

DAS 5112 – SINAIS E SISTEMAS LINEARES I

PROF. HECTOR BESSA SILVEIRA



Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Centro Tecnológico (CTC)
Departamento de Automação e Sistemas (DAS)

2014/1 (Revisada)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Germano Schafaschek, por ter digitado os exemplos e feito a integração com os slides de aula em formato Latex. Ao Cleison Daniel Silva, por ter elaborado e inserido a grande maioria dos gráficos no documento. E ao Sergio Mauricio Prolo Santos Junior, por ter ajudado na revisão do material. A Disciplina agradece o excelente (e árduo) trabalho de vocês!

Importante: todas as figuras digitalizadas apresentadas nestas Notas de Aula foram retiradas do livro texto da Disciplina (B. P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2a edição, Bookman, 2007). Ressalta-se, ainda, que o objetivo destas Notas de Aula é de complementar o livro texto, e não de substituí-lo.

SUMÁRIO

| | | |
|-------|---|-----|
| B | BACKGROUND | 1 |
| B.1 | Números Complexos | 1 |
| B.1.1 | Definições e Operações | 1 |
| B.1.2 | Exponencial Complexa | 7 |
| B.1.3 | Forma Polar | 9 |
| B.1.4 | Radiciação | 18 |
| B.2 | Senóides | 20 |
| B.3 | Adição de Senóides | 21 |
| B.4 | Senóides × Fórmula de Euler | 25 |
| B.5 | Esboço de Sinais | 26 |
| B.5.1 | Exponencial (Real) Monotônica | 26 |
| B.5.2 | Esboço de Senóides Variando Exponencialmente | 27 |
| B.6 | Uso de Pacotes Computacionais | 29 |
| 1 | SINAIS E SISTEMAS | 31 |
| 1.1 | Tamanho do Sinal | 34 |
| 1.2 | Algumas Operações Úteis com Sinais | 46 |
| 1.3 | Classificação de Sinais | 50 |
| 1.4 | Alguns Modelos Úteis de Sinais | 54 |
| 1.5 | Funções Pares e Ímpares | 76 |
| 1.6 | Sistemas | 79 |
| 1.7 | Classificação de Sistemas | 79 |
| 1.8 | Modelagem e Simulação de Circuitos Elétricos | 99 |
| 2 | ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS EM TEMPO CONTÍNUO | 105 |
| 2.1 | Sistemas LCIT | 105 |
| 2.2 | Resposta Entrada Nula | 108 |
| 2.3 | Resposta ao Impulso Unitário de um Sistema LCIT | 113 |
| 2.4 | Resposta do Sistema à Entrada Externa: Resposta Estado Nulo | 115 |
| 2.4.1 | A Integral de Convolução | 116 |
| 2.4.2 | Entendimento Gráfico da Operação de Convolução | 125 |
| 2.5 | Sistemas LCIT — Cálculo da Resposta Total e Simulação | 133 |
| 2.6 | Sistemas Interconectados | 136 |
| 2.7 | Resposta Natural e Resposta Forçada | 137 |
| 2.8 | Solução Clássica de Equações Diferenciais | 137 |
| 2.9 | Estabilidade de Sistemas | 138 |
| 2.9.1 | Estabilidade Interna (Assintótica) | 139 |
| 2.9.2 | Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica | 140 |
| 3 | ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO | 145 |
| 3.1 | Tamanho do Sinal | 147 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 3.2 | Sinais Periódicos | 147 |
| 3.3 | Energia e Potência de um Sinal | 148 |
| 3.4 | Operações Úteis com Sinais | 153 |
| 3.5 | Alguns Modelos Úteis em Tempo Discreto | 155 |
| 3.6 | Classificação de Sinais | 165 |
| 3.7 | Exemplos de Sistemas em Tempo Discreto | 166 |
| 3.8 | Classificação de Sistemas em Tempo Discreto | 170 |
| 3.9 | Equações de Sistemas em Tempo Discreto | 176 |
| 3.10 | Sistemas LDIT | 178 |
| 3.11 | Resposta Entrada Nula | 179 |
| 3.12 | Resposta $h[n]$ ao Impulso Unitário | 183 |
| 3.13 | Resposta do Sistema à Entrada Externa: Resposta Estado Nulo | 186 |
| 3.14 | O Somatório de Convolução | 187 |
| 3.14.1 | Convolução e Sistemas LDIT Causais | 191 |
| 3.14.2 | Procedimento Gráfico para o Somatório de Convolução | 192 |
| 3.15 | Sistemas Interconectados | 196 |
| 3.16 | Resposta Natural e Resposta Forçada | 197 |
| 3.17 | Solução Clássica de Equações a Diferenças Lineares | 197 |
| 3.18 | Estabilidade de Sistemas | 198 |
| 3.18.1 | Estabilidade Interna (Assintótica) | 198 |
| 3.18.2 | Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica | 199 |
| 3.19 | Simulação de Sistemas Discretos | 202 |
| 4 | ANÁLISE DE SISTEMAS EM TEMPO CONTÍNUO USANDO A TRANSFORMADA DE LAPLACE | 204 |
| 4.1 | A Transformada de Laplace (Bilateral) | 204 |
| 4.2 | A Transformada de Laplace Unilateral | 209 |
| 4.2.1 | Determinando a Transformada Inversa | 211 |
| 4.3 | Algumas Propriedades da Transformada de Laplace | 216 |
| 4.4 | Solução de Equações Diferenciais e Integro-Diferenciais | 221 |
| 4.4.1 | Resposta Estado Nulo | 224 |
| 4.4.2 | Resposta Total | 226 |
| 4.4.3 | Funções de Transferência \times Equações Diferenciais | 230 |
| 4.5 | Estabilidade | 230 |
| 4.5.1 | Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica | 232 |
| 4.5.2 | O Fenômeno de Ressonância (Lathi Seção 2.7-7) | 235 |
| 4.6 | Análise de Circuitos Elétricos: O Circuito Transformado | 237 |
| 4.7 | Diagrama de Blocos | 239 |
| 4.8 | Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas | 241 |
| 4.9 | Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais | 243 |

| | |
|--|-----|
| 4.10 Filtros | 247 |
| 4.11 Diferenciador Ideal e Amplificação de Ruídos | 249 |
| 4.12 Resposta de Sistemas de Primeira e de Segunda Ordem | 250 |
| 4.12.1 Resposta de Sistemas de Primeira Ordem | 250 |
| 4.12.2 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem | 251 |
| 4.12.3 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem Sub-Amortecidos | 252 |
| 4.12.4 Simulação de Sistemas de Primeira e de Segunda Ordem | 253 |
| 4.12.5 Influência de Pólos e Zeros na Resposta | 254 |
| 4.12.6 Simulações | 255 |
| 4.12.7 Pólos Dominantes | 256 |
| 4.13 Controle de Sistemas em Malha-Fechada | 257 |
| 4.13.1 Controladores Clássicos | 257 |
| 4.13.2 Método Algébrico de Projeto de Controladores | 258 |
| 4.13.3 Erro em Regime Permanente | 259 |
| 4.13.4 Simulações | 265 |
| 4.14 Diagramas de Bode | 266 |
| 4.15 Exercícios de Identificação (Lista 4B) | 274 |

B

BACKGROUND

B.1 NÚMEROS COMPLEXOS

B.1.1 Definições e Operações

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{naturais})$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{inteiros})$$

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \quad (\text{racionais})$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad (\mathbb{R}: \text{reais}, \mathbb{I}: \text{irracionais}, \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset)$$

Temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Vamos agora definir o *conjunto dos números complexos*:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Assim, \mathbb{C} nada mais é que o plano real \mathbb{R}^2 .

Seja $z = (a, b)$ um número complexo (a : abscissa, b : ordenada). Graficamente, veja a Figura B.1.

Dados $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, escrevemos $z_1 = z_2$ quando $a = c$ e $b = d$.

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d) \quad (\text{soma})$$

$$-z_1 = (-a, -b) \quad (\text{oposto de } z_1)$$

$$z_1 K = K z_1 = (Ka, Kb), \text{ para todo } K \in \mathbb{R} \quad (\text{produto escalar})$$

$$z_1 - z_2 \triangleq z_1 + (-z_2) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d) \quad (\text{diferença})$$

Note que $z_1 - z_1 = (0, 0) \triangleq 0 \in \mathbb{C}$ (zero complexo), $-z_1 = (-1)z_1$ e $z_1 = 1z_1$. Denominamos

$$\boxed{j = (0, 1)}$$

de *unidade imaginária* (veja a Figura B.2).

Note que \mathbb{R} está “contido” em \mathbb{C} , pois

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

Em particular,

$$1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1, 0) \in \mathbb{C}.$$

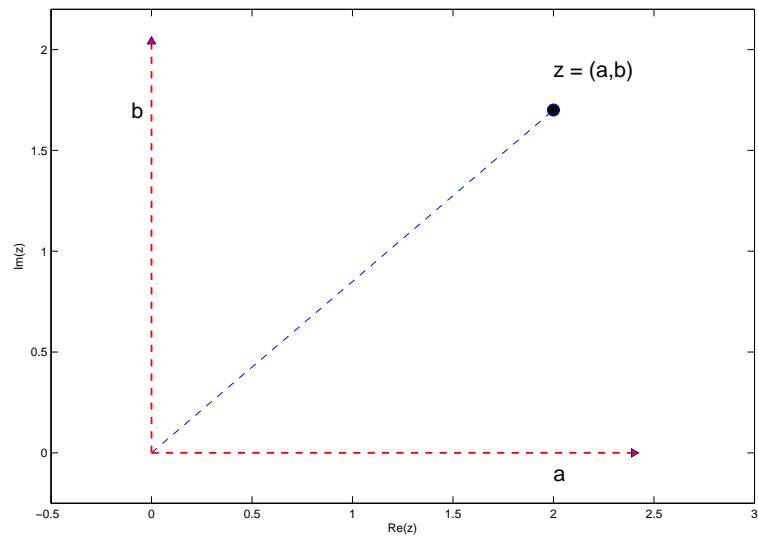


Figura B.1: Plano complexo.

