

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC  
CENTRO TECNOLÓGICO - CTC  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E ELETRÔNICA -  
DEEL  
EEL7522 - PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

TRABALHO 1  
ANÁLISE DE SINAIS POR SÉRIE DE FOURIER

ANDRÉ MARTINS PIO DE MATTOS  
GUSTAVO SIMAS DA SILVA

FLORIANÓPOLIS

SETEMBRO, 2020

## **SUMÁRIO**

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>2</b>
<b>TAREFAS</b>	<b>3</b>
2.1 Avaliação por Série de Fourier do Sinal Dente de Serra	3
2.2 Avaliação por Série de Fourier da Onda Quadrada	7
2.3 Filtragem da Onda Quadrada pelo Circuito RC	11
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>16</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>17</b>

## **INTRODUÇÃO**

A série de Fourier foi desenvolvida por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) e decompõe uma função periódica ou sinal periódico numa soma de funções sinusoidais ou de exponenciais complexas. O cálculo e estudo da série de Fourier são denominados análise de harmônicos. A série de Fourier tem muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como, engenharia elétrica, análise de vibrações, acústica, processamento de sinais, entre outros problemas físicos e matemáticos da engenharia.

O objetivo desta experiência é estudar a série de Fourier, ou seja, como funções periódicas podem ser representadas por uma soma de sinais sinusoidais com frequências múltiplas da frequência do sinal periódico (a frequência fundamental). Neste roteiro são ilustrados alguns exemplos de aproximações sucessivas para alguns sinais utilizando a série de Fourier.

## TAREFAS

### 2.1 Avaliação por Série de Fourier do Sinal Dente de Serra

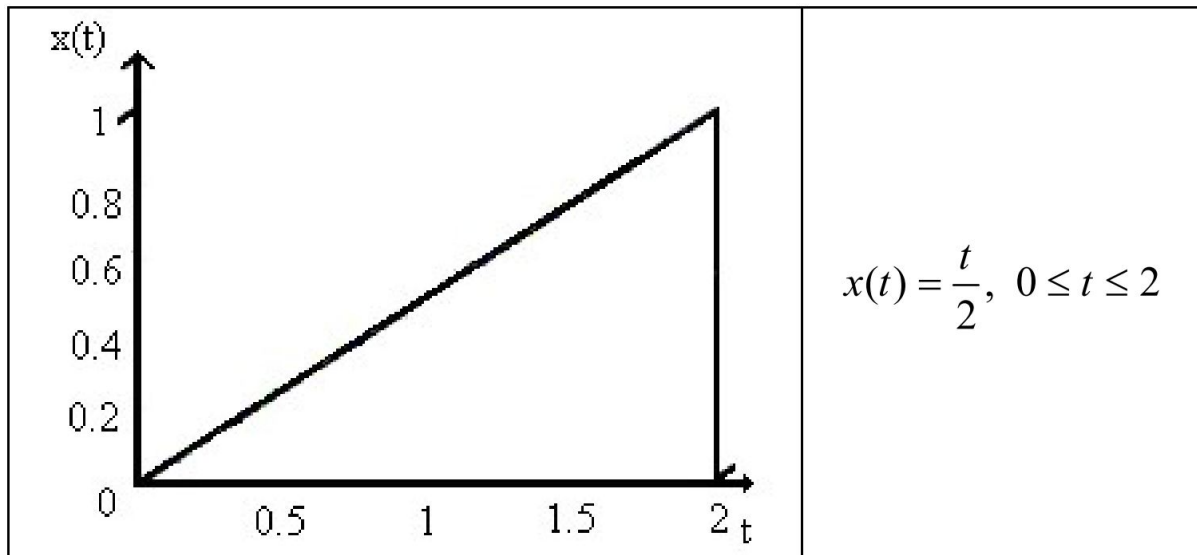


Figura 1 - Sinal dente de serra em análise

Derivar os resultados mostrados na tabela abaixo pela série trigonométrica de Fourier.

$A_0$	$\frac{1}{2}$
$A_k$	$\frac{1}{k\pi}$
$x(t)$	$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t + \frac{\pi}{2})$

i) Série trigonométrica ("dente de serra")

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k); a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jK\omega_0 t} dt,$$



$$x(t) = \frac{t}{2}, 0 \leq t \leq 2$$

$$T = 2 \therefore \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$$

$$A_k = 2|a_k|$$

$$\phi_k = \angle a_k$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{t}{2} e^{-jK\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t}{2} e^{-jK\omega_0 t} dt, \quad u = \frac{t}{2} \quad dv = e^{-jK\omega_0 t} dt$$

$$du = \frac{1}{2} dt \quad v = \frac{e^{-jK\omega_0 t}}{-jK\omega_0}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{2} \cdot \frac{e^{-jK\omega_0 t}}{-jK\omega_0} - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-jK\omega_0 t}}{-jK\omega_0} dt \right) \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{4} \cdot \left( -\frac{t e^{-jK\omega_0 t}}{jK\omega_0} - \frac{e^{-jK\omega_0 t}}{(jK\omega_0)^2} \right) \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow a_k = -\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{2e^{-jK\omega_0 2}}{jK\omega_0} + \frac{e^{-jK\omega_0 2}}{(jK\omega_0)^2} - \left( 0 + \frac{1}{(jK\omega_0)^2} \right) \right)$$

