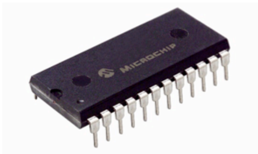
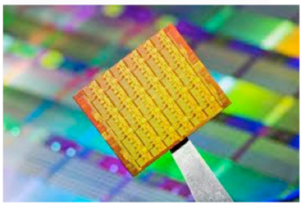
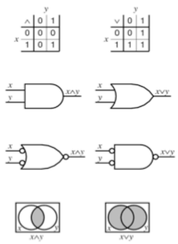
Introdução à Microeletronica

Sistemas Digitais

Aula 2







UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Plano e bibliografia

Parte 3:

Dia	Segunda 08:20h	Segunda 10:10h
5 Outubro	Aula 1: Introdução, portas lógicas em CMOS	$\boxed{\text{Aula 2: Algebra de Boole}}$
19 Outubro	Aula 3: Circuitos combinatorios	Intro VHDL e apresentação projeto
26 Outubro	Aula 4: Latches, Flip-Flops, registradores, contadores.	Aula 5: Maquinas de estado
9 Novembro	Laboratório 2 VHDL	Laboratório 3 VHDL
16 Novembro	Entrega projeto VHDL e revisão problemas	Prova Final

- **Plano de aula 2:**
  - Introdução à álgebra de Boole.
  - Funções Lógicas.
  - Quadros de Karnaugh.

Prof. Héctor Pettenghi Introdução à Microeletrónica 2

Nesta aula veremos o assunto relacionado à Álgebra de Boole.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Álgebra de Boole

- **Operações Básicas:**
  - Boole define ainda três operações básicas: AND, OR, NOT.
  - Considere-se duas variáveis booleanas: $x,y \in \{0,1\}$,
    i.e., $x,y \in \{\textit{falso},\textit{verdadeiro}\}$

AND (Produto lógico)		
X	Y	$X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **E** **(AND)** Y for verdadeiro

OR (Soma lógica)		
X	Y	X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **OU** **(OR)** Y for verdadeiro

NOT (Complemento)	
X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Negação **(NOT)** da afirmação.

Prof. Héctor Pettenghi 3

Para as Operações Lógicas temos as seguintes tabelas da verdade.

Observe que o AND lógico é representado pelo sinal de produto : ·

E que o OR lógico pelo sinal de soma: +

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Álgebra de Boole

Propriedades básicas:

Considere-se as variáveis booleanas: x.v.z ∈ A

Identidade	$x+0=x$	$x\cdot 1=x$
Idempotência	$x+x=x$	$x\cdot x=x$
Aniquilação	$x+1=1$	$x\cdot 0=0$
Opostos	$x+\overline{x}=1$	$x\cdot\overline{x}=0$
Comutatividade	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
Associatividade	$x+(y+z)=(x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
Distributividade	$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	$x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$
DeMorgan	$\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$	$\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$
Adjacência	$x\cdot\overline{y}+x\cdot y=x$	$(x+\overline{y})\cdot(x+y)=x$

Prof. Héctor Pettenghi 4

Vejamos suas propriedades básicas.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Álgebra de Boole

- **Demonstração das leis de DeMorgan**

$$\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$$

$$\overline{x.y} = \bar{x}+\bar{y}$$

- **Aplicação sucessiva das leis de DeMorgan**

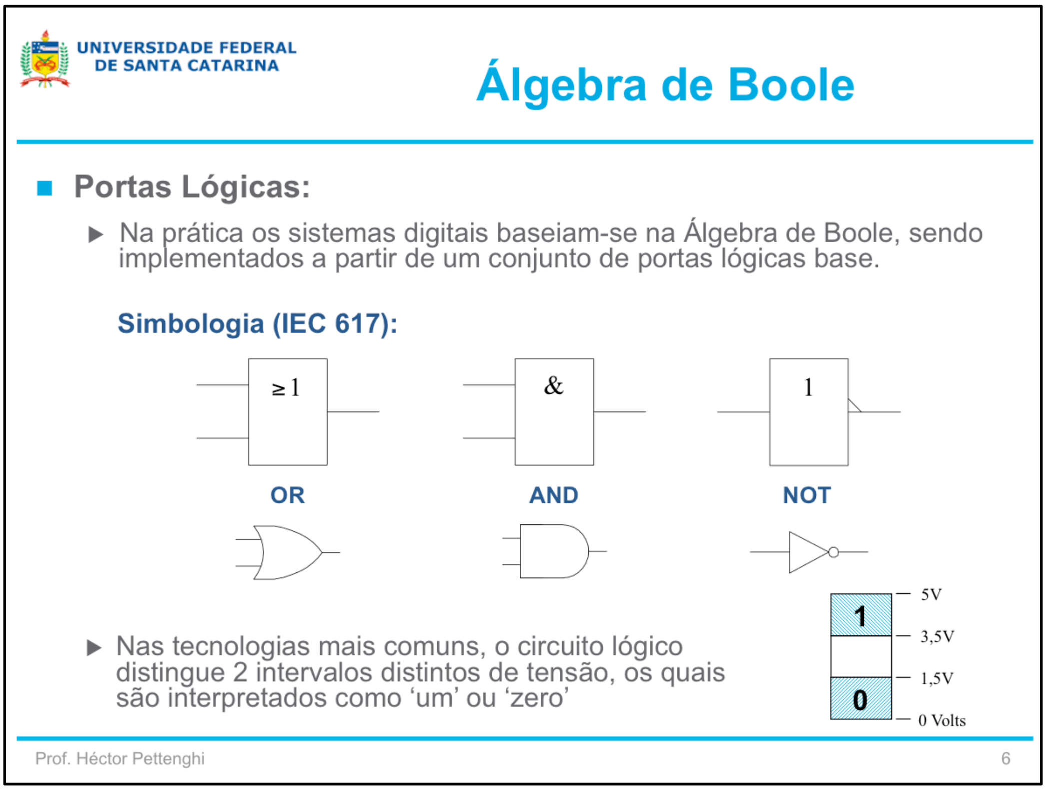
Exemplo:

$$\begin{aligned}\overline{a.(b+z.(x+\bar{a}))} &= \bar{a}+\overline{(b+z.(x+\bar{a}))}\\ &= \bar{a}+\left(\bar{b}.\overline{(z.(x+\bar{a}))}\right)\\ &= \bar{a}+\left(\bar{b}.\left(\bar{z}+\overline{(x+\bar{a})}\right)\right)\\ &= \bar{a}+\left(\bar{b}.\left(\bar{z}+(\bar{x}.a)\right)\right)\\ &= \bar{a}+\bar{b}.(\bar{z}+\bar{x}.a)\end{aligned}$$

Prof. Héctor Pettenghi 5

Dentre as propriedades expostas na tabela anterior, vejamos a lei de DeMorgan com um exemplo mais específico **(considerando que x,y ∈ {0,1})**

O teorema de DeMorgan pode ser extendido para três ou mais variáveis. Note a aplicação da lei de DeMorgan nos elementos barrados e que cada passo aplicamos em uma operação agregada pelos parênteses.



Vejamos. Os símbolos gráficos são usados para reprentar os três tipo de portas lógicas: OR, AND e NOT

As portas lógicas são circuitos eletrônicos (formados por transistores, como visto na última aula) responsáveis por gerar apenas 1 sinal de saída, mas que pode receber 1 ou mais sinais de entrada. Esses circuitos respondem a duas faixas de tensão separadas que representam uma variável binária igual à lógica 1 ou lógica 0. As regiões intermediárias entre as lógicas são cruzadas apenas durante as mudanças de 1 a 0 ou de 0 a 1. Essas mudanças são chamadas de transições, e as regiões intermediárias são chamadas de regiões de transição (região em branco da figura no canto inferior direito do slide).

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Álgebra de Boole

Função Booleana (exemplo):

$$f = \bar{a}\,b + c$$

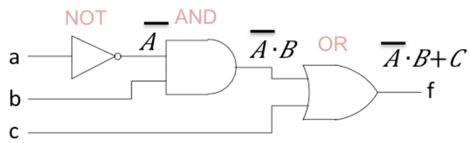
$\bar{a}\,b$ e c são os **termos** da função.

$\bar{a}$, b e c são os **literais**.

Tabela da Verdade

a	b	c	ā b	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Circuito Lógico:



Prof. Héctor Pettenghi 7

As funções booleanas são expressadas em termos (operações) e literais (variáveis).

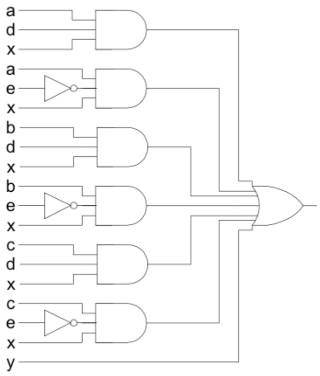
Se o número de valores que cada literal assume é finito (0 ou 1), o número de estados da função na qual ela está inserida também é finito. Desta forma, cada função booleana pode ser descrita como uma tabela de todas as combinações que os literais podem formar e as consequentes saídas *f*, chamada Tabela Verdade.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

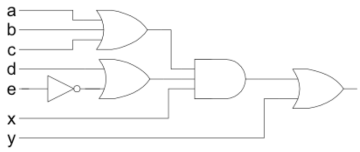
Álgebra de Boole

- **Simplificação algébrica**
  - Exemplo 1:

$$
\begin{aligned}
f &= adx + a\bar{e}x + bdx + b\bar{e}x + cdx + c\bar{e}x + y \\
&= \left(ad + a\bar{e} + bd + b\bar{e} + cd + c\bar{e}\right)x + y \\
&= \left(\left(a+b+c\right)d + \left(a+b+c\right)\bar{e}\right)x + y \\
&= \left(\left(a+b+c\right)\left(d+\bar{e}\right)\right)x + y \\
&= \left(a+b+c\right)\cdot\left(d+\bar{e}\right)\cdot x + y
\end{aligned}
$$



Realização a 2 níveis (soma de produtos)



R e a l i z a ç ã o Multinível

Prof. Héctor Pettenghi 8

Todo circuito de portas lógicas pode ser descrito como uma função de expressões booleanas *f*, como mostra o exemplo de slide.