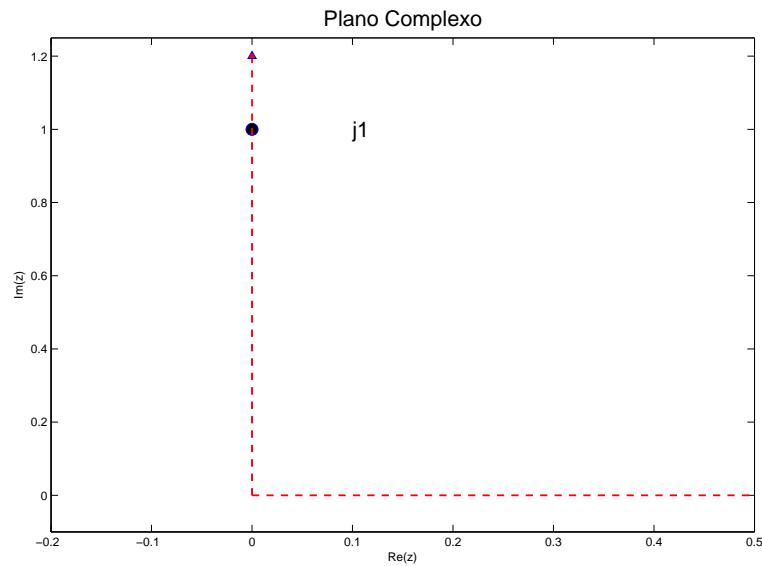


Figura B.2: Unidade Imaginária.

Logo, $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ pode ser escrito como

$$z = (a, b) = a \underbrace{(1, 0)}_{\substack{\text{“}=\text{”} \\ 1 \in \mathbb{R}}} + b \underbrace{(0, 1)}_{\substack{\text{“}=\text{”} \\ j \in \mathbb{C}}} \overset{\mathbb{P}^{\times(1,0)}}{=} a + jb$$

Denominamos a de *parte real*, b de *parte imaginária* de z , e escrevemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= a \\ \operatorname{Im}(z) &= b \end{aligned}$$

Dizemos que z é *real* quando $\operatorname{Im}(z) = b = 0$, e que z é *imaginário* quando $\operatorname{Re}(z) = a = 0$.

Logo, se $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$, então

$$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$$

$$-z_1 = -a + j(-b) = -a - jb$$

$$Kz_1 = Ka + jKb, \text{ para todo } K \in \mathbb{R}$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d)$$

Agora, vamos definir o *produto* (ou *multiplicação*) de números complexos. Se $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$, então

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + j(ad + bc) \quad (\text{produto ou multiplicação})$$

Note que $j^2 = j \cdot j = (-1, 0) \overset{\text{“}=\text{”}}{=} -1$ e

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc + j^2 bd \\ &\overset{= -1}{=} (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned}$$

Se $z = a + jb \neq 0$, definimos

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{jb}{a^2 + b^2} \quad (\text{inverso de } z \neq 0).$$

Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_2 \neq 0$, definimos

$$z_1/z_2 = z_1 z_2^{-1} \quad (\text{quociente}).$$

Assim, $z^{-1} = 1/z$.

Note que, se z_1 e z_2 são reais e $K \in \mathbb{R}$, então $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ e Kz_1 coincidem com as operações usuais em \mathbb{R} .

Propriedades

Sejam z_1, z_2, z_3, z_4 números complexos e $K, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Então:

Adição:

- (i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (comutatividade)
- (ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (associatividade)
- (iii) $z_1 + 0 = z_1$ ($0 = (0, 0)$ é o elemento neutro)
- (iv) $z_1 + (-z_1) = 0$ ($-z_1$ é o oposto de z_1)

Produto Escalar:

- (i) $K(z_1 + z_2) = Kz_1 + Kz_2$
- (ii) $(K_1 + K_2)z_1 = K_1z_1 + K_2z_1$
- (iii) $(K_1 K_2)z_1 = K_1(K_2 z_1)$
- (iv) $1 \cdot z_1 = z_1$

Multiplicação:

- (i) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (comutatividade)
- (ii) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ (associatividade)
- (iii) $1z_1 = z_1$ ($1 = (1, 0)$ é o elemento neutro)
- (iv) $z_1 z_1^{-1} = 1$ (z_1^{-1} é o inverso de $z_1 \neq 0$)
- (v) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (distributividade)
- (vi) $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$
- (vii) $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$, $z_2 \neq 0, z_4 \neq 0$

Seja $n \geq 1$ um número natural e $z \in \mathbb{C}$. Definimos

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad z^0 = 1$$

Exemplo Sejam $z_1 = 2 + j3$ e $z_2 = 1 - j4$. Então:

- $z_1 + z_2 = 3 - j$, $z_1 - z_2 = 1 + j7$
- $5z_1 = 10 + j15$
- $-2z_1 = -4 - j6$
- $z_1^{-1} = \frac{2}{2^2 + 3^2} - j\frac{3}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} - j\frac{3}{13} = \frac{1}{13}(2 - j3)$
- $\frac{z_2}{z_1} = z_2 z_1^{-1} = \frac{1}{13}(1 - j4)(2 - j3) = \frac{1}{13}(2 - j3 - j8 - 12) = \frac{1}{13}(-10 - j11)$
- $z_1^2 = z_1 z_1 = (2 + j3)(2 + j3) = 4 + j6 + j6 - 9 = -5 + j12$
- $z_1^3 = z_1^2 z_1 = (-5 + j12)(2 + j3) = -10 - j15 + j24 - 36 = -46 + j9$

Se $z = a + jb$, definimos (veja a Figura B.3)

$$z^* = a - jb \quad (\text{complexo conjugado de } z)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{módulo ou valor absoluto ou magnitude de } z)$$

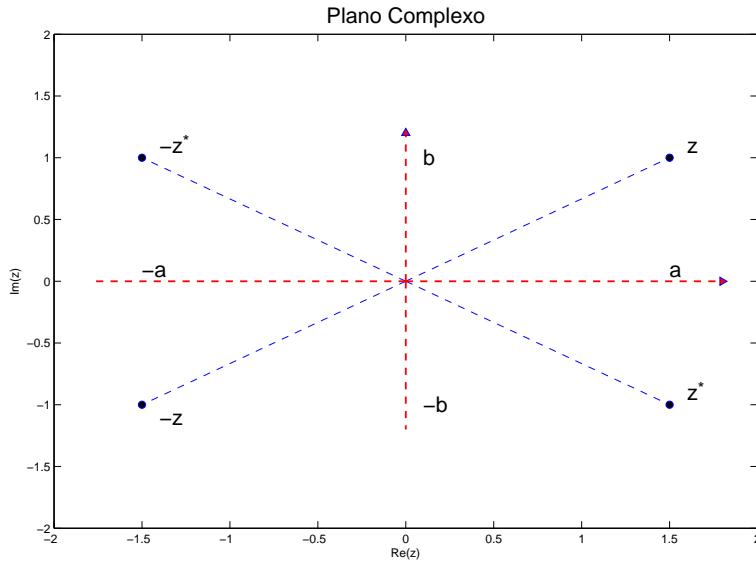


Figura B.3: Complexo Conjugado de z .

Note que

$$-z = -a - jb$$

$$z^* = a - jb$$

$$-z^* = -a + jb = (-z)^*$$

$$z + z^* = 2a = 2\text{Re}(z) \Rightarrow \text{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

$$z - z^* = 2jb = 2j\text{Im}(z) \Rightarrow \text{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2j}$$

$$|z| = |z^*| = |-z| = |(-z)^*|$$

Seja $z = a + jb \neq 0$. Então,

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{|z|^2} - j \frac{b}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} (a - jb) = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

Logo,

$$\boxed{z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}}.$$

Assim, se $|z| = 1$ (módulo unitário), então $\boxed{z^{-1} = z^*}$.

Observação 1

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = z_1 \left(\frac{z_2^*}{|z_2|^2} \right) \therefore \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^*}$$

Observação 2

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - jb^2 + ja^b + j^2 b^2 \therefore \boxed{zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

Exemplos

a) $z = 3 + j4$

$$z^* = 3 - j4$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \therefore \quad |z|^2 = 25$$

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{25}(3 - j4) = \frac{3}{25} - j\frac{4}{25}$$

b) $z_2 = \frac{2+j}{3+j4} = \frac{2+j}{z} \stackrel{\text{Obs1}}{=} \frac{1}{|z|^2}(2+j)z^* = \frac{1}{25}(2+j)(3-j4) = \frac{1}{25}(10-j5)$

ou

$$z_2 = \frac{2+j}{z} = \frac{2+j}{z} \frac{z^*}{z^*} = \frac{2+j}{3+j4} \cdot \frac{3-j4}{3-j4} = \underbrace{\frac{10-j5}{3^2+4^2}}_{\text{Obs2}} = \frac{1}{25}(10-j5)$$

c) $j = (0, 1)$

$$j^* = (0, -1) = -j$$

$$|j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\boxed{j^{-1} = j^* = -j}$$

Propriedades

(i) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, e $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ se $z_2 \neq 0$

(ii) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

(iii) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

(iv) $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}, z \neq 0$

(v) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}, z_2 \neq 0$

(vi) $zz^* = |z|^2$

(vii) $(z^*)^* = z$

(viii) $z = z^* \Leftrightarrow z \text{ é real, ou seja, } \operatorname{Im}(z) = 0$

(ix) $z = -z^* \Leftrightarrow z \text{ é imaginário, ou seja, } \operatorname{Re}(z) = 0$

B.1.2 Exponencial Complexa

Relembre a função exponencial real (veja a Figura B.4):

$$f(x) = e^x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

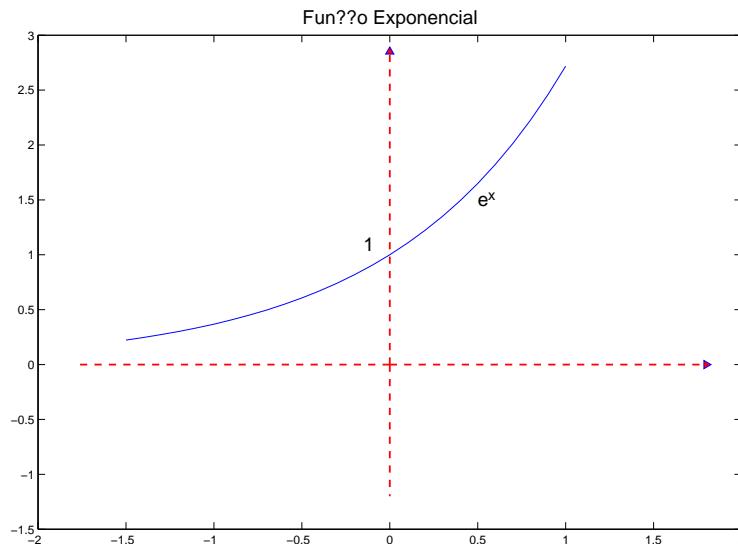


Figura B.4: Função Exponencial Real.