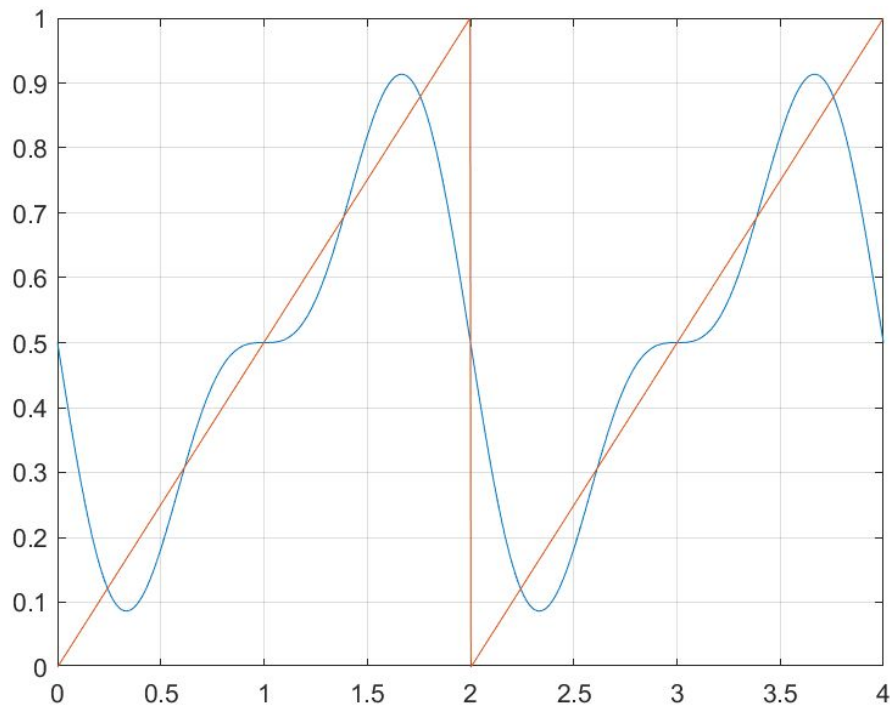
$$\Rightarrow a_k = -\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{(jK\pi)^2} \cdot \left( 2jK\pi (\cos(K\pi 2) - \sin(K\pi 2)) + \cos(K\pi 2) - \sin(K\pi 2) - 1 \right) \right)$$

$$\Rightarrow a_k = -\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{(jK\pi)^2} \cdot (2jK\pi + 1 - 1) \right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{jK\pi} = \frac{1}{2jK\pi}$$

$$\therefore |a_k| = \frac{1}{2K\pi}, \angle a_k = \arctan\left(\frac{2K\pi}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \therefore A_k = \frac{1}{K\pi}, A_0 = \frac{1}{2}, \phi_k = \frac{\pi}{2}$$

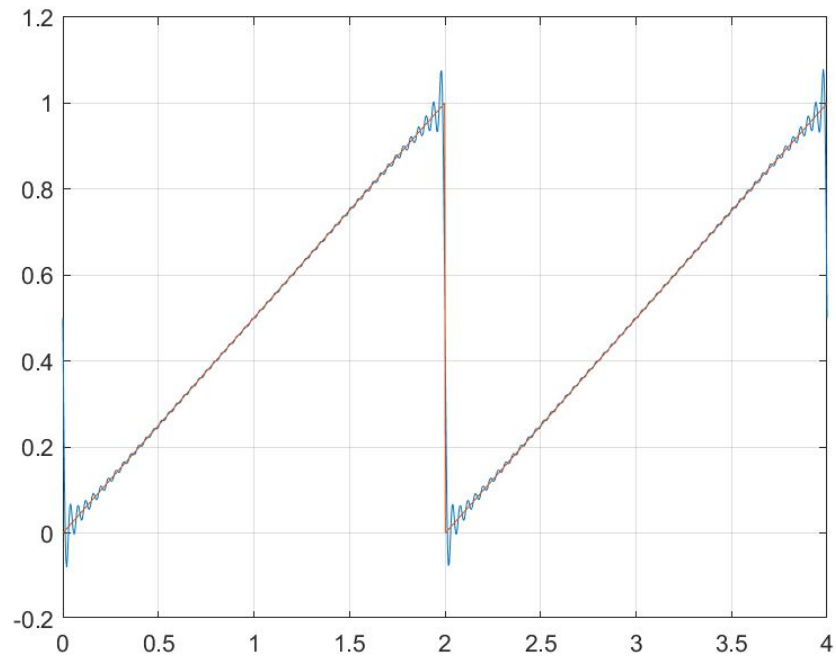
### Simulação Matlab Sinal Dente de Serra

Foi realizada a simulação para o sinal dente de serra no Matlab, conforme código disponibilizado, executando variação de variável  $N$ , a qual indica número de harmônicas para a representação do sinal. A Figura 2 apresenta o sinal resultante para  $N = 2$ .



