rangle$ não seja um sinal identicamente nulo (ou seja, $\langle y_i(t) \neq 0 \rangle$ para algum $\langle t \rangle$), a sequência de operações acima é válida.

A equação ^[2] é uma equação algébrica, e pode ser facilmente resolvida, obtendo-se $\langle N \rangle$ valores de zeros da função. Assim,

$$\sum_{n=0}^N a_n \lambda^n = \prod_{n=0}^N (\lambda - \lambda_n)$$

Raízes simples:

Se $\langle \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall \quad i, j \in [0, N] \rangle$, então $\langle m_i = e^{\lambda_i t} \rangle$

Raízes repetidas:

Se $\langle \lambda_i = \lambda_j \rangle$ para algum par $\langle i, j \rangle$, então $\langle m_i = e^{\lambda_i t} \rangle$ e $\langle m_j = t e^{\lambda_i t} \rangle$

Raízes complexas:

Se $\langle \lambda_i \in \{\mathbb{C} - \mathbb{R}\} \rangle$, e $\langle x(t) \in \mathbb{R} \rangle$, então $\langle \exists \lambda_j = \overline{\lambda_i} \rangle$ e, portanto, $\langle m_{i,j} = c_i e^{\lambda_i t} + c_j e^{\lambda_j t} \in \mathbb{R} \rangle$ se, e somente se, $\langle c_i = \overline{c_j} \rangle$.

Dessa maneira, temos que $\left\langle y_i(t) = \sum_{i=0}^N m_i \right\rangle$, prestando atenção nos casos particulares apresentados acima.

$Q(\lambda)$	Polinômio característico
$Q(\lambda) = 0$	Equação característica
λ_n	Raízes características
$e^{\lambda_n t}$	Modos característicos
(M.C.)	

4.2.4 Convolução e Resposta ao Impulso

Um operador novo que será introduzido nessa disciplina é o operador de *convolução*. Dados dois sinais $\langle a(t) \rangle$ e $\langle b(t) \rangle$, a convolução entre os dois, dada por $\langle c(t) \rangle$, é denotada $\langle c(t) = a(t) \otimes b(t) \rangle$, e obtida algebricamente por $\left\langle c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)b(t-\tau)d\tau \right\rangle$

As principais propriedades da convolução, que serão utilizadas nesse curso, são:

Comutatividade	$a(t) \otimes b(t) = b(t) \otimes a(t)$
Associatividade	$[a(t) \otimes b(t)] \otimes c(t) = a(t) \otimes [b(t) \otimes c(t)]$
Associatividade escalar	$k a(t) \otimes b(t) = [k a(t)] \otimes b(t) = a(t) \otimes [k b(t)]$
Distributividade	$a(t) \otimes [b(t) + c(t)] = a(t) \otimes b(t) + a(t) \otimes c(t)$
Elemento neutro	$a(t) \otimes \delta(t) = a(t)$

A convolução pode ser entendida graficamente como uma “varredura” do sinal $\langle b(t) \rangle$ sobre o sinal $\langle a(t) \rangle$ (ou o contrário, devido à comutatividade), ao longo do tempo. É importante observar que, para $\langle t = t_o \rangle$, $\langle c(t_o) \rangle$ não depende somente de $\langle a(t_o) \rangle$ e $\langle b(t_o) \rangle$, mas sim da integral do produto entre os dois, com $\langle b(t) \rangle$ revertido, e deslocado para $\langle t_o \rangle$.

Exemplo para cálculo de convolução:

A *resposta ao impulso* de um sistema é a saída dele quando $\langle x(t) = \delta(t) \rangle$, e será denotada $\langle h(t) \rangle$ (considera-se sempre que as condições iniciais do sistema são nulas). Assim, temos que:

$\delta(t)$	$\mapsto h(t)$	Como $\langle x(\tau) \rangle$ é constante em relação à $\langle t \rangle$, o 4º passo é válido. Também usou-se a propriedade do elemento neutro da convolução. É necessário, também, que o sistema seja linear (para poder-se aplicar a integral), e que ele seja invariante no tempo (para que o 3º passo seja válido).
$\delta(\tau)$	$\mapsto h(\tau)$	
$\delta(t - \tau)$	$\mapsto h(t - \tau)$	
$x(\tau)\delta(t - \tau)$	$\mapsto x(\tau)h(t - \tau)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$	$\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$	
$x(t)$	$\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$	

Assim, demonstra-se um dos resultados mais importantes desse curso:

$\langle x(t) \mapsto x(t) \otimes h(t) \rangle$ e, portanto, $\langle y(t) = x(t) \otimes h(t) \rangle$ (para condições iniciais nulas)

4.2.5 Caracterização do Sistema pela Resposta ao Impulso

Se o sistema for LIT, diz-se que $\langle h(t) \rangle$ caracteriza o sistema, pois suas características também se aplicam ao sistema (ele já é linear e invariante no tempo por definição).

Deve-se observar que, para que um sistema seja invariante ou sem memória, é necessário que $\langle h(t) = k\delta(t) \rangle$ (pois, senão, $\langle y(t_o) \rangle$ dependerá de valores de $\langle x(t) \rangle$ diferentes de $\langle x(t_o) \rangle$ devido à integral, o que implica que há memória).

De forma análoga, um sistema causal implica que $\langle h(t) = \bar{h}(t)u(t) \rangle$ (uma função causal) e, dessa maneira, $y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)\bar{h}(t-\tau)d\tau$, que depende somente de valores de τ anteriores a t e, portanto, é um sistema causal.

4.2.6 Obtenção da Resposta ao Impulso

Dado um sistema $\langle x(t) \mapsto y(t) \rangle$, para descobrir-se a resposta ao impulso $\langle h(t) \rangle$, pode-se fazer a análise Heurística de que, se a entrada do sistema for $\langle \delta(t) \rangle$, então $\langle h(t) \rangle$ será a resposta do sistema devida às condições iniciais impostas à ele pelo impulso, analisadas a partir de $\langle t = 0^+ \rangle$.

$$h(t) = \begin{cases} 0 & | \quad t < 0 \\ \delta(t) A_o & | \quad t = 0 \\ \text{termos de M.C.} & | \quad t > 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Assim, } \langle h(t) \rangle \text{ é da forma } \langle h(t) = \delta(t) + \text{M.C.} \rangle \\ \text{Tomando } \langle x(t) = \delta(t) \rangle : \quad \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n h}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m \delta}{dt^m} \end{array} \right.$$

Dadas as condições acima $\left\langle x(t) = \delta(t) \quad h(t) = b_o\delta(t) + \sum_{n=1}^N c_n e^{\lambda_n t} u(t) \right\rangle$, e sabendo que $\langle Q\{D\} \triangleright h(t) = P\{D\} \triangleright \delta(t) \rangle$, pode-se encontrar os valores de $[c_1 \rightarrow c_n]$.

4.2.7 Resposta ao Estado Nulo

Denotada $\langle y_s(t) \rangle$ (zero state), é qualquer solução que resolva $\langle Q\{D\} \triangleright y_s(t) = P\{D\} \triangleright x(t) \rangle$, em que as condições iniciais do sistema são nulas, e $\langle x(t) \neq 0 \rangle$ para algum $\langle t \rangle$.

Por exemplo, se $\left\langle \frac{dy_s}{dt} + a y_s(t) = b x(t) \right\rangle$, e $\langle x(t) = \kappa e^{\alpha t} \rangle$, então considerando-se $\langle y_s(t) = \beta e^{\alpha t} \rangle$:

$$\alpha \beta e^{\alpha t} + a \beta e^{\alpha t} = b \kappa e^{\alpha t} \rightarrow \beta = \frac{b \kappa}{\alpha + a}$$

De forma generalizada, como já visto anteriormente, a resposta ao estado nulo (dada por $\langle y_s(t) \rangle$) pode ser descrita pela convolução $\langle x(t) \otimes h(t) \rangle$ e, portanto, pode-se descrever a saída completa $\langle y(t) \rangle$ como

$$y(t) = y_i(t) + y_s(t) = \left[\sum_{n=0}^N c_n e^{S_n t} \right] + x(t) \otimes h(t)$$

4.2.8 Resposta de Sistema LIT à Entrada e^{st}

Considerando-se $\langle x(t) = e^{st} \rangle$ um sinal complexo ($\langle s \in \mathbb{C} \rangle$), temos que (dadas C.I. nulas),

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} H(s)$$

Dessa maneira, define-se $\langle x(t) = e^{st} \rangle$ como uma autofunção (ou função autovalor) de $\langle y(t) \rangle$. Vale ressaltar que $\langle H(s) \rangle$ é independente de $\langle t \rangle$ e, portanto, somente uma constante em relação ao tempo, podendo ser complexa ou não.

Por isso, diz-se que $\langle H(s) \rangle$ caracteriza o sistema, já que para qualquer entrada $\langle x(t) = e^{st} \rangle$, a saída é um múltiplo da entrada.

5 Transformadas

Define-se como uma *Transformada* uma operação linear sobre um sinal desejado. No nosso caso, serão utilizadas *Transformadas Integrais* que, de forma geral, são:

$$X(u) = \mathcal{T}\{x(t)\}(u) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) K(t, u) dt \quad \mathcal{T}(u) \text{ é o operador da transformada linear}$$

Por simplicidade, será usado $\langle x(t) \Leftrightarrow X(s) \rangle$ $x(t)$ é o sinal no domínio t

$X(u)$ é o sinal no domínio u

$K(t, u)$ é o núcleo da transformada

t_1, t_2 são os limites da transformada

O objetivo de uma transformada é, dado o sinal $\langle x(t) \rangle$, obter outro sinal $\langle X(u) \rangle$ que contenha a mesma informação do sinal original, porém “disposta” de uma maneira que seja possível obter-se outras informações, ou visualizá-las mais claramente.

Toda transformada é caracterizada pelo seu núcleo $\langle K(t, s) \rangle$, que é a função responsável por transformar o sinal de um domínio para o outro. Núcleos diferentes, bem como limites diferentes, caracterizam transformadas cujos objetivos e saídas tem propósitos distintos, e apresentem as informações do sinal original dispostas de maneiras diferentes.

5.1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace, definida por $\left\langle \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} \right\rangle$, é uma transformada de grande aplicação prática na resolução de sistemas de equações diferenciais, por ser capaz de simplificar significativamente a complexidade do sistema.

5.1.1 Condição de Convergência e Abscissa de Convergência

Dado que $\left\langle X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right\rangle$, procura-se condições a serem impostas sobre $\langle x(t) \rangle$ (aqui, tomado como um sinal causal), para que $\langle |X(s)| < \infty \rangle$.

$$|X(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| |e^{-st}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

Dessa maneira, se $\left\langle |x(t)| \leq M e^{\sigma_o t} \quad \forall \quad M \in \mathbb{R} \right\rangle$ e $\langle \forall \sigma_o < \sigma \rangle$, então a transformada de $\langle x(t) \rangle$ converge para $\langle \text{Re}(s) > \sigma_o \rangle$ (se $\langle x(t) \rangle$ for anticausal, $\langle \sigma_o > \sigma \rangle$; e $\langle \text{Re}(s) < \sigma_o \rangle$).

$\langle \sigma_o \rangle$ é denominado a abscissa de convergência que delimita a região de convergência ($\langle R.C. \rangle$).

Se $\left\langle \lim_{s \rightarrow p} X(s) \rightarrow \infty \right\rangle$, então $\langle p \rangle$ é denominado um polo de $\langle X(s) \rangle$.

5.1.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Deslocamento no Tempo:

$$\left| \begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) \quad \vdots R.C._1 \\ x(t - t_o) & \Leftrightarrow & e^{-st_o} X(s) \quad \vdots R.C._2 = R.C._1 \end{array} \right|$$

Deslocamento no Domínio s :

$$\left| \begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) \quad \vdots R.C._1 \\ e^{s_o t} x(t) & \Leftrightarrow & X(s - s_o) \quad \vdots R.C. = R.C._1 + \text{Re}\{S_o\} \end{array} \right|$$

Escalonamento de variável:

$$\left| \begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) \quad \vdots R.C._1 \\ x(at) & \Leftrightarrow & \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \vdots R.C._2 = a * R.C._1 \end{array} \right|$$

Convolução:

$$\left| \begin{array}{lll} x_1(t) & \Leftrightarrow & X_1(s) \quad \vdots R.C._1 \\ x_2(t) & \Leftrightarrow & X_2(s) \quad \vdots R.C._2 \\ x_1(t) \otimes x_2(t) & \Leftrightarrow & X_1(s) X_2(s) \quad \vdots R.C. \supseteq R.C._1 \cap R.C._2 \end{array} \right|$$

Derivação no tempo :

$$\left| \begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) \quad \vdots R.C._1 \\ \frac{dx}{dt}(t) & \Leftrightarrow & s X(s) \quad \vdots R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array} \right|$$

Multiplicação no tempo por t :

$$\left| \begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) \quad \vdots R.C._1 \\ t x(t) & \Leftrightarrow & -\frac{dX}{ds}(s) \quad \vdots R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array} \right|$$

Integração no tempo:

$$\left| \begin{array}{lll} x(t) & \Leftrightarrow & X(s) \quad \vdots R.C._1 \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau & \Leftrightarrow & \frac{1}{s} X(s) \quad \vdots R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array} \right|$$

5.1.3 Teorema do Valor Inicial

Dado $\langle x(t) \rangle$ uma função causal e limitada, e $\langle X(s) \rangle$ uma função própria tal que $\langle \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \rangle$, então $\left\langle \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) \right\rangle$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \text{Seja } \left\langle g(t) = \frac{dx}{dt}(t) \right\rangle, \text{ temos que } \left\langle \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \right\rangle \\ = x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt = 0 - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + s X(s) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt &= \left(\int_{0^-}^{0^+} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \right) + \left(\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \right) = x(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt &= - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + s X(s) \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + 0 \right) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(- \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + s X(s) \right) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) \end{aligned}$$

5.1.4 Teorema do Valor Final

Dado $\langle x(t) \rangle$ uma função limitada, $\left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty \right\rangle$, e $\langle X(s) \rangle$ uma função própria tal que $\langle \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \rangle$, então $\left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s X(s) \right\rangle$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \text{Seja } \left\langle g(t) = \frac{dx}{dt}(t) \right\rangle, \text{ temos que } \left\langle \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \right\rangle \\ = x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt = 0 - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + s X(s) \\ \text{Portanto, } \left\langle \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + s X(s) \right\rangle. \text{ No limite } \langle s \rightarrow 0^+ \rangle, \text{ temos que} \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{0^-}^{\infty} dx(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = - \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) + s X(s) \right] \end{aligned}$$

Dessa maneira, conclui-se que $\left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s X(s) \right\rangle$

5.1.5 Transformada Inversa de Laplace

Dada a transformada de Laplace, e sabendo que ela é uma transformada linear de $\langle x(t) \rangle$ para $\langle X(s) \rangle$, então $\left\langle \exists \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) \mid \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \implies \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = x(t) \right\rangle$

A transformada inversa é descrita por $\left\langle \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} X(s) e^{st} ds \right\rangle$

5.2 Transformada Unilateral de Laplace

Define-se como a *Transformada Unilateral de Laplace* a transformada $\left\langle X_u(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right\rangle$. Logicamente, para que ela exista, $x(t)$ não pode ser anticausal.