Propriedades

(i) $e^0 = 1$

(ii) $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(iii) $0 < e^x < 1$ se $x < 0$

(iv) $e^x > 1$ se $x > 0$

(v) $\frac{de^x}{dx} = e^x$

(vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

(vii) $e^{(x+y)} = e^x e^y$

(viii) $(e^x)^{-1} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

(ix) $\frac{e^x}{e^y} = e^{(x-y)}$

(x) $(e^x)^y = e^{xy}$

Se $z = a + jb$, definimos a *exponencial complexa* por

$$e^z = e^{a+jb} = e^a(\cos b + j \sin b) \in \mathbb{C}.$$

Logo, se $z = jb$ (imaginário), então

$$e^z = e^{jb} = \cos b + j \sin b \quad (\text{fórmula de Euler})$$

E, se $z = a$ (real), então $\begin{array}{ccc} e^z & = & e^a \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{exp.} & & \text{exp.} \\ \text{complexa} & & \text{real} \end{array}$

Propriedades

(i) $e^0 = 1$

(ii) $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$

(iii) $e^{(z_1+z_2)} = e^{z_1} e^{z_2}$

(iv) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

(v) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{(z_1-z_2)}$

(vi) $(e^{jb})^* = e^{-jb}$, pois $(e^{jb})^* = \cos b - j \sin b = \cos(-b) + j \sin(-b) = e^{-jb}$

(vii) $(e^z)^* = e^{(z^*)}$

(viii) $|e^{a+jb}| = e^a$, $|e^{jb}| = 1$

(ix) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = j2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$ (inteiro!)

(x) $e^{\pm jn\pi} = -1$ se n é inteiro ímpar

(xi) $e^{\pm jn\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} \pm j & \text{se } n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ \mp j & \text{se } n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$

(xii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} (\cos(bt) + j \sin(bt)) = 0$ se $a < 0$

B.1.3 Forma Polar

Veremos que todo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito como $z = |z|e^{j\angle z}$. Considere o número complexo $z = a + jb$, com $a > 0, b > 0$ (1° quadrante!). Graficamente, veja a Figura B.5.

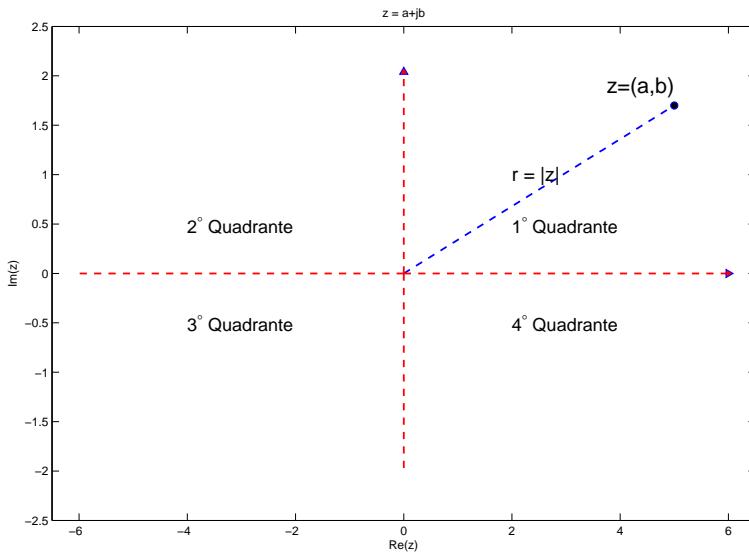


Figura B.5: Forma Polar.

Assim,

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} && \text{(módulo de } z\text{)} \\ \angle z &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) && \text{(ângulo de } z\text{)} \\ \angle z \text{ em graus} &= \frac{180}{\pi} \angle z \text{ em rad} \end{aligned}$$

É fácil ver que

$$a = r \cos \angle z$$

$$b = r \sin \angle z$$

Logo,

forma canônica ou retangular

$$z = \boxed{a + jb} = r \cos \angle z + j r \sin \angle z = r(\cos \angle z + j \sin \angle z)$$

$$\therefore \boxed{z = re^{j\angle z} = |z|e^{j\angle z}} \quad (\text{forma polar})$$

Agora, seja $z = a + jb$ (em qualquer quadrante!). Note que $z = |z|e^{j\angle z} = |z|e^{j(\angle z + 2n\pi)}$, n inteiro. Desse modo, z possui *infinitos ângulos*. Relembre que $e^{j\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 2K\pi$, com K inteiro. Logo,

$$\boxed{\theta_1 \text{ e } \theta_2 \text{ são ângulos de } z \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2K\pi, \text{ com } K \text{ inteiro}}$$

Definimos o *valor principal* de z como o *único* ângulo θ com $-\pi < \theta \leq \pi$ (em rad), ou $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (em graus), tal que

$$\boxed{z = |z|e^{j\theta}}$$

Temos que (veja as Figuras B.6–B.13):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ se } a > 0 \text{ (1º ou 4º quadrante)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \text{ se } a < 0 \text{ e } b > 0 \text{ (2º quadrante)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \text{ se } a < 0 \text{ e } b < 0 \text{ (3º quadrante)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ se } a = 0 \text{ e } b > 0$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ se } a = 0 \text{ e } b < 0$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 0 \text{ se } a > 0 \text{ e } b = 0 \text{ (real positivo)}$$

$$\theta = \pi \text{ se } a < 0 \text{ e } b = 0 \text{ (real negativo)}$$

$$\theta = 0 \text{ se } z = 0$$

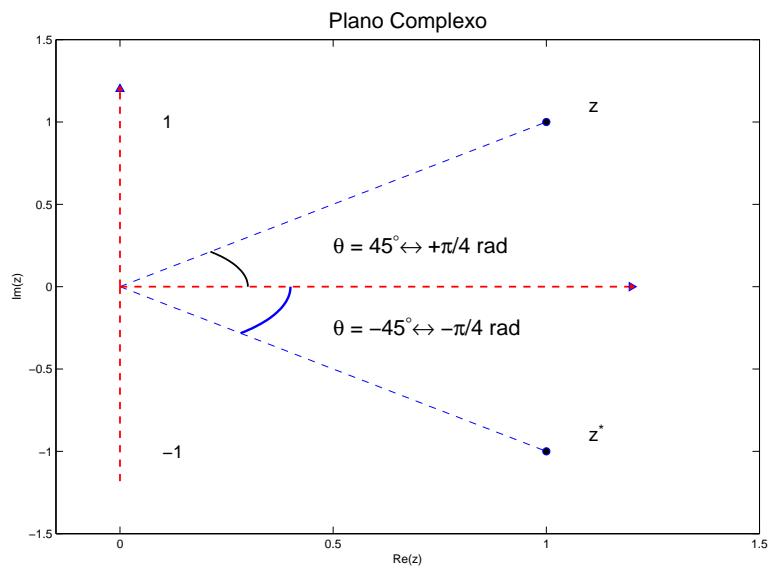


Figura B.6: 1º ou 4º Quadrante.

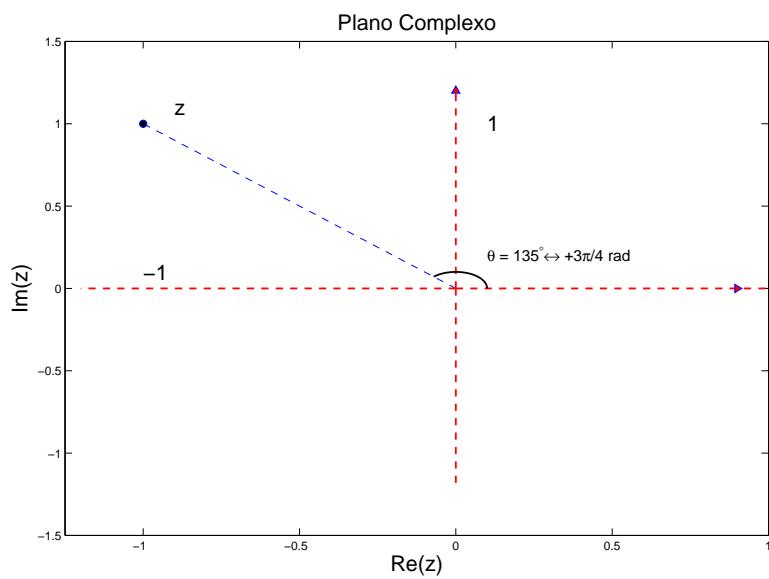


Figura B.7: 2º Quadrante.