**Figura 2 - Sinal resultante simulado para dente de serra,  $N = 2$**

Ao se elevar a quantidade de harmônicas para representação do sinal, percebe-se claramente a aproximação com o sinal “ideal”. A Figura 3 apresenta o sinal resultante para  $N = 50$ . No entanto, nas discontinuidades, identificam-se overshoots do sinal, seguindo o conceito de fenômeno de Gibbs.



**Figura 3 - Sinal resultante simulado para dente de serra,  $N = 50$**

Dessa forma, foi simulado para diferentes valores de  $N$ , obtendo-se o somatório do erro quadrático, definido como:

$$SEQ = [x(t) - x_N(t)]^2, \quad 0 \leq t \leq T$$

Onde  $x_N(t)$  é a aproximação por série de Fourier do sinal  $x(t)$  utilizando  $N$  harmônicos.

A Tabela 1 apresenta os dados resultantes:

<b>N</b>	<b>SEQ</b>
2	20,2788
3	14,6445
5	9,4473
10	5,0798
20	2,7304
50	1,2713

**Tabela 1 - Somatório de Erro Quadrático para sinal dente de serra**

## 2.2 Avaliação por Série de Fourier da Onda Quadrada

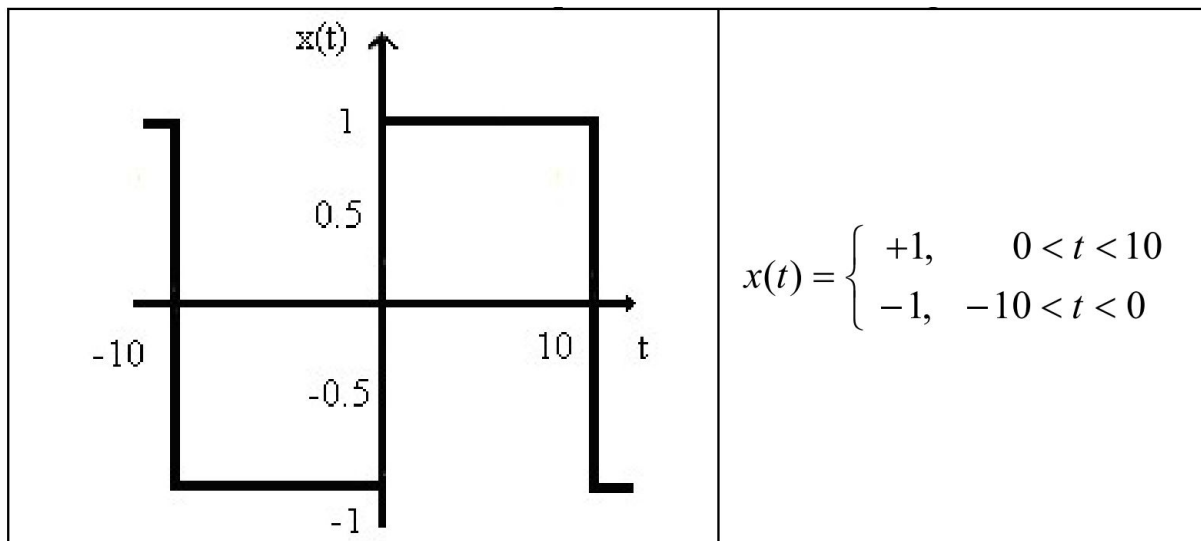


Figura 4 - Sinal onda quadrada em análise

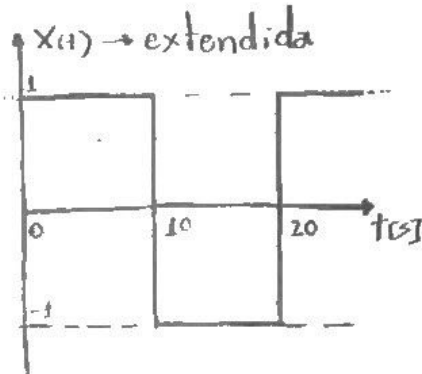
Derivar os resultados mostrados na tabela abaixo pela série exponencial de Fourier.

$a_k$	$\frac{1}{jk\pi} [1 - \cos(k\pi)] \Rightarrow \left\{ \frac{2}{jk\pi}, k \text{ ímpar} \right.$ $\left. \{0, k \text{ par} \right.$
$ a_k $	$\left\{ \frac{2}{ k \pi}, k \text{ ímpar} \right.$ $\left. \{0, k \text{ par} \right.$
Fase de $a_k$	$-\frac{\pi}{2}, k = (2m - 1), m = 1, 2, \dots$ $0, k = 2m, m = 0, 1, 2, \dots$ $\frac{\pi}{2}, k = -(2m - 1), m = 1, 2, \dots$
$x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{jk\pi} [1 - \cos(k\pi)] e^{jk\frac{\pi}{10}t}$



## ii) Série exponencial (onda quadrada)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-jK\omega_0 t} \quad ; \quad a_K = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jK\omega_0 t} dt$$



$$x(t) = \begin{cases} +1, & 0 < t < 10 \\ -1, & -10 < t < 0 \end{cases}$$

$$T = 20 \therefore \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi/10 \text{ rad/s}$$

