Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica
EEL7522-Processamento digital de sinais

Trabalho 3: Transformada Z

Alunos: Augusto Cezar Boldori Vassoler
Giovani de Medeiros Junior
Professor : Carlos Aurélio Faria da Rocha

Novembro
2020

Questão 1

a)

Inicialmente considerou-se os sistemas

$$h_1[n] = 0.5^n u[n] \quad \text{e} \quad h_2[n] = 3^n u[-n-1]$$

conectados em cascata. Para determinar a transformada Z total do sistema H(Z), é necessário primeiramente obter as transformadas de $h_1[n]$ e $h_2[n]$, que são $H_1(Z)$ e $H_2(Z)$, respectivamente.

Utilizando expressões tabeladas, tem-se:

$$H_1(Z) = \mathcal{Z}[h_1[n]] = \mathcal{Z}[0.5^n u[n]] = \frac{1}{1-0.5Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-0.5} \quad , |Z| > |0.5|$$

$$H_2(Z) = \mathcal{Z}[h_2[n]] = \mathcal{Z}[3^n u[-n-1]] = \frac{-1}{1-3Z^{-1}} = \frac{-Z}{Z-3} \quad , |Z| < |3|$$

Pelo fato de $H_1(Z)$ e $H_2(Z)$ estarem em cascata, é evidente que

$$H(Z) = H_1(Z)H_2(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Z}{Z-0.5} \times \frac{-Z}{Z-3} = \frac{-Z^2}{(Z-0.5)(Z-3)}$$

A ROC de H(Z) é $0.5 < Z < 3$.

b)

Para determinar a respostao ao impulso h[n], é necessário realizar a transformada Z inversa de H(Z). No entanto, por tratar-se de uma expressão racional em Z, deve-se anteriormente expandi-la utilizando o método de frações parciais.

$$\frac{H(Z)}{Z} = \frac{-Z}{(Z-0.5)(Z-3)} = \frac{-1}{(1-0.5Z^{-1})(1-3Z^{-1}}$$

$$\frac{H(Z)}{Z} = \frac{A}{1-0.5Z^{-1}} + \frac{B}{1-3Z^{-1}}$$

$$A = H(Z)(1-0.5Z^{-1})|_{Z^{-1}=2} = \frac{-1}{1-3Z^{-1}}|_{Z^{-1}=2} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$B = H(Z)(1-3Z^{-1})|_{Z^{-1}=\frac{1}{3}} = \frac{-1}{1-0.5Z^{-1}}|_{Z^{-1}=\frac{1}{3}} = -\frac{6}{5} = -1.2$$

Sendo assim:

$$H(Z) = \frac{0.2}{1-0.5Z^{-1}} + \frac{-1.2}{1-3Z^{-1}}$$

Logo, a resposta ao impulso será a transformada Z inversa de H(Z):

$$\mathcal{Z}^{-1}[H(Z)] = h[n] = [0.2(0.5)^n - 1.2(3)^n]u[n]$$

Utilizando o comando *stem()* do MATLAB, plotou-se a sequência discreta h[n].

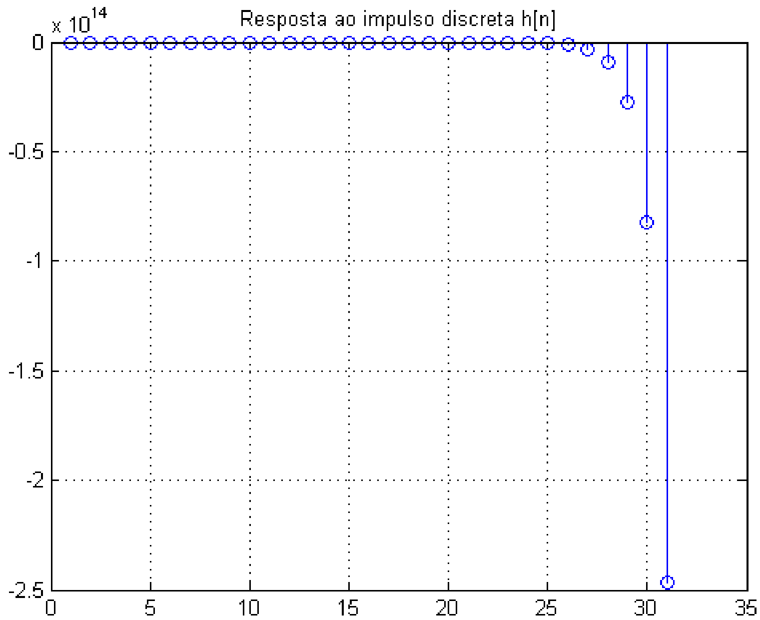

Figura 1: Resposta ao impulso h[n]

c)

Será agora considerado o sistema estável inverso $G(Z) = \frac{1}{H(Z)}$, que é descrito por:

$$G(Z) = \frac{1}{H(Z)} = \frac{1}{\frac{-Z^2}{(Z-0.5)(Z-3)}} = \frac{-(Z-0.5)(Z-3)}{Z^2}$$

$$G(Z) = -(\frac{Z^2 - 3.5Z + 1.5}{Z^2}) = 1.5Z^{-2} + 3.5Z^{-1} - 1$$

Realizando a transformada inversa para obter g[n]:

$$\mathcal{Z}^{-1}[G(Z)] = g[n] = -1.5\delta[n-2] + 3.5\delta[n-1] - \delta[n]$$

A região de convergência compreende todo o plano Z, exceto a origem, onde Z=0. Novamente utilizando a função *stem()* plotou-se g[n].