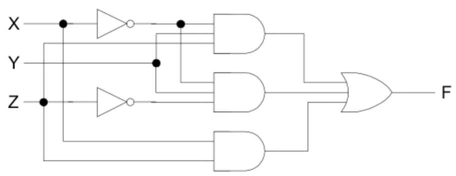
As simplicações algébricas são feitas para que os literais (operações) sejam reduzidos, simplificando a função, e consequentemente a representação pelo circuito de portas lógicas. Veja como foi posível transformar o primeiro circuito no segundo, a partir da simplicação algébrica. Essas simplificações são feitas utilizandos as propriedades da Álgebra Booleana (ver slide 4)

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

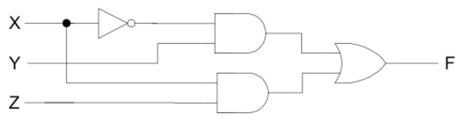
Álgebra de Boole

- **Simplificação algébrica**
  - Exemplo 2:

$$f = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz$$



$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz \\ &= \bar{x}y\left(z + \bar{z}\right) + xz \\ &= \bar{x}y.1 + xz \\ &= \bar{x}y + xz \end{aligned}$$



Prof. Héctor Pettenghi 9

Veja este outro exemplo. Aqui foi utilizada a propriedade da distributividade para o termo *z.* Em seguida, a propriedade dos oposto ao mesmo termo. A função *f* simplicada permite que o circuito de portas lógicas seja representado com operações multiníveis.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Álgebra de Boole

- **Simplificação algébrica:**
  - A simplificação e manipulação algébrica das funções lógicas tem vários benefícios:
    - Permite reduzir a complexidade de circuitos, o que leva a uma redução no número de erros na montagem do circuito.
    - Permite reduzir o tempo de propagação dos sinais ao longo do circuito de cálculo (ex.: processadores mais rápidos)
    - Permite reduzir a potência consumida (ex: processadores energéticamente mais eficientes)

Prof. Héctor Pettenghi 10

Desta forma, as vantagens são:

PROBLEMAS

Problema 2.1. Simplifique algebricamente as seguintes funções:

a) $f(A,B,C)=AB\overline{C}+ABC+A\overline{B}$

b) $f(A,B,C)=(A+B+\overline{C})\overline{A}B\overline{C}+C$

Solução: $f(A,B,C) = \underbrace{AB\bar{C} + ABC}_{adjacentes} + A\bar{B} = \underbrace{AB + A\bar{B}}_{adjacentes} = A$

Solução: $f(A,B,C) = (A + B + \bar{C})\bar{A}B\bar{C} + C = \underbrace{A\bar{A}}_{=0}B\bar{C} + \underbrace{B\bar{A}B\bar{C}}_{BB=B} + \underbrace{\bar{C}\bar{A}B\bar{C}}_{\bar{C}\bar{C}=\bar{C}} + C =$

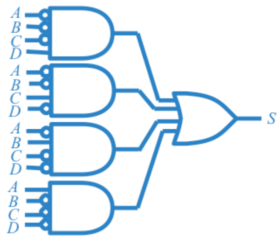
$\underbrace{\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}}_{iguais} + C = \bar{A}B\bar{C} + C\,\underbrace{(1 + \bar{A}B)}_{=1} = \underbrace{\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC}_{adjacentes} + C = \bar{A}B + C$

PROBLEMAS

Problema 2.2. As quatro linhas de entrada de um circuito combinatório corresponde a um número natural codificado em binário. Desenhe um circuito em dois níveis que detecte quando um número é potência de dois.

Solução:

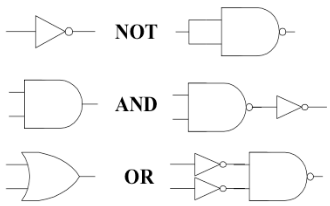
ABCD	S
0000	0
0001	1
0010	1
0011	0
0100	1
0101	0
0110	0
0111	0
1000	1
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Funções Lógicas

- **Circuitos com portas NAND:**
  - A porta NAND é considerada uma porta universal porque qualquer circuito digital pode ser realizado apenas com portas NAND.
  - Qualquer função booleana é realizável apenas com portas NAND por substituição directa das operações NOT, AND e OR.
  - A operação NOT é normalmente considerada em sentido lato, como uma NAND de 1 entrada.



  - Nalgumas tecnologias (p.ex. TTL) as portas NAND são as portas mais simples (portanto mais baratas), pelo que é vantajosa a realização de circuitos só com NANDs.

Prof. Héctor Pettenghi 13

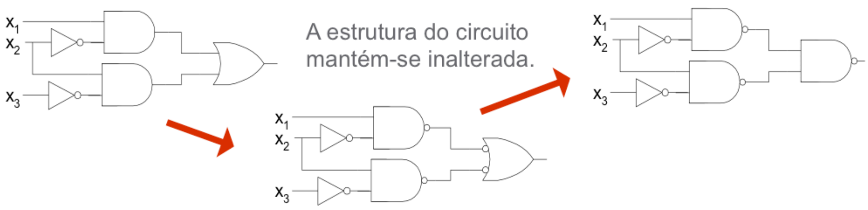
Veja como exemplo a figura, imagine as entradas lógicas para as portas a esquerda e suas respectivas saídas e observe que os resultados serão os mesmos para as portas da direita.

Funções Lógicas

- **Circuitos com portas NAND (cont.):**
  - Uma função representada na forma de uma soma de produtos pode ser transformada numa forma directamente realizável apenas com portas NAND por simples aplicação da lei de DeMorgan.

