Probabilidade e Teoria da Informação

Bartolomeu F. Uchôa Filho, Ph.D

Grupo de Pesquisa em Comunicações – GPqCom
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Catarina
E-mail: `uchoa@eel.ufsc.br`

Ementa do Curso

1. Revisão de Matemática

2. Probabilidade I: Variáveis Aleatórias Discretas

3. Teoria da Informação

4. Introdução aos Códigos Corretores de Erro

5. Probabilidade II: Variáveis Aleatórias Contínuas

6. Processos Estocásticos

Revisão de Matemática

1. Análise Combinatória

2. Logaritmos

Probabilidade I: Variáveis Aleatórias Discretas

1. Espaço Amostral
2. Medida de Probabilidade, P
3. Probabilidade de Eventos Elementares
4. Variável Aleatória Discreta
5. Distribuição de Probabilidade de uma V.A. Discreta
6. Prob. Conjunta, Condicionada e Total e Independência Estatística
7. Teorema da Probabilidade Total

8. Independência Estatística

9. Teorema de Bayes

10. Esperança de $F(X)$

11. Esperança Condicionada

12. Exemplos de Distribuição

Teoria da Informação

1. Sistema de Comunicação Digital
2. Codificação de Fonte
3. Codificação de Canal
4. Fontes Discretas sem Memória (DMS)
5. Medidas de Informação
6. Entropia, Entropia Conjunta e Entropia Condicionada
7. Canais Discretos sem Memória (DNC)

8. Informação Mútua e Capacidade de Canal

9. Teorema da Codificação de Canal

Introdução aos Códigos Corretores de Erro

1. Introdução
2. Decodificação de Máxima Verossimilhança
3. Códigos de Bloco Lineares e o Código de Hamming
4. Matriz Geradora e Matriz de Verificação de Paridade
5. A Distância Mínima de Hamming de um Código Linear e as Capacidades de Correção e de Detecção
6. Detecção e Correção de Erros: os conceitos de Síndrome e de Arranjo Padrão

7. Códigos Convolucionais (Exemplo)

8. A Representação em Treliça e o Algoritmo de Decodificação de Viterbi

Probabilidade II: Variáveis Aleatórias Contínuas

1. Função Distribuição de Probabilidade e Função Densidade de Probabilidade

2. Exemplos de Densidade de Probabilidade

3. Momentos de uma V.A. Contínua e a Lei dos Grandes Números

4. Variável Normal

5. Teorema do Limite Central

Processos Estocásticos

1. Introdução
2. Ruído em Sistemas de Comunicação
3. Transmissão de Sinais Através de Sistemas Lineares: Resposta ao Impulso e Função de Transferência
4. Processos Estocásticos e Sistemas Lineares

Análise Combinatória

A difícil tarefa de contar

Consideremos um lote de 100 peças contendo 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas. Escolhemos aleatoriamente 10 dentre as 100 peças do lote, sem reposição de qualquer peça escolhida antes que a seguinte seja escolhida. Estamos interessados em saber o número de possíveis maneiras pelas quais exatamente metade das 10 peças escolhidas é defeituosa.

Regra da Multiplicação

Vamos supor que uma determinada tarefa, digamos T, possa ser realizada em duas etapas consecutivas, digamos E_1 e E_2. Vamos supor que a etapa E_1 possa ser executada de n_1 maneiras distintas, e que a etapa E_2 possa ser executada de n_2 maneiras distintas. Então, o número de maneiras distintas pelas quais a tarefa T pode ser realizada é

$$n_1 \cdot n_2.$$

Exemplo

Considere uma palavra binária formada por 3 bits. Sabemos que cada bit pode ter o valor 0 ou 1. Assim, o número de triplas binárias é $2.2.2 = 2^3 = 8$. São elas:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 \text{ e } 111.$$

Regra da Adição

Vamos supor que a etapa E_1 possa ser executada de n_1 maneiras e que a etapa E_2 possa ser executada de n_2 maneiras. Digamos que um determinado operário tenha que executar apenas uma das etapas. Ele deverá portanto ter a qualificação para executar uma etapa em

$$n_1 + n_2$$

maneiras.

Exemplo

Suponha que iremos planejar uma viagem e devemos escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existirem 3 rodovias e 2 ferrovias, então existirão $3 + 2 = 5$ caminhos disponíveis para a viagem.

Permutações

Vamos supor que nós temos n objetos diferentes. Queremos saber o número ${}_nP_n$ de possíveis maneiras pelas quais podemos dispor esses objetos.

Exemplo

Os números 1, 2 e 3 podem ser dispostos como

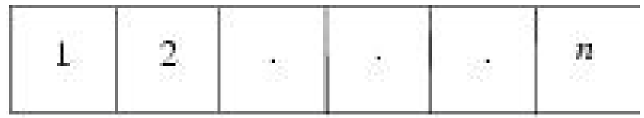
$$123, 132, 213, 231, 312 \text{ e } 321.$$

Portanto, neste caso a resposta é 6.

Se n é um número grande, escrever todas as possíveis disposições dos n números é humanamente impossível.

Estamos diante de um problema de *permutação*.

Caixa com n compartimentos



Permutar os n objetos é equivalente a colocá-los dentro dos compartimentos desta caixa, em alguma ordem particular. O número de permutações de n objetos diferentes é dado por

$$ {}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \stackrel{\Delta}{=} n! $$

onde $n!$ é lido como o *fatorial* de n. Por definição, $0! = 1$. No exemplo anterior, temos $n = 3$. Assim, ${}_3P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, como já tínhamos encontrado.

