

Roteiro da Simulação 7:

Amostragem de Sinais

Objetivos

- Verificar a influência da taxa de amostragem na reconstrução de sinais de tempo contínuo através de suas amostras.

Introdução Teórica

1. Representação de um Sinal de Tempo Contínuo por suas Amostras: O Teorema da Amostragem

Em geral, na ausência de quaisquer condições ou informações adicionais, não esperaríamos que um sinal pudesse ser especificado unicamente por uma sequência de amostras uniformemente espaçadas. Por exemplo, na Fig. 1, ilustramos três sinais distintos de tempo contínuo, todos com valores idênticos em múltiplos inteiros de T ; ou seja, $x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$.

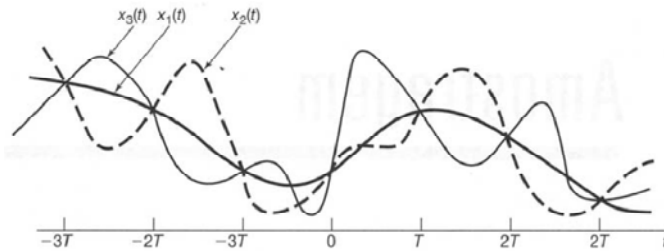


Fig. 1: Três sinais de tempo contínuo com valores idênticos em múltiplos inteiros de T .

Claramente, existe um número infinito de sinais que podem gerar determinado conjunto de amostras. Porém, conforme veremos, se um sinal for limitado em banda, ou seja, se sua transformada de Fourier for nula fora de um intervalo finito de frequências, e se as amostras forem tomadas suficientemente próximas em relação à frequência mais alta presente no sinal, então as amostras especificam *unicamente* tal sinal, e podemos reconstruí-lo perfeitamente. Esse resultado, conhecido como *Teorema da Amostragem*, tem importância significativa na aplicação prática dos métodos de análises de sinais e sistemas.

1.1 Amostragem com trem de impulsos (amostragem ideal)

Para desenvolver o teorema da amostragem, precisamos representar de forma conveniente a amostragem de um sinal de tempo contínuo em intervalos regulares. Um modo útil de fazê-lo é por meio de um trem de impulsos periódico multiplicado pelo sinal de tempo contínuo $x(t)$ que queremos amostrar. Esse mecanismo, conhecido como amostragem por trem de impulsos, é representado na Fig. 2. O trem de impulsos periódico $p(t)$ é conhecido como *função de amostragem*, e a frequência fundamental de $p(t)$, $\omega_s = 2\pi/T$ (rad/s), ou $f_s = 1/T$ (Hz), como a *frequência de amostragem*. No domínio de tempo,

$$x_p(t) = x(t)p(t), \quad (1)$$

em que

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (2)$$

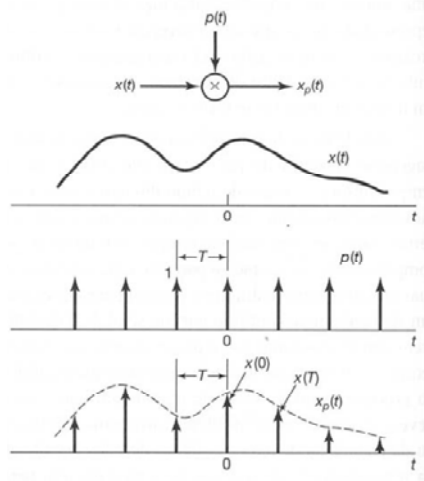


Fig. 2: Amostragem com trem de impulsos.

Devido à propriedade de amostragem do impulso unitário, sabemos que multiplicar $x(t)$ por um impulso unitário toma a amostra do sinal no ponto em que o impulso está localizado, ou seja,

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0). \quad (3)$$

Então, da Eq. (1), vemos, conforme ilustra a Fig. 2, que $x_p(t)$ é um trem de impulsos com as amplitudes dos impulsos iguais às amostras de $x(t)$ em intervalos espaçados de T ; ou seja,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT). \quad (4)$$

