Universidade Federal de Santa Catarina

EEL7123/EEL510457

Solução Problema 4.10

Problema 4.10. Considere o seguinte conjunto de módulos $\{2^{2n}, 2^n - 1, 2^n + 1\}$, para $n = 4$ e uma entrada-saída de $4n$ bits:

(a) Obtenha a estrutura para fazer a conversão binario-RNS (use compressores e somadores módulo 15 e 17)

Um numero inteiro $X = \{x_{15}, \ldots, x_1, x_0\}$ pode ser expressado em notação binaria como:

$$X = \sum_{i=1}^{15} 2^i x_i = 2^{3n} N_3 + 2^{2n} N_2 + 2^n N_1 + N_0, \quad (1)$$

onde os arrays $N_3 = \{x_{15}, x_{14}, x_{13}, x_{12}\}$, $N_2 = \{x_{11}, x_{10}, x_9, x_8\}$, $N_1 = \{x_7, x_6, x_5, x_4\}$ e $N_0 = \{x_3, x_2, x_1, x_0\}$. Usando notação binaria e conjunto de módulos $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2^8, 2^4-1, 2^4+1\}$, a faixa dinâmica do valor X é $[0, M-1]$, onde $M = m_1 m_2 m_3$. Três conversores são necessários de modo a obter a representação do RNS, um para cada elemento de base.

- **Canal** $m_1 = 2^8$**:** O canal mais simples é o conversor usando o modulo m_1. O valor $|X|_{m_1}$ pode ser obtido pelo resto da divisão do X por 2^8 , o que pode por conseguida por médio de truncar o valor de X, uma vez que:

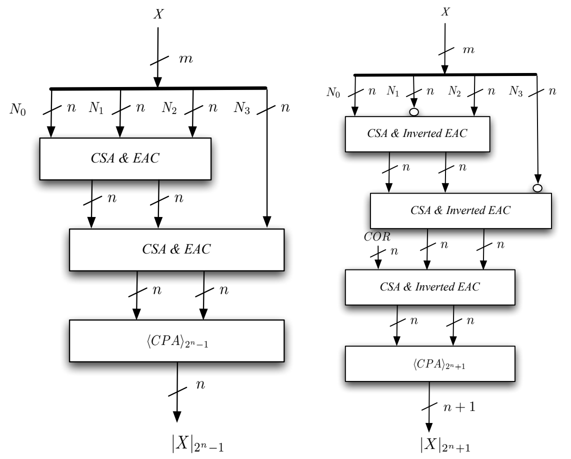
$$|X|_{2^8} = \overbrace{|2^{12}|_{2^8}}^{=0} N_3 + \overbrace{|2^8|_{2^8}}^{=0} N_2 + 2^4 N_1 + N_0 = \{x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}. \quad (2)$$

- **Canal** $m_2 = 2^4 - 1$**:** Devido a que $|2^4|_{2^4-1} = 1$, a Eq. 1 fica como:

$$\begin{aligned} |X|_{2^4-1} =& | \overbrace{|2^{12}|_{2^4-1}}^{=1} N_3 + \overbrace{|2^8|_{2^4-1}}^{=1} N_2 + \overbrace{|2^4|_{2^4-1}}^{=1} N_1 + N_0|_{2^4-1} = |N_3 + N_2 + N_1 + N_0|_{2^4-1} = \\ =& |N_3 + |N_2 + N_1 + N_0|_{2^4-1}|_{2^4-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

- **Canal** $m_3 = 2^4 + 1$**:** Devido a que $|2^4|_{2^4+1} = -1$, a Eq. 1 fica como:

$$\begin{aligned} |X|_{2^4+1} =& | \overbrace{|2^{12}|_{2^4+1}}^{=-1} N_3 + \overbrace{|2^8|_{2^4+1}}^{=1} N_2 + \overbrace{|2^4|_{2^4+1}}^{=-1} N_1 + N_0|_{2^4+1} = |N_3 - N_2 + N_1 - N_0|_{2^n+1} = \\ =& | - N_3 + |N_2 - N_1 + N_0|_{2^n+1}|_{2^n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$



(a) (b)

Figura 1: Diagrama de blocos para conversor binario-RNS modulo a) $m_2 = \{2^n - 1\}$ e b) $m_3 = \{2^n + 1\}$.

(b) Obtenha a estrutura para fazer a conversão RNS-binario (use o algoritmo novo CRT, compressores e somadores módulo 255)

A conversão de RNS a binario é obtida usando o novo Teorema Chinés do Resto (CRT), visto na aula teorica.