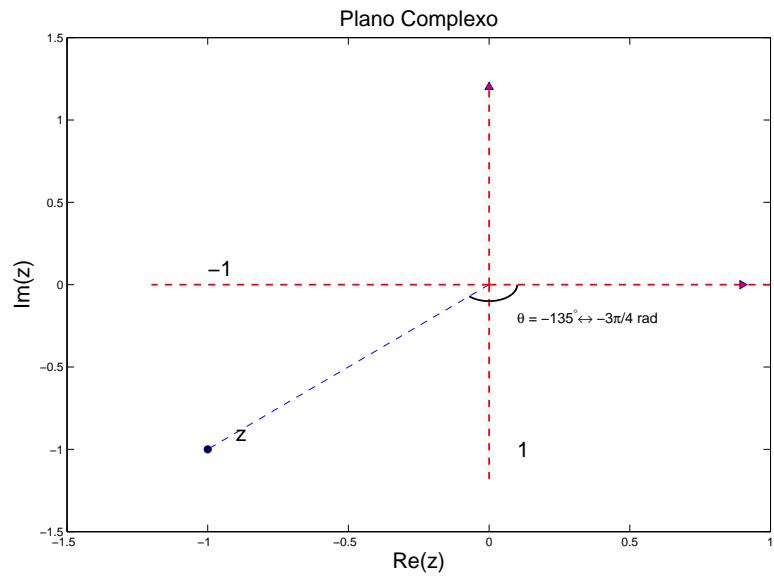


Figura B.8: 3º Quadrante.

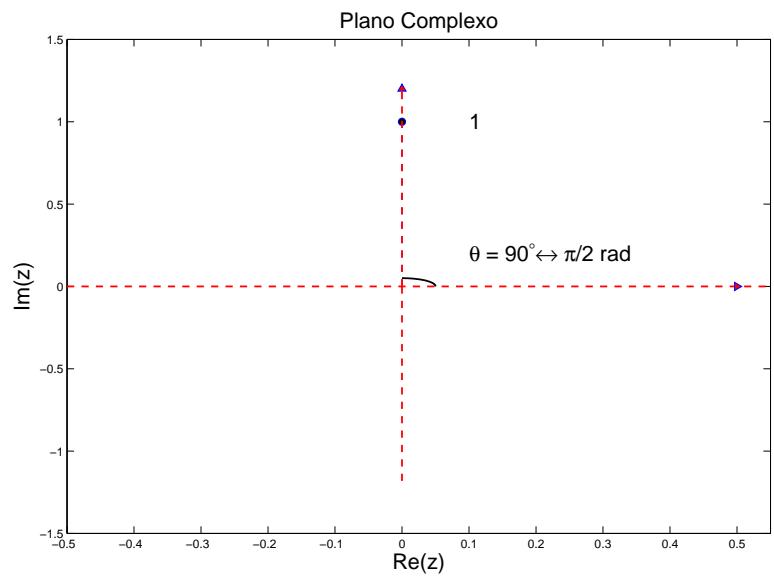


Figura B.9: Imaginário positivo.

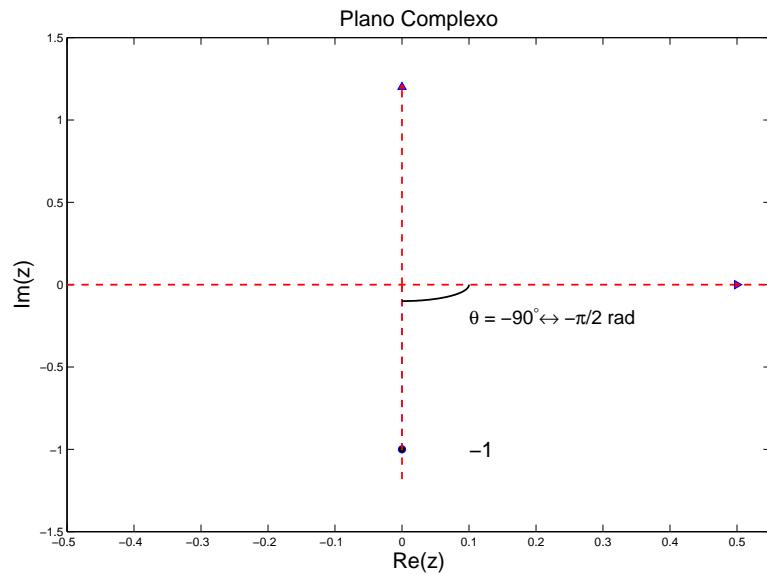


Figura B.10: Imaginário negativo.

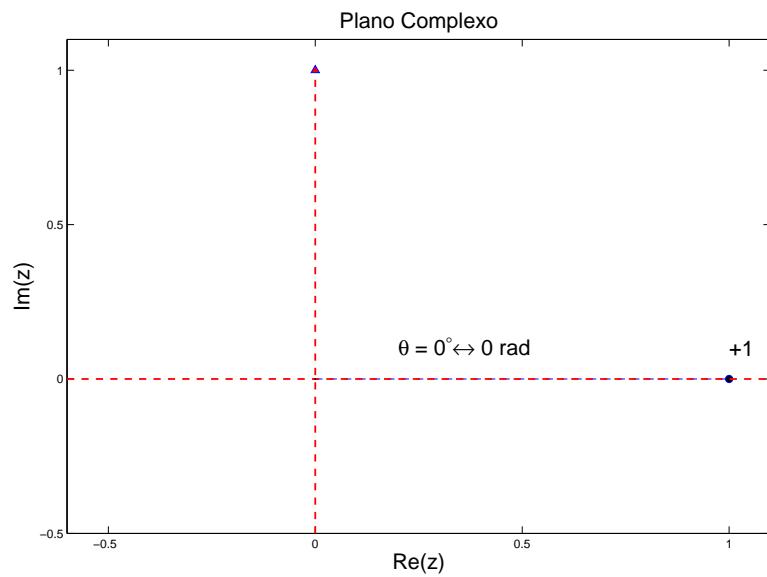


Figura B.11: Real positivo.

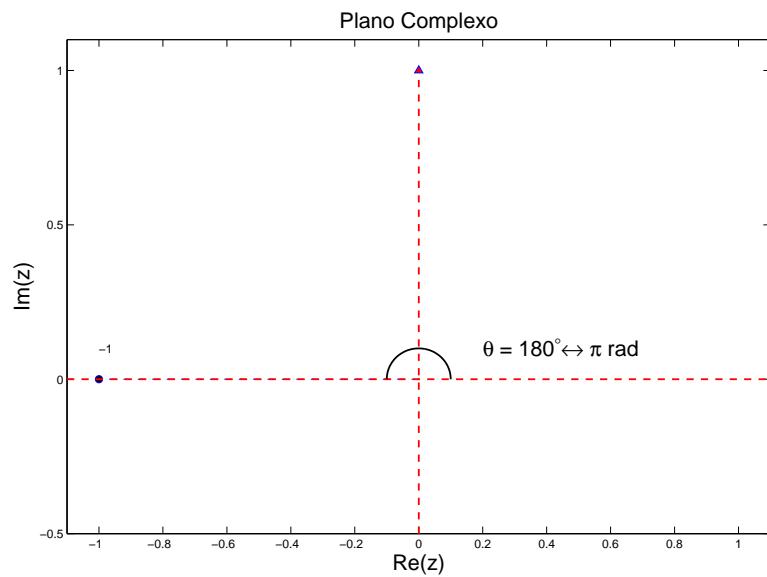


Figura B.12: Real negativo.

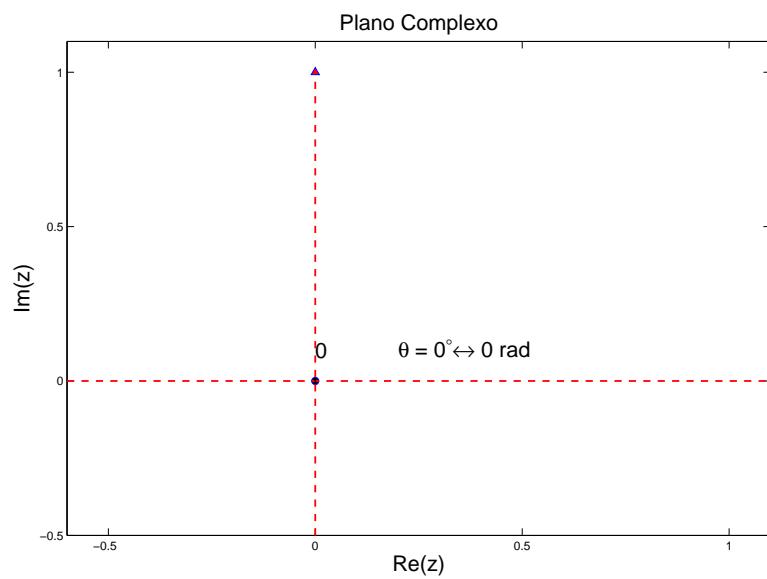


Figura B.13: Zero.

Calculadora HP

- A HP converte automaticamente forma polar \longleftrightarrow forma cartesiana;
- A HP já fornece automaticamente o valor principal θ de z ;
- Verifique se na HP está setado *graus* ou *rad*!

