UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA

GUSTAVO SIMAS DA SILVA

TRABALHO 1 – INTRODUÇÃO À CODIFICAÇÃO

FLORIANÓPOLIS
SETEMBRO, 2019

1. Introdução

O atual trabalho tem como objetivo realizar uma simulação computacional fazendo uso do programa MatLab, de maneira a se avaliar a probabilidade de erro de palavra-código. São implementados 3 códigos de bloco:

1. Código de repetição, com taxa R = 1/7;
2. Código de Hamming, com taxa R = 4/7;
3. Código de transmissão, com taxa R = 7/7.

O canal adota é o BSC (Binary Symmetric Channel – Canal Binário Simétrico), com probabilidade de transição p. São realizadas 4 simulações, uma para cada valor de p.

1. p = 0,05;
2. p = 0,1;
3. p = 0,2;
4. p = 0,3.

São geradas sequências de bits de informação (com iguais probabilidades para 0 e para 1) de tamanho L blocos, de k bits cada bloco. Utiliza-se de um tamanho $L > 1000$, a princípio, se tendo maior precisão à medida que L aumenta, no entanto havendo limitações por conta do tempo de processamento do programa.

Um bloco de k bits, dadas tais características, é obtido com a operação $u = round(rand(1,k))$. Isto pois o comando *rand(a,b)* gera uma matriz de *a* linhas e *b* colunas, com número aleatórios entre 0 e 1; enquanto o comando *round* efetua o arredondamento de cada elemento da matriz gerada para o decimal inteiro mais próximo, resultando, portanto, em *a* blocos (vetores) de *b* bits cada. Podemos obter a palavra-código $v = uG$ pela matriz geradora:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As palavras-código são salvas na memória, para futura comparação com as palavras-código decodificadas. O programa desenvolvido gera, também, uma sequência de bits de tamanho igual a L blocos de 7 bits cada, para representar o ruído binário. Para tal sequência, a probabilidade de o bit ser 1 é p, quanto a probabilidade de o bit ser 0 é 1-p.

Cada bloco composto (padrão de erro) é gerado por meio do comando *e = round(rand(1,7) - 0.5 + p)*. Isto faz com que o vetor padrão de erro seja dependente da probabilidade de o bit ser 1, pois posteriormente será somado à palavra-código. Assim, para um valor baixo de p, o vetor de erro e terá menos elementos iguais a 1 (menor ruído); enquanto que, para um valor alto de p, o padrão de erro será mais ruidoso (mais elementos iguais a 1).

A decodificação do código de repetição é feita por lógica majoritária, ou seja, se o peso de Hamming (número de 1's) do vetor recebido for maior que o número de 0's, então decide-se pela palavra-código decodificada v' = (1111111). Caso contrário, v' = (0000000).

Para o código Hamming, utiliza-se decodificação exaustiva, ou seja, calcula-se a distância de Hamming entre o vetor recebido r = v + e e todas as palavras-código do código. Assim, é escolhida um v' mais próximo de r. No caso de empate, é escolhida qualquer uma delas, não havendo diferença significativa a longo prazo.

A decodificação do código de taxa 7/7 (aqui denominado como "de transmissão") não existe propriamente. Apenas aceita-se o que é recebido, sendo v' = r.

Depois da decodificação, o programa computa o número de palavras-código decodificadas erroneamente, sendo isto feito ao se comparar a palavra-código transmitida v (salva na memória) com a decodificada v'. A taxa de erro é obtida dividindo-se o número de palavras-código decodificadas erroneamente 1 pelo número total de palavras-código transmitidas (L).

Por fim, são apresentados os resultados na forma de gráficos Perro x p, para cada código simulado, tendo-se a probabilidade de erro simulada e teórica.

Para o código de repetição, a probabilidade de erro teórica é dada por:

$$P_{erro} = 1 - [(1-p)^7 + 7p(1-p)^6 + \binom{7}{2} p^2(1-p)^5 + \binom{7}{3} p^3(1-p)^4]$$

Para o código de Hamming, a probabilidade de erro teórica é dada por:

$$P_{erro} = 1 - [(1-p)^7 + 7p(1-p)^6]$$

Em relação à probabilidade de erro teórica para a taxa 7/7, a expressão resultante deduzida é:

$$P_{erro} = 1 - [(1-p)^7]$$

Isto, pois, é proveniente da equação generalizada de probabilidade de erro, dada por:

$$P_{erro} = 1 - \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

Onde k é o índice associado à taxa do respectivo código de blocos.

2. Resultados

Foi-se, então, simulados os códigos, tendo os 4 parâmetros definidos de probabilidade de transição do canal binário simétrico. Em princípio, se utilizou um valor de L tamanho de blocos igual a 1000 (mínimo recomendado). A Figura 1 apresenta o gráfico resultante para as configurações supracitadas.

