Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica

EEL7522 - Processamento Digital de Sinais

Análise de Sinais por Série de Fourier

3.1 Introdução

A série de Fourier foi desenvolvida por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) e decompõe uma função periódica ou sinal periódico numa soma de funções sinusoidais ou de exponenciais complexas. O cálculo e estudo da série de Fourier são denominados análise de harmônicos.

A série de Fourier tem muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como, engenharia elétrica, análise de vibrações, acústica, processamento de sinais, entre outros problemas físicos e matemáticos da engenharia.

O objetivo desta experiência é estudar a série de Fourier, ou seja, como funções periódicas podem ser representadas por uma soma de sinais sinusoidais com freqüências múltiplas da freqüência do sinal periódico (a frequência fundamental). Neste roteiro são ilustrados alguns exemplos de aproximações sucessivas para alguns sinais utilizando a série de Fourier.

3.2 Série de Fourier: Definição Trigonométrica

Qualquer função periódica $x(t)$ com período fundamental T, que obedece as condições de Dirichlet, pode ser considerada como a soma de funções sinusoidais com freqüências

$$0,\ \omega_0,\ 2\omega_0,\ \ldots,\ k\omega_0,\ \ldots,\quad \text{onde}\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

A série trigonométrica de Fourier é dada pela relação

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

sendo os coeficientes calculados pelas seguintes equações:

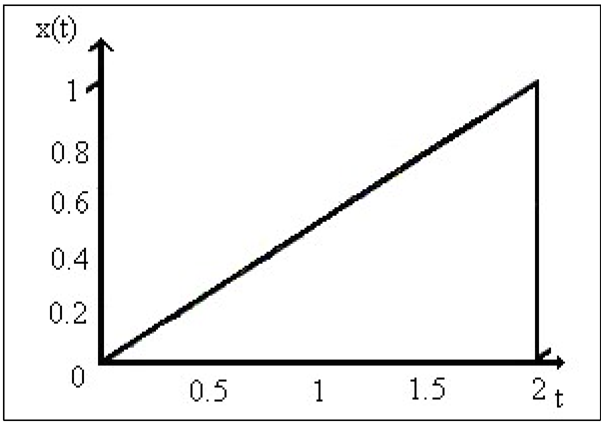
$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt\,;\, A_k = 2|a_k|\ e\ \varphi_k = \sphericalangle a_k \qquad (2)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \text{ (coeficiente da série exponencial)}$$

A determinação apropriada dos coeficientes permite representar qualquer sinal periódico. A freqüência ω_0 corresponde a componente fundamental e é a freqüência de $x(t)$. A frequência $k\omega_0$ corresponde a k-ésima harmônica. O termo A_0 corresponde a componente de freqüência zero (componente DC).

3.2.1 Avaliação por Série de Fourier do Sinal Dente de Serra

Seja o sinal dente de serra da figura.



$$x(t) = \frac{t}{2}, \; 0 \le t \le 2$$

- **Tarefas do Relatório**

Derivar os resultados mostrados na tabela abaixo pela série trigonométrica de Fourier.

A_0	$\frac{1}{2}$
A_k	$\frac{1}{k\pi}$
$x(t)$	$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} cos(k\pi t + \frac{\pi}{2})$

Note que todas as harmônicas têm fase $\pi/2$.

Simule no Matlab o sinal dente de serra por série de Fourier, considerando N = 2, 3, 5, 10, 50, e avalie o erro de aproximação do sinal em função do número de harmônicos pelo critério do somatório do erro quadrático, isto é,

$$SEQ = [x(t) - x_N(t)]^2, \; 0 \le t \le T \qquad (3)$$

onde $x_N(t)$ é a aproximação por série de Fourier do sinal $x(t)$ utilizando N harmônicos. O programa em Matlab para esta simulação é fornecido abaixo.

```
clear all, close all, clc
N = 20;% número de harmônicas
T = 2;% período
t = linspace(0,2*T,1000);% vetor de tempo
xaux = 0;
for k = 1:N
xaux = xaux + (1/(k*pi))*cos(k*(2*pi/T)*t+pi/2);
end
x = 1/2+xaux;% sinal x(t)aproximad0
t1= linspace(0,T,500);
x1 = t1/2;
xn=[x1 x1];% sinal x(t) exato
plot(t,x,t,xn); grid
%
erro = (x-xn).^2;
%
seq = sum(erro) % erro quadrático
```

