<u>Roteiro da Simulação 1:</u>
<u>Sinais e Propriedades Básicas de Sistemas</u>

Objetivos

- Verificar algumas das propriedades básicas no sistema pêndulo e massa-mola, conhecendo-se apenas os sinais de excitação e de resposta dos dois sistemas.

Introdução

É muito importante conhecer as propriedades fundamentais que caracterizam os sistemas. Nesta simulação, analisaremos o sistema pêndulo e massa-mola, identificando algumas de suas propriedades básicas. Conhecendo-se apenas os sinais de excitação e de resposta, serão verificadas as propriedades de linearidade, causalidade, estabilidade, memória e variância no tempo.

Descrição dos Sistemas

1) Pêndulo

Considere o sistema pêndulo mostrado na Figura 1. A equação que o descreve é dada por:

$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + kl\frac{d\theta(t)}{dt} + mg\sin[\theta(t)] = f, \qquad (1)$$

onde θ é a posição do pêndulo, em regime permanente, com relação à vertical (posição de repouso), m é a massa da esfera, l é o comprimento da haste, g é a aceleração da gravidade, k é o coeficiente de atrito e f é a força externa aplicada. Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem. Integrando duplamente ambos os lados da equação acima e explicitando $\theta(t)$, tem-se que:

$$\theta(t) = {}^{1}\!/_{m}\iint_0^t f\, d\tau^2 \;-\; {}^{k}\!/_{m}\int_0^t \theta(\tau)\, d\tau - {}^{g}\!/_{l}\iint_0^t \sin[\theta(\tau)]\; d\,\tau^2. \qquad (2)$$

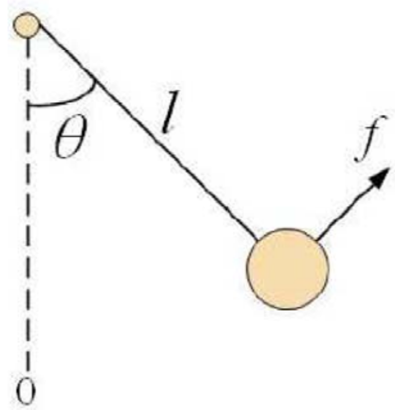

Figura 1: Pêndulo

Através da Equação (2), pode-se avaliar a dinâmica da resposta do sistema, isto é o ângulo $\theta(t)$ que o pêndulo descreve no tempo em função da força f aplicada. A força é sempre tangencial ao sentido de movimento do pêndulo. À medida que o tempo evolui, essa força é compensada pelo peso do bloco e pela força de atrito em torno do pêndulo, levando-o a uma nova posição de repouso (o pêndulo fica então suspenso pela força aplicada). A posição inicial de repouso do pêndulo em t=0 é denotada por $\theta(0)$=0, na qual f=0.

2) Massa-Mola

O sistema massa-mola é mostrado na Figura 2. A força total aplicada no bloco de massa m é dada pela 2ª Lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{3}$$

onde a aceleração a do bloco é dada por:

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2}. \tag{4}$$

Três forças estão presentes:

a) a força u que é aplicada ao bloco para deslocá-lo;
b) a força de reação da mola devido a sua constante de elasticidade k e;
c) a força de reação devido ao atrito entre o bloco e a superfície.

Logo, a força total aplicada é

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = u - ky(t) - f\,\frac{dy(t)}{dt}, \tag{5}$$

onde f é o coeficiente de atrito viscoso.

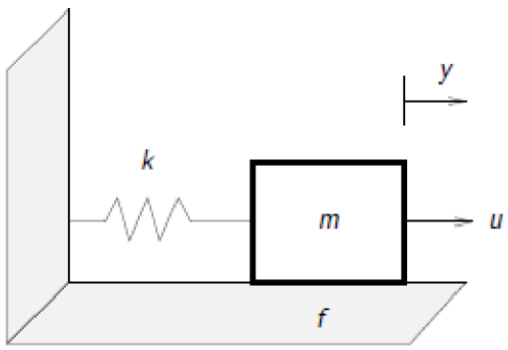

Figura 2: Massa-mola

Novamente, tem-se uma equação diferencial de 2ª ordem. Integrando duplamente ambos os lados da Equação (5), chega-se a:

$$y(t) = {}^{1}/_{m} \iint_0^t u\,d\tau^2 - {}^{k}/_{m} \iint_0^t y(\tau)\,d\tau^2 - {}^{f}/_{m} \int_0^t y(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

A equação acima descreve a dinâmica da resposta do sistema massa-mola – o deslocamento do bloco ao longo do tempo em função da força u aplicada. Quando as forças de reação devido ao atrito e à constante de elasticidade da mola compensarem a força u, o deslocamento se cessará e o bloco passará a assumir uma nova posição de repouso. A posição inicial de repouso do bloco em t=0 é denotada por $y(0)$=0, na qual u=0.