É importante observar que, se $\langle x(t) \Leftrightarrow X(s) \rangle$, não necessariamente $\left\langle \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow sX(s) \right\rangle$:

Seja $\left\langle p(t) = \frac{dx}{dt} \right\rangle$. Assim, $\left\langle \mathcal{L}_u\{p(t)\}(s) = P_u(s) = \int_{0^-}^{\infty} p(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \right\rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} dt &= du \quad e^{-st} = v & \int v du &= uv - \int u dv \\ \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt &= \left[x(t) e^{-st} \right]_{t=0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow 0^-} [-x(t)] + sX(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt}(t) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} [-x(t)] + sX(s).$$

Seja $q(t) = \frac{dp}{dt}(t)$. Assim, $\left\langle \mathcal{L}_u\{q(t)\}(s) = Q_u(s) = \int_{0^-}^{\infty} q(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dp}{dt} e^{-st} dt \right\rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} dt &= du \quad e^{-st} = v & \int v du &= uv - \int u dv \\ \int_{0^-}^{\infty} \frac{dp}{dt} e^{-st} dt &= \left[p(t) e^{-st} \right]_{t=0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} p(t) (-s) e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow 0^-} [-p(t)] + sP(s). \end{aligned}$$

Entretanto, já foi mostrado que $\left\langle P(s) = sX(s) - \lim_{t \rightarrow 0^-} [-x(t)] \right\rangle$ e, logo, fazendo

$$\left\langle p(t) = \frac{dx}{dt}(t) \right\rangle,$$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{d^2x}{dt^2} e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\left(-\frac{dx}{dt}(t) \right) + (-s x(t)) \right] + s^2 X(s)$$

Se repetido sucessivamente, pode-se demonstrar que

$$\frac{d^N x}{dt^N}(t) \Leftrightarrow s^N X(s) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \sum_{n=1}^N \left(s^{N-n} \right) \left(\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}(t) \right)$$

5.3 Resolução de E.D.O. usando Transformada de Laplace

Uma das principais utilizações de ambas as formas da Transformada de Laplace é na resolução de E.D.O.'s, já que elas são capazes de transformar diferenciais $\left(\frac{d^n x}{dt^n}(t)\right)$ em algébricos $(s^n X(s))$, com a vantagem de que a Transformada Unilateral considera as condições iniciais que se impõe sobre $\langle x(t) \rangle$. Se $\langle x(t) \rangle$ não possui condições iniciais, ou essas são todas nulas, pode-se usar a Transformada de Laplace; o resultado será o mesmo.

5.3.1 Função de Transferência e Respostas do Sistema

Dado um sistema descrito por $\langle Q\{D\} \triangleright y(t) = P\{D\} \triangleright x(t) \rangle$, o que antes eram operadores diferenciais descritos polinomialmente, agora pode-se descrever por polinômios (através da transformada unilateral de Laplace) $\langle Q(s) \rangle$ e $\langle P(s) \rangle$. Ou seja

$Q\{D\} \triangleright y(t) = P\{D\} \triangleright x(t)$ \Updownarrow $Q(s)Y(s) + \text{C.I.} = P(s)X(s)$	<p>Sendo $\langle Q(s) \rangle$ e $\langle P(s) \rangle$ polinômios sobre o domínio $\langle s \rangle$.</p> $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} X(s) + \frac{-\text{C.I.}}{Q(s)} = H(s)X(s) + G(s)$
--	---

$\langle H(s) \rangle$ é denominado *Função de Transferência do sistema*, e é analisado como sendo exatamente isso: um “ganho” (de módulo e de fase) aplicado sobre $\langle X(s) \rangle$, que resulta em $\langle Y(s) \rangle$. Como $\langle y(t) = h(t) \otimes x(t) \rangle$ para condições iniciais nulas, e pela propriedade da convolução, temos que $\langle Y(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)X(s) = H(s)X(s) \rangle$ e, portanto, $\langle H(s) \rangle$ é a transformada de Laplace de $\langle h(t) \rangle$ (como já foi visto na pág. 18).

Dessa maneira, $\langle H(s)X(s) \rangle$ é referente à resposta ao estado nulo do sistema, analisada no domínio $\langle s \rangle$ e, portanto, $\langle G(s) \rangle$ é referente à resposta à entrada nula do sistema, analisada no domínio $\langle s \rangle$ (o que faz sentido, já que $\langle G(s) \rangle$ depende somente do sistema $[\langle Q(s) \rangle]$, e das condições iniciais).

5.3.2 Estabilidade de um Sistema

Um sistema é dito *estável* se, para uma entrada $\langle x(t) \rangle$, temos que

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad | |x(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad | |y(t)| < N \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Em outras palavras, um sistema é estável se toda entrada limitada implica em uma saída limitada (*Bounded Input, Bounded Output - BIBO*).

5.3.3 Estabilidade por Análise dos Polos

Se $\langle x(t) \rangle$ é uma função causal, então os polos de $\langle H(s) \rangle$ devem estar localizados nos quadrantes dos reais negativos pois, dessa forma, a transformada inversa $\langle \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \rangle$ terá a forma de $\langle e^{-\sigma t} e^{j\omega t} u(t) \rangle$, que é uma função limitada para todos os valores de $t > 0$ e, portanto, estável em seu domínio.

Por outro lado, se $\langle x(t) \rangle$ é uma função anticausal, os polos de $\langle H(s) \rangle$ devem estar nos quadrantes dos reais positivos pois, assim, $\langle \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \rangle$ terá a forma $\langle e^{\sigma t} e^{j\omega t} \rangle$, que é uma função limitada para todo $\langle t < 0 \rangle$ e, assim, estável.

Se $\langle x(t) \rangle$ é não-causal, a *R.C.* deve possuir polos causais à esquerda do eixo complexo, e polos anticausais à direita dele. Portanto, a *R.C.* deve conter o eixo $\langle j\omega \rangle$.

Além disso, pode-se fazer a operação lógica inversa: dado um polo, definir qual o seu comportamento quanto à causalidade, para que ele seja um polo estável.

Dado um polo de $\langle H(s) \rangle$ da forma $\langle (s - a), \quad a < 0 \rangle$ (ou seja, um polo à esquerda do eixo complexo), para que esse polo seja estável, é necessário que ele seja um polo causal.

Por outro lado, um polo de $\langle H(s) \rangle$ da forma $\langle (s - a), \quad a > 0 \rangle$ (ou seja, um polo à direita do eixo complexo) deve ser um polo anticausal, para que ele seja estável.

Se houver uma raiz $\langle S_k \rangle$ sobre o eixo $\langle j\omega \rangle$, então $\left\langle H(s) = \frac{1}{s - j\omega_o} \Leftrightarrow h(t) = e^{j\omega_o t} \right\rangle$. Se tivermos como entrada $\langle x(t) = e^{j\omega_o t} \rangle$, então teremos que $\left\langle y(t) = x(t) \otimes h(t) = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_o} \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_o t}}{\omega_1 - \omega_o} \right\rangle$. Usando-se L'Hopital, pode-se obter que $\langle y(t) = t e^{j\omega_o t} \rangle$, que é uma saída instável.

Entretanto, por ser o caso de somente um sinal de entrada resultar em uma saída instável (na chamada frequência de ressonância), esse sistema é dito *marginamente instável*.

5.3.4 Estabilidade por Análise da Resposta ao Impulso

Dado um sistema caracterizado por sua resposta ao impulso $\langle h(t) \rangle$, temos que, portanto, $\langle y(t) = h(t) \otimes x(t) \rangle$. Se for considerado que o sistema é BIBO, então $\left\langle |y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) x(t - \tau)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} M |h(\tau)| d\tau = N \right\rangle$. Ou seja, se $\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \leq \frac{N}{M} = K \right\rangle$ (ou seja, se $\langle h(t) \rangle$ for *absolutamente integrável*), então o sistema é BIBO e, portanto, estável no que diz respeito à esse critério (que é o usualmente considerado quando em se tratar de estabilidade).

5.4 Caracterização do Sistema pela Resposta ao Impulso

É possível caracterizar um sistema pelas características da sua resposta ao impulso.

Dispensa-se a caracterização do sistema quanto à linearidade e invariância no tempo, pois essas características são pré-requisitadas para que a resposta ao impulso exista, e caracterize o sistema (todo sistema possui uma resposta ao impulso, contudo nem todo sistema é caracterizado por ela)].

Instantâneo ou com memória:

Um sistema é dito sem memória quando a saída $y(t_o)$ depende somente de $x(t_o)$.

Considerando-se que $\left\langle y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right\rangle$, então, para cada instante τ , é necessário que $h(t - \tau)$ exista somente também nesse instante (senão, a resposta será uma integral, que depende de valores ou anteriores ou posteriores à t_o e, portanto, o sistema tem memória.

Sabendo disso, é necessário que

$$h(t) = \begin{cases} k & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Dessa maneira, é necessário que a resposta ao impulso do sistema seja somente um impulso (multiplicado talvez por uma constante) e, dessa maneira, qualquer outra resposta ao impulso implica em um sistema com memória.

Causal ou não-causal:

Um sistema é dito causal se, para um instante t_o , a saída dependa somente de instantes anteriores a t_o .

Novamente, considera-se que $\left\langle y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right\rangle$ e, como queremos que dependa somente de $\langle t < t_o \rangle$, então $\left\langle y(t) = \int_{-\infty}^{t_o} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right\rangle$ e, dessa maneira, conclui-se que para isso acontecer, é necessário que $h(t - \tau)$ exista somente até t_o e, portanto, se $\left\langle h(t) = \hat{h}(t)u(t) \right\rangle$, então a condição acima é satisfeita.

Portanto, se $h(t)$ for um *senal* causal, então o sistema será um *sistema* causal.

A mesma lógica pode ser aplicada para mostrar que uma resposta ao impulso anticausal implica em um sistema anticausal, e uma resposta ao impulso não-causal implica em um sistema não-causal.

A caracterização de um sistema quanto à causalidade, pela resposta ao impulso, já foi feita no tópico 5.3.4.

5.5 Resposta em Frequência de um Sistema

Dado um sistema com resposta ao impulso $\langle h(t) \rangle$, ele terá uma *Resposta em Frequência* dada por $\langle H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s) \rangle$. Dado $\langle x(t) \rangle$ como uma exponencial complexa $\langle x(t) = e^{st} \rangle$ então, como já visto anteriormente (pág. 16), a saída $\langle y(t) \rangle$ será dada por $\langle e^{st} H(s) \rangle$.

$$\begin{array}{lll} \cos(\omega t) & \mapsto & \bar{y}(t) \\ e^{st} & \mapsto & y(t) \\ e^{j\omega t} & \mapsto & y_c(t) \\ \text{Re}\{e^{j\omega t}\} & \mapsto & \text{Re}\{y_c(t)\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \bar{y}(t) = \text{Re}\{y_c(t)\} = \text{Re}\{e^{j\omega t} H(j\omega)\} = \text{Re}\{e^{j\omega t} (|H(j\omega)| e^{j\theta_H})\} \\ \bar{y}(t) = \text{Re}\{e^{j(\omega t + \theta_H)} |H(j\omega)|\} = \cos(\omega t + \theta_H) |H(j\omega)|. \end{array} \right.$$

Portanto, $\langle \cos(\omega t) \mapsto \cos(\omega t + \theta_H) |H(j\omega)| \rangle$

Assim, se $\left\langle H(s) = \frac{P(s)}{a_n \prod(s - p_n)} \right\rangle$ e, usando-se $\left\langle x(t) = e^{j\omega_o t} u(t) \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s - j\omega_o} \right\rangle$, teremos que $\left\langle Y(s) = X(s) H(s) = \frac{P(s)}{a_n \prod(s - p_n) (s - j\omega_o)} \right\rangle$. Expandindo em frações parciais, teremos que $\left\langle Y(s) = c \left[\sum_{n=0}^N \frac{k_n}{(s - p_n)} + \frac{H(j\omega_o)}{s - j\omega_o} \right] \Leftrightarrow y(t) = \sum_{n=0}^N k_n e^{p_n t} + |H(j\omega_o)| e^{j(\omega_o t + \theta_H)} \right\rangle$.

Obs.: Sempre se considera que o grau do polinômio $\langle Q(s) \rangle$ seja maior que o do polinômio $\langle P(s) \rangle$ ($\langle N > M \rangle$), como já requerido anteriormente para avaliar estabilidade (pág. 12).

5.6 Diagrama de Bode

Diagrama de Bode é um mecanismo para desenho e plotagem do gráfico da resposta em frequência $\langle H(s) \rangle$ de um sistema, em uma escala logarítmica. Assim, $\langle \log(H(j\omega)) = \log(|H(j\omega)| e^{j\theta_H}) = \log |H(j\omega)| + j\theta_H \log(e) \rangle$. Dessa maneira, pode-se separar a análise de $\langle H(j\omega) \rangle$ em duas partes:

- a) Análise de magnitude (parte real de $\langle \log[H(j\omega)] \rangle$)
- b) Análise de fase (parte complexa de $\langle \log[H(j\omega)] \rangle$)

Além disso, o gráfico (em escala logarítmica) pode ser muito bem aproximado por assíntotas, que estão relacionadas aos polos e aos zeros de $\langle H(j\omega) \rangle$. Dessa maneira é possível interpretar graficamente a resposta em frequência do sistema.

Também é possível usar o Diagrama de Bode para projeto de sistemas reais (sejam circuitos ou digitais) com determinada resposta em frequência desejada.

Utiliza-se a escala de $\langle 20\text{dB} \rangle$ para representação e análise de gráficos de $\langle H(j\omega) \rangle$

5.7 Série de Fourier

Esse tema já foi abordado em outras disciplinas, então será visto aqui brevemente, somente como uma revisão.

Dado um sinal periódico $\langle x(t) \rangle$, com período fundamental $\langle T_o \rangle$ (e frequência fundamental $\langle \omega_o \rangle$), é possível representar tal sinal como uma soma de funções periódicas elementares, sendo que

Seno e cosseno

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)$$

$$a_n = \frac{2}{T_o} \int_{T_o} x(t) \cos(n\omega_o t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_o} \int_{T_o} x(t) \sin(n\omega_o t) dt$$

Cossenos defasados

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t - \theta_n)$$

$$A_o = a_n/2$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{A_n}$$

$$\theta_n: \sin(\theta_n) = \frac{b_n}{A_n}$$

Exponenciais Complexas

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$$

$$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad | \quad n \geq 1$$

$$c_n = \frac{a_n + j b_n}{2} \quad | \quad n \leq 1$$

$$c_o = \frac{a_n}{2}$$

É importante notar que, para que, dadas duas funções periódicas $\langle x_1(t) \rangle$ de período $\langle a \rangle$, e $\langle x_2(t) \rangle$ de período $\langle b \rangle$, tenha-se $\langle x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rangle$ uma função também periódica, então $\left\langle \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \right\rangle$. Por exemplo, tomemos $\langle x(t) = \sin(2\omega_o t) + \sin(3\omega_o t) \rangle$, de período fundamental $\langle T_o \rangle$. Fazendo o teste da periodicidade ($\langle x(t) = x(t + T_o) \quad \forall \quad t \rangle$), temos que:

$$x(t + T_o) = \sin(2\omega_o[t + T_o]) + \sin(3\omega_o[t + T_o]) =$$

$$\sin(2\omega_o t) \cos(2\omega_o T_o) + \sin(2\omega_o T_o) \cos(2\omega_o t) +$$

$$\sin(3\omega_o t) \cos(3\omega_o T_o) + \sin(3\omega_o T_o) \cos(3\omega_o t)$$

$$\omega_o T_o = 2\pi$$

$$\sin(2\omega_o t) \overset{\rightarrow 1}{\cancel{\cos(4\pi)}} + \overset{\rightarrow 0}{\cancel{\sin(4\pi)}} \cos(2\omega_o t) +$$

$$\sin(3\omega_o t) \overset{\rightarrow 1}{\cancel{\cos(6\pi)}} + \overset{\rightarrow 0}{\cancel{\sin(6\pi)}} \cos(3\omega_o t) =$$

$$\sin(2\omega_o t) + \sin(3\omega_o t) = x(t)$$

Da mesma maneira, é possível provar que $\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)] \right\rangle$ também é um sinal periódico de período fundamental $\langle T_o \rangle$.

