Roteiro da Simulação 5:
Propriedades da Transformada de Fourier

Objetivos

- Verificar, por simulação, as propriedades de escalonamento no tempo e translação em frequência (modulação) da transformada de Fourier.

Introdução Teórica

As propriedades da transformada de Fourier dão uma ampla visão sobre a transformada e a relação entre as descrições no domínio do tempo e da frequência de um sinal. Além disso, muitas das propriedades são úteis para reduzir a complexidade do cálculo das transformadas e transformadas inversas de Fourier.

É conveniente usar uma notação abreviada para indicar a relação de um sinal e sua transformada. Um sinal $x(t)$ e sua transformada de Fourier $X(j\omega)$ (ou $X(f)$) são relacionados pelas equações de síntese e análise da transformada de Fourier:

- Equação de síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\, df \qquad (1)$$

- Equação de análise

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt \qquad (2)$$

ou

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad (3)$$

Por vezes, é conveniente referir-se a $X(j\omega)$ (ou $X(f)$) com a notação $\mathfrak{F}\{x(t)\}$ e a $x(t)$ com a notação $\mathfrak{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ (ou $\mathfrak{F}^{-1}\{X(f)\}$). Logo, o par transformado de Fourier é denotado por

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

1. Escalonamento no tempo

Se

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

então

$$x(at) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \qquad (4)$$

sendo a um número real diferente de zero. Essa propriedade segue diretamente da definição da transformada de Fourier, ou seja:

$$\mathfrak{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}\,dt$$

e, por substituição de variáveis, $\tau = at$,

$$\mathfrak{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau}\,d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau}\,d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

Assim, a menos do fator de amplitude $1/|a|$, uma mudança de escala linear no tempo por um fator a corresponde a uma mudança de escala linear na frequência por um fator de $1/a$, e vice-versa. Além disso, considerando-se $a = -1$, tem-se que

$$x(-t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega),$$

o que vale dizer que reverter um sinal no tempo também reverte sua transformada de Fourier.

2. Translação em freqüência

Se

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

então

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0)) \tag{5}$$

Diretamente da definição da transformada de Fourier, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{\, x(t)e^{j\omega_0 t}\,\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt \\ &= X(j(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

Da mesma forma, demonstra-se também que

$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega + \omega_0)) \tag{6}$$

- Modulação de Amplitude

Esta técnica de modulação translada essencialmente o espectro de frequência do sinal a ser transmitido, $f(t)$, multiplicando-o por um sinal senoidal com frequência igual à translação desejada, ou seja:

$$s(t) = f(t)\cos(\omega_c t). \tag{7}$$

A partir da propriedade de translação em frequência, tem-se que

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega_c t)\,e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}\right)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}[F(j(\omega+\omega_c)) + F(j(\omega-\omega_c))]. \end{aligned} \tag{8}$$

O sinal $c(t) = \cos(\omega_c t)$ é chamado de portadora. A multiplicação de $c(t)$ por $f(t)$ é realmente equivalente à variação da amplitude da portadora, proporcionalmente a $f(t)$. Diz-se que a portadora $c(t)$ é modulada em amplitude pelo sinal $f(t)$. Então, o sinal $f(t)$ é o sinal modulador e a portadora $c(t)$ é o sinal a ser modulado. Esse modo de transmissão é chamado de modulação de amplitude com portadora suprimida (AM-SC – *Amplitude Modulation Suppressed Carrier*), devido ao fato de que o sinal modulado $s(t)$ não contém nenhum sinal adicional da portadora, diferentemente do que ocorre na técnica de modulação AM convencional.

De (8), vê-se que a modulação AM-SC translada o espectro de frequência do sinal mensagem, $F(j\omega)$, de $\pm\omega_c$ radianos por segundo, como ilustra a Fig. 1e. Para recuperar o sinal original $f(t)$, a partir do sinal modulado $s(t)$, é necessário re-transladar o espectro à sua posição original. Esse processo de re-translação do espectro à sua posição original é conhecido como demodulação por detecção síncrona.