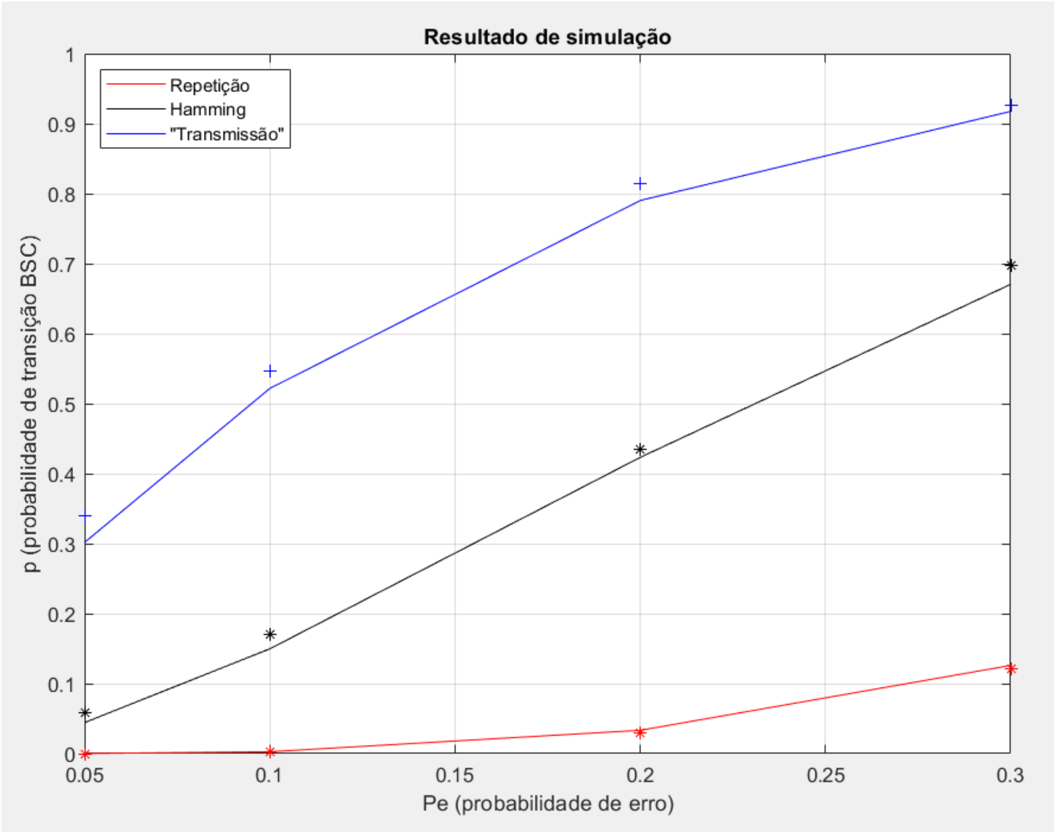

Figura 1 - Gráfico para L = 1000 e configurações padrão de p

Percebe-se um desvio relativo maior dos pontos do terceiro código (aqui denominado de código de "transmissão"). Sendo assim, foram alterados alguns parâmetros, de forma a se verificar o comportamento dos códigos corretores e se obter um gráfico estendido. Desta forma, optou-se por adicionar mais valores possíveis de p, ajustando-o para um vetor de 0 até 1 com espaçamento de 0,05. A Figura 2 a seguir apresenta o resultado. Verifica-se um padrão similar à etapa anterior, com os pontos do código de repetição se adequando mais à curva teórica.