Exemplos (na HP é direto!)

$$(1) \quad z = 2 + j3 \Rightarrow 1^{\circ} \text{ quadrante}$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.3^{\circ} \longleftrightarrow \frac{\pi}{180^{\circ}} 56.3^{\circ} = 0,9826 \text{ rad}$$

$$\therefore z = \sqrt{13} e^{j0,9826} = \sqrt{13} e^{j56.3^{\circ}}$$

cuidado!

$$(2) \quad z = -2 - j5 \Rightarrow 3^{\circ} \text{ quadrante}$$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-2}\right) - \pi = -1,9513 \text{ rad} \longleftrightarrow \frac{180^{\circ}}{\pi} (-1,9513) = -111.80^{\circ}$$

$$\therefore z = \sqrt{29} e^{-j1,9513} = \sqrt{29} e^{-j111.80^{\circ}}$$

$$(3) \quad z = 2e^{-j\pi/3}$$

$$z = 2(\cos(\pi/3) - j \sin(\pi/3)) = 2 \cos(\pi/3) - j 2 \sin(\pi/3)$$

$$\therefore z = 1 - j1,7321$$

$$(4) \quad e^{j\pi/2} = \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + j \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} = j$$

Observação Seja $z = |z|e^{j\angle z}$. Então,

$$z = a + jb = |z|(\cos \angle z + j \sin \angle z) = |z| \cos \angle z + j |z| \sin \angle z$$

$$\therefore \boxed{a = |z| \cos \angle z, \quad b = |z| \sin \angle z}$$

Propriedades Seja $z = a + jb = |z|e^{j\angle z}$.

$$(i) \quad \boxed{z^* = |z|e^{-j\angle z}},$$

pois $z = |z|(\cos \angle z + j \sin \angle z)$

$$\text{e } z^* = |z|(\cos \angle z - j \sin \angle z) = |z|(\cos(-\angle z) + j \sin(-\angle z))$$

(ii) Se $z \neq 0$, então

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} e^{-j\angle z}$$

(iii) Se $z_1 = |z_1|e^{j\angle z_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{j\angle z_2}$, então

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)} \quad (\because -z_1 = (-1)z_1 = |z_1|e^{j(\angle z_1 + \pi)})$$

e

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)}$$

(iv) $[z^n = |z|^n e^{jn\angle z}]$, $n \geq 0$ inteiro

(v) $[|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{j\angle z}]$ (veja a Figura B.14)

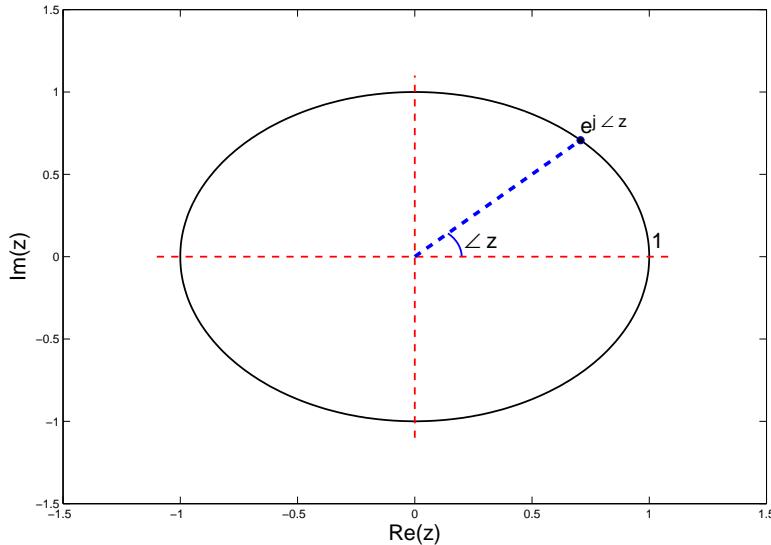


Figura B.14: Propriedade (v).

Dica

- + e - : forma cartesiana
- × e ÷ : forma polar

Exemplos

$$(i) z_1 = 2 + j5 \Rightarrow z_1 = 5,3851e^{j68,1986^\circ} = |z_1|e^{j\angle z_1} \\ z_2 = 3 + j \Rightarrow z_2 = 3,1623e^{j18,4349^\circ} = |z_2|e^{j\angle z_2}$$

$$\therefore z_1 + z_2 = 5 + j6 \\ z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)} = 17,0294e^{j86,6^\circ} \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)} = 1,7029e^{j49,8^\circ}$$

$$(ii) z = 1 - j2 \Rightarrow z = 2,2361e^{-j63,4349^\circ} = |z|e^{j\angle z}$$

$$\therefore z^* = |z|e^{-j\angle z} = 2,2361e^{j63,4349^\circ} \\ z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-j\angle z} = \frac{1}{2,2361}e^{j63,4349^\circ} \\ z^5 = (2,2361)^5 e^{-j5,63,4349^\circ} = 55,9057e^{-j317,1745^\circ} \\ \text{valor principal} \\ \uparrow \\ = 55,9057 e^{j42,8255^\circ}$$

Exemplo Considere a função complexa $X(w)$ da variável real $w \geq 0$:

$$X(w) = \frac{2 + jw}{3 + j4w} \in \mathbb{C}, \quad w \geq 0 \text{ real}$$

(i) Encontre $\operatorname{Re}(X(w))$ e $\operatorname{Im}(X(w))$.

$$\text{Solução: } X(w) = \frac{2 + jw}{3 + j4w} \cdot \frac{3 - j4w}{3 - j4w} = \frac{(6 + 4w^2) - j5w}{9 + 16w^2} \\ X(w) = \frac{6 + 4w^2}{9 + 16w^2} - j \frac{5w}{9 + 16w^2} \\ \therefore \operatorname{Re}(X(w)) = \frac{6 + 4w^2}{9 + 16w^2} \quad \operatorname{Im}(X(w)) = \frac{-5w}{9 + 16w^2}$$

(ii) Encontre $|X(w)|$ e $\angle X(w)$.

$$\text{Solução: } X(w) = \frac{\boxed{2 + jw}}{\boxed{3 + j4w}} = \frac{\sqrt{4 + w^2}e^{j\tan^{-1}(w/2)}}{\sqrt{9 + 16w^2}e^{j\tan^{-1}(4w/3)}} \\ \text{1º quadrante} \\ \text{1º quadrante} \\ X(w) = \sqrt{\frac{4 + w^2}{9 + 16w^2}} e^{j(\tan^{-1}(w/2) - \tan^{-1}(4w/3))} \\ \therefore \begin{cases} |X(w)| = \sqrt{\frac{4 + w^2}{9 + 16w^2}} \\ \angle X(w) = \tan^{-1}(w/2) - \tan^{-1}(4w/3) \end{cases}$$

B.1.4 Radiciação

Seja $z \neq 0$ e $n \geq 1$ inteiro. Existem então n números complexos w_0, w_1, \dots, w_{n-1} tais que

$$w_k^n = z, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Neste caso, dizemos que os w_k 's são *raízes n-ésimas* de z , e escrevemos

$$z^{1/n} = w_k$$

Assim, resolver

$$\sqrt[n]{z} \text{ ou } z^{1/n} \quad (\text{raiz } n\text{-ésima de } z \neq 0)$$

significa encontrar os n w_k 's tais que $w_k^n = z$.

Pode-se mostrar que se $z = |z|e^{j\theta}$, então

$$\boxed{w_k = \underbrace{|z|^{1/n}}_{= \sqrt[n]{|z|} \text{ (real!)}} e^{j(\theta + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1}$$

O número complexo w_0 ($k = 0$) é denominado de *raiz principal* de $z \neq 0$.

Observação Quando $n = 2$, escrevemos $z^{1/2} = \sqrt{z}$ (raiz quadrada).

Exemplos

① Resolva

$$(-1)^{1/2} = \sqrt{-1} \Rightarrow z = -1 \text{ e } n = 2$$

Solução: $z = -1 = |z|e^{j\theta} = 1e^{j\pi} \Rightarrow |z| = 1, \theta = \pi$

$$w_k = |z|^{1/2} e^{j(\theta + 2\pi k)/2} = \sqrt{1} e^{j(\pi + 2\pi k)/2}, \quad k = 0, 1$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} w_0 = 1e^{j\pi/2} = j \quad (\text{raiz principal}) \\ w_1 = 1e^{j3\pi/2} = e^{-j90^\circ} = -j \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sqrt{-1} = \pm j}$$

Verificação: $j^2 = -1$

$$(-j) \cdot (-j) = j^2 = -1$$

(2)

Resolva

$$(-8 - j8\sqrt{3})^{1/4}$$

Solução: $n = 4$ e $z = -8 - j8\sqrt{3} = |z|e^{j\theta} = 16e^{-j2\pi/3}$

$$w_k = \sqrt[4]{16}e^{j(\theta + 2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\therefore \text{(veja a Figura B.15)} \quad \begin{cases} w_0 = 2e^{-j\pi/6} = \sqrt{3} - j & (\text{raiz principal}) \\ w_1 = 2e^{j\pi/3} = 1 + j\sqrt{3} \\ w_2 = 2e^{j5\pi/6} = -\sqrt{3} + j \\ w_3 = 2e^{j4\pi/3} = -1 - j\sqrt{3} \end{cases}$$

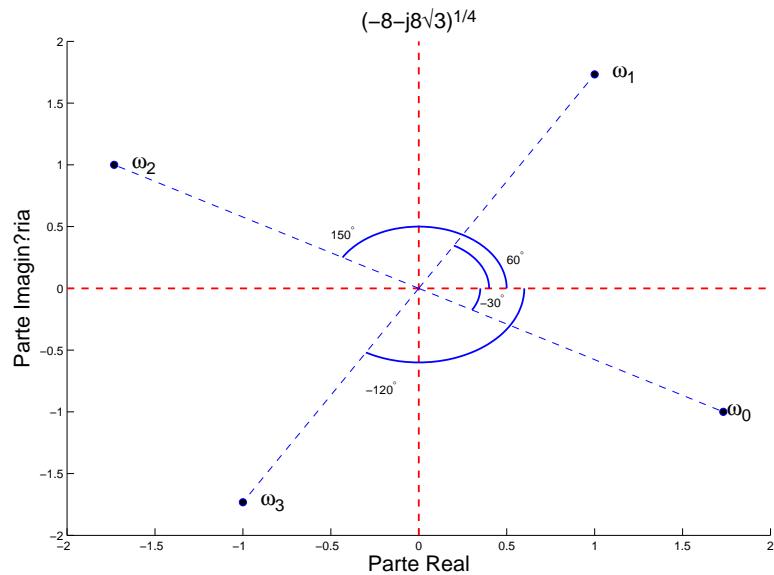


Figura B.15: Exemplo 2.