Para facilitar os cálculos e melhorar a apresentação do resultado, faremos deslocamentos em  $X$  e  $Y$ .

$$x(t-t_0) \rightarrow a_K e^{-jK\omega_0 t_0} \quad ; \quad x(t) + X \rightarrow a_0 + X; \quad \begin{cases} +1, & -5 < t < 5 \\ 0, & -10 < t < -5 \text{ e } 5 < t < 10 \end{cases}$$

$$b_K = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jK\omega_0 t} dt = \frac{1}{20} \int_{-5}^5 2 \cdot e^{-jK\omega_0 t} dt = \frac{1}{20} \cdot \left( \frac{e^{-jK\omega_0 t}}{-jK\omega_0} \right) \Big|_{-5}^5$$

$$\Rightarrow b_K = \frac{1}{20} \cdot \left( \frac{e^{-jK\pi/2}}{-jK\pi/10} - \frac{e^{jK\pi/2}}{-jK\pi/10} \right) = \frac{1}{-jK\pi} \cdot \left( e^{-jK\pi/2} - e^{jK\pi/2} \right)$$

$$a_K = b_K e^{jK\omega_0 t_0} \Rightarrow a_K = \frac{1}{-jK\pi} \cdot \left( e^{-jK\pi/2} - e^{jK\pi/2} \right) \cdot e^{jK\pi/2}$$

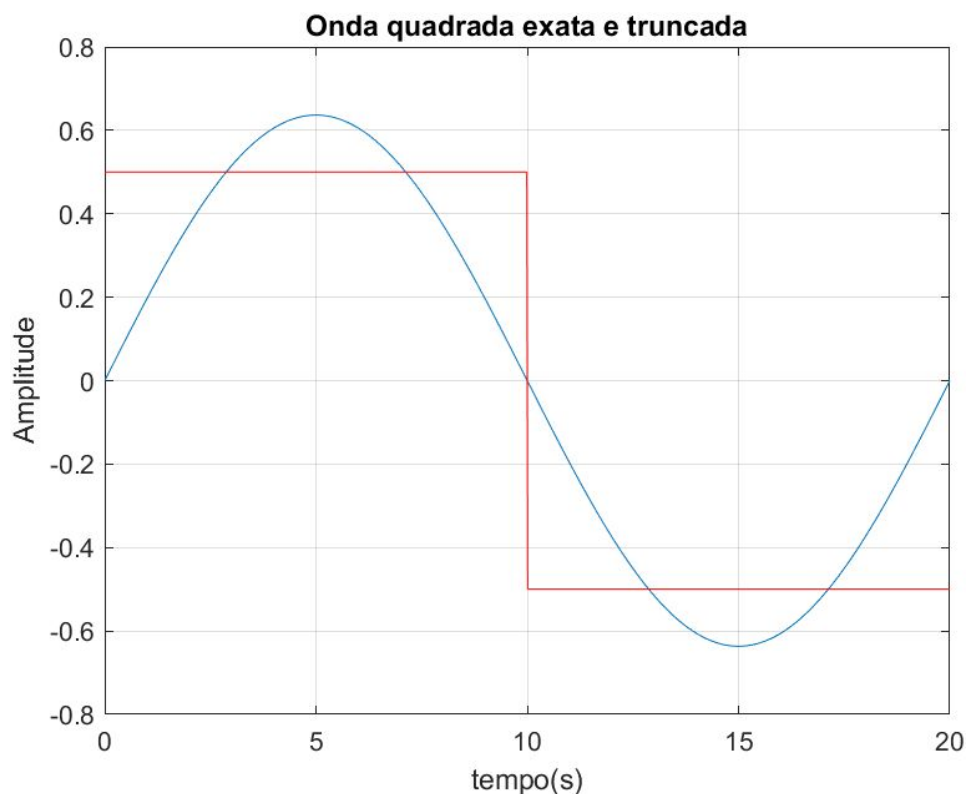
$$\Rightarrow a_K = \frac{1}{jK\pi} \cdot \left( 1 - e^{jK\pi} \right) = \frac{1}{jK\pi} \cdot \left( -\cos(K\pi) - j\sin(K\pi) + 1 \right)$$

$$\therefore a_K = \frac{1}{jK\pi} \cdot (1 - \cos(K\pi)) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{jK\pi}, & K \text{ ímpar} \\ 0, & K \text{ par} \end{cases}, \quad a_0 = 0 \text{ (valor médio)}$$

$$\angle a_K = -\arctan(K\pi/0) \rightarrow \begin{cases} -\pi/2, & K \text{ ímpar e positivo } (K\pi/0 \rightarrow +\infty) \\ 0, & K \text{ par} \\ \pi/2, & K \text{ ímpar e negativo } (K\pi/0 \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