  Exemplo:

$$f = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3 x_2 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3 x_2}} = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2}\cdot\overline{\bar{x}_3 x_2}}$$
$$= \left(x_1 \ nand\ \bar{x}_2\right) nand \left(\bar{x}_3 \ nand\ x_2\right)$$

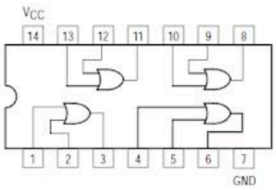


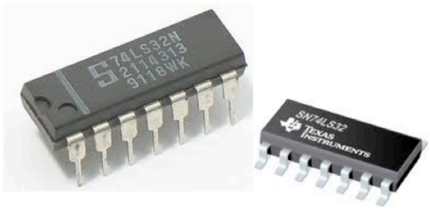
Observe a aplicação da lei de DeMorgan

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Elementos de Tecnologia

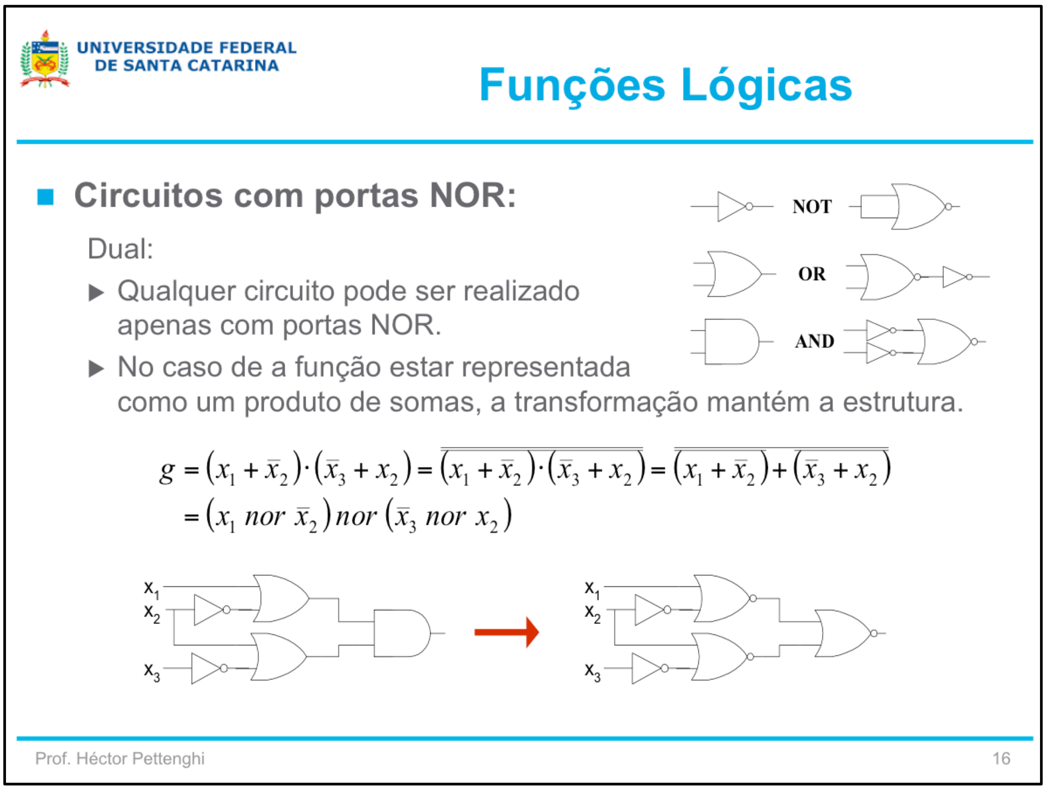
- **Circuitos com portas NAND (cont.):**
  - Componentes TTL:
  - Exemplos:





Exemplo de Componentes Disponíveis	
Dispositivo	Função
’00	4 NAND2
’02	4 NOR2
’04	6 NOT
’08	4 AND2
’20	2 NAND4
’21	2 AND4
’27	3 NOR3
’30	1 NAND8
’32	4 OR2
‘126	4 Buffers Tri-State
‘136	4 XOR2

Os circuitos integrados TTL são utilizados na realização das operações lógicas. Um CI conhecido que implementa 4 portas NAND independentes (esquemático do slide) é o TTL7400. As especificações de cada componente eletrônico, tais como os Cis, é encontrada em manuais chamados *datasheets.*



Já aqui vemos que qualquer circuito pode ser realizado com portas NOR. Observemos o exemplo.

PROBLEMAS

Problema 2.3. Considere a função $f(A,B,C)=A\overline{B}+AC+BC$

a) Desenhe o logigrama do circuito que concretiza a função indicada acima.

b) Transforme a expressão inicial numa função que possa ser concretizada só com portas NAND (e portas NOT). Desenhe o logigrama do circuito correspondente.

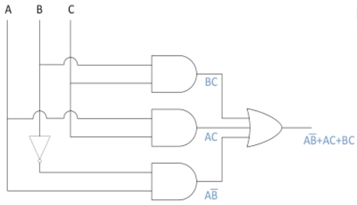
c) Transforme o logigrama obtido em b) num esquema eléctrico. Para cada porta lógica, identifique o circuito integrado utilizado; em cada ligação, anote o pino correspondente do circuito integrado. Utilize um número mínimo de circuitos integrados.

d) Escreva a tabela da verdade da função *f*.