Da propriedade de multiplicação, sabemos que

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) P(j(\omega - \theta)) d\theta, \quad (5)$$

sendo que

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s). \quad (6)$$

Como a convolução com um impulso simplesmente desloca um sinal; isto é

$$X_p(j\omega) = X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = X(j(\omega - k\omega_s)), \quad (7)$$

segue que

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)). \quad (8)$$

Ou seja, $X_p(j\omega)$ é uma função de ω periódica que consiste de uma sobreposição de réplicas deslocadas de $X(j\omega)$, multiplicadas por $1/T$, conforme ilustrado na Fig. 3. Na Fig. 3(c), $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$ ou, de modo equivalente, $\omega_s > 2\omega_M$, e, portanto, não existe sobreposição entre as réplicas deslocadas de $X(j\omega)$, enquanto, na Fig. 3(d), com $\omega_s < 2\omega_M$, existe sobreposição. Para o caso ilustrado na Fig. 3(c), $X(j\omega)$ é fielmente reproduzido em múltiplos inteiros da frequência de amostragem. Consequentemente, se $\omega_s > 2\omega_M$, $x(t)$ pode ser recuperado exatamente a partir de $x_p(t)$ por meio de um filtro passa-baixas com ganho T e uma frequência de corte maior que ω_M e menor que $\omega_s - \omega_M$, conforme indicado na Fig. 4. Esse resultado básico, conhecido como *Teorema da Amostragem*, pode ser apresentado da seguinte forma:

Teorema da Amostragem

Seja $x(t)$ um sinal de banda limitada com $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. Então, $x(t)$ é determinado unicamente por suas amostras $x(nT)$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se

$$\omega_s > 2\omega_M,$$

em que

$$\omega_s = 2\pi/T \text{ (rad/s)}.$$

Dadas essas amostras, podemos reconstruir $x(t)$ gerando um trem de impulsos periódico em que impulsos sucessivos têm amplitudes que são valores de amostras sucessivas. Esse trem de impulsos é então processado por meio de um filtro passa-baixas ideal com ganho T e frequência de corte maior que ω_M e menor que $\omega_s - \omega_M$. O sinal de saída resultante será exatamente igual a $x(t)$.

A frequência $2\omega_M$, que, conforme o teorema da amostragem, deve ser menor que a frequência de amostragem, comumente é conhecida como *taxa de Nyquist*.

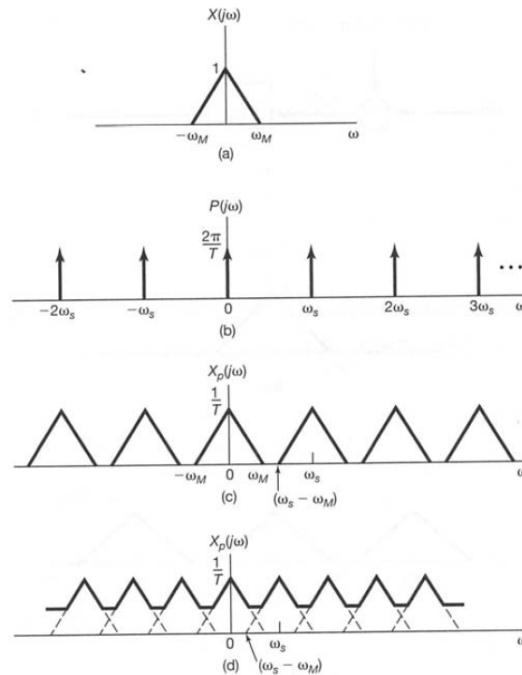


Fig. 3: Efeito no domínio da frequência da amostragem no domínio do tempo: (a) espectro do sinal original; (b) espectro da função de amostragem; (c) espectro do sinal amostrado com $\omega_s > 2\omega_M$; (d) espectro do sinal amostrado com $\omega_s < 2\omega_M$.

Os filtros ideais geralmente não são usados na prática por diversos motivos. Em diversas aplicações práticas, o filtro passa-baixas ideal na Fig. 4 pode ser substituído por um filtro não ideal $H(j\omega)$ que se aproxime da característica de frequência desejada com precisão suficiente para o problema de interesse (ou seja, $H(j\omega) \cong 1$ para $|\omega| < \omega_M$ e $H(j\omega) \cong 0$ para $|\omega| > \omega_s - \omega_M$). Obviamente, qualquer aproximação desse tipo no estágio de filtragem passa-baixas pode levar a alguma discrepância entre $x(t)$ e $x_r(t)$ na Fig. 4 ou, de modo equivalente, entre $X(j\omega)$ e $X_r(j\omega)$. A escolha

particular do filtro não ideal é então ditada pelo nível de distorção aceitável para a aplicação em consideração.