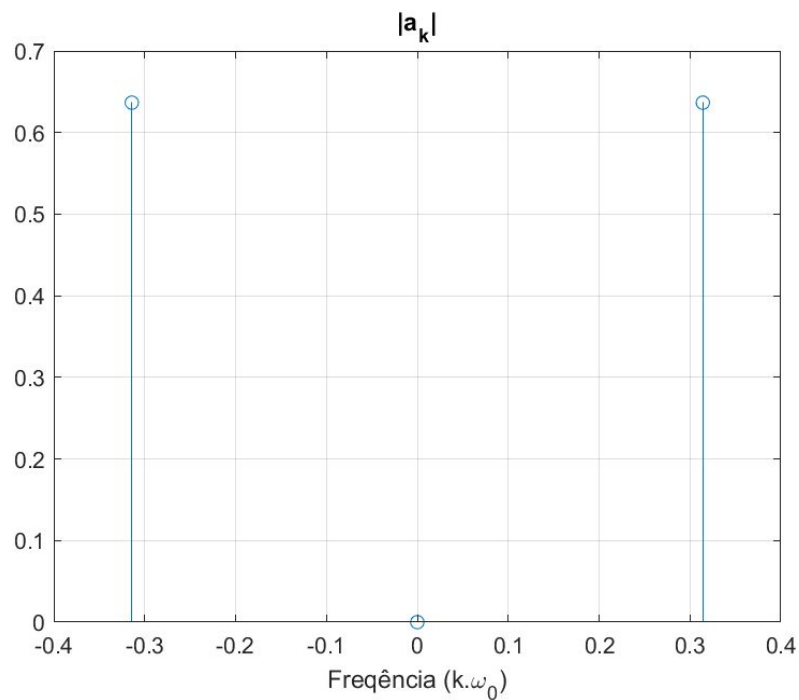
### Simulação Matlab Sinal Onda Quadrada

Prosseguiram-se as simulações, desta vez para uma onda quadrada. Utilizou-se apenas de valores  $N$  ímpares, pois, conforme avaliado na derivação anterior, temos que os valores de  $ak$  são nulos para  $k$  pares. A Figura 5 apresenta o gráfico transitório do sinal resultante para  $N = 3$ , em comparação com a onda quadrada ideal.

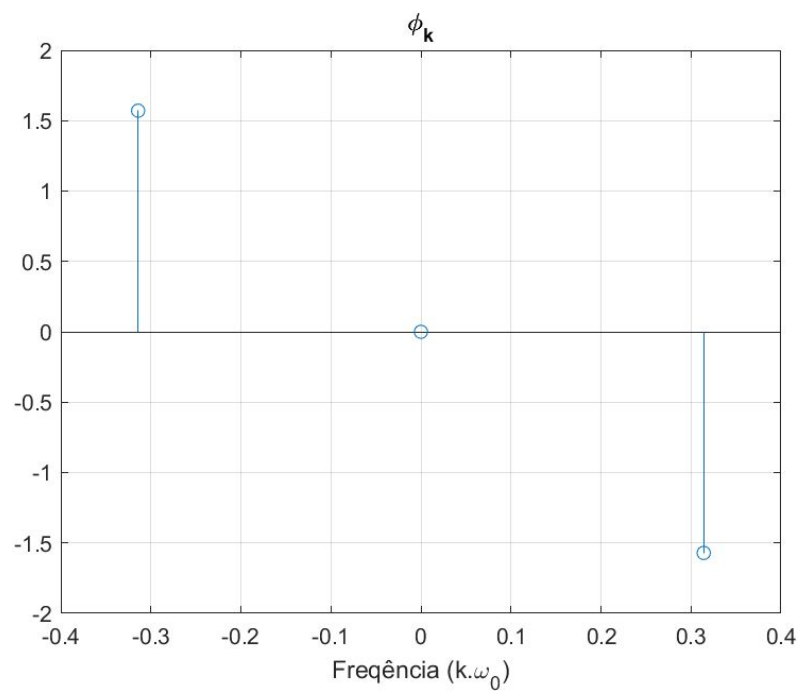


**Figura 5 - Sinal resultante simulado para onda quadrada,  $N = 3$**

Também foram obtidos os gráficos de magnitude  $ak$  e fase para tal sinal, tendo frequência com unidade em radianos ( $k\omega_0$ ) no eixo X, conforme é exibido na Figura 6 e Figura 7, respectivamente. Identifica-se que para o menor valor possível de  $N$ , no caso  $N = 3$ , temos  $x_n(t)$  como um sinal seno.



**Figura 6 - Magnitude  $a_k$  para sinal resultante simulado onda quadrada,  $N = 3$**



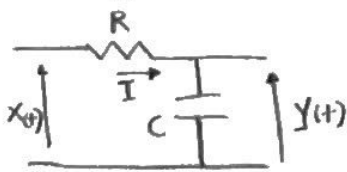
**Figura 7 - Fase para sinal resultante simulado onda quadrada,  $N = 3$**

### 2.3 Filtragem da Onda Quadrada pelo Circuito RC

Derivar o resultado da tabela.