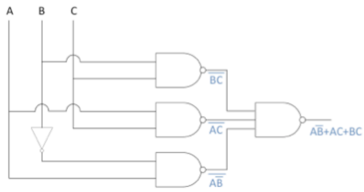
PROBLEMAS

Solução:

a)

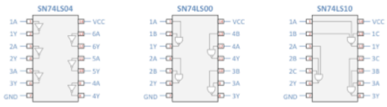


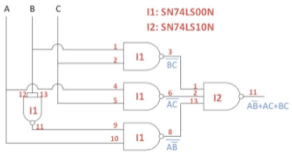
b) $f(A,B,C) = A\bar{B} + AC + BC = \overline{\overline{A\bar{B} + AC + BC}} = \overline{\overline{A\bar{B}} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}$



c)

Empacotamento tipo N para os integrados SN74LS04 (NOT), SN74LS00 (NAND2) e SN74LS10 (NAND3).





d)

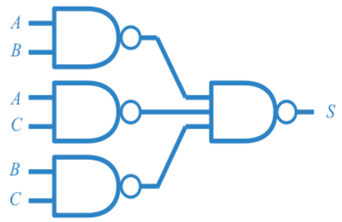
ABC	AB	AC	BC	f
000	0	0	0	0
001	0	0	0	0
010	0	0	0	0
011	0	0	1	1
100	1	0	0	1
101	1	1	0	1
110	0	0	0	0
111	0	1	1	1

PROBLEMAS

Problema 2.4. As normas de segurança dos aviões exigem que, para sinais de vital importância os circuitos devem estar triplicados para que o erro de um deles não produza uma catástrofe. No caso de que os três circuitos não produzam a mesma saída, esta escolhe-se mediante votação. Desenhe o circuito (com portas NAND) que tem de usar-se para obter como resultado o valor maioritário das três entradas.

Solução:

ABC	S
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1



PROBLEMAS

Problema 2.5. Simplifique algebricamente a seguinte função $f(A,B,C,D)=(A+\bar{B})(C+D)$ e expresse usando:

a) apenas portas NOR de duas entradas.

b) apenas portas NAND de duas entradas

Solução:

a) $f(A,B,C,D) = \overline{\overline{(A+\bar{B})(C+D)}} = \overline{\overline{(A+\bar{B})} + \overline{(C+D)}} = \overline{\overline{(A+\overline{(B+B)})} + \overline{(C+D)}}.$

b) $f(A,B,C,D) = \overline{\overline{(A+\bar{B})(C+D)}} = \overline{\overline{(A+\bar{B})} + \overline{(C+D)}} = \overline{(\bar{A}B) + (\bar{C}\bar{D})} =$

$\overline{\overline{((\overline{AA})B)}\,\overline{((\overline{CC})\,(\overline{DD}))}}.$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Funções Lógicas

MINTERMOS:

- Designa-se por mintermo (também produto canónico, implicante canónico ou termo minimal) um termo de produto em que <u>todas as variáveis aparecem exactamente uma vez</u>, complementadas ou não.

Mintermos para 3 variáveis

x_3	x_2	x_1	mintermo	
0	0	0	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_0
0	0	1	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1$	m_1
0	1	0	$\bar{x}_3.x_2.\bar{x}_1$	m_2
0	1	1	$\bar{x}_3.x_2.x_1$	m_3
1	0	0	$x_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_4
1	0	1	$x_3.\bar{x}_2.x_1$	m_5
1	1	0	$x_3.x_2.\bar{x}_1$	m_6
1	1	1	$x_3.x_2.x_1$	m_7

Um **mintermo** representa exactamente uma combinação das variáveis binárias na tabela de verdade da função.

Uma função de n variáveis tem 2^n mintermos.

Cada mintermo é também designado por m_i em que o índice i indica o número decimal equivalente à combinação binária por ele representada.

O mintermo vale 1 para a combinação representada e 0 para todas as outras.

Prof. Héctor Pettenghi 21

Um mintermo é uma função, diferente de 0, tendo o número mínimo de ‘1s’ em sua tabela verdade.

Funções Lógicas

MAXTERMOS:

- Designa-se por maxtermo (também soma canónica, implicado canónico ou termo maximal) um termo de soma em que todas as variáveis aparecem exactamente uma vez, complementadas ou não.

Maxtermos para 3 variáveis

x_3	x_2	x_1	maxtermo	
0	0	0	$x_3 + x_2 + x_1$	M_0
0	0	1	$x_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_1
0	1	0	$x_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_2
0	1	1	$x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_3
1	0	0	$\bar{x}_3 + x_2 + x_1$	M_4
1	0	1	$\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_5
1	1	0	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_6
1	1	1	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_7

Um **maxtermo** representa exactamente uma combinação das variáveis binárias na tabela de verdade da função.

Uma função de n variáveis tem 2^n maxtermos.

Cada maxtermo é também designado por M_i em que o índice *i* indica o número decimal equivalente à combinação binária por ele representada.

O maxtermo vale 0 para a combinação representada e 1 para todas as outras.