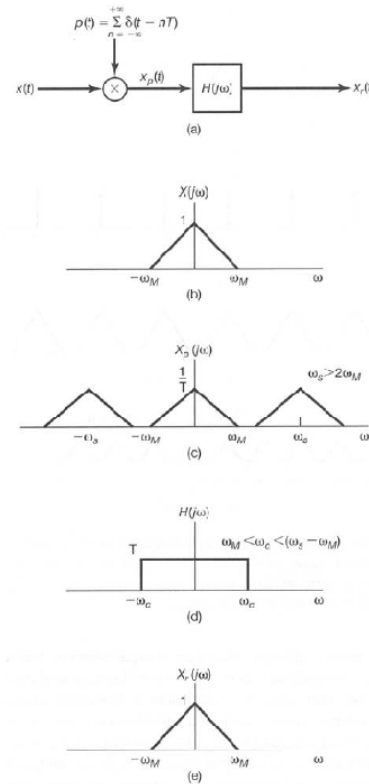


Fig. 4: Recuperação exata de um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras usando um filtro passa-baixas ideal. (a) Sistema para amostragem e reconstrução. (b) Espectro representativo para $x(t)$. (c) Espectro correspondente para $x_p(t)$. (d) Filtro passa-baixas ideal para recuperar $X(j\omega)$ a partir de $X_p(j\omega)$. (e) Espectro de $x_r(t)$.

1.2 Amostragem com um retentor (*sample-and-hold*) de ordem zero

O teorema da amostragem, que é facilmente explicado em termos de amostragem por trem de impulsos, estabelece o fato de que um sinal de banda limitada é representado unicamente por suas amostras. Na prática, pulsos estreitos de grande amplitude, que aproximam os impulsos, são relativamente difíceis de gerar e transmitir. Comumente é mais conveniente gerar o sinal amostrado em uma forma conhecida como *retentor de ordem zero* (*zero-order sample-and-hold*). Esse sistema amostra $x(t)$ em determinado instante e mantém esse valor até o próximo instante no qual a amostra é tomada, como ilustra a Fig. 5. A reconstrução de $x(t)$ a partir da saída de um retentor de ordem zero novamente pode ser realizada por filtragem passa-baixas. Contudo, nesse caso, o filtro exigido não tem um ganho constante na banda de passagem. Para determinar a característica de filtragem exigida, primeiro observamos que a saída $x_o(t)$ do retentor de ordem zero pode, a princípio, ser gerada pela amostragem do trem de impulsos seguida por um sistema LIT com uma resposta ao impulso retangular, conforme representado na Fig. 6. Para reconstruir $x(t)$ a partir de $x_o(t)$, consideramos o processamento de $x_o(t)$ com um sistema LIT com resposta ao impulso $h_r(t)$ e resposta em frequência $H_r(j\omega)$. A cascata desse sistema com o sistema da Fig. 6 é mostrada na fig. 7, em que queremos especificar $H_r(j\omega)$ de modo que $r(t) = x(t)$. Comparando o sistema da Fig. 7 com o da Fig. 4, vemos que $r(t) = x(t)$ se a combinação em cascata de $h_o(t)$ e $h_r(t)$ for o filtro passa-baixas ideal $H(j\omega)$ usado na Fig. 4. Uma vez que

$$H_o(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[\frac{2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega} \right], \quad (9)$$

Isso requer que

$$H_r(j\omega) = \left[\frac{e^{j\omega T/2} H(j\omega)}{\frac{2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}} \right]. \quad (10)$$

Por exemplo, com a frequência de corte de $H(j\omega)$ igual a $\omega_s/2$, a magnitude e fase ideais para o filtro de reconstrução seguindo um retentor de ordem zero são conforme mostra a Fig. 8.