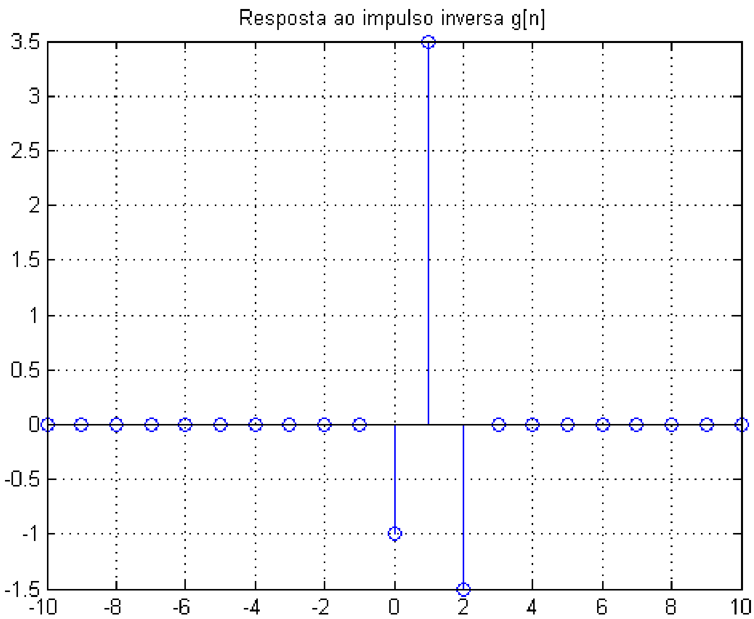

Figura 2: Resposta ao impulso inversa g[n]

Ainda com o auxílio do MATLAB, realizou-se a convolução entre h[n] e g[n] ($h[n] * g[n]$), resultando em:

RESULTADO DA CONVOLUÇÃO

Questão 2

a)

Aqui será considerada a transmissão de um sinal binário por um canal de comunicação modelado como um sistema LIT discreto, cuja função de transferência é

$$H(Z) = \frac{1 - 2.5Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - Z^{-1} + 0.7Z^{-2}}$$

Quer-se determinar a resposta ao impulso g[n] do sistema estável e inverso de H(Z),

$$G(Z) = \frac{1}{H(Z)}$$

Dessa forma, G(Z) será:

$$G(Z) = \frac{1}{\frac{1-2.5Z^{-1}+Z^{-2}}{1-Z^{-1}+0.7Z^{-2}}} = \frac{1 - Z^{-1} + 0.7Z^{-2}}{1 - 2.5Z^{-1} + Z^{-2}}$$

É necessário expandir a experessão para que seja possível realizar a transformada Z inversa. Será usado novamente o método de frações parciais, no entanto, como numerador e denominador são funções de segundo grau, possuindo a mesma ordem, é necessário realizar $\frac{G(Z)}{Z}$ para que sua utilização seja possibilitada.

$$\frac{G(Z)}{Z^{-1}} = \frac{1 - Z^{-1} + 0.7Z^{-2}}{Z^{-1} - 2.5Z^{-2} + Z^{-3}}$$

Para encontrar os coeficientes, recorreu-se ao auxílio da função *residue()*, obtendo-se os resultados:

$$\frac{G(Z)}{Z^{-1}} = \frac{0.9}{Z - 2} - \frac{0.6}{Z - 0.5} + \frac{0.7}{Z}$$

$$G(Z) = \frac{0.9Z}{Z - 2} - \frac{0.6Z}{Z - 0.5} + 0.7$$

Realizando a transformada inversa encontra-se g[n]:

$$\mathcal{Z}^{-1}[G(Z)] = g[n] = (0.9 * 0.2^n - 0.6 * 0.5^n)u[n] + 0.7\delta[n]$$

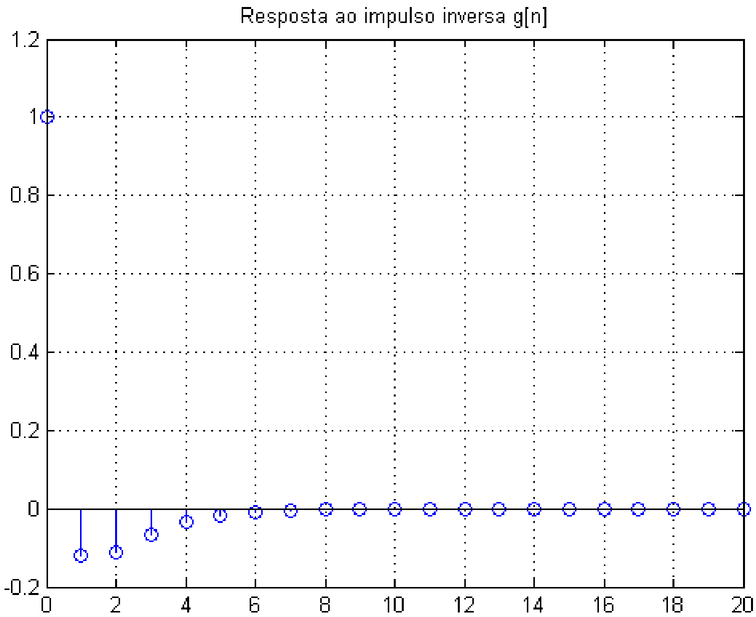

Figura 3: Resposta ao impulso inversa g[n]