5.7.1 Existência e Convergência da Série de Fourier

Dado um sinal $\langle x(t) \rangle$ periódico, de período fundamental $\langle T_o \rangle$, temos que

$$c_n \leq \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |x(t)e^{-jn\omega_o t}| dt = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} |x(t)| dt$$

Dessa maneira, se $\langle x(t) \rangle$ é absolutamente integrável sobre o período $\langle T_o \rangle$ (não ao longo de todo o domínio $[-\infty, \infty]$), então $\langle c_n \rangle$ (consequentemente $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$) existem.

Série Truncada de Fourier

Seja $\left\langle x_n(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_o t} \right\rangle$, é possível mostrar que, se $\left\langle \exists M \in \mathbb{R} \mid \int_{T_o} |x(t)|^2 dt < M \right\rangle \rightarrow \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_o} |x(t) - x_N(t)|^2 dt = 0 \right\rangle$, mesmo que $\langle x(t) \rangle$ e $\langle x_n(t) \rangle$ sejam diferentes em um número finito de pontos em um período.

Para que tal convergência ocorra, $\langle x(t) \rangle$ deve:

Ser absolutamente integrável no período.

Ter um número finito de descontinuidades no período.

Ter um número finito de máximos e mínimos no período.

5.7.2 Resposta em Frequência à Entrada Periódica

Como já visto anteriormente, se a entrada $\langle x(t) \rangle$ de um sistema LIT for um cosseno, um seno, ou uma exponencial complexa, então a saída terá a mesma frequência, mas com amplitude e fase alterados caracteristicamente, a cada frequência.

Dessa forma, dado que $\left\langle x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \right\rangle$, então

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |H(jn\omega_o)| e^{jn\omega_o t + \phi_{H_n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n e^{jn\omega_o t}$$

sendo $\left\langle \bar{c}_n = c_n |H(jn\omega_o)| e^{j\phi_{H_n}} \right\rangle$

Dessa maneira, é possível analisar o conteúdo de potência do sinal avaliando-se seu espectro de amplitudes $\langle c_{H_n} \rangle$ em função de suas frequências harmônicas $\langle n\omega_o \rangle$.

5.7.3 Transformada de Laplace de Sinais Periódicos

Dado um sinal $\langle x(t) \rangle$ periódico. O fato de ele ser periódico implica que ele deve estender-se sobre o domínio $[-\infty, \infty]$ (isso se deve à definição de sinal periódico). Isso implica diretamente que $\langle x(t) \rangle$ é um sinal não-causal e, portanto, $\langle X(s) \rangle$ possui uma região de convergência finita no eixo $\langle \mathbb{R} \rangle$ de $\langle s \rangle$

Considerando que a amplitude máxima do sinal (conhecida como envoltória) seja constante, então ele não é absolutamente integrável e, portanto, é instável. Disso, conclui-se que $\langle X(s) \rangle$ não deve conter o eixo jw .

Além disso, dada a expansão em série de Fourier de $\langle x(t) \rangle$, se $\langle x(t) \rangle$ for um sinal real, então os números complexos na sua transformada devem vir aos pares ($\langle s_o \rangle$ e $\langle s_o^* \rangle$, com $\langle s = a + jb \rangle$, por exemplo) e, portanto, sua transformada $\left\langle X(s) \supseteq \frac{1}{(s - s_o)(s - s_o^*)} = \frac{1}{(s - a^2) + b^2} = \overline{X}(s) \right\rangle$ e, portanto, $\left\langle x(t) \supseteq \overline{x}(t) = \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt) \right\rangle$.

Como $\langle x(t) \rangle$ é um sinal periódico, então $\langle a = 0 \rangle$ e, portanto, $\langle s = jb \rangle$. Logo, todos os polos devem estar localizados sobre o eixo $\langle j\omega \rangle$ (pois, senão, a função sofrerá devaneio, e não será periódica).

Dadas as informações acima, sinais periódicos não possuem transformadas de Laplace úteis e, portanto, não podem (nem devem) ser analisados por ela.

5.8 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é definida como $\left\langle X(\omega) \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\rangle$. No caso da transformada de Fourier, o núcleo da transformada $\left\langle K(t, u) = e^{-j\omega t} \right\rangle$, e ela é aplicada sobre todo o domínio do tempo $(-\infty, \infty)$. Há diversas interpretações que podem ser dadas à transformada de Fourier, como por exemplo:

5.8.1 Extensão da Série de Fourier

Ela pode ser vista como uma extensão da série de Fourier para sinais não-periódicos:

Seja $\langle x(t) \rangle$ um sinal não-periódico, define-se $\left\langle x_{T_o}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_o) \right\rangle$ como sua expansão periódica de período $\langle T_o \rangle$ ($\langle x_{T_o}(t) \rangle$ respeita o teste de periodicidade).

É notável que $\left\langle x(t) = \lim_{T_o \rightarrow \infty} x_{T_o}(t) \right\rangle$, e portanto pode-se manipulá-lo como um sinal periódico.

Sendo $\langle x_{T_o}(t) \rangle$ um sinal periódico, é possível expressá-lo por sua série de Fourier $\left\langle x_{T_o}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_o t} \right\rangle$, tal que $\left\langle d_m = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x_{T_o} e^{-jm\omega_o t} dt \right\rangle$

Se definirmos $\left\langle X_m = D_m T_o = \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x_{T_o} e^{-jm\omega_o t} dt \right\rangle$, em $\left\langle \lim_{T_o \rightarrow \infty} \right\rangle$, tem-se que $\langle \omega_o \rangle$ comporta-se como $\langle d\omega \rangle$ e $\langle m\omega_o = \omega \rangle$. Expressando-se $\langle X(\omega) = X_m \rangle$, conclui-se que $\left\langle X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\rangle$

5.8.2 Caso particular da Transformada de Laplace

Sabe-se que $\left\langle \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right\rangle$, sendo $\langle s = \sigma + j\omega \rangle$. Dessa maneira, pode-se descrever a transformada de Fourier como sendo a transformada de Laplace, analisada sobre o eixo $\langle j\omega \rangle$ (isso é, $\langle \sigma = 0 \rangle$), ou ainda $\left\langle \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) \Big|_{s=j\omega} \right\rangle$

Diferentemente da transformada de Laplace, não há lógica em avaliar a convergência da transformada de Fourier, já que ela não se estende ao longo do plano complexo, mas sim somente sobre o eixo $\langle j\omega \rangle$.

5.8.3 Transformada Inversa de Fourier

Como já visto há pouco, a transformada de Fourier pode ser analisada como uma particularização da transformada de Laplace, e a sua inversa comporta-se da mesma maneira. Ou seja, tomando-se $\left\langle \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} X(s) e^{st} ds \right\rangle$, e particularizando-se para $\langle \sigma = 0 \rangle$, tem-se que $\left\langle \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\rangle$

5.8.4 Propriedades da Transformada de Fourier

As propriedades da transformada de Fourier são as mesmas propriedades que as de Laplace, analisadas sobre o eixo $\langle j\omega \rangle$ (ou seja, $\langle s = j\omega \rangle$), e desprezando-se a condição de Região de Convergência. Além disso, duas propriedades importantes da transformada de Fourier são a simetria e a dualidade:

Simetria:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega) \end{array} \right|$$

Dualidade:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ X(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} x(-\omega) \end{array} \right|$$

Deslocamento no Tempo:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ x(t - t_o) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_o} X(\omega) \end{array} \right|$$

Deslocamento no Domínio s :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ e^{j\omega_o t} x(t) \Leftrightarrow X(\omega - \omega_o) \end{array} \right|$$

Escalonamento de variável:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{array} \right|$$

Convolução:

$$\left| \begin{array}{l} x_1(t) \Leftrightarrow X_1(\omega) \\ x_2(t) \Leftrightarrow X_2(\omega) \\ x_1(t) \otimes x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \end{array} \right|$$

Derivação no tempo:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ \frac{dx}{dt}(t) \Leftrightarrow j\omega X(\omega) \end{array} \right|$$

Multiplicação no tempo por t :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ t x(t) \Leftrightarrow -\frac{dX}{d\omega}(\omega) \end{array} \right|$$

Integração no tempo:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \Leftrightarrow X(\omega) \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) \end{array} \right|$$

5.8.5 Transformadas Importantes

$\delta(t)$:

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} \\ \mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = 1 \end{array} \right|$$

$e^{at} u(t)$:

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}\{e^{-at} u(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \lim_{l \rightarrow \infty} -\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^l \\ \mathcal{F}\{e^{-at} u(t)\}(s) = \frac{1}{a+j\omega} \end{array} \right|$$

$\cos(t)$:

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}\{\cos(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{2}\right\}(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t}\}(\omega) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-j\omega_o t}\}(\omega) \\ \mathcal{F}\{\cos(t)\}(\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)] \end{array} \right|$$

$\text{sign}(t)$:

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\{e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)\}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{-2j\omega}{\omega^2} = \frac{-2j}{\omega} \\ \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\}(\omega) = \frac{2}{j\omega} \end{array} \right|$$

$u(t)$:

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}\{u(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(1+\text{sign}(t))\right\}(\omega) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{F}\{1\}(\omega) + \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\}(\omega)\right\} \\ \mathcal{F}\{u(t)\}(\omega) = \frac{1}{2}\left\{2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega}\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{array} \right|$$

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ (pulso retangular de $\left\langle -\frac{\tau}{2} \right\rangle$ até $\left\langle \frac{\tau}{2} \right\rangle$):

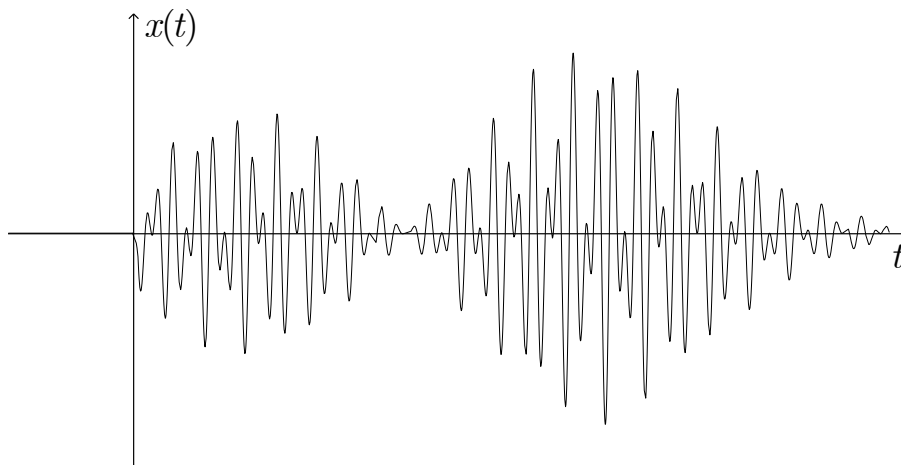
$$\left| \begin{array}{l} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\}(\omega) = \\ e^{j\omega\frac{\tau}{2}} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \\ \mathcal{F}\left\{\frac{t}{\tau}\right\}(\omega) = 2j \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \frac{2 \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega} = \frac{\tau \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega\frac{\tau}{2}} = \tau \text{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \end{array} \right|$$

5.8.6 Análise de Fourier

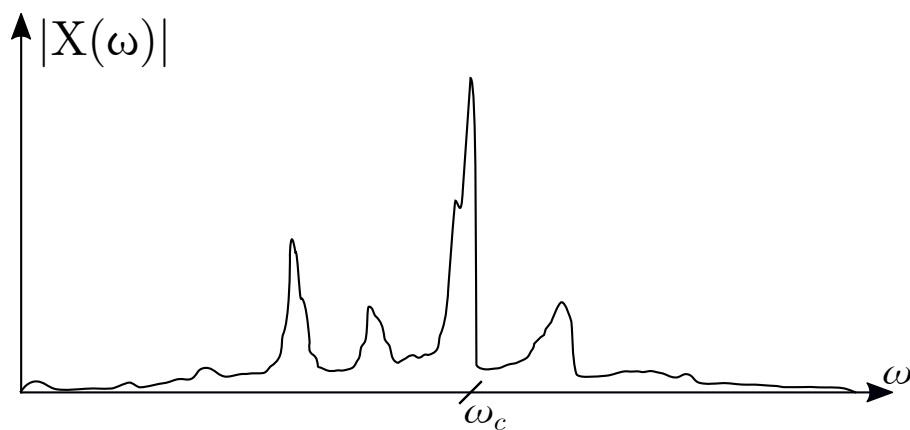
Uma das principais aplicações da Transformada de Fourier é para a análise de sinais temporais. Como essa transformada é capaz de “quebrar” um sinal, explicitando-o em termos de suas frequências, pode-se utilizar ela para analisar o comportamento em frequência de um sinal, e usar isso para obter informações sobre ele.

Note que um sinal aperiódico (o que é mais comumente abordado pela transformada) não possuirá uma frequência específica no qual ele se projeta, mas sim um espectro infinito de frequências que o “compõem”. É possível, a partir desse espectro, determinar coisas como frequências de ressonância, dominantes, granhos de frequência, atrasos, etc.

Por exemplo, dado o sinal no tempo abaixo



Cuja transformada de Fourier (parte positiva, em módulo) é dada por



Através do espectro do sinal, é possível observar os picos e as diferenças entre as frequências, quanto ao “peso” delas na composição do sinal final. Por exemplo, é possível observar que a frequência $\langle \omega_c \rangle$ tem bastante contribuição para o sinal original. Se estivéssemos tratando de um sinal musical, $\langle \omega_c \rangle$ seria a frequência principal dessa nota ou acorde.

5.8.7 Filtragem de Sinais pelo Espectro em Frequência

Conhecendo-se o espectro de frequência de um sinal, é possível projetar filtros, para que esses possam remover alguma característica indesejada do sinal. Por exemplo, deseja-se processar um sinal de fala (frequência da voz humana varia entre 50Hz e 3.4kHz), com um ruído extremamente agudo (algo na ordem de 10kHz), de forma que atenuie-se o ruído o máximo possível. Uma solução seria, no domínio das frequências, “recortar” o sinal em torno das frequências desejadas (abaixo de 3.4kHz), de forma a remover o ruído.