$H(k\omega_0)$	$\frac{1}{1+jk\frac{\pi}{10}\tau}$
$c_k$	$\left(\frac{1}{1+jk\frac{\pi}{10}\tau}\right)\left(\frac{1-\cos(k\pi)}{jk\pi}\right)$

iii) Filtragem circuito RC (onda quadrada)



Como impedâncias, temos:

$$Y(t) = \frac{\bar{Z}_C}{Z_R + \bar{Z}_C} = \frac{1}{\frac{Z_R}{\bar{Z}_C} + 1} = \frac{1}{j\tau k\omega_0 + 1}$$

Como equação diferencial, temos:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad ; \quad y(t) = h(t) * x(t) \quad ; \quad h(t) * x(t) \rightarrow H(k\omega_0) \cdot a_k$$

resposta ao impulso

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow a_k \cdot jk\omega_0 \quad ; \quad b_k = H(k\omega_0) \cdot a_k$$

$$\Rightarrow \tau \frac{d}{dt} (h(t) * x(t)) + h(t) * x(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow \tau jk\omega_0 H(k\omega_0) \cdot a_k + H(k\omega_0) \cdot a_k = a_k$$

$$\Rightarrow H(k\omega_0) (\tau jk\omega_0 + 1) = 1 \quad \therefore H(k\omega_0) = \frac{1}{j\tau k\omega_0 + 1}$$

$$\therefore H(k\omega_0) = \frac{1}{jK\frac{\pi}{10}\tau + 1} = \frac{1}{jK\frac{\pi}{10} + 1}$$

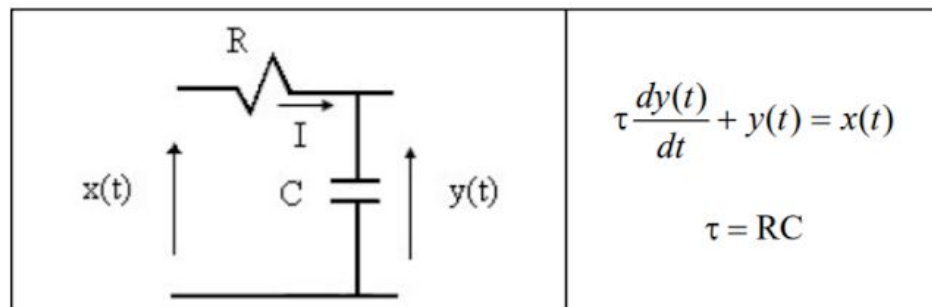
Como já calculado anteriormente:

$$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow b_k = H(k\omega_0) \cdot a_k, \text{ mas } \begin{cases} H(k\omega_0) = \frac{1}{1+jK\frac{\pi}{10}\tau} \\ a_k = \frac{1}{jK\pi} (1-\cos(k\pi)) \end{cases}$$

$$\therefore b_k = \left( \frac{1}{jK\frac{\pi}{10} + 1} \right) \cdot \left( \frac{1}{jK\pi} \cdot (1-\cos(k\pi)) \right)$$

### Simulação Matlab Filtragem de Onda Quadrada em Circuito RC

Nesta seção, fez-se a simulação de filtro de onda quadrada em circuito RC, onde foi considerado o seguinte sistema contínuo de primeira ordem representado na Figura 8, a princípio com  $R = 1\text{M}\Omega$  e  $C = 1\mu\text{F}$ , resultando em  $\tau = 1$ , com a correspondente equação diferencial:



**Figura 8 - Circuito RC e equação diferencial correspondente**

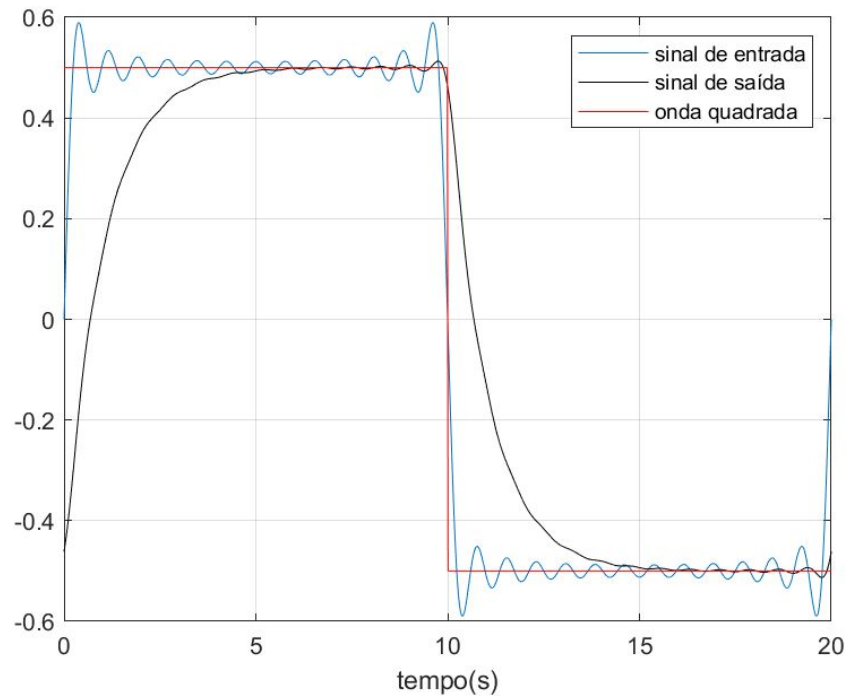
Dessa forma, temos que, para representar um sinal resposta de sistema linear invariante no tempo, utilizamos a seguinte relação:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