Arranjos

Considere os mesmos n objetos distintos do caso anterior. Agora estamos interessados em escolher r objetos, onde $0 \leq r \leq n$, e permutar os r objetos escolhidos. Estamos pedindo o número ${}_nA_r$ de *arranjos* de r objetos escolhidos dentre n objetos distintos.

Caixa com n compartimentos

1	2	.	.	.	n

Agora, preencheremos apenas até o r-ésimo compartimento, visto que estamos tratando do caso de um arranjo.

O número total de arranjos é dado por:

$$
\begin{aligned}
{}_nA_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Dados os números 1, 2 e 3, quantos arranjos, ou seja, quantas maneiras há de escolher $r = 2$ objetos e permutar os $r = 2$ objetos escolhidos, dentre $n = 3$ objetos distintos?

Temos para os números 1, 2 e 3 os seguintes arranjos:

$$12, 13, 23, 21, 31 \text{ e } 32.$$

Ou seja,

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = 6 \text{ arranjos.}$$

Combinações

Considere os mesmos n objetos distintos dos casos anteriores. Agora estamos interessados no número C_r^n de maneiras de escolher r objetos, onde $0 \leq r \leq n$, dentre os n objetos, porém sem nos preocuparmos com a ordem. Estamos pedindo o número C_r^n de *combinações*.

Exemplo

Dentre os números 1, 2, 3 e 4, quantas maneiras há de escolher $r = 2$ números distintos, sem considerar a ordem.

Poderemos ter:

$$12, 13, 14, 23, 24 \text{ e } 34.$$

Note, por exemplo, que não contamos a combinação 21, pois os dois objetos (1 e 2, no caso) são os mesmos da combinação 12 e apenas a ordem é diferente.

Combinações (Caso Geral)

Para obtermos C_r^n no caso geral, podemos usar a fórmula para o número total de arranjos.

Note que, quando consideramos o número de arranjos, ${}_nA_r$, contamos todas as possíveis ordens de cada grupo de r objetos. Portanto, para obtermos C_r^n basta dividirmos ${}_nA_r$ pelo número de permutações de r objetos distintos.

Assim,

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \triangleq \binom{n}{r}$$

Os números $\binom{n}{r}$ são chamados de *coeficientes binomiais*.

De volta ao exemplo das peças

Consideremos um lote de 100 peças contendo 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas. Escolhemos aleatoriamente 10 dentre as 100 peças do lote, sem reposição de qualquer peça escolhida antes que a seguinte seja escolhida. Estamos interessados em saber o número de possíveis maneiras pelas quais exatamente metade das 10 peças escolhidas é defeituosa.

Escolher 5 peças defeituosas dentre 20 delas, sem nos preocuparmos com a ordem, pode ser feito de $\binom{20}{5}$ maneiras.

Para cada uma dessas maneiras, temos $\binom{80}{5}$ possibilidades para a escolha de 5 peças perfeitas dentre 80 peças perfeitas.

Assim, usando a Regra da Multiplicação, teremos

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{80}{5} \approx 3,72 \times 10^{11}$$

maneiras possíveis pelas quais exatamente metade das 10 peças escolhidas é defeituosa, resolvendo o problema.

Probabilidade Geométrica

Note que há $\binom{100}{10}$ maneiras de escolhermos 10 peças quaisquer dentre 100 peças, sem reposição e sem nos preocupar com a ordem.

Logo, a probabilidade de escolhermos 10 peças dentre 100 com exatamente 5 peças defeituosas é:

$$\frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = 0,021 \text{ ou } 2,1\%.$$

Esta é conhecida como *probabilidade geométrica*.

PROBLEMAS

1. Dentre 8 pessoas, quantas comissões de 3 membros podem ser escolhidas?

2. Com 8 bandeiras distintas, quantos sinais com 3 bandeiras se podem obter?

3. De um grupo de 8 profissionais formado de 5 graduados e 3 de nível médio, quantas equipes de 3 profissionais podem ser constituídas, incluindo exatamente 2 graduados?

4. Quantos *bytes* de 8 bits há com exatamente dois 1's?

5. Quantos *bytes* de 8 bits há com um número par de 1's?

6. Quantos *bytes* de 8 bits há?

7. Quantos são os subconjuntos de um conjunto constituído de 8 elementos (contados o conjunto vazio e o próprio conjunto)?

8. Obtenha uma expressão geral para $(a+b)^n$, onde a e b são números reais quaisquer e n é um inteiro não negativo.

Logaritmos

Sejam A e B números reais positivos quaisquer , e b e c números inteiros quaisquer. Então,

1. $\log_b 1 = 0$

2. $\log_b A^n = n \log_b A$

3. $\log_b AB = \log_b A + \log_b B$

4. $$\log_b \left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B \Rightarrow \log_b \left(\frac{1}{B}\right) = -\log_b B$$

5.

$$\log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c b}$$

OBS.: Note que a propriedade 5 é útil para obtermos logaritmos em uma base qualquer, quando na nossa calculadora só temos as bases 10 e neperiana.

PROBLEMAS

1. Calcule $\log_3 27$.

2. Calcule $\log_{10} 1.000.000.000$.

3. Dado que $y = e^{-\ln(1/x)}$, mostre que $x = y$.