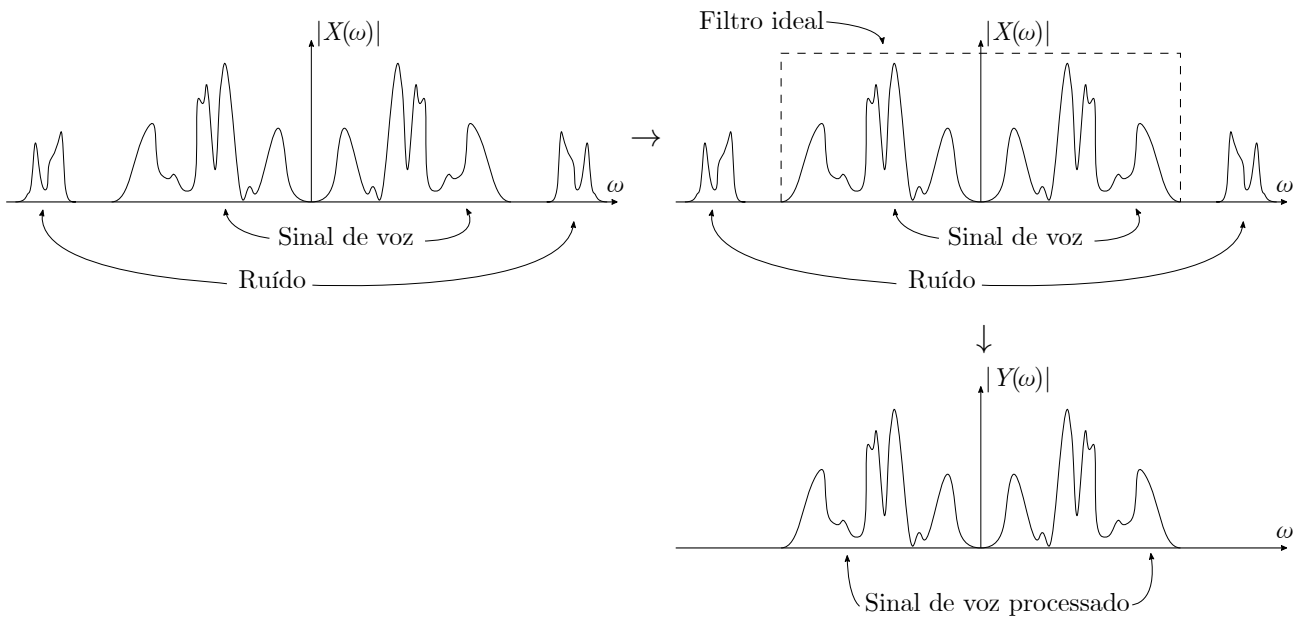
Utilizando-se das ferramentas que foram estudadas nessa disciplina, quer-se projetar um sistema, dado por $\langle Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \rangle$, de forma que a resposta em frequência não tenha componente nenhum acima de 3.4kHz. Se for utilizado $\left\langle H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_f}\right) \right\rangle$ (sendo, no nosso caso, $\langle \omega_f = 3400\text{Hz} \rangle$), então teríamos uma saída $\langle Y(\omega) \rangle$ igual à $\langle X(\omega) \rangle$ até 3.4kHz, e 0 depois de 3.4kHz, eliminando assim o ruído que inseriu-se no sinal.

Utilizando-se a propriedade da dualidade, temos que $\left\langle h(t) = \frac{\omega_f}{\pi} \text{sinc}(t\omega_f) \right\rangle$ e, portanto, a saída será dada por

$$y(t) = \frac{\omega_f}{\pi} \text{sinc}(t\omega_f) \otimes x(t)$$

Como $\langle \omega_f \rangle$ é uma frequência genérica, o filtro acima é um filtro ideal para qualquer frequência que se deseja, capaz de filtrar qualquer sinal, eliminando-o a partir da frequência desejada.

Esse filtro é dito ideal pois é fisicamente impossível projetar um filtro com uma resposta em frequência abrupta como a considerada acima. Filtros analógicos terão faixas de transição, e podem causar atrasos no espectro angular de frequência.



5.8.8 Dualidade Tempo-Frequência

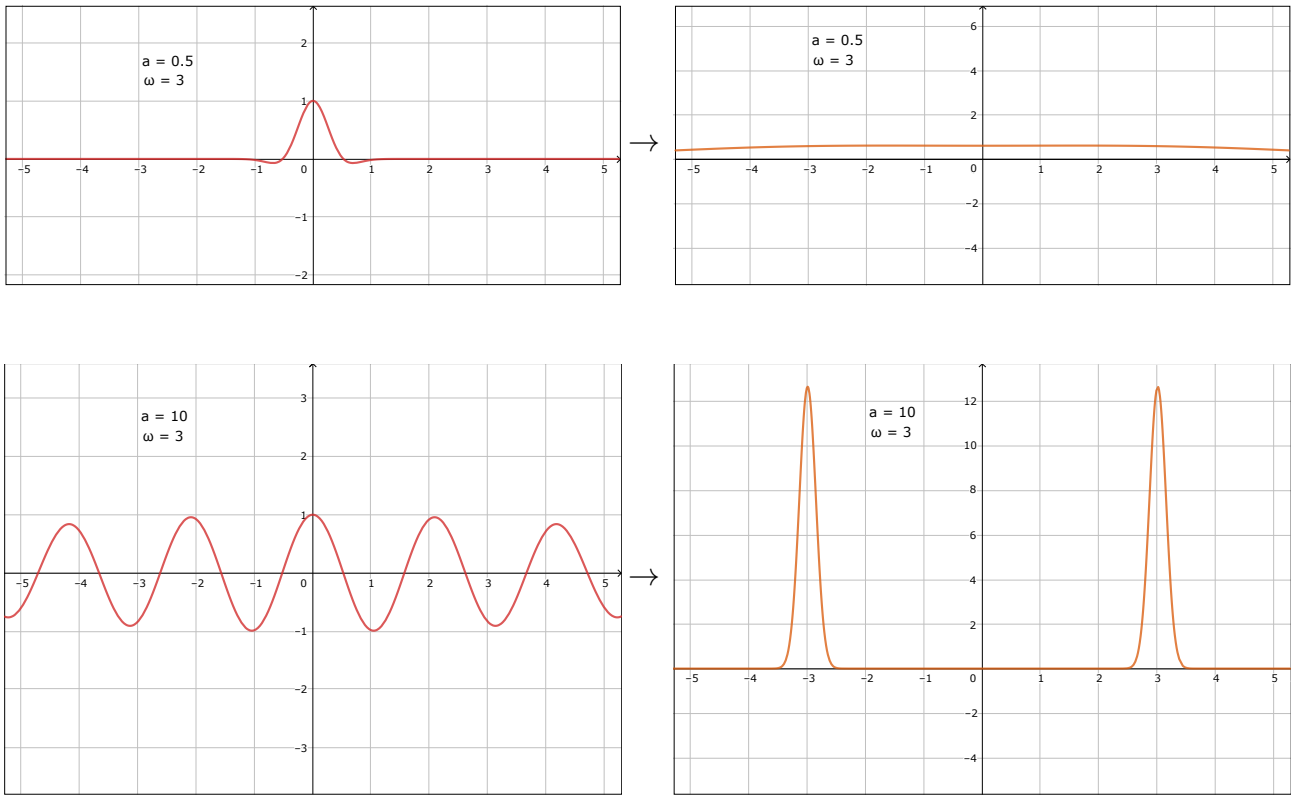
O princípio da dualidade tempo-frequência dita que, dado um sinal no tempo, a incerteza quanto à sua frequência é inversa à sua duração no tempo.

Imaginemos um sinal da forma $\left\langle x(t) = \cos(\omega t) g\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle$, sendo $\left\langle g\left(\frac{t}{a}\right) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^2} \right\rangle$ a função gaussiana (aqui utilizado como um atenuador para o sinal $\langle \cos(\omega t) \rangle$).

É possível mostrar que $\mathcal{L}\left\{g\left(\frac{t}{a}\right)\right\}(\omega) = a\sqrt{2\pi}g\left(\omega\frac{a}{2}\right) = G\left(\omega\frac{a}{2}\right)$ (ou seja, uma gaussiana também). Deve-se notar que o fator de dispersão a (conhecido na estatística como *variância*) é inverso em ambas, o que implica que, enquanto uma gaussiana “alarga”, a outra “comprime” (e vice-versa). Portanto (dado o sinal acima), temos que

$$X(s) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)] \right\} \otimes G\left(\omega\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \left\{ G\left([\omega - \omega_o]\frac{a}{2}\right) + G\left([\omega + \omega_o]\frac{a}{2}\right) \right\}$$

Graficamente, é possível observar tal efeito abaixo:



Sinal no tempo

Espectro na frequência

Essa dualidade pode ser interpretada intuitivamente também: consideremos uma luz que esteja piscando com uma certa frequência. Após observarmos ela piscar 1 vez (pensa-se isso como um “impulso” somente), não podemos definir qual a frequência com a qual ela pisca. Após algumas vezes (digamos 10), podemos ter uma noção da velocidade da lâmpada (5 piscadas/segundo, talvez 6). Quanto mais tempo ficarmos observando a luz piscar, mais precisão teremos quanto à frequência da lâmpada.

6 Amostragem e Sinais Amostrados

Com a crescente tendência da digitalização de sistemas de comunicação, controle etc, é necessário estudar o funcionamento e utilização de sinais discretos no tempo, em função de que sistemas digitais não são capazes de analisar e processar sinais contínuos.

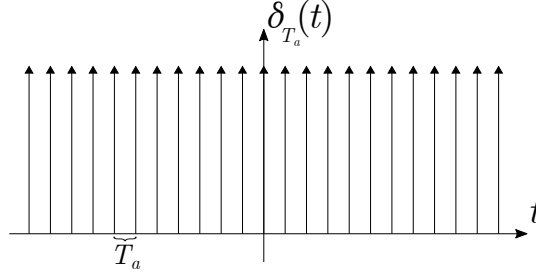
É possível descrever um sistema para análise e processamento digital da seguinte forma:

$$\langle x(t) \rangle \rightarrow \text{amostrador} \rightarrow \text{processamento} \rightarrow \text{reconstrutor} \rightarrow \langle y(t) \rangle$$

Em que o amostrador é o processo responsável por retirar “amostras” do sinal original; e o reconstrutor é responsável por reconstruir o sinal original, a partir do sinal amostrado. Como a amostragem é feita, e como o sinal original é reconstruído, serão o tema dessa parte do conteúdo.

6.1 Funções Importantes

Define-se como $\langle \delta_{T_a}(t) \rangle$ como sendo o Pente de Dirac, ou um “trem de impulsos”, dado matematicamente como $\left\langle \delta_{T_a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a) \right\rangle$, sendo $\langle T_a \rangle$ o período de amostragem.



Como $\langle \delta_{T_a}(t) \rangle$ é um sinal periódico, pode-se descrevê-la como sua série de Fourier complexa, tal que

$$\left\langle \delta_{T_a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_a t} \right\rangle, \text{ sendo}$$

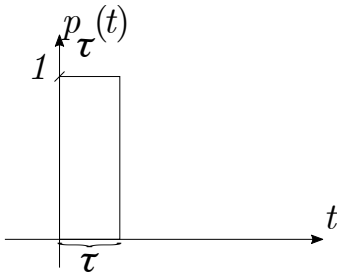
$$\left\langle c_n = \frac{1}{T_a} \int_{-\frac{T_a}{2}}^{\frac{T_a}{2}} \delta_{T_a} e^{-jn\omega_a t} dt = \frac{1}{T_a} e^0 = \frac{1}{T_a} \right\rangle \text{ e, portanto,}$$

$$\left\langle \delta_{T_a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_a} e^{jn\omega_a t} \right\rangle. \text{ Dessa maneira,}$$

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_a}(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_a t}\right\}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_a}(t)\}(\omega) = \frac{2\pi}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_a) = \frac{2\pi}{T_a} \delta_{\omega_a}(\omega)$$

Define-se $\langle p_\tau(t) \rangle$ como um pulso de largura $\langle \tau \rangle$, dado por $\langle p_\tau(t) = u(t) - u(t - \tau) \rangle$



Também é importante saber a transformada de $\langle p_\tau(t) \rangle$:

$$p_\tau(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}(\omega) - \mathcal{F}\{u(t - \tau)\}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}(\omega) = [1 - e^{-j\omega\tau}] \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}(\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}(\omega) = \tau \left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right) \text{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}$$

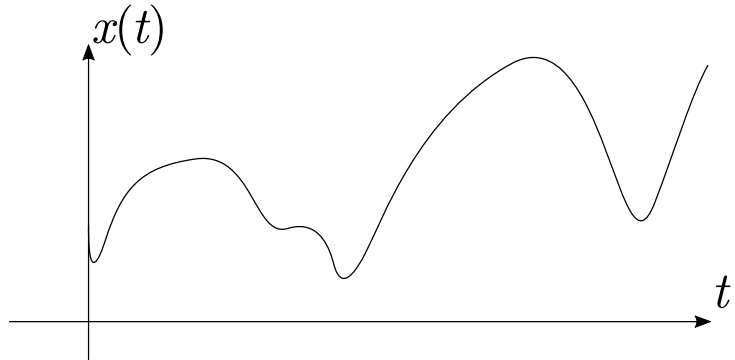
Além disso, define-se $\langle \rho_{T_a;\tau}(t) = p_\tau(t) \otimes \delta_{T_a}(t) \rangle$

6.2 Tipos de Amostragem

Dado um sinal $x(t)$ mostrado abaixo, há diversas maneiras de como seria possível amostrar ele, de um ponto de vista tanto matemático quanto prático.

Sinal original (sem amostragem):

Analísado analogicamente $\langle \forall t \rangle$



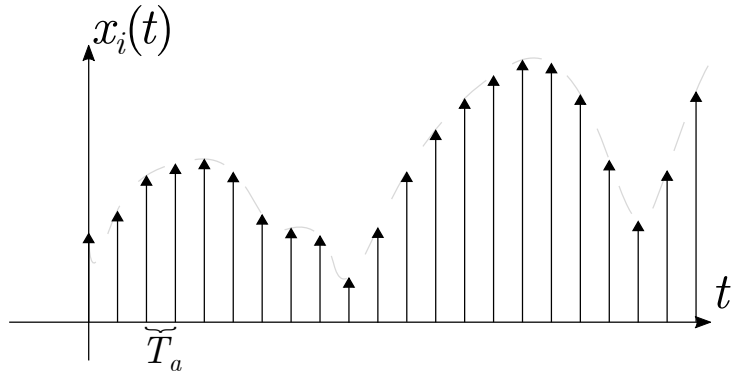
Amostragem ideal:

$$x_i(t) = x(t) \delta_{T_a}(t)$$

$$x_i(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a)$$

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a) \delta(t - nT_a)$$

Analisa o valor a cada $\langle T_a \rangle$ e armazena.

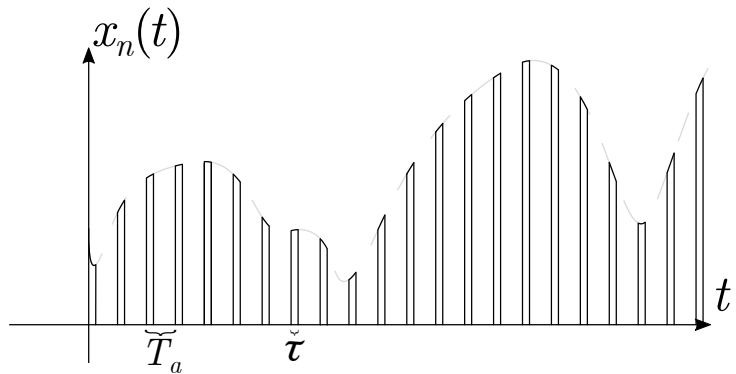


Amostragem natural:

$$x_n(t) = x(t) \rho_{T_a, \tau}(t)$$

$$x_n(t) = x(t) [p_\tau(t) \otimes \delta_{T_a}(t)]$$

Analisa o valor a cada $\langle T_a \rangle$ ao longo de um período $\langle \tau \rangle$ e armazena.