Já um maxtermo é uma função, diferente de 1, tendo o máximo de '1s' em sua tabela verdade.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Funções Lógicas

MINTERMOS E MAXTERMOS:

- Um mintermo e um maxtermo com o mesmo índice são complementos um do outro:

$$m_j = \overline{M}_j$$

x_3	x_2	x_1	mintermo		maxtermo	
0	0	0	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_0	$x_3+x_2+x_1$	M_0
0	0	1	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1$	m_1	$x_3+x_2+\bar{x}_1$	M_1
0	1	0	$\bar{x}_3.x_2.\bar{x}_1$	m_2	$x_3+\bar{x}_2+x_1$	M_2
0	1	1	$\bar{x}_3.x_2.x_1$	m_3	$x_3+\bar{x}_2+\bar{x}_1$	M_3
1	0	0	$x_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_4	$\bar{x}_3+x_2+x_1$	M_4
1	0	1	$x_3.\bar{x}_2.x_1$	m_5	$\bar{x}_3+x_2+\bar{x}_1$	M_5
1	1	0	$x_3.x_2.\bar{x}_1$	m_6	$\bar{x}_3+\bar{x}_2+x_1$	M_6
1	1	1	$x_3.x_2.x_1$	m_7	$\bar{x}_3+\bar{x}_2+\bar{x}_1$	M_7

Exemplo:

$$\begin{aligned} m_3 &= \bar{x}_3.x_2.x_1 \\ &= \overline{\overline{\bar{x}_3.x_2.x_1}} \\ &= \overline{x_3+\bar{x}_2+\bar{x}_1} \\ &= \overline{M}_3 \end{aligned}$$

Para tal demonstração, complementou-se m^3 e aplicou-se a propriedade de Demorgan.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Funções Lógicas

- **TABELA DA VERDADE ↔ SOMA DE PRODUTOS**
  - Uma função booleana pode ser expressa algebricamente como uma soma de produtos directamente a partir da tabela de verdade.
  - A soma inclui todos os mintermos para os quais a função vale 1.

Exemplo:

$$f(x_3, x_2, x_1) = \sum m(0,1,3,5,7)$$

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) = {} & \bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1 && \leftarrow m_0 \\ & + \bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1 && \leftarrow m_1 \\ & + \bar{x}_3.x_2.x_1 && \leftarrow m_3 \\ & + x_3.\bar{x}_2.x_1 && \leftarrow m_5 \\ & + x_3.x_2.x_1 && \leftarrow m_7 \end{aligned}$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Prof. Héctor Pettenghi 24

Outra forma de descrever uma função booleana é pelo somatório dos produtos dos mintermos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Funções Lógicas

SOMA DE PRODUTOS ↔ PRODUTO DE SOMAS

- Conversão entre formas canónicas: o produto de somas utiliza os maxtermos correspondentes aos mintermos não utilizados na soma de produtos.
- É equivalente a aplicar a lei de DeMorgan ao complemento da função.

Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f	$\overline{f}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$f(x_3,x_2,x_1) = m_0 + m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\overline{f(x_3,x_2,x_1)} = m_2 + m_4 + m_6$$

$$f(x_3,x_2,x_1) = \overline{m_2 + m_4 + m_6} = \overline{m}_2.\overline{m}_4.\overline{m}_6$$
$$= M_2.M_4.M_6$$

$$f = \overline{\overline{x}_3.x_2.\overline{x}_1 + x_3.\overline{x}_2.\overline{x}_1 + x_3.x_2.\overline{x}_1}$$
$$= \left(\overline{\overline{x}_3.x_2.\overline{x}_1}\right).\left(\overline{x_3.\overline{x}_2.\overline{x}_1}\right).\left(\overline{x_3.x_2.\overline{x}_1}\right)$$
$$= \left(x_3 + \overline{x}_2 + x_1\right).\left(\overline{x}_3 + x_2 + x_1\right).\left(\overline{x}_3 + \overline{x}_2 + x_1\right)$$

Prof. Héctor Pettenghi 25

Vejamos a demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Funções Lógicas

TABELA DA VERDADE ↔ PRODUTO DE SOMAS

- Uma função booleana pode ser expressa algebricamente, como um produto de somas, directamente a partir da tabela de verdade.
- O produto inclui todos os maxtermos para os quais a função vale 0.

Exemplo:

$$f(x_3,x_2,x_1)=\prod M(2,4,6)$$

$$\begin{aligned} f(x_3,x_2,x_1) &= (x_3+\bar{x}_2+x_1) && \leftarrow M_2 \\ &.(\bar{x}_3+x_2+x_1) && \leftarrow M_4 \\ &.(\bar{x}_3+\bar{x}_2+x_1) && \leftarrow M_6 \end{aligned}$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Prof. Héctor Pettenghi 26

Analogamente ao slide 21, vemos que é possível escrever uma função booleana como o produtório da somas dos maxtermos.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Quadro de Karnaugh

QUADRO DE KARNAUGH

- Reordenação da tabela da verdade em 2 dimensões.

Exemplo:

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0

→

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	(0) 1	(1) 1	(3) 1	(2) 0
1	(4) 0	(5) 1	(7) 1	(6) 0

Maurice Karnaugh 4/Out/1924,NY

Os **termos adjacentes** ficam representados em linhas/colunas contíguas.

Outro método de simplificação das funções booleanas é pelo método de Karnaugh, em que as soluções f são descritas em um quadro originário da tabela verdade. Cada resultado de f representa um quadrado no quadro.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Quadro de Karnaugh

QUADRO DE KARNAUGH

- Os **termos adjacentes** ficam representados em linhas/colunas contíguas.