B.2 SENÓIDES

Considere a senóide

$$x(t) = C \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad \text{graus ou rad} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{Cuidado! Graus é apenas para} \\ \text{facilitar a visualização.} \end{array}$$

onde

$C \geq 0$: amplitude

f_0 : frequência (em Hz = s⁻¹)

$\omega_0 = 2\pi f_0$: frequência angular (em rad/s)

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{: período (em s)} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

θ : fase

Note que:

- $\theta = 0 \Rightarrow x(t) = C \cos(2\pi f_0 t)$
- $\theta = -\frac{\pi}{2} (-90^\circ) \Rightarrow x(t) = C \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) = C \sin(2\pi f_0 t)$

Deslocamento no tempo (avanço ou atraso), onde $\omega_0 \neq 0, \theta > 0$ (veja a Figura B.16):

θ em rad:

$$\begin{aligned} x(t) &= C \cos(\omega_0 t \pm \theta) = C \cos\left(\omega_0 t \pm \frac{\omega_0 \theta}{\omega_0}\right) \\ &= C \cos\left(\omega_0\left(t \pm \frac{\theta}{\omega_0}\right)\right) \quad \stackrel{\text{avanço ou atraso no tempo}}{\uparrow} \\ &\stackrel{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}{=} C \cos\left(\omega_0\left(t \pm \frac{\theta T_0}{2\pi}\right)\right) \quad \stackrel{\text{avanço ou atraso no tempo}}{\uparrow} \end{aligned}$$

θ em graus:

$$\begin{aligned} \theta \text{ em rad} &= \frac{\theta^\circ \pi}{180} \\ x(t) &= C \cos(\omega_0 t \pm \theta^\circ) \stackrel{\uparrow}{=} C \cos\left(\omega_0 t \pm \frac{\theta^\circ \pi}{180}\right) \\ &= C \cos\left(\omega_0\left(t \pm \frac{\theta^\circ \pi}{180 \omega_0}\right)\right) \quad \stackrel{\text{avanço ou atraso no tempo}}{\uparrow} \\ &\stackrel{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}{=} C \cos\left(\omega_0\left(t \pm \frac{\theta^\circ T_0}{360}\right)\right) \quad \stackrel{\text{avanço ou atraso no tempo}}{\uparrow} \end{aligned}$$

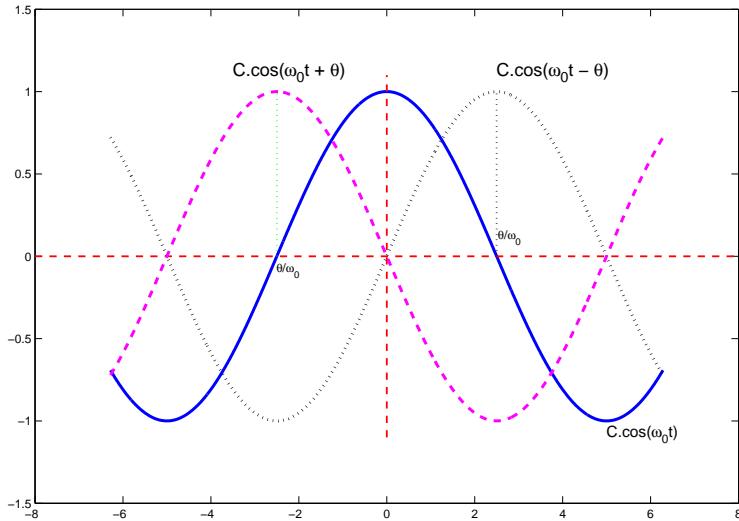


Figura B.16: Deslocamento no tempo, onde $\omega_0 \neq 0, \theta > 0$ (em rad).

Exemplo

- $\theta^\circ = -60^\circ$ (atraso) \Rightarrow atraso no tempo de $\frac{T_0}{6}$
- $\theta^\circ = -90^\circ \Rightarrow$ atraso no tempo de $\frac{T_0}{4}$ (veja a Figura B.17)

B.3 ADIÇÃO DE SENÓIDES

Considere

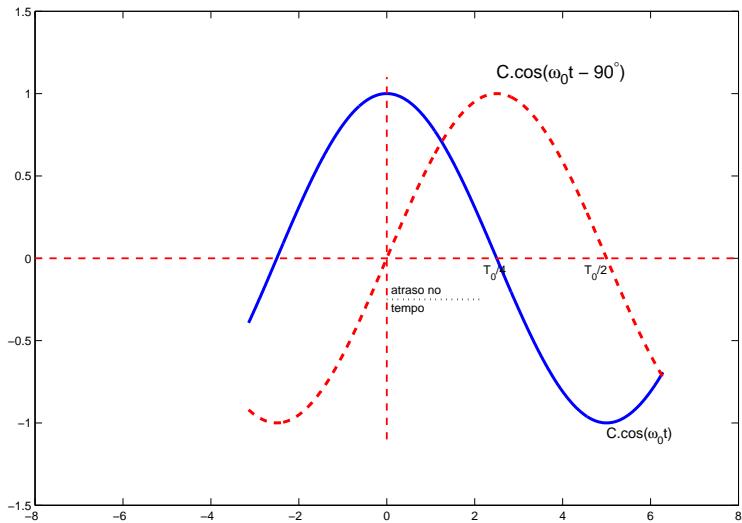
$$x(t) = a \cos \underbrace{\omega_0 t}_{} + b \sin \underbrace{\omega_0 t}_{} \quad (=! \text{ (adição de senóides)})$$

Problema: Encontrar C (amplitude) e θ (fase) tal que

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t + \theta)$$

Solução: Temos que

$$C \cos(\omega_0 t + \theta) \stackrel{\substack{\text{propriedade} \\ \text{trigonométrica}}}{=} C \cos \theta \cos(\omega_0 t) - C \sin \theta \sin(\omega_0 t) \quad (*)$$

Figura B.17: Atraso no tempo para $\theta = 90^\circ$.

Tome

$$\begin{cases} z = a - jb \\ C = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \text{valor principal de } z \end{cases}$$

Logo,

$$z = a - jb = |z|e^{j\theta} = Ce^{j\theta} = C(\cos \theta + j \sin \theta) = C \cos \theta + jC \sin \theta$$

Portanto,

$$a = C \cos \theta$$

$$b = -C \sin \theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} C \cos(\omega_0 t + \theta) & \stackrel{\text{por } (*)}{=} \underbrace{C \cos \theta}_{a} \cos(\omega_0 t) - \underbrace{C \sin \theta}_{b} \sin(\omega_0 t) \\ & = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \\ & = x(t). \end{aligned}$$

Em resumo, para resolvemos o problema, basta escolhermos:

$$\boxed{z = a - jb}$$

$$C = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \text{valor principal de } z$$

Representação fasorial de $x(t)$ (veja a Figura B.18):

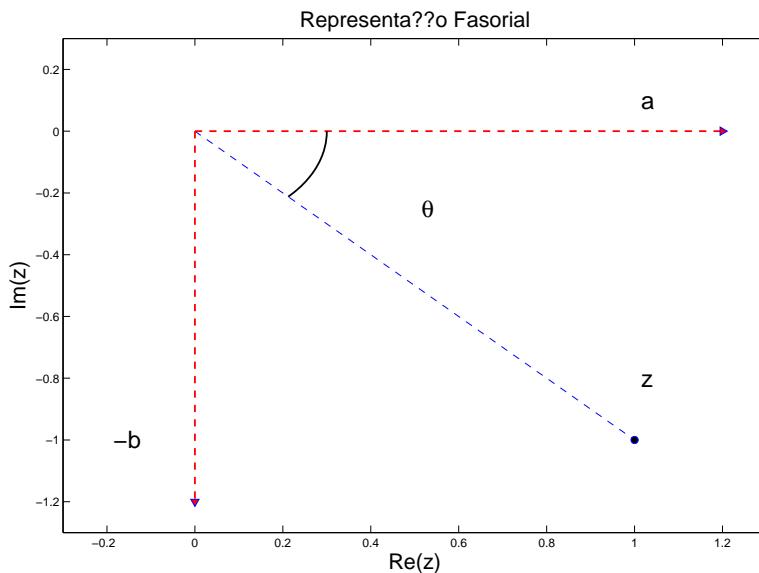


Figura B.18: Representação fasorial. Note que a corresponde a $a \cos(\omega_0 t)$, e que b corresponde a $b \sin(\omega_0 t) = b \cos(\omega_0 t - \pi/2)$.

Reciprocamente, se

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta), \text{ com } [C > 0],$$

então

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{C \cos \theta}_{a} \cos(\omega_0 t) - \underbrace{C \sin \theta}_{b} \sin(\omega_0 t) \\ &= a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

onde

$$\left. \begin{array}{l} a = C \cos \theta \\ b = -C \sin \theta \end{array} \right\} \therefore \boxed{z = a - jb = Ce^{j\theta}}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -3 \cos \omega_0 t + 4 \sin \omega_0 t \\
 \therefore (\text{veja a Figura B.19}) \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow z &= a - jb = -3 - j4 \\
 C &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \\
 \theta &= -2,2143 \text{ rad} \longleftrightarrow \approx -126,9^\circ \\
 \Rightarrow x(t) &= 5 \cos(\omega_0 t - 126,9^\circ)
 \end{aligned}$$

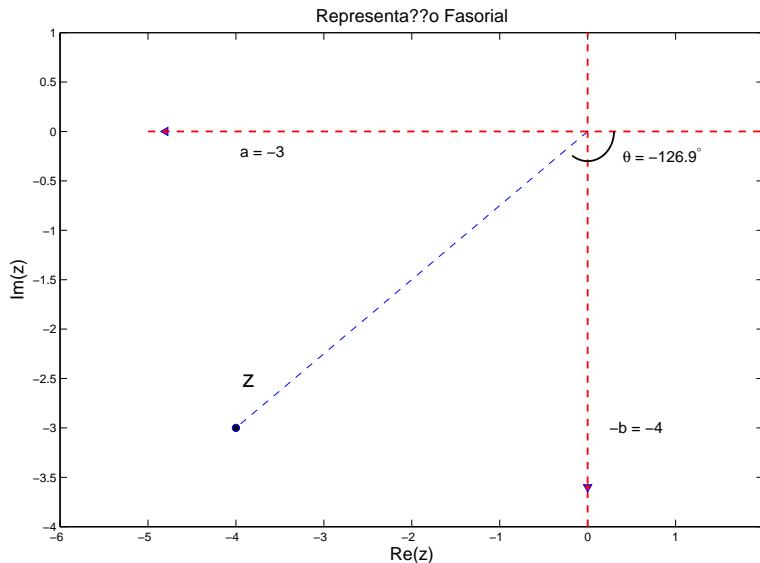


Figura B.19: Fasor.