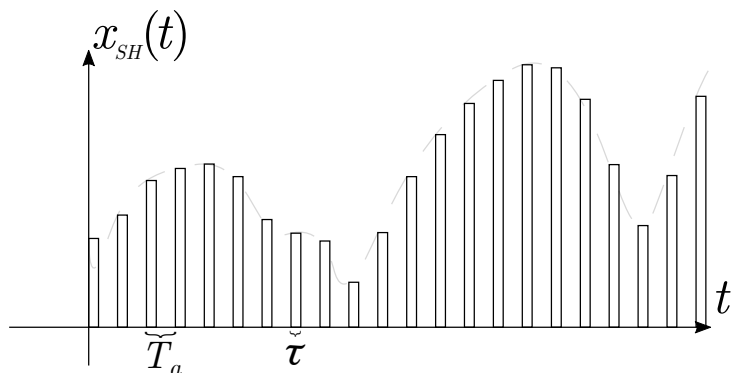


Amostragem Sample'n'Hold:

$$x_{SH}(t) = x_i(t) \otimes p_\tau(t)$$

$$x_{SH}(t) = [x(t) \delta_{T_a}(t)] \otimes p_\tau(t)$$

Analisa o valor a cada $\langle T_a \rangle$ e armazena por um período $\langle \tau \rangle$.



6.3 Análise no Domínio da Frequência

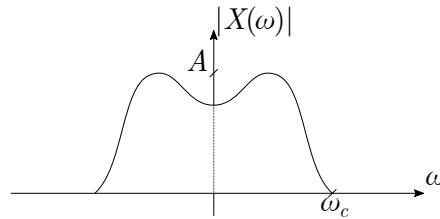
6.3.1 Teorema da Amostragem de Nyquist

“Dado um sinal $\langle x(t) \rangle$ limitado em frequência, com espectro $\langle X(\omega) = 0 \forall |\omega| > \omega_c \rangle$, sendo $\langle \omega_c \rangle$ a largura do espectro; então, a partir do sinal amostrado $\langle x_a(t) \rangle$, é possível recuperar $\langle x(t) \rangle$ a partir de suas amostras se a frequência de amostragem $\langle \omega_a > 2\omega_c \rangle$ ”

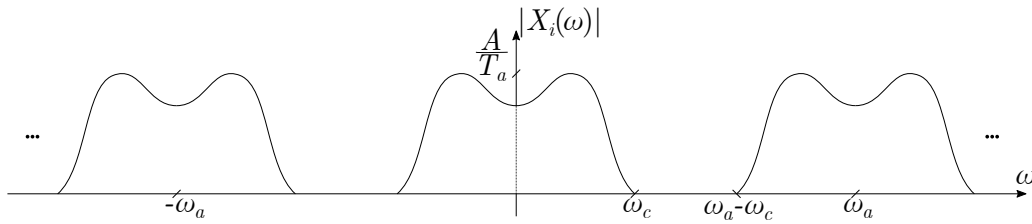
6.3.2 Amostragem ideal

$$\left| \begin{aligned} x_i(t) &= x(t)\delta_{T_a}(t) \Leftrightarrow X_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\delta_{T_a}(t)\}(\omega) \\ X_i(\omega) &= X(\omega) \otimes \left[\frac{2\pi}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_a) \right] = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_a) \end{aligned} \right|$$

Considerando que o espectro de $\langle X(\omega) \rangle$ seja o dado abaixo

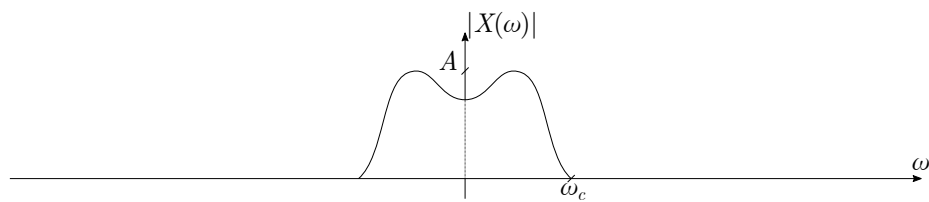


Através da conclusão obtida anteriormente quanto a $\langle X_i(\omega) \rangle$, pode-se descrevê-lo graficamente como um “pente de espectros”, com largura $\langle 2\omega_c \rangle$, e espaçamento entrecentros $\langle \omega_a \rangle$:



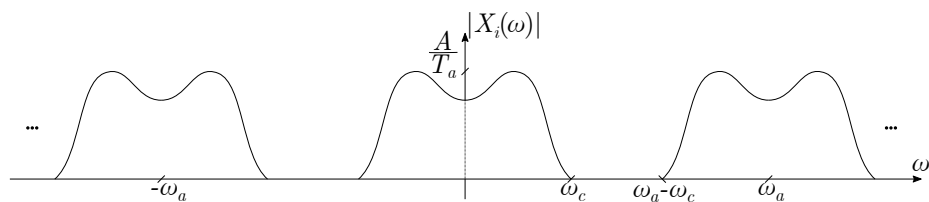
Dado o espectro $\langle X_i(\omega) \rangle$, temos a reconstrução $\langle \hat{X}(\omega) = X_i(\omega) G(\omega) \rangle$. Realizando-se a transformada inversa de Fourier, conclui-se que $\langle \hat{x}(t) = x_i(t) \otimes g(t) \rangle$. Se $\langle G(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \rangle$, e portanto $\langle g(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t) \rangle$, então $\langle \hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_a) \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \rangle$. Considerando-se que o teorema da amostragem foi satisfeito, então $\langle \omega_a > 2\omega_c \implies \omega_a - \omega_c > \omega_c \rangle$ e, portanto, todas as “regiões” do espectro de $\langle X_i(\omega) \rangle$ que estão além de $\langle \omega_c \rangle$ são zeradas pelo filtro $\langle G(\omega) \rangle$. Logo, $\langle X_i(\omega) = \frac{1}{T_a} X(\omega) \rangle$ e, assim, o sinal original foi reconstruído, senão por um ganho.

Sinal original



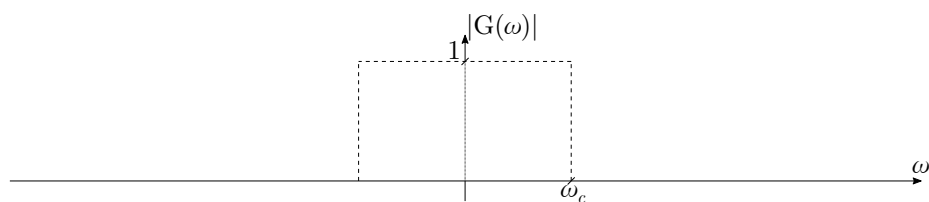
↓

Sinal amostrado



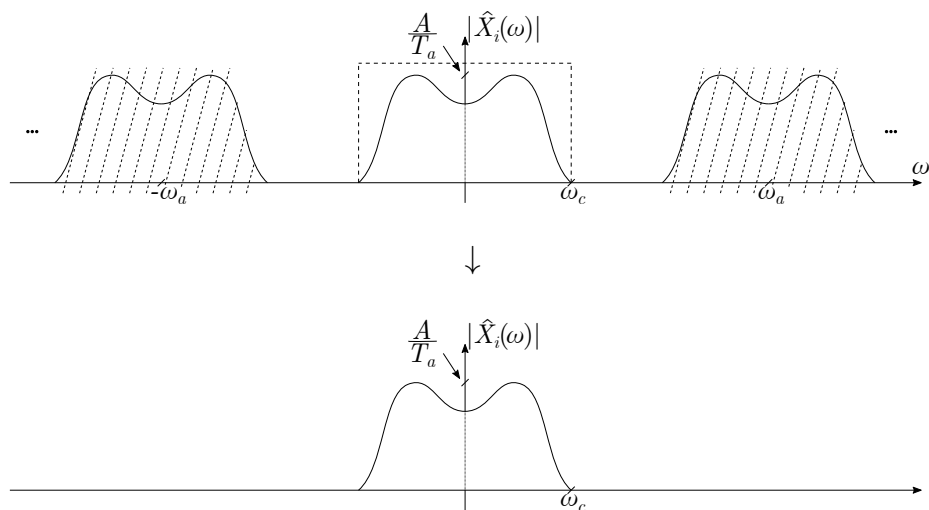
×

Filtro ideal



=

Sinal filtrado /
reconstruído



6.3.3 Amostragem Natural

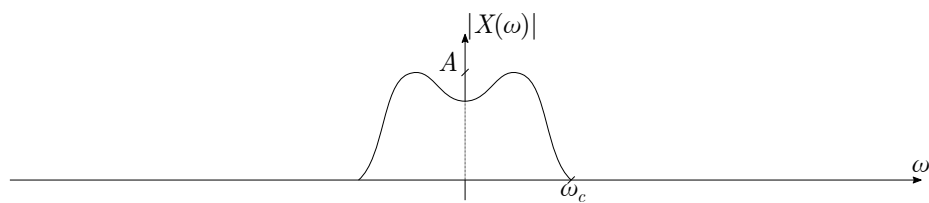
$$\begin{aligned}
x_n(t) &= x(t)p_{T_a}(t) = x(t) [p_\tau(t) \otimes \delta_{T_a}(t)] \\
X_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \left[\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}(\omega) \mathcal{F}\{\delta_{T_a}(t)\}(\omega) \right] \\
X_n(\omega) &= X(\omega) \otimes \left[\frac{\tau}{2\pi} \left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right) \text{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \frac{2\pi}{T_a} \delta_{\omega_a}(\omega) \right] \\
\frac{\tau}{2\pi} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \text{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \delta_{\omega_a}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{2\pi} e^{-jn\omega_a\frac{\tau}{2}} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_a\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_a) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_a) \quad c_n = \frac{\tau}{2\pi} e^{-jn\omega_a\frac{\tau}{2}} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_a\tau}{2}\right) \\
X_n(\omega) &= X(\omega) \otimes \left[\frac{\tau}{2\pi} \left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right) \text{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \frac{2\pi}{T_a} \delta_{\omega_a}(\omega) \right] \\
&= X(\omega) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_a) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [X(\omega) \otimes \delta(\omega - n\omega_a)] \\
\boxed{
\begin{aligned}
X_n(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X(\omega - n\omega_a) \\
c_n &= \frac{\tau}{2\pi} e^{-jn\omega_a\frac{\tau}{2}} \text{sinc}\left(\frac{n\omega_a\tau}{2}\right)
\end{aligned}
}
\end{aligned}$$

Seguindo a mesma lógica do amostrador ideal, o espectro de $\langle X_n(\omega) \rangle$ será semelhante ao de $\langle X_i(\omega) \rangle$, contudo com um ganho $\langle c_n \rangle$ aplicado a cada região do espectro de $\langle X_n(\omega) \rangle$ (e não à função num todo), que está relacionado tanto à frequência de amostragem, quanto à “janela” de duração do pulso de amostragem. Além disso, semelhantemente à amostragem ideal, o uso de um filtro $\left\langle G(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \right\rangle$ é suficiente para reconstruir o sinal original.

Obs.: É possível escolher $\langle \tau \rangle$ e $\langle \omega_a \rangle$ de forma que $\left\langle \text{sinc}\left(\frac{n\omega_a\tau}{2}\right) = 0 \forall n \neq 0 \right\rangle$, ou seja, $\left\langle \frac{n\omega_a\tau}{2} = k\pi \implies \omega_a\tau = \frac{2k\pi}{n} \implies \omega_a\tau = 2k\pi \right\rangle$.

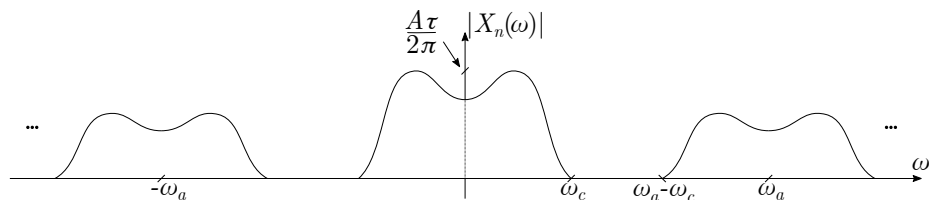
Obs.: Note que o ganho $\langle c_n \rangle$ de cada região do espectro de $\langle X_n(\omega) \rangle$ não está relacionado à $\langle \omega \rangle$, mas sim à $\langle n\omega_a \rangle$. Ou seja, dentro de uma região, o ganho $\langle c_n \rangle$ é constante.

Sinal original



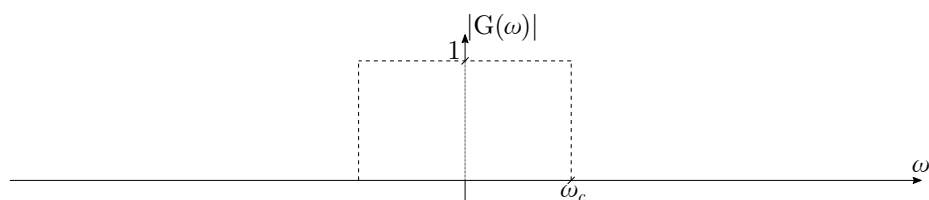
↓

Sinal amostrado



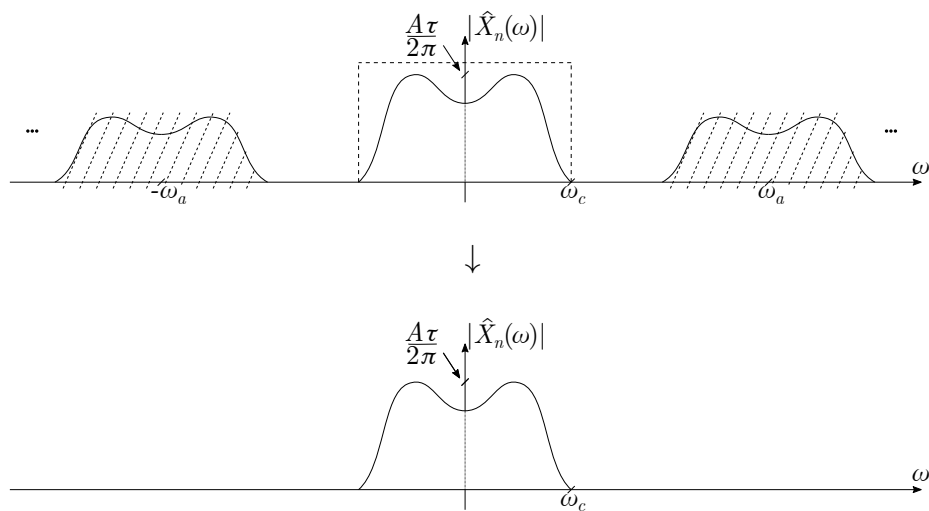
×

Filtro ideal



=

Sinal filtrado /
reconstruído



6.3.4 Amostragem Sample'n'Hold

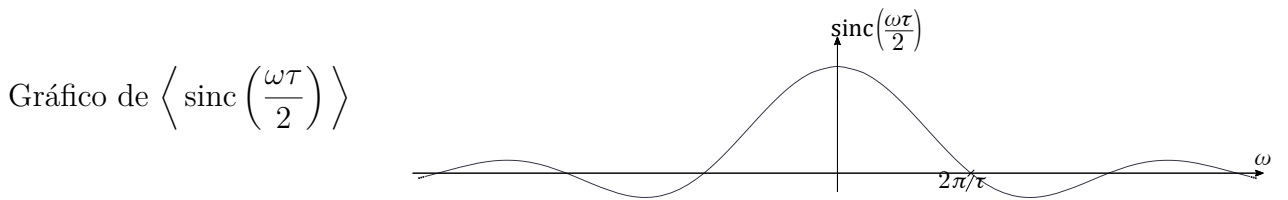
$$\left| \begin{array}{l} x_{SH}(t) = x_i(t) \otimes p_\tau(t) = [x(t)\delta_{T_a}(t)] \otimes p_\tau(t) \quad \left| \quad \mathcal{F}\{p_\tau(t)\}(\omega) = \tau e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right. \\ X_{SH}(\omega) = X_i(\omega) \tau e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad \left| \quad X_i(\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_a) \right. \\ X_{SH}(\omega) = \frac{1}{T_a} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_a) \right] \tau e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ D(\omega) = \frac{\tau}{T_a} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad X_{SH}(\omega) = D(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_a) \right] \end{array} \right.$$

Também semelhante a ambas as amostragens anteriores, o espectro de $\langle X_{SH}(\omega) \rangle$ é a região original de $\langle X(\omega) \rangle$ repetida em frequência, entretanto agora com um ganho que depende de cada frequência $\langle \omega \rangle$, e não das frequências múltiplas $\langle n\omega_a \rangle$. Além disso, há um ganho linear dependente da frequência (relacionado ao $\left\langle \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega\tau}{2}\right] \right\rangle$), chamado de *distorção*, sobre a região central, e é necessário compensar isso na filtragem.