$$X = \left| \sum_{i=1}^{3} V_i R_i \right|_{\hat{m}_1} m_1 + R_1, \tag{5}$$

onde $V_1 = \frac{\left|\hat{m}_1^{-1}\right|_{m_1} \hat{m}_1 - 1}{m_1}$, $V_2 = \frac{\left|\hat{m}_2^{-1}\right|_{m_2} \hat{m}_2}{m_1}$, $V_3 = \frac{\left|\hat{m}_3^{-1}\right|_{m_3} \hat{m}_3}{m_1}$, $\hat{m}_i = \frac{M}{m_i}$, $\left|\hat{m}_i^{-1}\right|_{m_i}$ é a multiplicativa inversa de $\hat{m}_i$ e R_i as entradas residuais. Para o moduli set $\{m_1, m_2, m_3\}$, onde $m_1 = 2^8$, $m_2 = 2^4 - 1$, $m_3 = 2^4 + 1$ escolhido obtemos $\hat{m}_1 = 2^8 - 1$, $\hat{m}_2 = 2^8(2^4 + 1)$, $\hat{m}_3 = 2^8(2^4 - 1)$, $\left|\hat{m}_1^{-1}\right|_{m_1} = 2^8 - 1$ $\left|\hat{m}_2^{-1}\right|_{m_2} = 2^3$ e $\left|\hat{m}_3^{-1}\right|_{m_3} = 2^3 + 1$.

Eq.(5) pode se escrever como:

$$X = \left| \overbrace{|2^8 - 2|_{\hat{m}_1}}^{V_1 = -1} R_1 + \overbrace{\left(2^{8-1} + 2^{4-1}\right)}^{V_2} R_2 + \overbrace{\left(2^{8-1} - 2^{4-1}\right)}^{V_3} R_3 \right|_{\hat{m}_1} m_1 + R_1 \tag{6}$$

$$X = \left|\overline{R_1} + 2^7 R_2 + 2^3 R_2 + 2^7 R_3 + 2^3 \overline{R_3}\right|_{2^8 - 1} 2^8 + R_1 \tag{7}$$

Podemos finalmente expressar os termos da Eq.11 como:

$$\begin{aligned}
A =& \bar{r}_{1,7}\bar{r}_{1,6}\bar{r}_{1,5}\bar{r}_{1,4}\bar{r}_{1,3}\bar{r}_{1,2}\bar{r}_{1,1}\bar{r}_{1,0}.\\
B =& r_{2,0}r_{2,3}r_{2,2}r_{2,1}r_{2,0}r_{2,3}r_{2,2}r_{2,1}\\
C =& r_{3,0}000r_{3,4}r_{3,3}r_{3,2}r_{3,1}\\
D =& \bar{r}_{3,4}\bar{r}_{3,3}\bar{r}_{3,2}\bar{r}_{3,1}\bar{r}_{3,0}000
\end{aligned} \tag{8}$$

Devido a que alguns termos são números negativos, vamos precisar do factor corrector associados aos termos $-R_1$ e -2^3R_3. O fator corretor é calculado como:

$$\left| abs\left(\sum_{j=0}^{8-1} \left|2^j\right|_{2^8-1} \cdot \bar{r}_{1,j}\right) + COR_1 \right|_{2^8-1} = 0. \tag{9}$$

$$\left| abs\left(\sum_{j=0}^{4} \left|2^{j+4-1}\right|_{2^8-1} \cdot \bar{r}_{3,j}\right) + COR_3 \right|_{2^8-1} = 0. \tag{10}$$

Os valores dos factores COR_1 e COR_3 são obtidos forçando as entradas R_1 e R_3 a 0. O valor de $COR_1 = 0$ e $COR_3 = 7_{(10)} = \overbrace{1\ldots1}^{3-bits}$, pelo que o valor de $COR_{TOTAL} = \overbrace{1\ldots1}^{3-bits}$, encaixando o factor corrector no VHDL dado usando unicamente 4 vectores A, B, C e D fica:

$$\begin{aligned}
A =& \bar{r}_{1,7}\bar{r}_{1,6}\bar{r}_{1,5}\bar{r}_{1,4}\bar{r}_{1,3}\bar{r}_{1,2}\bar{r}_{1,1}\bar{r}_{1,0}.\\
B =& r_{2,0}r_{2,3}r_{2,2}r_{2,1}r_{2,0}r_{2,3}r_{2,2}r_{2,1}\\
C =& r_{3,0}000r_{3,4}r_{3,3}r_{3,2}r_{3,1}\\
D =& \bar{r}_{3,4}\bar{r}_{3,3}\bar{r}_{3,2}\bar{r}_{3,1}\bar{r}_{3,0}111
\end{aligned} \tag{11}$$

(c) Indique a faixa dinâmica da estrutura RNS e compare com a eficiência da representação com binario.

A faixa dinâmica em RNS para o conjunto $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2^8, 2^4 - 1, 2^4 + 1\}$ é $M = 256 \times 15 \times 17 = 65280$ por enquanto a faixa dinâmica de $4n$-bits correspondente em binário é $2^{16} = 65536$, logo a eficiência será $\frac{65536-100}{65280} = 99,01$. Portanto obtemos um $99,01\%$ de eficiência da faixa dinâmica de RNS comparado com binário.

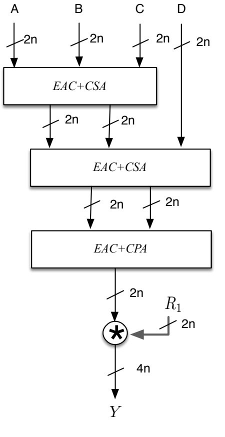


Figura 2: Diagrama de blocos para conversor RNS-binario para o modulo $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2^{2n}, 2^n - 1, 2^n + 1\}$.