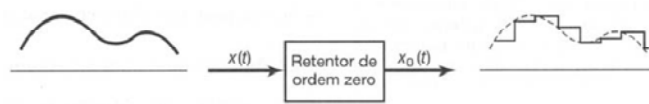


Fig. 5: Amostragem utilizando um retentor de ordem zero.

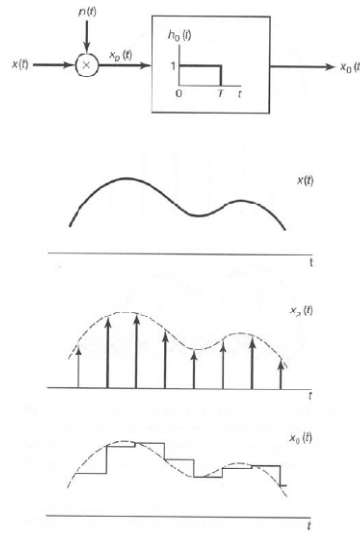


Fig. 6: Retentor de ordem zero como amostragem por trem de impulsos seguido por um sistema LIT cuja resposta impulsiva é um pulso retangular.

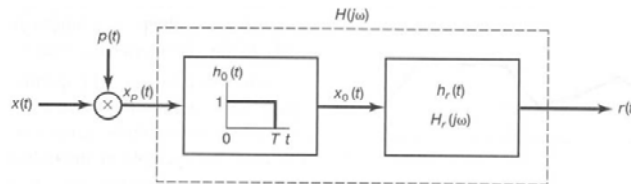


Fig. 7: Cascata da representação de um retentor de ordem zero (Fig. 6) com um filtro de reconstrução.

Mais uma vez, na prática, a resposta em frequência em (10) não pode ser implementada exatamente, e uma aproximação adequada precisa ser projetada. De fato, em muitas situações, a saída de um retentor de ordem zero é considerada como uma aproximação adequada para o sinal original por si só, sem qualquer filtragem passa-baixas adicional, e basicamente representa uma

interpolação possível entre os valores das amostras, embora admitidamente muito grosseira. Como alternativa, em algumas aplicações, podemos querer realizar alguma interpolação mais suave entre os valores das amostras.

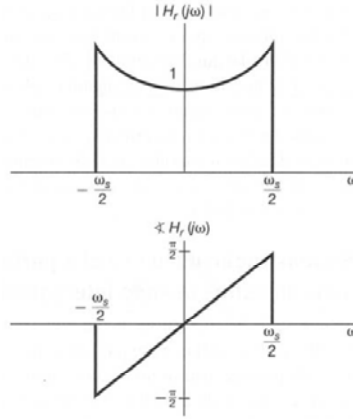


Fig. 8: Magnitude e fase do filtro de reconstrução para um retentor de ordem zero.

2. Reconstrução de um Sinal a partir de suas Amostras usando Interpolação

A interpolação, isto é, o ajuste de um sinal contínuo com um conjunto de amostras, é um procedimento comumente utilizado para reconstruir uma função aproximada ou exatamente a partir de amostras. Um procedimento de interpolação simples é o retentor de ordem zero, visto acima. Outra forma de interpolação útil é a *interpolação linear*, na qual pontos de amostra adjacentes são ligados por uma linha reta, como ilustrado na Fig. 9. Em fórmulas de interpolação mais complicadas, pontos de amostra podem ser ligados por polinômios de ordem mais alta ou outras funções matemáticas.

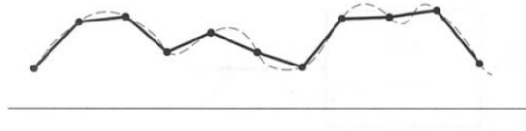


Fig. 9: Interpolação linear entre os pontos das amostras. A curva tracejada representa o sinal original, e a curva sólida, a interpolação linear.