Propriedades

1) Estabilidade

Se a entrada para um sistema estável é limitada (isto é, se seu módulo não cresce sem limites), então a saída também deve ser limita e, portanto, não pode divergir (na língua inglesa descrito pelo acrônimo BIBO – *Bound Input Bound Output*). Para verificar se um sistema é instável quando suspeitamos disso, basta usar a estratégia útil de procurar por uma entrada limitada específica que leva a uma saída ilimitada. Encontrar um exemplo desse tipo permite concluir que o sistema é instável.

2) Sistemas com e sem memória

Um sistema é dito sem memória se sua saída para cada valor da variável independente em um dado instante depende da entrada somente naquele mesmo instante. Em linhas gerais, o conceito de memória em um sistema corresponde à presença de um mecanismo que retém ou guarda a informação sobre os valores de entrada e de saída em instantes que não o atual.

3) Causalidade

Um sistema é causal se a saída, em qualquer tempo, depender dos valores da entrada somente nos instantes presente e passados. Um sistema assim frequentemente é chamado de sistema não antecipativo, pois a saída do sistema não antecipa valores futuros da entrada. Consequentemente, se duas entradas para um sistema causal são idênticas até determinado ponto no tempo t_0, as saídas correspondentes também devem ser iguais até esse mesmo instante.

4) Invariância do tempo

Conceitualmente, um sistema é invariante no tempo se o comportamento e as características do sistema são fixos ao longo do tempo. A propriedade da invariância no tempo pode ser descrita de forma bem simples nos termos da linguagem de sinais e sistemas. Especificamente, um sistema é invariante no tempo se um deslocamento no tempo do sinal de entrada resulta em um deslocamento no tempo idêntico no sinal de saída. Ou seja, em sistemas de tempo contínuo, se $y(t)$ é a saída de um sistema invariante no tempo quando $x(t)$ é a entrada, então $y(t\text{-}t_0)$ é a saída quando $x(t\text{-}t_0)$ é aplicado.

5) Linearidade

Um sistema linear, de tempo contínuo ou discreto, é um sistema que tem a importante propriedade de superposição: se uma entrada consiste de uma soma ponderada de diversos sinais, então a saída é a superposição – isto é, a soma ponderada – das respostas do sistema a cada um desses sinais. Mais precisamente, suponha $y_1(t)$ seja a resposta de um sistema de tempo contínuo a uma entrada $x_1(t)$, e que $y_2(t)$ seja a saída correspondente à entrada $x_2(t)$. Então, o sistema é linear se:

a. A resposta a $x_1(t) + x_2(t)$ é $y_1(t) + y_2(t)$; e
b. A resposta a $ax_1(t)$ é $ay_1(t)$, em que a é qualquer constante complexa.

A primeira das duas propriedades acima é conhecida como propriedade da aditividade, enquanto que a segunda é conhecida como propriedade da mudança de escala ou homogeneidade. As duas propriedades definindo um sistema linear podem ser combinadas em uma única relação:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t).$$

Simulação

Inicie pela propriedade de estabilidade. Entre no Simulink, abra os programas para os sistemas pêndulo e massa-mola, e verifique como os dois sistemas são simulados através das Equações (2) e (6). Para tal, clique duas vezes nos blocos correspondentes aos sistemas pêndulo e massa-mola.

Antes de executar o programa para verificar uma propriedade em específico, procure entender, com base na definição conceitual, como aquela propriedade pode ser verificada observando-se apenas os sinais de saída em resposta às excitações. Qual o motivo de se utilizar apenas o degrau como sinal de entrada?

Execute os programas e verifique as propriedades de estabilidade, linearidade, causalidade, memória e variância no tempo dos sistemas pêndulo e massa-mola.