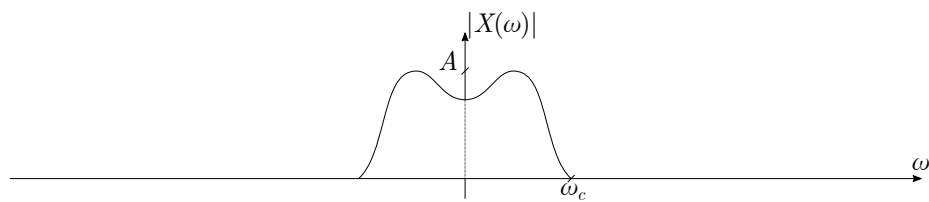
Para que seja possível fazer a *equalização* (remoção da distorção), é necessário que o primeiro zero de $\left\langle \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right\rangle$, que ocorre em $\langle \pi \rangle$, esteja além de $\langle \omega_c \rangle$. Portanto,

$$\left\langle \frac{\omega_c\tau}{2} \right\rangle > \pi \quad \Rightarrow \quad \tau > \frac{2\pi}{\omega_c}$$

Satisfeita essa condição, pode-se fazer um filtro da forma $\left\langle G(\omega) = \left[\frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \right] \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \right\rangle$, que equalizará/balanceará a distorção, e cortará as frequências indesejadas.

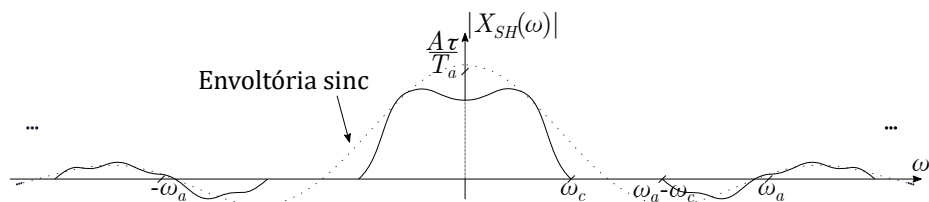


Sinal original



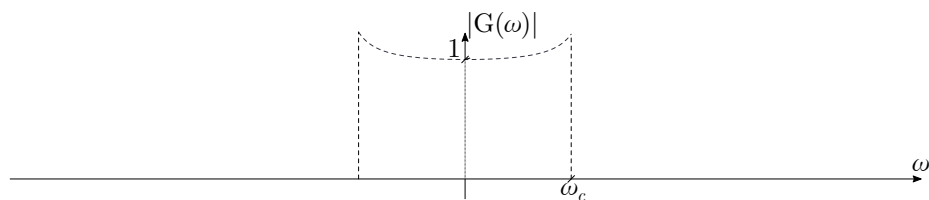
↓

Sinal amostrado



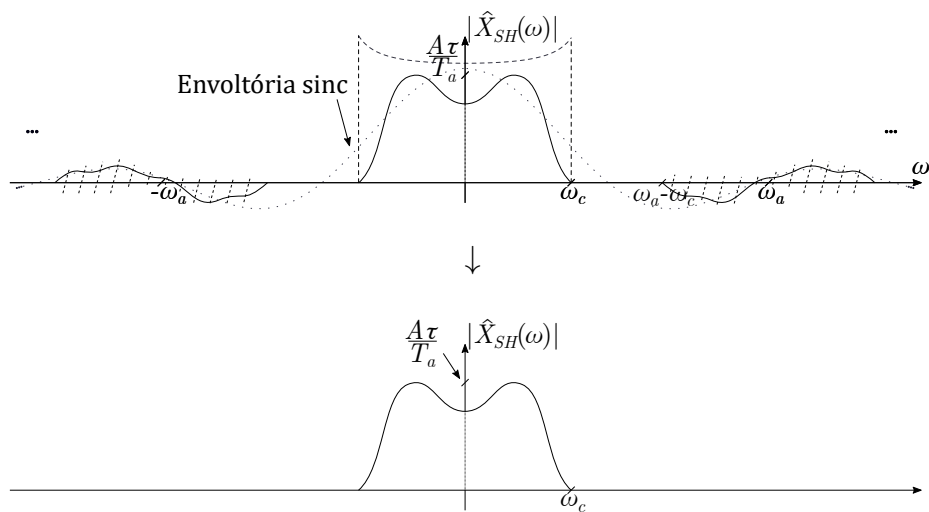
×

Filtro ideal
compensador



=

Sinal filtrado /
reconstruído



6.3.5 Desrespeitando o Teorema da Amostragem

Nos 3 casos anteriores de análise no domínio $\langle \omega \rangle$ (amostragens ideal, natural, e Sample'n'Hold), considerou-se nas ilustrações que o teorema da amostragem de Nyquist foi respeitado ($\langle \omega_a \geq 2\omega_c \rangle$). Desrespeitar o teorema leva a um efeito chamado de “recobrimento” (também encontrado na literatura e em outros campos do conhecimento como “aliasing”), que causa uma distorção não-linear sobre o sinal entre $\langle -\omega_c \rangle$ e $\langle \omega_c \rangle$, de modo que é impossível fazer um processo de equalização para remover a distorção. Esse efeito de recobrimento será mostrado abaixo.

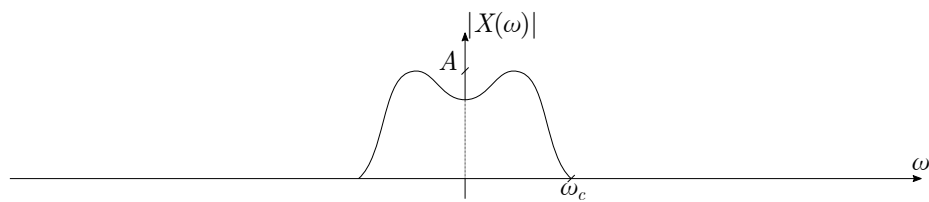
Como, agora, o único efeito relacionado a $\langle \omega_a \rangle$ no qual se está interessado é o da posição das regiões da amostra, será feita somente a análise da amostragem ideal com $\langle \omega_a < 2\omega_c \rangle$, e a lógica vista pode ser aplicada aos outros métodos de amostragem, dando a devida atenção.

Como é perceptível abaixo, o sinal reconstruído $\langle \hat{X}_i(\omega) \rangle$ é diferente do sinal original $\langle X(\omega) \rangle$, e isso se deve somente à não-satisfação do teorema da amostragem de Nyquist, em particular a partir da frequência $\langle \omega_a - \omega_c \rangle$ (antes disso, a 2ª região ainda não sobrepôs com a 1ª, e não houve distorção).

$$\begin{aligned} \hat{X}_i(\omega) &= \frac{1}{T_a} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_a) \right] \text{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) \quad \text{se } \omega_a = 1.655\omega_c \\ \hat{X}_i(\omega) &= \frac{1}{T_a} \left[X(\omega + 1.655\omega_c) + X(\omega) + X(\omega - 1.655\omega_c) \right] \text{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) \\ \hat{X}_i(\omega) &= \begin{cases} 0 & t < -\omega_c \\ X(\omega + 1.655\omega_c) + X(\omega) & -\omega_c \leq t < -0.655\omega_c \\ X(\omega) & -0.655\omega_c \leq t \leq 0.655\omega_c \\ X(\omega - 1.655\omega_c) + X(\omega) & 0.655\omega_c < t \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < t \end{cases} \end{aligned}$$

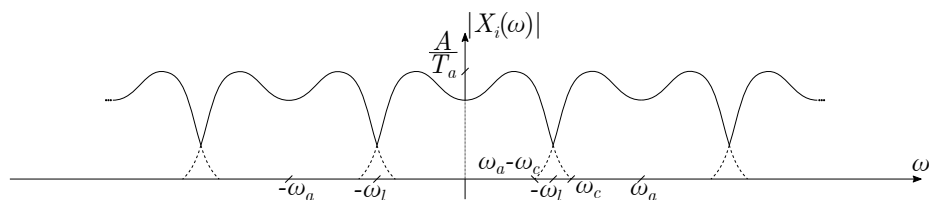
Os sinais e operações abaixo são referentes ao exemplo dado acima.

Sinal original



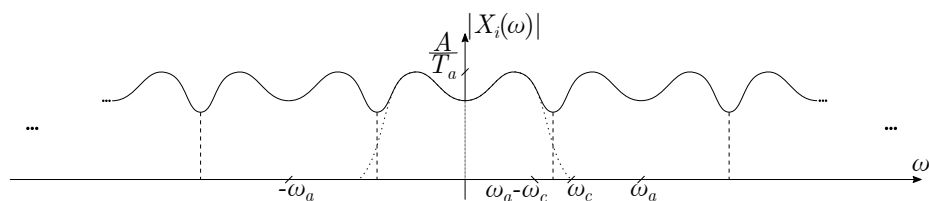
↓

Sinal amostrado



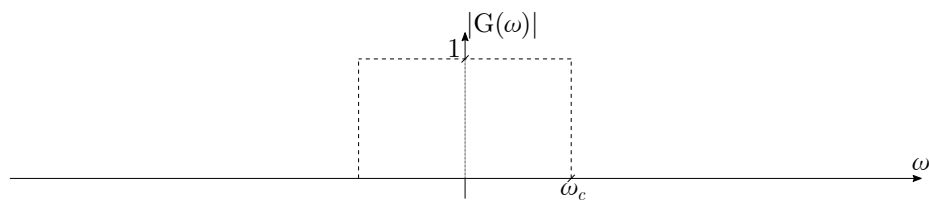
↓

Sinal recoberto



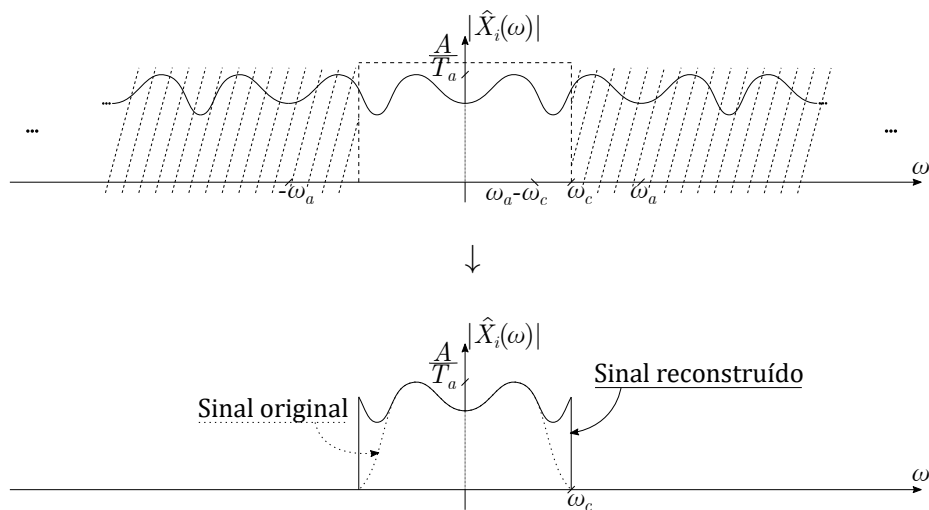
×

Filtro ideal



=

Sinal filtrado /
reconstruído



7 Sinais e Sistemas Discretos

Dado um sinal $\langle x(t) \rangle$, com uma amostragem $\langle x_a(t) \rangle$ (amostrado por algum dos métodos anteriores), ambos esses sinais são sinais no tempo. Entretanto, por ser um sinal amostrado, que só existe em valores quantizados do tempo, pode-se descrever ele como um sinal discreto, que será o foco a partir de agora. Também é possível escrever sistemas discretos.

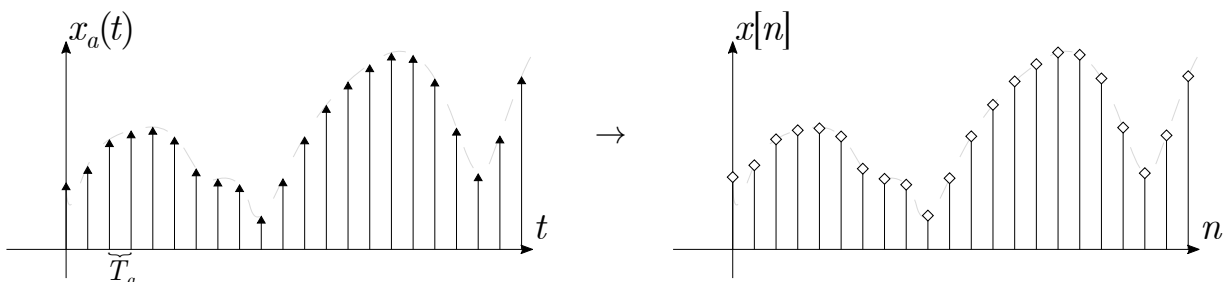
7.1 Discretização e Notações

Dado o sinal $\langle x_a(t) \rangle$ dado anteriormente, pode-se substituir $\langle x_a(t) = x_a(nT_a) \rangle$, já que ele existe somente para os valores $\langle t = nT_a \rangle$. Agora em função de $\langle n \rangle$, e não de $\langle t \rangle$, o sinal ainda é sobre o domínio do tempo. Por simplificação de notação, será usado $\langle x_a(t) \triangleq x[n] \rangle$, sendo $\langle x[n] \rangle$ o sinal amostrado (agora, uma função sobre o domínio n).

Além disso, há também a descrição de sistemas amostrados. No domínio do tempo, eles eram descritos como equações diferenciais; aqui, serão descritos como equações de diferenças, mas ainda possuindo condições iniciais/de contorno. Por exemplo, $\langle y[n] = 0.5x[n] - 0.8y[n - 1] \rangle$.

Além disso, há a representação das funções: no domínio do tempo, as funções discretas eram representadas por uma soma de impulsos nos valores quantizados $\langle nT_a \rangle$, com os valores da função em cada momento discreto de tempo. Agora, as funções sendo quantizadas, um sinal $\langle x(t) \rangle$ pode ser representado também por uma soma de infinitos impulsos deslocados, mas será mais conveniente representar somente como uma função sobre o domínio $\langle n \rangle$.

Quanto à notação gráfica, enquanto no tempo representavam-se os valores amostrados por impulsos, no domínio $\langle n \rangle$ eles são os valores da função propriamente ditos. Então, ao invés de dizer-se $\langle x_a(3) = 7\delta(t - 3) \rangle$, diz-se $\langle x_a[3] = 7 \rangle$. Graficamente, isso significa

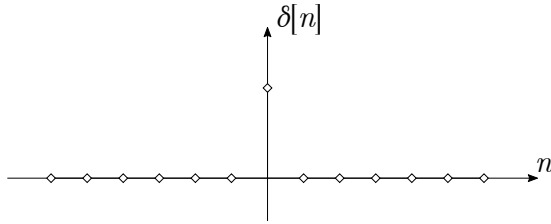


7.2 Sinais Fundamentais

Assim como em sistemas contínuos, no espaço discreto há diversas funções que são fundamentais para a análise.