Observação Suponha que

$$x(t) = -C \cos(\omega_0 t + \theta), \text{ com } C > 0. \text{ Logo, } x(t) = C \cos(\overbrace{\omega_0 t + \theta + 180^\circ}^{\bar{\theta}})$$

Soma de Senóides de Mesma Frequência e Fases Diferentes

Considere

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1), \text{ com } C_1 > 0, \\
 x_2(t) &= C_2 \cos(\omega_0 t + \theta_2), \text{ com } C_2 > 0.
 \end{aligned}$$

Problema: Queremos encontrar $C_3 \geq 0$ e θ_3 tal que

$$x_3(t) = x_1(t) \pm x_2(t) = C_3 \cos(\omega_0 t + \theta_3)$$

Solução:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t, & \begin{cases} a_1 = C_1 \cos \theta_1 \\ b_1 = -C_1 \sin \theta_1 \\ z_1 = a_1 - jb_1 = C_1 e^{j\theta_1} \end{cases} \\
 x_2(t) &= a_2 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t, & \begin{cases} a_2 = C_2 \cos \theta_2 \\ b_2 = -C_2 \sin \theta_2 \\ z_2 = a_2 - jb_2 = C_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \\
 \therefore x_3(t) &= \underbrace{(a_1 \pm a_2)}_{=a_3} \cos \omega_0 t + \underbrace{(b_1 \pm b_2)}_{=b_3} \sin \omega_0 t = C_3 \cos(\omega_0 t + \theta_3) \\
 \therefore &\begin{cases} z_3 = a_3 - jb_3 = (a_1 \pm a_2) - j(b_1 \pm b_2) = z_1 \pm z_2 \\ C_3 = |z_3|, \theta_3 = \text{valor principal de } z_3, \text{ onde } z_3 = C_1 e^{j\theta_1} \pm C_2 e^{j\theta_2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

B.4 SENÓIDES × FÓRMULA DE EULER

Seja

$$z = a + jb$$

Relembre que

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = a = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = b = \frac{z - z^*}{2j}}$$

Como

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{e} \quad (e^{j\theta})^* = e^{-j\theta}$$

então,

$$\boxed{\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$$

B.5 ESBOÇO DE SINAIS

B.5.1 Exponencial (Real) Monotônica

Veja a Figura B.20.

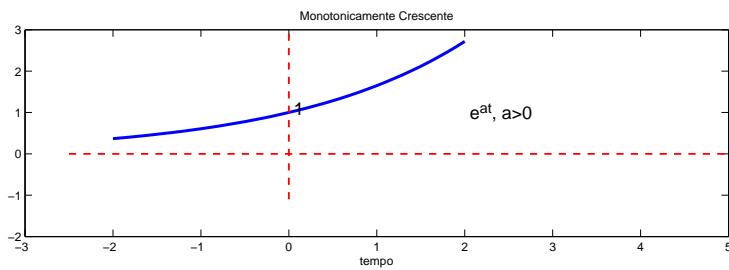


Figura B.20: Exponencial Real Monotônica.

Esboço do gráfico de $f(t) = Ce^{-at}$, $t \geq 0$, quando $a > 0, C > 0$:

Temos que (veja a Figura B.21)

$$f(0) = C \quad (\text{valor inicial})$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = Ce^{-a \cdot \frac{1}{a}} = Ce^{-1} = C \cdot \frac{1}{e} \approx [0,37C]$$

$\Rightarrow \tau = 1/a$ é denominado de *constante de tempo*

$$f(2\tau) = Ce^{-a \cdot \frac{2}{a}} = Ce^{-2} = C \cdot \frac{1}{e^2} \approx [0,135C]$$

$$f(2\tau) = C \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} \approx [0,37 f(\tau)] \\ = f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f(3\tau) = f\left(\frac{3}{a}\right) = Ce^{-3} \approx [0,05C] \approx [0,37 f(2\tau)]$$

$$f(n\tau) = C \cdot \frac{1}{e^{n-1}} \cdot \frac{1}{e} \approx [0,37 f((n-1)\tau)] \\ = f\left((n-1)\tau\right)$$

Note que: $\uparrow a \downarrow$ constante de tempo \uparrow taxa de decaimento
 $\downarrow a \uparrow$ constante de tempo \downarrow taxa de decaimento

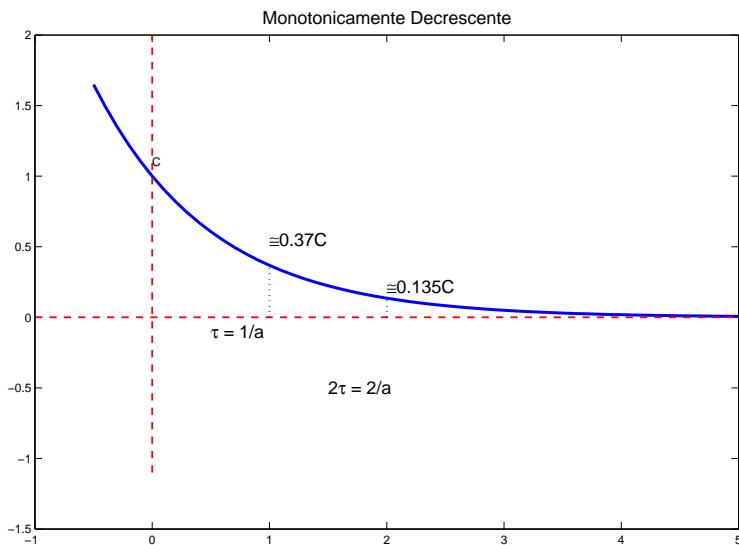


Figura B.21: Esboço do gráfico de $f(t) = Ce^{-at}$ para $t \geq 0$, onde $a > 0$, $C > 0$.

Exemplo

$$f(t) = 4e^{-2t} \Rightarrow C = 4, a = 2, \tau = 1/a = 0,5 \text{ (constante de tempo)}$$

Veja a Figura B.22.

B.5.2 Esboço de Senóides Variando Exponencialmente

Seja

$$x(t) = \underbrace{Ce^{-at}}_{\substack{\text{amplitude do} \\ \text{cosseno decai} \\ \text{exponencialmente!}}} \cos(\omega_0 t \pm \theta), \quad t \geq 0, \quad a > 0, \quad C > 0, \quad \theta > 0$$

↑
frequência angular
↓
fase

Procedimento para esboçar de $x(t)$:

- 1 Esboce Ce^{-at}

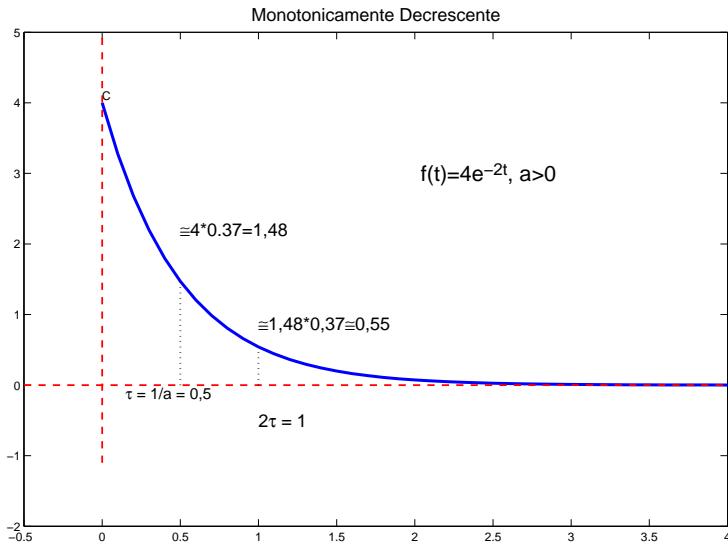


Figura B.22: Exemplo.

(2) Esboce $\cos(\omega_0 t + \theta)$ (3) Esboce o produto $Ce^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$ considerando os envelopes

$$\begin{aligned} Ce^{-at}, \underbrace{-Ce^{-at}}_{= Ce^{-at} \text{ refletido}} \text{ e } x(0) = C \cos(\pm\theta) \\ \text{sobre o eixo } t \end{aligned}$$

Dica: considere os pontos em que $\cos(\omega_0 t + \theta)$ é igual a $-1, 0, 1$

Observação Se $C < 0$, considere $x(t) = \underbrace{-C e^{-at} \cos(\omega_0 t \pm \theta + 180^\circ)}_{>0} \uparrow \pi$

Exemplo Esboce o gráfico de

$$x(t) = 4e^{-2t} \cos(6t - 60^\circ)$$

(1) $4e^{-2t} \Rightarrow C = 4, \quad a = 2, \quad \tau = 1/a = 0,5$ (constante de tempo)

(2) $\cos(6t - 60^\circ) \Rightarrow \omega_0 = 6, \quad \theta = 60^\circ$
 $\downarrow \text{atraso!} \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 1\text{seg} \quad \text{atraso no tempo de}$
 $\frac{\theta^\circ}{360^\circ} T_0 \approx \frac{1}{6} \approx 0,15$

(3) $x(0) = 4 \cos(-60^\circ) = 2$

Veja a Figura B.23.