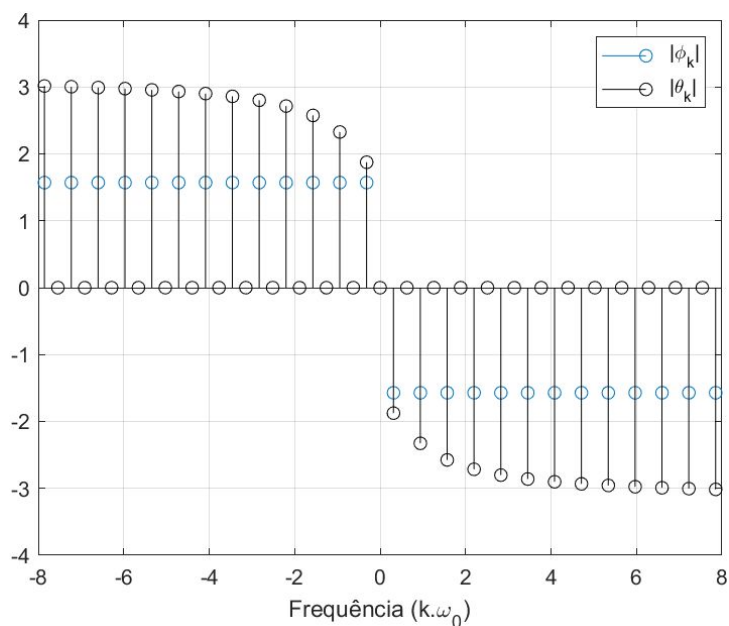
Com  $H(k\omega_0)$  sendo a resposta em frequência do sistema.

Efetuuou-se a simulação de maneira semelhante às seções anteriores, com obtenção de gráfico transiente no tempo, tanto como fase e módulo dos coeficientes de representação dos sinais por série de Fourier. A Figura 9 apresenta o gráfico transiente obtido para número de harmônicas  $N = 51$ , com constante de tempo  $\tau = 1$  s, a qual representa o intervalo de tempo necessário tanto para a carga do capacitor até 63,2% da carga total como para a descarga até 37,8% da carga total [2].

Apresenta-se na Figura 10 e Figura 11, respectivamente, os gráficos de fase e módulo dos coeficientes da série de Fourier em função da frequência.