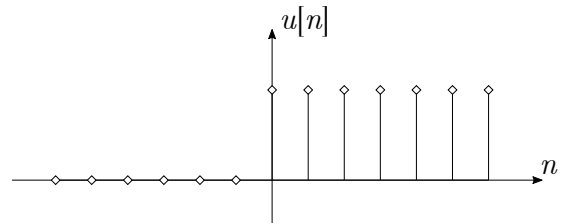
Toda função no domínio $\langle n \rangle$ pode ser descrita como a amostra ideal da mesma função no domínio $\langle t \rangle$. Entretanto, algumas funções especiais, como o impulso unitário e o degrau, tem uma descrição específica, em função de suas descontinuidades:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



É importante observar que, diferentemente do caso contínuo em que a função $\langle \delta(t) \rangle$ considerava que o valor da função tenderia ao infinito para $\langle t = 0^- \rangle$, e voltaria em $\langle t = 0^+ \rangle$, com uma área unitária sob o gráfico; no caso discreto, o valor da função $\langle \delta[n] \big|_{n=0} = 1 \rangle$ é explícito.

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Quanto ao degrau, a descontinuidade de $\langle u(t) \rangle$ na origem levava a função a ter um valor indefinido ali; enquanto que, no caso discreto, $\langle u[n] \rangle$ é definido para $\langle n = 0 \rangle$.

7.3 Operações sobre Sinais Discretos

Assim como, para funções contínuas, é possível realizar operações tais como derivada, integral, convolução, etc; é possível realizar tais operações sobre sinais discretos também, de uma maneira muito mais simples e direta. Tais operações, sua dedução, e o paralelo delas com o domínio contínuo, será apresentado a seguir.

7.3.1 Operadores Atraso e Avanço

O operador atraso $\langle z^{-\tau} \rangle$, bem como o operador avanço $\langle z^{\tau} \rangle$ são operações que aplicam-se sobre um sinal, definidas por $\langle z^{-\tau} \{x[n]\} = x[n - \tau] \rangle$, e $\langle z^{\tau} \{x[n]\} = x[n + \tau] \rangle$. Eles mostram-se de extrema utilidade quando se tem por objetivo reescrever uma equação de diferenças, ou organizar um diagrama de blocos.

7.3.2 Diferenciador Discreto

No caso contínuo, temos que $\left\langle y(t) = \frac{dx}{dt}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\rangle$. Em um paralelo amostrado, temos que $\langle t = nT_a \rangle$. Assim, $\left\langle \frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(nT_a) - x(nT_a - \Delta t)}{\Delta t} \right\rangle$. Mudando-se para o espaço discreto, temos que o menor intervalo entre dois valores é $\langle T_a \rangle$, ao contrário de $\langle dt \rangle$ do caso contínuo. Assim, $\left\langle y[n] = \lim_{\Delta t \rightarrow T_a} \frac{x[nT_a] - x[nT_a - \Delta t]}{\Delta t} \right\rangle$. Como não há problemas em assumir que $\langle \Delta t = T_a \rangle$, tem-se $\left\langle y[n] = \frac{x[nT_a] - x[nT_a - T_a]}{T_a} \right\rangle$. Realizando-se a simplificação de notação explicada anteriormente, chega-se à equação do diferenciador discreto, dado por

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

7.3.3 Integrador Discreto

Assim como no caso contínuo, dado uma função $\langle x(t) \rangle$, e definindo $\left\langle y(t) = \frac{dx}{dt}(t) \right\rangle \implies \left\langle x(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \right\rangle$, essa mesma dualidade pode ser vista no caso discreto. Isto é, $y[n] = x'[n] \implies x[n] = \int_{-\infty}^n y[\mu] d\mu$. Analisando o diferenciador discreto, $\langle y[n] = x[n] - x[n - 1] \rangle$. Reescrevendo, temos que $\langle x[n + 1] = y[n] + x[n] \rangle$. Substituindo $\langle x[n] \rightleftharpoons y[n] \rangle$, chega-se que $y[n] = x[n - 1] + y[n - 1]$. Por recursividade, tem-se $\langle y[n] = x[n] + x[n - 1] + \dots + x[n - \mu] + y[n - \mu] \rangle$ e, dessa maneira, $\left\langle y[n] = \lim_{\mu \rightarrow \infty} [x[n] + \dots + x[n - \mu] + y[n - \mu]] = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] + \sum_{\mu=-\infty}^n x[\mu] \right\rangle$

$$y[n] = \sum_{\mu=-\infty}^n x[\mu]$$

7.3.4 Convolução Discreta ou Soma de Convolução

Novamente fazendo um paralelo ao contínuo, temos que $\left\langle y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\rangle$. Como já visto anteriormente, a integral contínua é descrita como uma soma infinita no mundo discreto, dado por $\left\langle y[n] = \int_{-\infty}^n x[\mu] d\mu = \sum_{\mu=-\infty}^n x[\mu] \right\rangle$. Dessa maneira, a integral $\left\langle y[n] = \int_{-\infty}^n x[\mu] h[n - \mu] d\mu = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x[\mu] h[n - \mu] \right\rangle$

$$y[n] = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x[\mu] h[n - \mu]$$

7.3.5 Reversão, Compressão e Dilatação

A reversão discreta pode ser compreendida da mesma maneira que a reversão contínua: dado um sinal $\langle x[n] \rangle$, temos que o sinal revertido é expresso por $\hat{x}[n] = \langle x[-n] \rangle$.

A compressão também é semelhante: dado o sinal $\langle x[n] \rangle$, o sinal $\langle \hat{x}[n] = x[an] \rangle$ pode ser expresso como uma sub-amostragem do sinal original, entretanto coletando amostras a cada a intervalos (para $\langle a = 3 \rangle$, temos que $\langle \hat{x}[0] = x[0], \hat{x}[1] = x[3], \hat{x}[-2] = x[-6] \rangle$, e assim por diante). Deve-se tomar o cuidado de que a deve ser um número inteiro, já que não é possível obter, por exemplo, o valor de $\langle x[2.6] \rangle$ (já que o domínio do sinal é somente os inteiros).

A dilatação é um processo mais complexo: como o domínio n não é infinitamente detalhado, ao fazermos a dilatação de um sinal, surgirão espaços entre as amostras dele. O processo é definido por $\langle \hat{x}[an] = x[n] \rangle$, em que a também é um número inteiro. Tomemos, por exemplo, uma situação em que $a = 2$. Dessa maneira, teremos que $\langle \hat{x}[2n] = x[n] \rangle$ e, assim, $\langle \hat{x}[0] = x[0], \hat{x}[2] = x[1], \hat{x}[-8] = x[-4] \rangle$. Contudo, também existem os valores de $\hat{x}[n]$ para n sendo um número ímpar. Os procedimentos mais comumente realizados (com os valores de $\langle \hat{x}[n] \rangle$ que não foram obtidos do sinal original) são o de definir como sendo 0; ou interpolar (linearmente, polinomialmente, ou como for mais adequado à situação) esses valores intermediários.

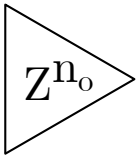
7.4 Diagrama de Blocos

Pode-se descrever uma equação de diferenças como um diagrama de blocos, representando os sinais em questão como entradas e saídas, e as operações que são aplicadas sobre cada sinal como blocos, onde entram e saem sinais (os principais e os auxiliares). O diagrama de blocos pode ser expresso tanto em função do sinal $\langle x[n] \rangle$ quanto da sua transformada (que será vista em breve).

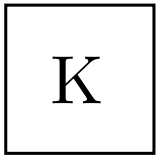
Deve-se também observar a direção do fluxo, num diagrama de blocos. Como os blocos não indicam naturalmente a direção de onde entra o sinal e de onde sai, é necessário apontar essa direção. Tal função é exercida pelas setas no diagrama.

7.4.1 Blocos Fundamentais

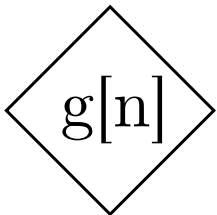
Os blocos mais comuns são:



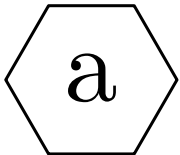
Bloco de deslocamento: Bloco atraso ($\langle n < 0 \rangle$) ou bloco avanço ($\langle n > 0 \rangle$). Se na entrada do bloco for colocado um sinal $\langle x[n] \rangle$, na saída do bloco teremos $\langle \hat{x}[n] = x[n + n_o] \rangle$.



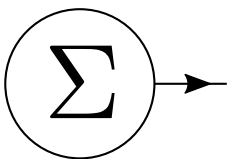
Bloco de ganho: Se na entrada do bloco for colocado um sinal $\langle x[n] \rangle$, na saída do bloco teremos $\langle \hat{x}[n] = K x[n] \rangle$. K pode ser também descrito por uma função $\langle K[n] \rangle$ e, nesse caso, a saída será dada pelo produto pontual $\hat{x}[n] = K[n]x[n]$.



Bloco de convolução: Se na entrada do bloco for colocado um sinal $\langle x[n] \rangle$, na saída do bloco teremos $\langle \hat{x}[n] = g[n] \otimes x[n] \rangle$. Um bloco de ganho K pode ser descrito por um bloco de convolução com a função $\langle K\delta[n] \rangle$.



Bloco de inversão: Se na entrada do bloco houver um sinal $\langle x[n] \rangle$, teremos $\langle \hat{x}[n] = x[an] \rangle$.



Bloco de soma: Se na entrada do bloco entrarem os sinais $\langle x_1[n] \rangle$ e $\langle x_2[n] \rangle$, teremos $\langle \hat{x}[n] = x_1[n] + x_2[n] \rangle$ como saída do bloco. Podem entrar múltiplos sinais no bloco somador, e todos eles serão somados da mesma maneira (a saída do somador é representada pela linha com uma seta).

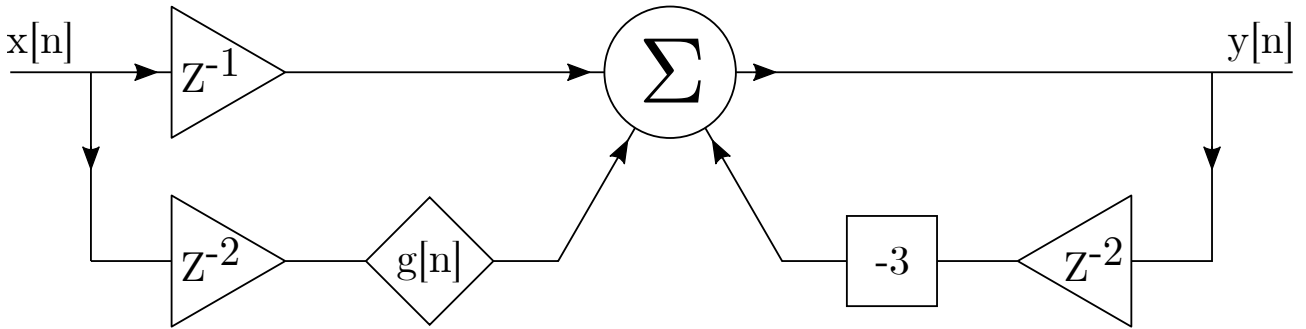
Por exemplo, dada a seguinte equação de diferenças:

$$y[n] + 3y[n-2] = x[n-1] + g[n] \otimes x[n-2]$$

E reescrevendo-a como

$$y[n] = x[n-1] + g[n] \otimes x[n-2] - 3y[n-2]$$

Podemos obter o diagrama de blocos do sistema como sendo



7.5 Transformada Z

Assim como no espaço contínuo, em que uma transformada é definida por $\left\langle X(u) = \mathcal{T}\{x(t)\}(u) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) K(t, u) dt \right\rangle$, essa mesma lógica pode ser aplicada à sinais discretos, sendo que $\left\langle X(w) = \mathcal{T}\{x[n]\}(w) = \int_{n_1}^{n_2} x[n] K(n, w) dn \right\rangle$.

Entretanto, como a função integral, no domínio $\langle n \rangle$, é descrita por $\left\langle \int x[n] dn = \sum x[n] \right\rangle$, então temos que, para uma transformada genérica, $\left\langle \mathcal{T}\{x[n]\}(w) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] K(n, w) \right\rangle$.

Para a Transformada Z, tem-se que $\langle -n_1 = n_2 = \infty \rangle$, e $\left\langle K(n, w) \triangleq K(n, z) = z^{-n} \right\rangle$ e, portanto,

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

7.5.1 Particularização da Transformada de Laplace

Seja um sinal no tempo, dado por $\langle x(t) \rangle$. Temos que, pela amostragem ideal dele, $\left\langle x_i(t) = x(t)\delta_{T_a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a)\delta(t - nT_a) \right\rangle$. Dado isso, tem-se que

$$\mathcal{L}\{x_i(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a)\delta(t - nT_a) \right) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{x_i(t)\}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a) e^{-st} dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a) e^{-snT_a}$$

Substituindo-se $\langle nT_a \Rightarrow n \rangle$ (ou seja, fazendo a transição para o domínio discreto) e $\langle e^s \Rightarrow z \rangle$,

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Dessa maneira, pode-se definir a transformada Z de um sinal discreto $\langle x[n] \rangle$ como a transformada de Laplace do sinal contínuo $\langle x(t) \rangle$, amostrado.

7.5.2 Região de Convergência

Define-se como Região de Convergência a área do plano complexo (sobre o qual $\langle z \rangle$ está), para o qual $\langle X(z) \rangle$ converge. Isto é, $\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty \right\rangle$

Usando a relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z, pode-se concluir que as regiões de convergência de ambas devem ser iguais, dadas as devidas transformações. Isso é, se antes a R.C. era dada por $\langle \text{Re}(s) > \sigma_o \rangle$, agora $\left\langle |z| = |e^s| = e^{\text{Re}(s)} \left| e^{j\text{Im}(s)} \right|^1 = e^{\text{Re}(s)} > e^{\sigma_o} \right\rangle$.

Dessa maneira, a R.C. da transformada Z de um sinal discreto causal é a parte externa de um círculo de raio $\langle e^{\sigma_o} \rangle$.

Para sinais anticausais, pode-se mostrar da mesma maneira que a R.C. da transformada Z do sinal é a parte interna do círculo.

