

Roteiro da Simulação 4: Séries de Fourier

Objetivos

- Verificar o comportamento da representação de sinais periódicos por Série de Fourier;
- Certificar a influência de simetrias do sinal nos coeficientes da série;
- Constatar a relação entre o período fundamental e o espaçamento das componentes no eixo de frequência; e
- Visualizar o erro da aproximação por série de Fourier devido às descontinuidades do sinal.

Introdução Teórica

1. Série Trigonométrica de Fourier

Seja $x(t)$ um sinal periódico, com período fundamental T e frequência fundamental $f_0=1/T$ (Hz), ou $\omega_0=2\pi/T$ (rad/s). Se $x(t)$ satisfaz as Condições de Dirichlet, esse pode ser representado pela seguinte Série Trigonométrica de Fourier:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \text{sen}(k\omega_0 t)] \quad (1)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt, \quad (2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (3)$$

e

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \text{sen}(k\omega_0 t) dt. \quad (4)$$

2. Série Exponencial de Fourier

A partir das relações de Euler, a saber:

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \text{sen}(k\omega_0 t), \quad (5)$$

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} \quad (6)$$

e

$$\text{sen}(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j}, \quad (7)$$

e de (1), chega-se a Série Exponencial de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (8)$$

onde

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (9)$$

e

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt. \quad (10)$$

Observe as relações entre os F_k , da Série Exponencial de Fourier, com os a_k e b_k da Série Trigonométrica de Fourier.

É importante observar também que existem simplificações nos cálculos dos coeficientes da série quando o sinal periódico $x(t)$ exibe algum tipo de simetria. Consulte o material que será apresentado como “Revisão Teórica” na aula de laboratório (disponibilizado no moodle).

Simulação

O programa “fseriesdemo” permite observar a representação por Série de Fourier de sinais periódicos, tais como onda quadrada, triangular, rampa, senóides retificadas, etc. Permite, também, observar o erro da aproximação utilizando até 15 componentes harmônicas.

Inicialmente selecione a onda quadrada e ajuste seu período para 10 segundos. Comece selecionando apenas um coeficiente (F_{-1} e F_{+1}) na representação do sinal. Observe o erro. Vá aumentando o número de componentes e observe a diminuição do erro. Cabe ressaltar que os gráficos de módulo e fase podem ser plotados em função da ordem dos coeficientes, ou da frequência. Colocando esses gráficos em função da frequência, observe o efeito da alteração do período do sinal no espaçamento das componentes harmônicas. Faça a representação dos demais sinais disponíveis no programa.