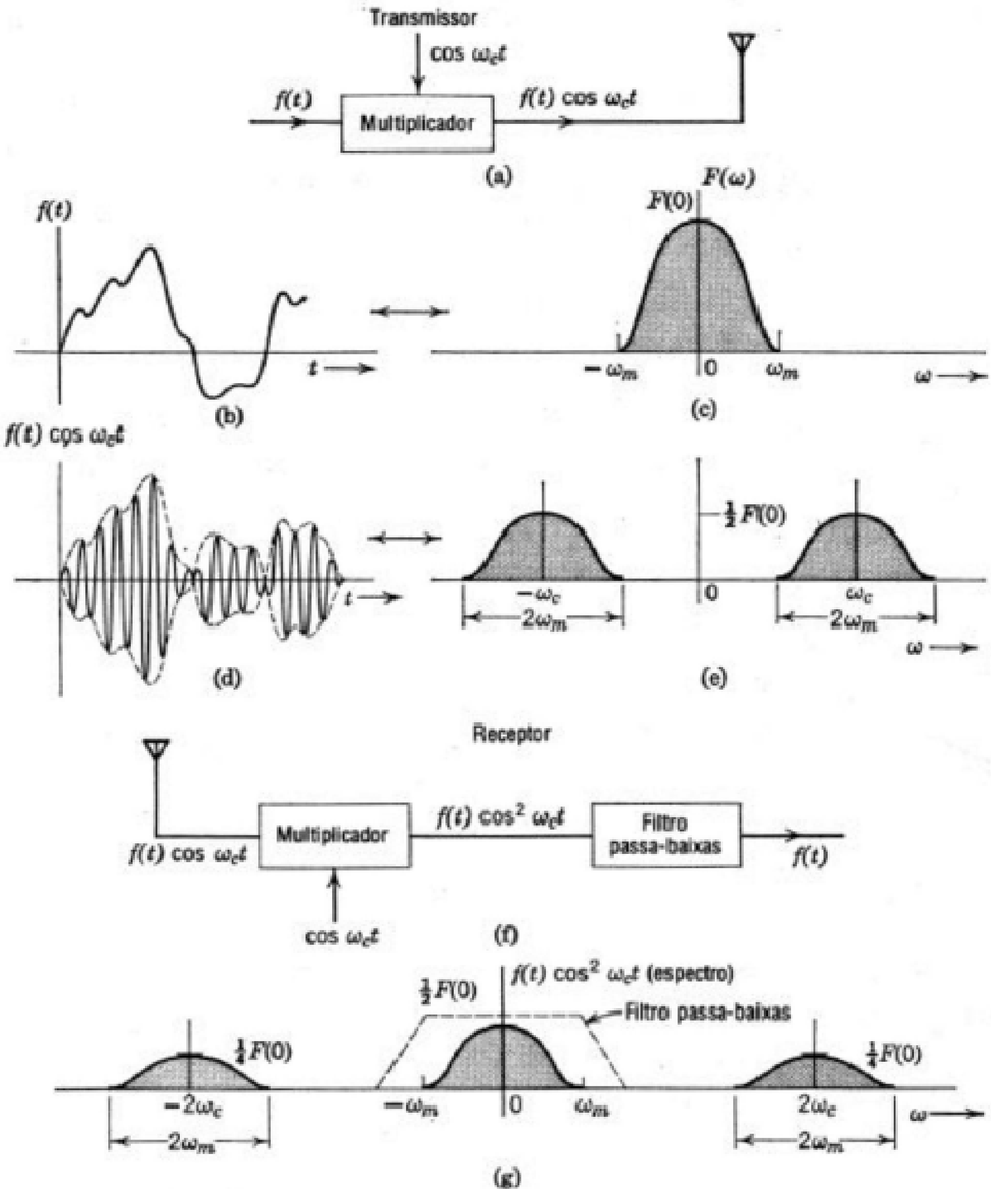

Figura 1: Modulação AM-SC e demodulação por detecção síncrona.

O espectro da forma de onda modulada (Fig. 1e) pode ser convenientemente re-transladado à posição original, multiplicando-se agora o sinal modulado por $\cos(\omega_c t)$ no extremo receptor. Desta vez, para expor outra propriedade da transformada de Fourier, lança-se mão da propriedade da multiplicação no tempo. Uma vez que a multiplicação no domínio do tempo é equivalente à convolução dos espectros no domínio da frequência, o espectro do sinal resultante $f(t)\cos^2(\omega_c t)$ será obtido pela convolução do espectro do sinal recebido (Fig. 3e) com o espectro de $\cos(\omega_c t)$ (dois impulsos em $\pm\omega_c$):

$$\mathrm{c}(t) = \cos(\omega_c t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} C(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$s(t)\mathrm{c}(t) \overset{\mathfrak{F}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\{S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]\} = \frac{1}{2}F(j\omega) + \frac{1}{4}[F\big(j(\omega + 2\omega_c)\big) + F\big(j(\omega - 2\omega_c)\big)]$$

Observe que essa convolução produz o espectro mostrado na Fig. 1g. Desse espectro, é evidente que o sinal original $f(t)$ pode ser recuperado, usando-se um filtro passa-baixas, que permitirá a passagem de $F(j\omega)$ e atenuará as componentes restantes em $\pm 2\omega_c$.

Uma forma possível da característica do filtro passa-baixas é mostrada (linha tracejada) na Fig. 1g. O sistema necessário no extremo receptor para recuperar o sinal $f(t)$ a partir do sinal modulado recebido $s(t)$ é mostrado na Fig. 1f. É interessante observar que a multiplicação de $f(t)$ por $c(t)$ translada o seu espectro de $\pm\omega_c$. O novo espectro pode ser re-transladado à sua posição original mediante outra translação de $\pm\omega_c$, que se obtém pela multiplicação do sinal modulado por $c(t)$ no receptor (nesse processo, obtemos um espectro adicional em $\pm 2\omega_c$, que é eliminado através de filtragem). Portanto, o processo no extremo receptor é exatamente igual ao processo necessário no extremo transmissor. Logo, esse método de recuperação do sinal original é chamado de detecção síncrona ou detecção coerente.

Por fim, vale mencionar que a multiplicação de um sinal por outro pode ser compreendida como o uso de um sinal para ponderar ou modular a amplitude do outro e, consequentemente, a multiplicação de dois sinais é usualmente chamada modulação em amplitude. Nesse sentido, a propriedade da multiplicação no tempo às vezes é denominada propriedade de modulação.

Simulação

Através da execução dos programas em MATLAB, verifique as propriedades de escalonamento no tempo e translação em frequência da transformada de Fourier. Explore todas as funções que são disponibilizadas. No caso da função pulso retangular, compare os resultados de simulação com os gráficos que você traçou no pré-lab. Observe o que ocorre quando a constante de escalonamento "*a*" ($-4 \leq a \leq 4$) e a frequência da portadora "f_c" ($f_c \leq f_s/4$) são alteradas. Em particular, faça a=-1 e constate o que foi dito na introdução teórica deste roteiro. Após certificar via simulação as duas propriedades, responda o questionário Q5 no moodle.