Como vimos anteriormente, para um sinal de banda limitada, se os instantes de amostragem forem suficientemente próximos, então o sinal pode ser reconstruído exatamente; ou seja, por meio do uso de um filtro passa-baixas, a interpolação exata pode ser realizada entre os pontos de amostra. A interpretação da reconstrução de $x(t)$ como um processo de interpolação torna-se evidente quando consideramos o efeito no domínio de tempo do filtro passa-baixas na Fig. 4. Em particular, a saída é dada por

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_p(t) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t - nT). \end{aligned} \quad (11)$$

A Eq. (11) descreve como ajustar uma curva contínua entre os pontos de amostra $x(nT)$ e, consequentemente, representa a fórmula de interpolação. Para o filtro passa-baixas ideal $H(j\omega)$ da Fig. (4),

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t}, \quad (12)$$

de modo que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\omega_c T \sin(\omega_c(t-nT))}{\pi \omega_c(t-nT)}. \quad (13)$$

A reconstrução de acordo com a Eq. (13) com $\omega_c = \omega_s/2$ está ilustrada na Fig. 10. A Fig. 10(a) representa o sinal de banda limitada $x(t)$ original, e a Fig. 10(b) representa $x_p(t)$, o trem de impulsos das amostras. A Fig. 10(c) ilustra a sobreposição dos termos individuais da Eq. (13).

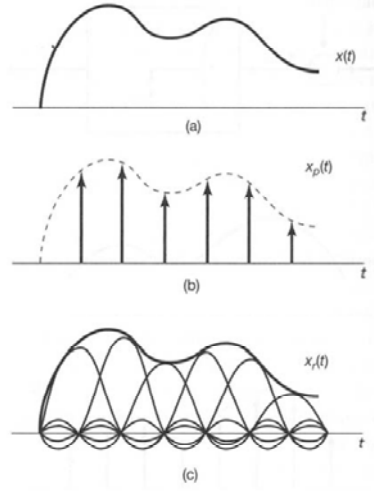


Fig. 10: Interpolação ideal de banda limitada usando a função sinc. (a) Sinal de banda limitada $x(t)$. (b) Trem de impulsos de amostras de $x(t)$. (c) Interpolação ideal de banda limitada em que o trem de impulsos é substituído por uma superposição de funções sinc.

A interpolação usando a resposta ao impulso de um filtro passa-baixas ideal, como na Eq. (13), é comumente conhecida como uma *interpolação de banda limitada*, pois implementa a reconstrução exata se $x(t)$ for limitado em banda e a frequência de amostragem satisfizer as condições do teorema da amostragem. Conforme indicamos, em muitos casos, é preferível usar um filtro menos preciso, porém mais simples, ou, de modo equivalente, uma função de interpolação mais simples que a função na Eq. (12). Por exemplo, o retentor de ordem zero pode ser visto como uma forma de interpolação entre os valores de amostra em que a função de interpolação $h(t)$ é a resposta ao impulso $h_o(t)$ representada na Fig. 6. Nesse sentido, com $x_o(t)$ na Fig. 6 correspondendo à aproximação de $x(t)$, o sistema $h_o(t)$ representa uma aproximação do filtro passa-baixas ideal exigido para a interpolação exata. A Fig. 11 mostra a magnitude da resposta em frequência do filtro de interpolação retentor de ordem zero, sobreposta à do filtro de interpolação exato.

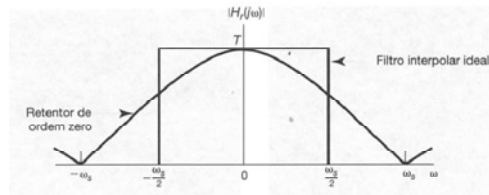


Fig. 11: Magnitude da resposta em frequência do retentor de ordem zero e do filtro interpolador ideal.

Simulação

Execute o programa “Sim7a” no MatLab para visualizar o sinal de tempo contínuo que será amostrado (é o mesmo sinal do Pré-Laboratório, para $-5 \leq t \leq 5$ segundos), bem como seu espectro de frequência. Em seguida, execute o programa “Sim7b” para diferentes frequências de amostragem. O programa “Sim7b” exibe o sinal amostrado (de tempo discreto), seu espectro de frequência, e o sinal de tempo contínuo, reconstruído a partir de suas amostras através de interpolação por funções sinc, de acordo com a Eq. (13). Em particular, compare os resultados que você obtém com a execução do programa “Sim7b” para as frequências de amostragem de 1 kHz e 4kHz.