Exemplo:

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	⁰ 1	¹ 1	³ 1	² 0
1	⁴ 0	⁵ 1	⁷ 1	⁶ 0

Termos Adjacentes

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

Termos Adjacentes

Prof. Héctor Pettenghi 28

Observe que a adjacência é apenas aplicável na horizontal e na vertical, nunca na diagonal.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Quadro de Karnaugh

- **IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS NO QUADRO DE KARNAUGH**
  - Exemplos:

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

O termo é 1 quando: x_3=0; e x_2=0; e (x_1=0 ou x_1=1)

ou seja: $\bar{x}_3.\bar{x}_2.\underbrace{(\bar{x}_1 + x_1)}_{simplificados} \rightarrow \bar{x}_3.\bar{x}_2$

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

O termo é 1 quando: (x_3=0 ou x_3=1); e (x_2=0 ou x_2=1); e x_1=1

ou seja: $\underbrace{((\bar{x}_3 + x_3).(\bar{x}_2 + x_2))}_{simplificados}.x_1 \rightarrow x_1$

Prof. Héctor Pettenghi 29

Uma vez que um quadro é preenchido com ‘0s’ e ‘1s’, a expressão da soma dos produtos para a saída pode ser obtida combinando em OR os quadrados adjacentes que contêm ‘1’. Este processo é chamado de *looping.*

Quadro de Karnaugh

■ REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH

▶ Quadros de 3 Variáveis

X \ YZ	00	01	11	10
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

Y (colunas 11, 10); X (linha 1); Z (colunas 01, 11)

f(X,Y,Z)

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

▶ Exemplo:

$f(X,Y,Z) = \Sigma m(0,3,5,6)$

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Sistemas de Numeração Posicionais
Incluir exemplos de números em base 10, 2, 8, e 16

Observe que pelo ordenamento do quadro, quaisquer dois minitermos adjecentes podem ser simplificados, já que cada quadrado do mapa diferedo quadrado adjacente em apenas 1 variável diferente.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Quadro de Karnaugh

- **REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)**
  - Quadros de 4 Variáveis:

A mesma função pode ter representações diferentes, mas equivalentes, num Quadro de Karnaugh, pela simples alteração da localização das variáveis

f(W,X,Y,Z)

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

f(W,X,Y,Z)

YZ \ WX	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

Prof. Héctor Pettenghi 31

Sistemas de Numeração Posicionais
Incluir exemplos de números em base 10, 2, 8, e 16

Lembrandos que os valores dos minitermos (1 ou 0) no quadro são escritos conforme a tabela verdade fornecida.

PROBLEMAS

Problema 2.6. Considere a função lógica *f(A, B, C, D)*=Σ*m*(2,3,6,7,8,10). Identifique a expressão algébrica simplificada (em forma soma de produtos).

Solução:

ABCD	f
0000	0
0001	1
0010	1
0011	0
0100	0
0101	0
0110	1
0111	1
1000	1
1001	0
1010	1
1011	0
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0

Mapa de Karnaugh de f

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$\bar{A}C$

$A\bar{B}\bar{D}$

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}C + A\bar{B}\bar{D}.$$

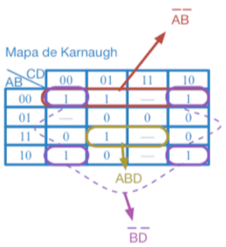
PROBLEMAS

Problema 2.7. Considere a função lógica *f(A, B, C, D)*=Σm(2,3,6,7,8,10) + Σm_d(0,11,14,15) incompletamente especificada:

a) Identifique a expressão algébrica simplificada (em forma soma de produtos).

b) Na solução identificada na alínea anterior, qual o valor da função quando a entrada *(A, B, C, D)* toma o valor 15? Justifique.

Solução: a)

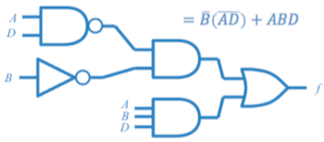


$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + ABD + \overline{B}\,\overline{D}$

b)

$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + ABD + \overline{B}\,\overline{D}$

$= \overline{B}(\overline{AD}) + ABD$



c) A função obtida toma o valor 1 quando ABCD=$0011_{(2)}$=$3_{(10)}$

$f(0,0,1,1) = 1$

PROBLEMAS

Problema 2.8. Pretende-se realizar um circuito que calcule o resultado da operação y=*floor*(x^2/10), sendo x um número inteiro pertencente ao intervalo [1;6].

a) Quantas entradas e saídas requer o circuito para concretizar o cálculo referido?

b) Escreva a tabela da verdade das funções lógicas necessárias.

c) Expresse-as na forma soma de produtos mínima. Para os termos não especificados considere, em cada função, os valores lógicos que conduzem a maior simplificação.