3.3 Série de Fourier: Definição Exponencial

A série exponencial de Fourier pode ser obtida da série trigonométrica, equação (1), e é descrita da forma

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + \ldots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \ldots$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{4}$$

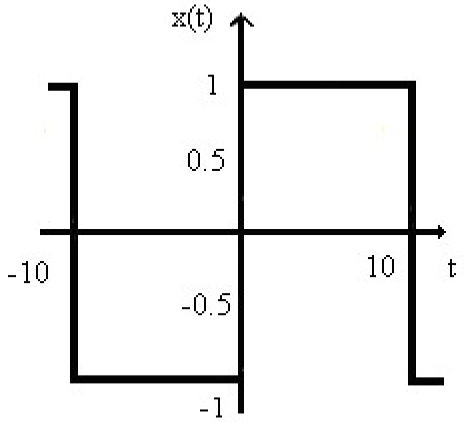
onde os coeficientes da equação (4) são obtidos por

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5}$$

O gráfico de $|a_k|$ versus $k\omega_0$ é denominado espectro de magnitude, enquanto que a fase de a_k versus $k\omega_0$ é denominado espectro de fase.

3.3.1 Avaliação por Série de Fourier da Onda Quadrada

Nessa analise utilizaremos a onda quadrada mostrada na figura abaixo.



$$x(t) = \begin{cases} +1, & 0 < t < 10 \\ -1, & -10 < t < 0 \end{cases}$$

- **Tarefas do Relatório**

Derivar os resultados mostrados na tabela abaixo pela série exponencial de Fourier.

a_k	$\frac{1}{jk\pi}[1-\cos(k\pi)] \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{jk\pi}, k\ impar \\ 0 \quad , k\ \ par \end{cases}$
$\lvert a_k \rvert$	$\begin{cases} \frac{2}{\lvert k \rvert \pi}, k\ impar \\ 0 \quad , k\ \ par \end{cases}$
Fase de a_k	$\begin{cases} \frac{-\pi}{2}, \ k = (2m-1),\ m = 1,2,... \\ 0, \quad k = 2m,\ m = 0,1,2,... \\ \frac{\pi}{2}, \quad k = -(2m-1),\ m = 1,2,... \end{cases}$
x(t)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{jk\pi}[1-\cos(k\pi)]\ e^{jk\frac{\pi}{10}t}$

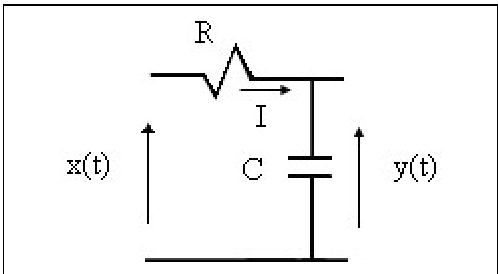
Simular no Matlab a aproximação da onda quadrada por série de Fourier, considerando N = 3, 5, 11, 21, 51, e avaliar tanto a aproximação do sinal tanto no tempo como através dos espectros da magnitude e fase. O programa em Matlab para esta simulação é fornecido abaixo.

```
clear all, close all, clc
N = 21; %número de harmonicas (deve ser um número impar)
T = 20;% período em segundos
t = linspace(0,T,1000);%vetor de tempo
x = 0;l = 0;
for k = -((N-1)/2):((N-1)/2)
    l = l + 1;
    if k ~= 0
    x = x + (1-cos(k*pi))*exp(j*k*2*pi*t/T)/(j*k*pi);%sinal
    ak(l) = (1-cos(k*pi))./(j*k*pi);% coeficientes da série
    end
    if k == 0, x = 0 ; ak(l) = 0; end
end

xn=0.5*[ones(1,500) -ones(1,500)];
k = -((N-1)/2):((N-1)/2);
kw=k*2*pi/20; %vetor de frequências
figure(1),plot(t,real(x),t,xn,'r');grid
title('Onda quadrada exata e truncada')
xlabel('tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
figure(2),stem(kw,abs(ak)); grid
title('|a_k|')
xlabel('Freqência (k.\omega_0)')
figure(3),stem(kw,angle(ak)); grid
title('\phi_k')
xlabel('Freqência (k.\omega_0)')
```