Utilizando o mesmo processo, é possível obter-se também a resposta ao impulso h[n].

$$\frac{H(Z)}{Z^{-1}} = \frac{1 - 2.5Z^{-1} + Z^{-2}}{Z^{-1} - Z^{-2} + 0.7Z^{-3}}$$

Com a função *residue()*, obteve-se os fatores:

$$\frac{H(Z)}{Z} = \frac{-0.2143 + j0.9583}{Z - (0.5 + j0.6708)} + \frac{-0.2143 - j0.9583}{Z - (0.5000 - J0.6708)} + \frac{1.4286}{Z}$$

$$H(Z) = \frac{(-0.2143 + j0.9583)Z}{Z - (0.5 + j0.6708)} + \frac{(-0.2143 - j0.9583)Z}{Z - (0.5 - j0.6708)} + 1.4286$$

$$H(Z) = \frac{0.982e^{-j1.351}Z}{Z - 0.8366e^{j0.93}} + \frac{0.982e^{1.351}Z}{Z - 0.8366e^{-j0.93}} + 1.4286$$

$$H(Z) = 1.4286 + [\frac{\frac{1.964}{2}e^{-j1.351}Z}{Z - 0.8366e^{j0.93}} + \frac{\frac{1.964}{2}e^{1.351}Z}{Z - 0.8366e^{-j0.93}}]$$

$$H(Z) = \frac{(\frac{1.964}{2}e^{-j1.351}Z)(Z - 0.8366e^{-j0.93}) + (\frac{1.964}{2}e^{j1.351}Z)(Z - 0.8366e^{j0.93})}{Z^2 - Z0.8366e^{-j0.93} - Z0.8366e^{j0.93} + 0.8366^2}$$

$$H(Z) = \frac{Z^2 1.964cos(1.351) - Z(0.8366)(1.964)cos(0.93 + 1.351)}{Z^2 - (1.6732cos(0.93))Z + 0.8366^2}$$

$$H(Z) = \frac{((1.964)Z)(Z(1.964)cos(1.351) - (0.8366)cos(0.93 + 1.351))}{Z^2 - (1.6732cos(0.93))Z + 0.8366^2}$$

Pode-se comparar a equação acima à seguinte expressão tabelada:

$$\frac{Z[Zcos(\theta) - bcos(\omega - \theta)]}{Z^2 - 2 \times b \times cos(\omega)Z + b^2}$$

Cuja anti-transformada é

$$b^n cos(\omega n + \theta)u[n]$$

Realizando a comparação termo a termo, tem-se:

$\theta = 1.351$
$\omega = 0.93$
$b = 0.8366$

Dessa maneira, conclui-se que h[n] será:

$$\mathcal{Z}^{-1}[H(Z)] = h[n] = (0.8366)^n cos(0.93n + 1.351)u[n]$$

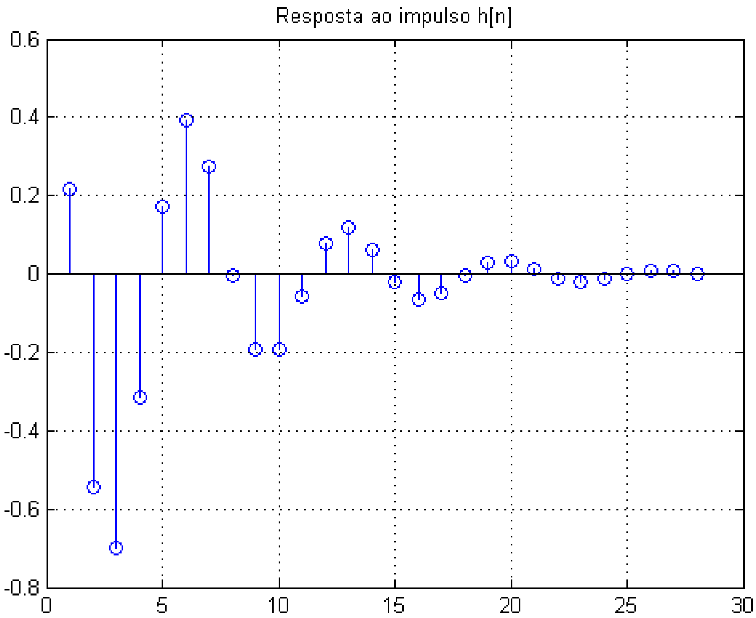

Figura 4: Resposta ao impulso h[n]

b)