Solução:

a) e b)

3 bits entrada — 2 bits saída

X	$x_2x_1x_0$	Y	Y (arredondado)	y_1y_0
0	000	0	0	- -
1	001	0.1	0	00
2	010	0.4	0	00
3	011	0.9	0	00
4	100	1.6	1	01
5	101	2.5	2	10
6	110	3.6	3	11
7	111	4.9	4	- -

c)

Mapa de Karnaugh y_1

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	—	0	0	0
1	0	1	—	1

x_2x_1 x_2x_0

$y_1=x_2x_1+x_2x_0$

Mapa de Karnaugh y_0

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	—	0	0	0
1	1	0	—	1

$x_2\overline{x_0}$

$y_0=x_2\overline{x_0}$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Quadro de Karnaugh

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)

- Quadros de N Variáveis

Um Quadro de Karnaugh de N variáveis é obtido pela duplicação de quadro de N-1 variáveis, devendo ser acrescentada a N-ésima variável e o correspondente eixo de simetria de modo a manter a representação das variáveis de forma reflectida.

f(V,W,X,Y,Z)

VW \ XYZ	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

Prof. Héctor Pettenghi 35

Sistemas de Numeração Posicionais
Incluir exemplos de números em base 10, 2, 8, e 16

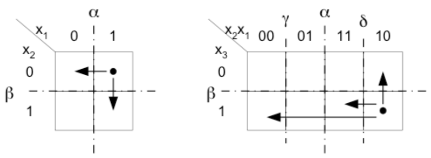
Cada saída *f* na tabela verdade corresponde a um quadrado no quadro de Karnaugh. Desta forma, é possível verificar se o quadro de n variáveis está correto.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

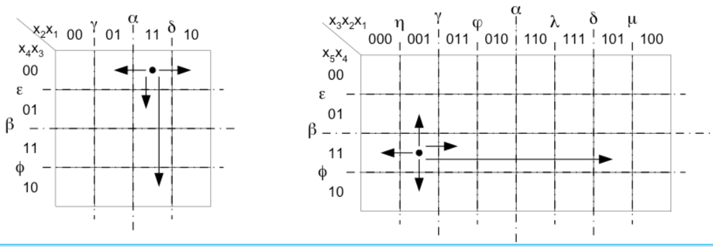
Agrupamento de Mintermos e Maxtermos

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS

- Eixos de Simetria:



2 **quadrados** dizem-se **adjacentes** em termos lógicos quando apenas uma variável lógica altera o seu valor na representação desses quadrados.



Num quadro de N variáveis, para cada quadrado existem <u>sempre</u> **N** outros adjacentes

Sistemas de Numeração Posicionais
Incluir exemplos de números em base 10, 2, 8, e 16

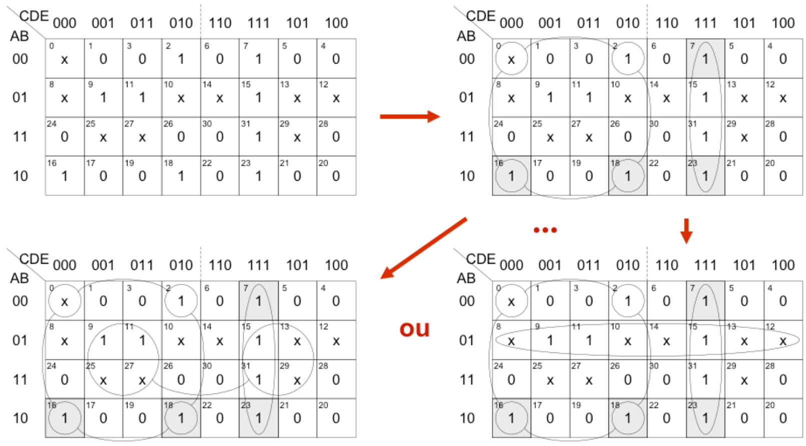
Outras possíveis situações de agrupamento.

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Minimização de Karnaugh

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:



Sistemas de Numeração Posicionais
Incluir exemplos de números em base 10, 2, 8, e 16

O exemplo mostra as possíveis formas de looping no quadro de Karnaugh. Os quadrados com *x* indicam que a saída pode assumir 0 ou 1 *(don't care* ou condição irrelevante*)* . Nestes casos, adota-se a constante lógica que possibilite melhor agrupamento e maior simplificação.

PROBLEMAS

Problema 2.10. (Prova 2018.1) Considere a função lógica *f(A, B, C, D, E)* incompletamente especificada, definida da seguinte forma:

$f(A,B,C,D,E) = \Sigma m(1,6,10,13,16,18,19,20,26,30) + \Sigma m_d(0,2,3,4,9,14,15,17,22,24,25,29,31)$

a) Identifique a expressão algébrica simplificada (em forma produto de somas).

b) Na solução identificada na alínea anterior, qual o valor da função quando a entrada *(A, B, C, D, E)* toma o valor 25? Justifique.

PROBLEMAS

Solução:

a)

Mapa de Karnaugh de f

$(B+\overline{C}+\overline{E})$

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	—	1	—	—	1	0	0	—
01	0	—	0	1	—	—	1	0
11	—	—	0	1	1	—	—	0
10	1	—	1	1	—	0	0	1

$(\overline{B}+C+\overline{E})$ $(\overline{B}+D+E)$

$$f(A,B,C,D,E) = (\bar{B} + C + \bar{E})(B + \bar{C} + \bar{E})(\bar{B} + D + E)$$

b) $f(1,1,0,0,1) = 0$

Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas pelos professores:

- Guilherme Arroz, Horácio Neto, Nuno Horta, Nuno Roma, Pedro Tomás do IST Lisboa.