3.4 Filtragem da Onda Quadrada pelo Circuito RC

Considere o seguinte sistema contínuo de primeira ordem representado pelo circuito RC mostrado na figura abaixo, com a correspondente equação diferencial:



$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\tau = RC$$

onde $x(t)$ é o sinal de entrada, $y(t)$ é a saída do sistema, R = 1MΩ e C = 1μF.

Para determinar a resposta $y(t)$ de um sistema linear invariante no tempo para um sinal de entrada periódico $x(t)$ com a representação por série de Fourier, utiliza-se seguinte relação:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Esta equação mostra que o sinal de saída é a soma de exponenciais com coeficientes calculados por

$$c_k = H(k\omega_0) a_k$$

onde $H(\omega)$ é a resposta em frequência do filtro RC.

➢ Tarefas do Relatório

Derivar o resultado da tabela.

$H(k\omega_0)$	$\dfrac{1}{1+jk\dfrac{\pi}{10}\tau}$
c_k	$\left(\dfrac{1}{1+jk\dfrac{\pi}{10}\tau}\right)\left(\dfrac{1-\cos k\pi}{jk\pi}\right)$

Utilizando a aproximação da onda quadrada por série de Fourier da seção (3.3.1) como o sinal de entrada do sistema, simular no Matlab, considerando N = 5, 11, 51, 101, e observar o comportamento da saída em função tanto da atenuação causada pelo filtro no sinal de entrada x(t) como dos espectros de amplitude e fase. Modificar a constante de tempo (τ) para 0.1 e 0.01 e novamente observar o efeito da filtragem com N = 51.

```
clear all, close all, clc
N = 51;% número de harmonicas (impar)
T = 20; % Período
t = linspace(0,T,1000); %vetor de tempos
x = 0;y = 0;l = 0;
tau = 1;
for k = -((N-1)/2):((N-1)/2)
    l = l + 1;
    if k ~= 0
    y = y + (1/(1+j*k*(2*pi/T)*tau))*(1-
cos(k*pi))*exp(j*k*2*pi*t/T)/(j*k*pi); %sinal de saída
    x = x + (1-cos(k*pi))*exp(j*k*2*pi*t/T)/(j*k*pi); %sinal de
entrada
    ak(l) = (1-cos(k*pi))./(j*k*pi); %coeficientes da série de
Fourier do sinal de entrada
    ck(l) = (1/(1+j*k*(2*pi/T)*tau))*(1-
cos(k*pi))./(j*k*pi);%coeficientes da série de Fourier do sinal de
saída
    end
    if k == 0, y = 0; x = 0; ak(l) = 0; ck(l) = 0; end
end
xn=0.5*[ones(1,500) -ones(1,500)];
k = -((N-1)/2):((N-1)/2);
kw=k*2*pi/T; %vetor de frequências
figure(1),plot(t,real(x),t,real(y),'k',t,xn,'r')
hleg1 = legend('sinal de entrada','sinal de saída','onda
quadrada');
xlabel('tempo(s)')
figure(2), stem(kw,abs(ak))
hold on
stem(kw,abs(ck),'k')
hold off
hleg1 = legend('|a_k|','|c_k|');
```

```
xlabel('Frequência (k.\omega_0)')
figure(3), stem(kw,angle(ak))
hold on
stem(kw,angle(ck),'k')
hold off
hleg1 = legend('|\phi_k|','|\theta_k|');
xlabel('Frequência (k.\omega_0)')
```

Sempre faça uma breve discussão de todos os resultados obtidos por simulação!