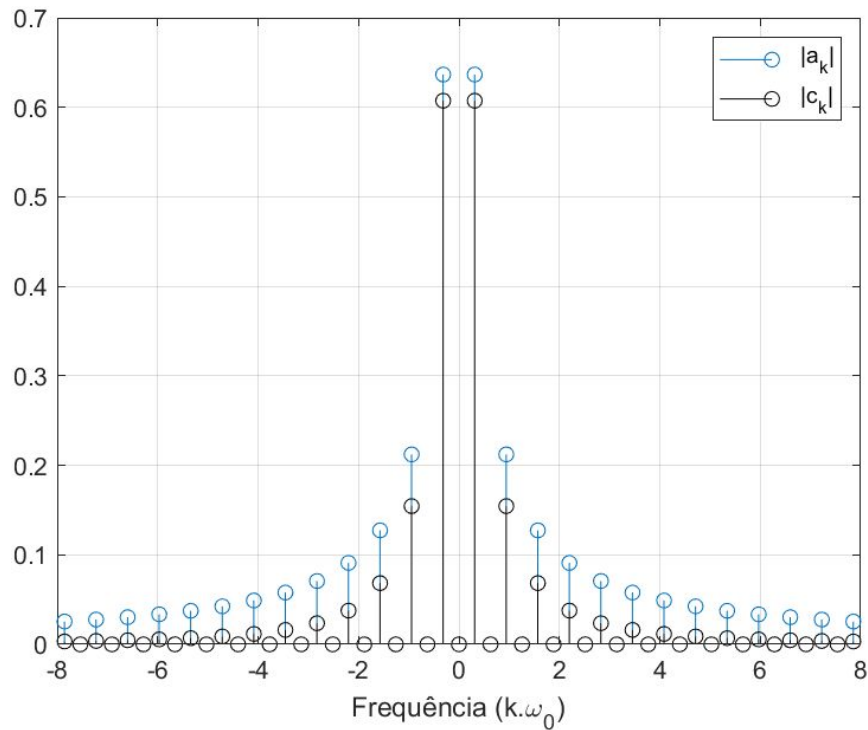


**Figura 9 - Sinal resultante de saída de filtro RC,  $N = 51$ ,  $\tau = 1$**



**Figura 10 - Fase do sinal de saída filtro RC,  $N = 51$ ,  $\tau = 1$**

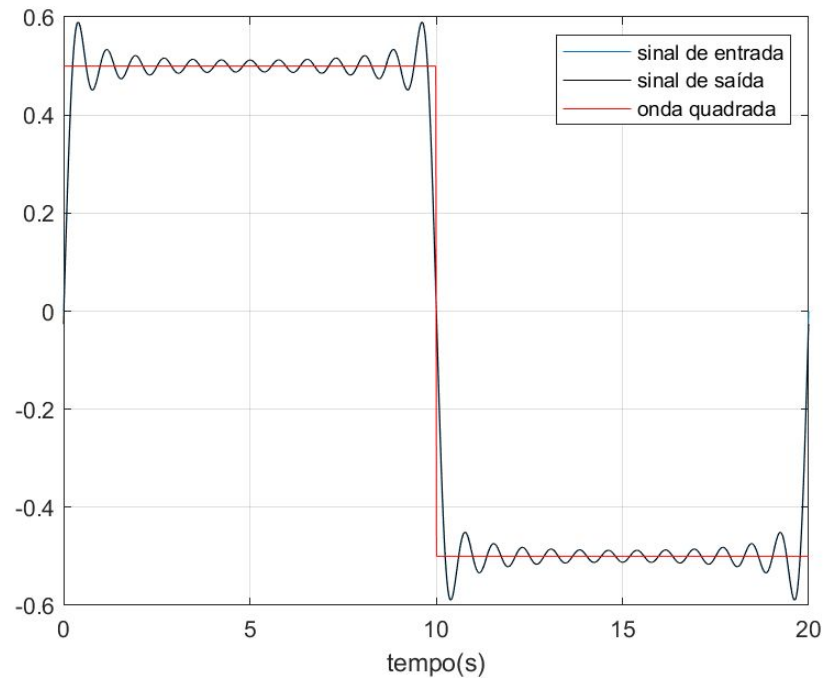
Analisa-se que o valor de  $\theta_k$ , o qual simboliza a fase do sinal simulado, se difere de  $\phi_k$  em termos de magnitude das harmônicas. Embora ambos sejam simétricos em relação à origem, a fase do sinal simulado não apresenta mesma magnitude para todos os pontos, algo visto também em sinais práticos obtidos em experimentos laboratoriais.



**Figura 11 - Módulo dos coeficientes do sinal de saída filtro RC,  $N = 51$ ,  $\tau = 1$**

Em sequência, foi experimentada a alteração do número de harmônicas, conforme executado em seções prévias. De mesmo modo, foi observada melhor representação do sinal exato e truncado com maior número de harmônicas, com proeminência de amplitude nas discontinuidades (efeito de Gibbs).

Já para a variação de  $\tau$ , com configuração de menores valores (0,1 e 0,01 s) percebemos modificação no gráfico transiente, com o sinal de saída se assemelhando mais ao de entrada, assim como maior similaridade entre os gráficos de fase. A Figura 12 apresenta o transiente para  $N = 51$  e  $\tau = 0,01$ .



**Figura 12 - Sinal resultante de saída filtro RC,  $N = 51$ ,  $\tau = 0,01$**

Com a alteração da constante de tempo, estamos modificando a relação RC, consequentemente reduzindo a resistência (facilitando transporte de cargas para o capacitor) ou abaixando a capacitância (facilitando carga completa do elemento com menor quantidade de portadores). Nesta situação, observa-se que o sinal de entrada é bastante similar com o de saída, concluindo-se que filtro RC não apresenta influência sobre o comportamento do sinal.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com as atividades deste experimento, foi possível analisar o comportamento de sinais em sistemas lineares com representação por série de Fourier. Foi realizada a análise teórica e simulação com software especializado Matlab.

Considerando-se maior quantidade de harmônicas, conseqüentemente, temos melhor representação do sinal, o que identifica-se visualmente no gráfico transitório e no espectro de frequências de magnitude e fase dos sinais.

Quanto ao filtro passa-baixa RC, utilizado, no caso, para filtragem de onda quadrada, é necessário escolher bem os valores de resistência e capacitância de forma a se estabelecer um valor ótimo de constante de tempo “tau”. Isto pois, para valores muito reduzidos (ou muito elevados), temos um sinal resultante não filtrado corretamente. Para um valor adequado, o sistema apresenta performance de um integrador. Segundo Mussoi [3], verifica-se, igualmente, que “*as expressões das funções de transferência na forma fatorada para filtros Passa-Baixa, tanto RL como RC são semelhantes. O que difere é o coeficiente do termo  $j\omega$  [...]*”. Dessa forma, podemos concluir que há relação inversamente proporcional entre a constante de tempo e a frequência de corte, sendo  $\omega_c = 1/\tau$  [3].

Assim, o objetivo de estudar a série de Fourier, funções periódicas sendo representadas por uma soma de sinais sinusoidais com frequências múltiplas da frequência do sinal periódico, tão como explorar modificação de parâmetros em sistemas lineares, foi alcançado.

## **REFERÊNCIAS**

- [1] LATHI, B.P. Sinais e Sistemas Lineares. Bookman, 2ª Edição (17 agosto 2006).
- [2] NEWTON C. BRAGA. Circuito RC. Disponível em: <https://www.newtoncbraga.com.br/index.php/almanaque-tecnologico/192-c/15923-circuito-rc-496-alm513>. Acesso em 22 set 2020.
- [3] MUSSOI, Fernando Luiz Rosa. Resposta em Frequência de Filtros Passivos. Disponível em: <https://intranet.ctism.ufsm.br/gsec/Apostilas/filtropassivo.pdf>. Acesso em 22 set 2020.