Dessa maneira, temos que sendo $\langle x[n] \rangle$ um sinal não-causal, ele pode ser decomposto em $\langle x[n] = x[n]u[n] + x[n]u[-n] - x[n]\delta[n] \rangle$ e, portanto,

$$\text{R.C.}\{x[n]\} = \text{R.C.}\{x[n]u[n]\} \cap \text{R.C.}\{x[n]u[-n]\} \cap \underline{\text{R.C.}\{x[n]\delta[n]\}}$$

7.5.3 Propriedades da Transformada de Z

Deslocamento no domínio n :

$$\left| \begin{array}{lll} x[n] & \Leftrightarrow & X(z) \quad \vdots R.C._1 \\ x[n + n_o] & \Leftrightarrow & z^n X(z) \quad \vdots R.C._2 = R.C._1 \end{array} \right|$$

Escalonamento no domínio z :

$$\left| \begin{array}{lll} x[n] & \Leftrightarrow & X(z) \quad \vdots R.C._1 \\ z_o^n x[n] & \Leftrightarrow & X\left(\frac{z}{z_o}\right) \quad \vdots R.C. = R.C._1 + \text{Re}\{z_o\} \end{array} \right|$$

Convolução no domínio n :

$$\left| \begin{array}{lll} x_1[n] & \Leftrightarrow & X_1(z) \quad \vdots R.C._1 \\ x_2[n] & \Leftrightarrow & X_2(z) \quad \vdots R.C._2 \\ x_1[n] \otimes x_2[n] & \Leftrightarrow & X_1(z)X_2(z) \quad \vdots R.C. \supseteq R.C._1 \cap R.C._2 \end{array} \right|$$

Diferenciação no domínio n :

$$\left| \begin{array}{lll} x[n] & \Leftrightarrow & X(z) \quad \vdots R.C._1 \\ x[n] - x[n-1] & \Leftrightarrow & (1 - z^{-1}) X(z) \quad \vdots R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array} \right|$$

Multiplicação no domínio n por n :

$$\left| \begin{array}{lll} x[n] & \Leftrightarrow & X(z) \quad \vdots R.C._1 \\ n x[n] & \Leftrightarrow & -z \frac{dX}{dz}(z) \quad \vdots R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array} \right|$$

Integração no domínio n :

$$\left| \begin{array}{lll} x[n] & \Leftrightarrow & X(z) \quad \vdots R.C._1 \\ \sum_{-\infty}^n x[\mu] & \Leftrightarrow & \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z) \quad \vdots R.C._2 \supseteq R.C._1 \end{array} \right|$$

7.5.4 Tabela de Transformadas

$$\begin{aligned} \delta[n] &\leftrightarrow \Delta(z) \\ \Delta(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u[n] &\leftrightarrow \mathcal{U}(z) \\ \mathcal{U}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{z/a}{z/a - 1} = \frac{z}{z - a}$$

7.5.5 Regime Permanente Oscilatório

Se $\langle x[n] = z^n \rangle$, tal que $\langle z = r e^{j\omega} \rangle$. Para que haja um regime permanente na resposta, é necessário que $\langle |z| = r = 1 \rangle$.

Como a unidade de um exponenciador é *rad*, e $\langle n \rangle$ é adimensional, conclui-se portanto que a unidade de $\langle \omega \rangle$ é *rad* (um ângulo somente).

É importante observar que um sinal periódico no tempo, após ser amostrado e discretizado, não necessariamente gera um sinal periódico no domínio $\langle n \rangle$. Por exemplo, o sinal $\langle x(t) = \cos(\omega t) \rangle$ é um sinal periódico. O sinal amostrado tem um período de amostragem $\langle T_a \rangle$, e assim $\langle x_a(t) = \cos(\omega [T_a n]) = \cos(3T_a n) \rangle$ e, portanto, o sinal discreto é $\langle x[n] = \cos[\omega n] \rangle$.

Queremos saber se esse sinal é periódico, ou seja, deseja-se encontrar um $\langle kn_o \rangle$ que faça com que o teste de periodicidade se verifique. Dessa maneira, $x[n] = x[n - kn_o] \rightarrow \cos[\omega n] = \cos[\omega(n - kn_o)] = \cos[\omega n] \cos[\omega kn_o] + \sin[\omega n] \sin[\omega kn_o]$

Queremos que $\left\langle \cos[\omega kn_o] = 1 \implies \omega kn_o = l2\pi \implies \frac{\omega}{2\pi} = \frac{l}{kn_o} \right\rangle$

Como $\langle l, k, n_o \rangle$ são todos números inteiros, então $\left\langle \frac{l}{kn_o} \in \mathbb{Q} \right\rangle$ e, portanto, $\left\langle \frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q} \right\rangle$

7.6 Transformada Unilateral Z

A transformada Unilateral Z é o paralelo da Transformada Unilateral de Laplace, para sinais discretos. Isso é, dado um sinal $\langle x[n] \rangle$, então $\left\langle X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right\rangle$.

A Transformada Unilateral é a transformada Z, dada para $\langle x_u[n] = x[n]u[n] \rangle$, sendo $\langle u[n] \rangle$ o degrau unitário. Assim, $\left\langle X_u(z) = \mathcal{Z}_u\{x[n]\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \right\rangle$

7.6.1 Deslocamento no Tempo

Dado o sinal $\langle x[n] \rangle$, e sendo $\langle y[n] = x[n-1] \rangle$, temos que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}_u\{y[n]\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-(n+1)} \\ &= x[-1] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \end{aligned}$$

De forma geral, temos que

$$y[n] = x[n - n_o] \Leftrightarrow Y(z) = \sum_{i=0}^{n_o} z^{-n_o+i} x[-i] + z^{-n_o} X(z)$$

Em um análogo à Transformada Unilateral de Laplace, temos que $\langle x[-n_o] \rightarrow x[-1] \rangle$ são as condições iniciais do sistema/sinal, e representam (de certa maneira) as derivadas do sinal para o valor $\langle n = 0 \rangle$.

7.6.2 Resolução de Equações de Diferenças

Dada uma equação de diferenças da forma $\left\langle \sum_{i=0}^N a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j] \right\rangle$.

Usando a Transformada Unilateral Z, temos que $\left\langle \sum_{i=0}^N a_i \left(z^{-i} Y(z) + \sum_{n=0}^i y[-n] z^{n-i} \right) \right\rangle$

$$= \sum_{j=0}^M b_j \left(z^{-j} X(z) + \sum_{n=0}^j x[-n] z^{n-j} \right) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} X(z) + \sum_{j=0}^M \sum_{n=0}^j b_j x[-n] z^{n-j}$$

$$Y(z) \underbrace{\left(\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \right)}_{Q(z)} = X(z) \underbrace{\left(\sum_{j=0}^M b_j z^{-j} \right)}_{P(z)} + \underbrace{\sum_{j=0}^M \left(\sum_{n=0}^j b_j x[-n] z^{n-j} \right)}_{\text{C.I.}}$$

$$Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} X(z) + \frac{\text{C.I.}}{Q(z)}$$

7.7 Transformada Discreta de Fourier

A Transformada Discreta de Fourier (T.D.F.) é uma transformada cujo propósito é a análise no domínio angular de um sinal discreto. Ela é descrita por

$$X(c) = \mathcal{F}_d\{x[n]\}(c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]c^{-n}$$

Sendo $\langle c \triangleq e^{j\Omega} \rangle$. É comum observar na literatura $\langle \mathcal{F}_d \rangle$ como uma função de $\langle e^{j\Omega} \rangle$

A T.D.F. é a análise do regime permanente oscilatório de um sinal, dada sobre o círculo de raio unitário (marco-limite da região de convergência do espaço angular).

Por exemplo, se $\langle x[n] = a^n u[n] \rangle$, então $\langle X(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \rangle$. Se $\langle |a| < 1 \rangle$, então a R.C. de $\langle X(z) \rangle$ contém o círculo unitário e, portanto, a T.D.F. de $\langle x[n] \rangle$ existe.

7.7.1 Discretização da Transformada de Fourier

É possível deduzi-la e descrevê-la em função da Transformada de Fourier, analisando sua amostragem, realizando a transformada de Fourier, e realizando a transição para o espaço angular.

<p>Sendo:</p> <p>$\langle x(t) \rangle$ um sinal genérico no tempo</p> <p>$\langle X(\omega) \rangle$ a transformada do sinal</p> <p>$\langle x_a(t) \rangle$ a sua amostragem ideal</p> <p>$\langle X_a(\omega) \rangle$ a transformada de Fourier da amostragem ideal</p> <p>Dado isso, temos que</p>	}	$\mapsto \begin{cases} X_a(s) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_a) \\ = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - k\omega_a)t} dt \right) \\ = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a) e^{-j(\omega - k\omega_a)nT_a} \right) \end{cases}$
---	---	---

Transicionando-se para o mundo discreto $\left(T_a \rightarrow 1, \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \rightarrow 2\pi, (nT_a) \rightarrow [n] \right)$, temos que

$$X_a(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \overset{1}{e^{jk2\pi n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] c^{-n}$$

Dessa maneira, é possível analisar a T.D.F. como uma discretização da Transformada de Fourier (algo que, mnemonicamente, parece ser extremamente trivial, mas não é).

7.7.2 Particularização da Transformada Z

É possível, também, observá-la sob uma analogia com o domínio contínuo:

Assim como a Transformada de Fourier é a análise da Transformada de Laplace sobre o eixo $j\Omega$, temos que a T.D.F. é a análise da Transformada Z, sobre o análogo discreto do eixo $j\Omega$ ($\langle c = e^s = e^{j\Omega} \implies |z| = 1 \rangle$). Dessa maneira,

$$\mathcal{F}_d\{x[n]\}(e^{j\Omega}) = \mathcal{Z}\{x[n]\}(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

O que implica que $\langle \mathcal{F}_d\{x[n]\}(e^{j\Omega}) \rangle$ segue as mesmas propriedades da Transformada Z.

7.7.3 Periodicidade da Transformada Discreta de Fourier

$$\begin{aligned} \text{Como } \langle c^{-n} = (e^{j\Omega})^{-n} = e^{-j\Omega n} \rangle, \text{ então } \langle \mathcal{F}_d\{x[n]\}(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = e^{j2kn\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]c^{-n} \rangle \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2kn\pi} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn(\Omega-2k\pi)} = \mathcal{F}_d\{x[n]\}(e^{j(\Omega-2k\pi)}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_d\{x[n]\}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}_d\{x[n]\}(e^{j(\Omega-2k\pi)})$$

Portanto, a T.D.F. é uma função periódica em relação à $\langle \Omega \rangle$, com periodicidade de 2π , o que implica que toda a informação da T.D.F. está contida em um período (independente dos limites do período). Uma das razões para tal ocorrência está relacionada ao regime permanente oscilatório, o que implica que a unidade de $\langle \Omega \rangle$ seja de $\langle \text{rad} \rangle$, e não $\langle \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rangle$. Isso se deve a, quando se realiza a amostragem, utiliza-se uma frequência determinada para a amostragem, e como para que não haja recobrimento (no domínio contínuo), é necessário que $\langle \omega_c \leq \frac{\omega_a}{2} \rangle$, então mapeia-se ω_a em 2π , e o resto escala-se proporcionalmente (se $\langle \omega_c = \frac{\omega_a}{2} \rangle$, então ω_c será mapeado em π).

7.8 Estabilidade de Sistemas Discretos

Seja $x[n]$ um sinal discreto, limitado absolutamente ($|x[n]| < B \ \forall \ n$), e supondo a existência de um sistema discreto, descrito por sua resposta ao impulso $h[n]$, tal que $x[n] \mapsto y[n] \mid y[n] = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x[\mu]h[n-\mu]$. Para que esse sistema seja BIBO estável, temos que $|x[n]| < B \implies |y[n]| < \overline{B}$:

$$y[n] = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x[\mu]h[n-\mu] \implies |y[n]| = \left| \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x[\mu]h[n-\mu] \right| \leq \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |x[\mu]h[n-\mu]|$$

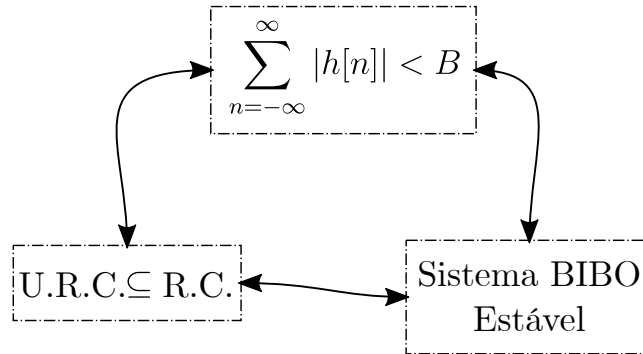
$$|y[n]| < \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} B|h[n-\mu]| = B \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |h[\mu]|$$

Ou seja, se $\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |h[\mu]| < C$, então $|y[n]| < BC = \overline{B}$.

Por outro lado, temos que a T.D.F. do sinal $h[n]$ é $H(c)$, e

$$|H(c)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]c^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \underbrace{|c^{-n}|}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

Ou seja, se $h[n]$ for absolutamente somável, então a T.D.F. existe, e portanto (devido à T.D.F. ser uma particularização da Transformada Z), o círculo de raio unitário está contido pela R.C., o que implica que o sistema é estável BIBO.



7.9 Filtros Discretos

Seja um sistema com entrada $\langle x[n] \rangle$, saída $\langle y[n] \rangle$, relacionado por $\langle y[n] = x[n] \circledast h[n] \rangle$. No domínio Z, a relação é dada por $\langle Y(z) = H(z)X(z) \rangle$ e, portanto, a função de transferência $\langle H(z) \rangle$ é dada por $\left\langle H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \right\rangle$. Para sistemas reais (ou seja, causais), temos $\left\langle H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots \right\rangle$.

7.9.1 Filtros com Resposta Finita ao Impulso

Um filtro com resposta ao impulso finita (*Finite Impulse Response*, FIR) é, como o nome sugere, um filtro cuja resposta ao impulso seja $\langle h[n] = 0 \forall n > n_o \rangle$, o que implica $H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + \dots + h[n_o]z^{-n_o} = \left(\sum_{n=0}^{n_o} z^{n_o-n} h[n] \right) \div z^{n_o}$, que possui polos em $z = 0$ e, portanto, é estável para $|z| \geq 0$. Dessa maneira, pode-se fazer um filtro com Resposta ao Impulso Finita (*Finite Impulse Response*, ou F.I.R.), cujo resultado é um decaimento das frequências mais altas (próximas de $\langle 2\pi \rangle$), e um ganho para frequências mais baixas (já que está havendo uma ponderação dos sinais com os valores em momentos anteriores).

Portanto, temos que $\langle Y(z) = h[0]X(z) + h[1]z^{-1}X(z) + \dots + h[n_o]z^{-n_o}X(z) \rangle$ e, portanto,

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots h[n_o]x[n-n_o]$$

7.9.2 Filtros com Resposta Infinita ao Impulso

Entretanto, sistemas reais não possuem resposta ao impulso finita. Sempre haverá algum sinal remanescente no sistema, mesmo que muito pequena. Se, a partir de algum instante $\langle n_o \rangle$, esse sinal puder ser desprezado (aproximando-se $\langle h[n] = 0 \forall n > t_o \rangle$), então pode-se aproximar a resposta ao impulso do sistema (que possui duração infinita) por uma resposta finita, e utilizar o método anterior.

Se isso não for possível, então deve-se usar a resposta infinita ao impulso. Dado um sistema, descrito por uma equação de diferenças $\left\langle \sum_{i=0}^Q a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^P b_j x[n-j] \right\rangle$.

Aplicando a Transformada Z, temos que $\left\langle \sum_{i=0}^Q a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{j=0}^P b_j z^{-j} X(z) \right\rangle$ (ignorando-se as condições iniciais). Portanto, manipulando a equação acima, obtemos

$\left\langle H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left[\sum_{j=0}^P b_j z^{-j} \right] \div \left[\sum_{i=0}^Q a_i z^{-i} \right] \right\rangle$. Escrevendo em função das raízes de ambos os

polinômios, temos $\left\langle H(z) = \frac{b_j z^{-j}}{a_i z^{-i}} \left[\prod_{j=0}^P (z - z_j) \right] \div \left[\prod_{i=0}^Q (z - z_i) \right] \right\rangle$. Portanto, para que o sis-

tema seja estável, é necessário que $\langle j > i \rangle$ (o que implicará que o sistema será integrador), e que todos os polos $\langle z_i \rangle$ estejam dentro do círculo de raio unitário (o que implicará que a

região de convergência inclui o círculo, implicando que a resposta ao impulso terá formato de $\langle a^{-n} u[n] \ n > 0 \rangle$, que é uma resposta estável).