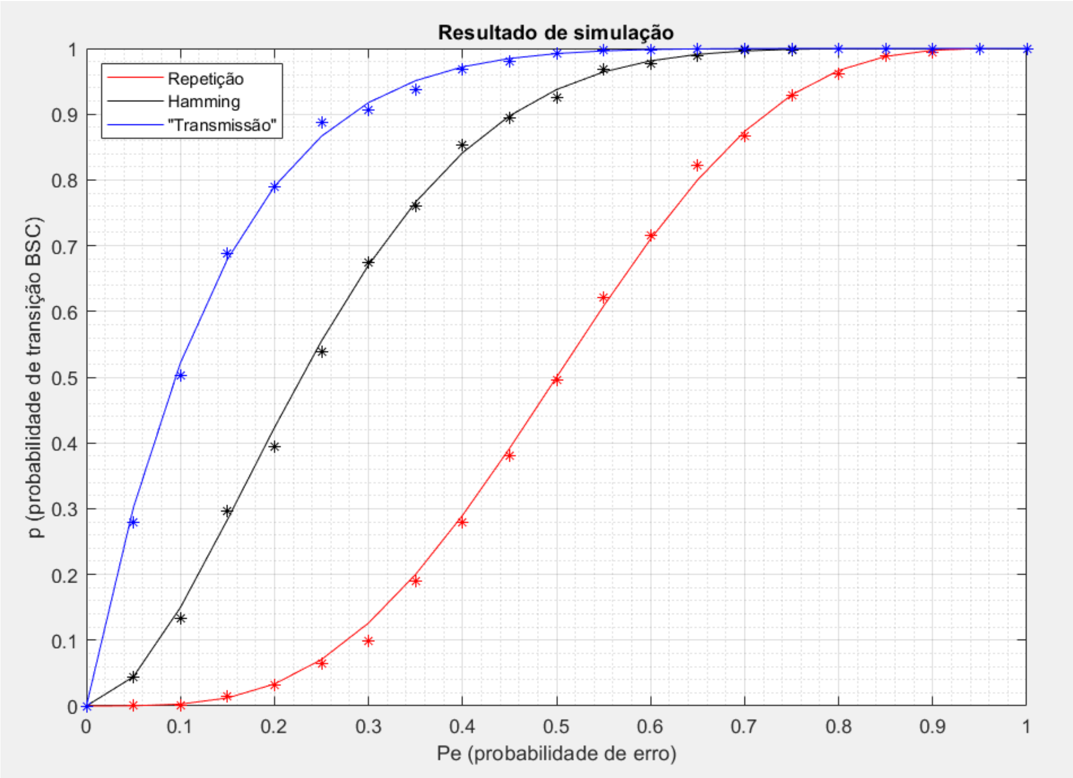

Figura 3 - Gráfico para L = 1000 e configurações estendidas de p

Finalmente, se elevou o valor do tamanho de blocos L para 10.000. O que fez com que os pontos se adequassem melhor às curvas teóricas. A Figura 3 apresenta o gráfico para tal parte.

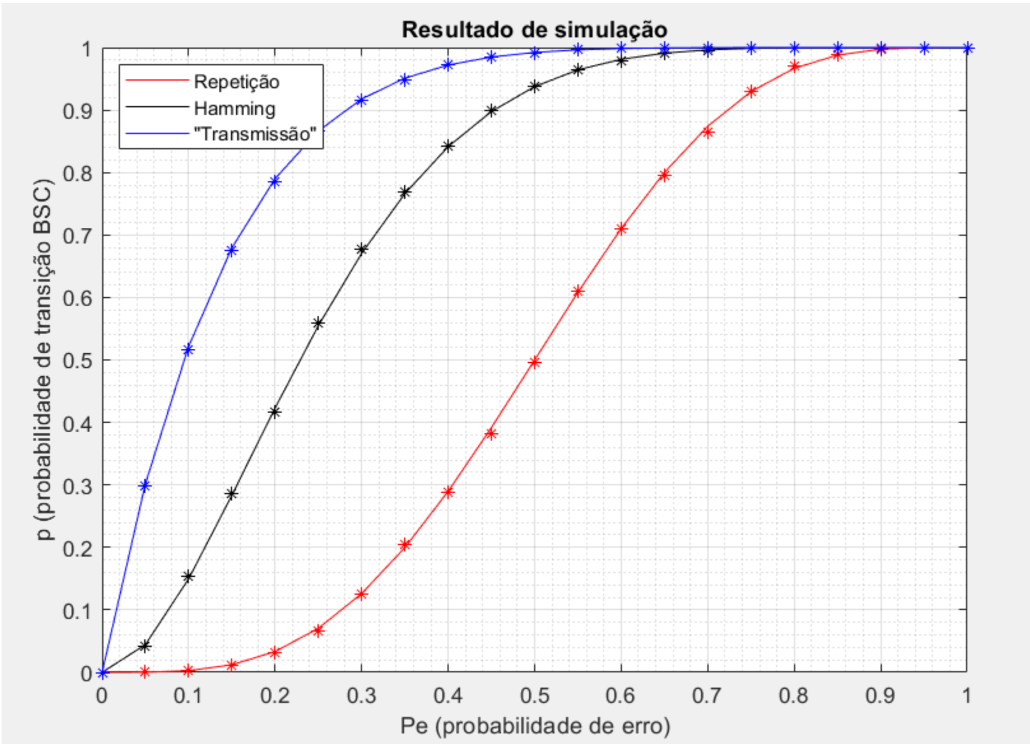

Figura 2 - Gráfico para L = 10.000 e configurações estendidas de p

3. Conclusões

Com o experimento realizado é possível identificar que:

- Para a taxa 1/7, o código de repetição, promove repetições dos bits transmitidos, sendo o com menor probabilidade de erro em relação aos demais códigos (e pontos simulados se adequam mais à curva teórica);
- Para a taxa 4/7, o código de Hamming, há menor redundância em comparação ao anterior, o que faz com que a correção de bits seja menos eficaz no tocante à tentativa de redução da probabilidade de erro;
- Para a taxa 7/7, o código de "transmissão", a própria mensagem recebida é a final, sem qualquer tipo de decodificação específica para tal, o que faz com que a probabilidade de erros seja significativamente elevada em comparação aos outros códigos.

Verificou-se que, com o aumento dos valores de L e p, o tempo de simulação foi estendido consideravelmente. No entanto, a duração foi aumentada não de maneira linear, ou seja, um ajuste em 10 vezes o valor de L resulta num tempo maior do que 10 vezes a simulação prévia. Portanto, é importante considerar a faixa necessária de avaliação, para que o experimento apresente resultados finais em tempo prático.

Assim, se conclui que os códigos que adicionam repetições às mensagens proporcionam menor probabilidade de erro na decodificação, tendo em conta a redundância de informação adicionada no canal binário simétrico.