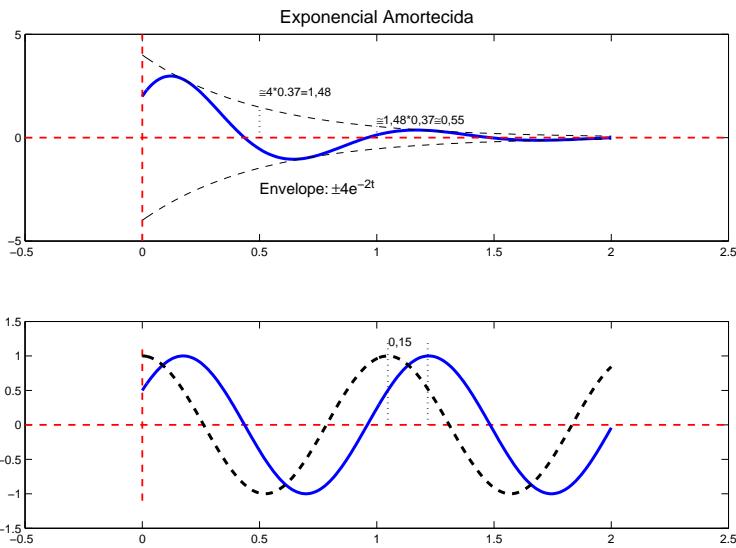


Figura B.23: Senoide amortecida.

B.6 USO DE PACOTES COMPUTACIONAIS

Matlab $z = a + jb = |z|e^{j\angle z}$

(1) $z = 2+j*3$ ou $z = 2+i*3$

```

z_real=real(z)
z_imag=imag(z)
z_mag=abs(z)
z_rad=angle(z)

```

(2) cartesiana \rightarrow polar:

```

[z_rad,z_mag]=cart2pol(a,b)
z_graus=z_rad*(180/pi)

```

polar \rightarrow cartesiana:

```
[z_real,z_imag]=pol2cart(∠z em rad!,|z|)
```

| | | | | |
|--------|--------|---|---|----------|
| + | - | × | ÷ | potência |
| + - | * / | | | ^ |

```
(3) k=0:5
    w=exp(j*k/3)
    w(1)
    w(2)
    k(1)
    k(2)
    plot(real(w),imag(w),'o')
    axis equal square

(4) t=0:0.01:4
    f=4*exp(-2*t)      (f(t) = 4e-2t)

(5) plot(t,f);
    hold on;
    plot(t,-f);
    close;
    plot(t,f,'--',t,-f,'--');
    hold on;

(6) x=f.*cos(6*t-pi/3)      (x(t) = 4e-2tcos(6t - π/3))
    plot(t,x)
    figure
    plot(t,x)
```

SINAIS E SISTEMAS

Sinal: conjunto de dados ou informação

Ex: sinal de rádio, celular, tensão da Celesc (veja a Figura 1.1), imagem 3D do corpo (exame médico)

- Rádio, celular, tensão da Celesc: variável dependente é o tempo
- Imagem 3D do corpo: variável dependente é o espaço

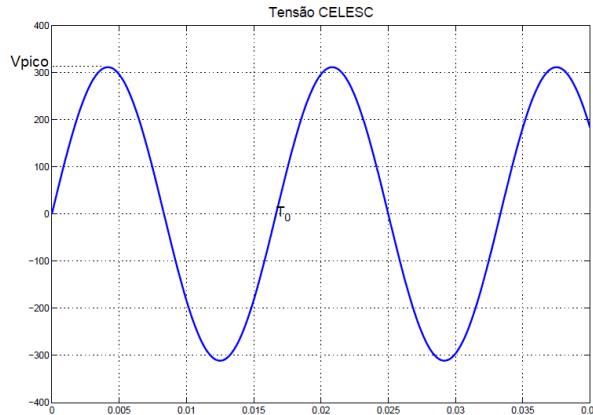


Figura 1.1: Tensão CELESC.

Sistema: é uma entidade em que o sinal de saída $y(t)$ é alterado pelo sinal de entrada $x(t)$ (veja a Figura 1.2)

Ex: motor elétrico (veja a Figura 1.3), motor mecânico, equalizador de áudio (veja a Figura 1.4), computador, smartphone, ecossistemas

- Problema de Análise × Problema de Controle

Veja as Figuras 1.5 e 1.6.

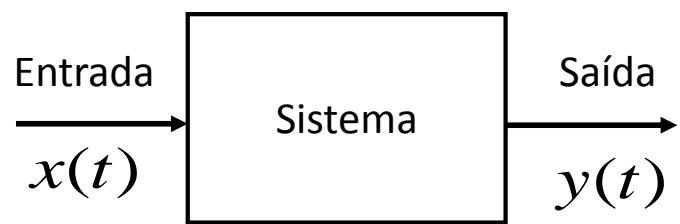


Figura 1.2: Sistema Genérico.

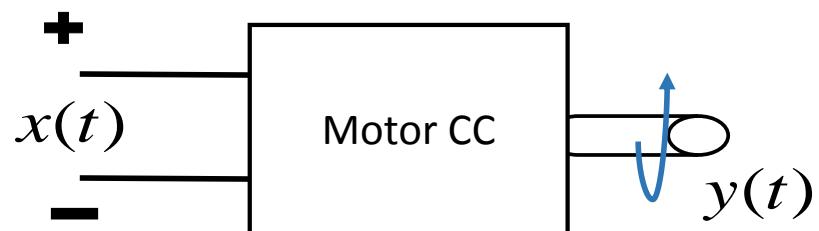


Figura 1.3: Motor CC.

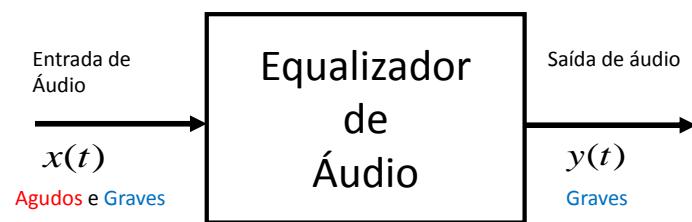


Figura 1.4: Equalizador de Radio.

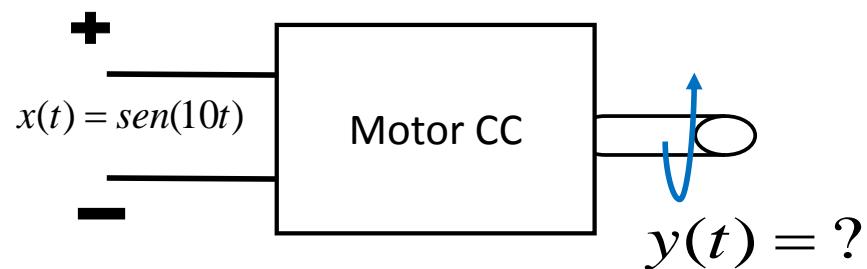


Figura 1.5: Problema de Análise do Motor CC.

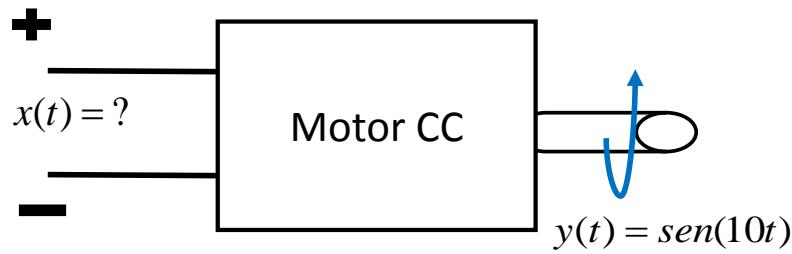


Figura 1.6: Problema de Controle do Motor CC.

1.1 TAMANHO DO SINAL

Tamanho do sinal $x(t)$: medida do “tamanho” ou “força” de $x(t)$

Motivação: $v(t) = Ri(t)$ (Lei de Ohm)

$v(t)$: tensão aplicada

$i(t)$: corrente

R: resistência

$P(t) = v(t)i(t) = Ri(t)^2 = v(t)^2/R$ (potência dissipada instantânea)

$R = 1$ (normalização)

- Potência dissipada instantânea: $P(t) = i(t)^2 = v(t)^2$ (quadrado de $i(t)$ e $v(t)$)
- Energia dissipada no intervalo $[t_1, t_2]$:

$$E_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$

- Potência dissipada média em $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} P_{[t_1, t_2]} &= \frac{1}{t_2 - t_1} E_{[t_1, t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt \end{aligned}$$

- Energia dissipada no intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt$$

- Potência dissipada média em $(-\infty, \infty)$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{[-T/2, T/2]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt$$

Energia de um sinal real $x(t)$:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \triangleq \int_{-\infty}^0 x^2(t) dt + \int_0^{\infty} x^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 x^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^2(t) dt \leq \infty \end{aligned}$$

- Assumimos que $x(t)$ é um sinal qualquer que é contínuo por partes

Energia de um sinal complexo $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \leq \infty$$

Potência de um sinal real $x(t)$:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \leq \infty$$

Potência de um sinal complexo $x(t)$:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \leq \infty$$

- P_x : valor médio quadrático de $x(t)$
- $P_{x rms} = \sqrt{P_x}$: valor *rms* (Raiz Média Quadrática – Root Mean Square)
- Se $x(t)$ tem unidade U (por exemplo, U é volts), então E_x tem unidade $U^2 s$ e P_x tem unidade U^2

Obs 1 Se $x(t)$ é periódico, ou seja, existe $T_0 > 0$ tal que

$$x(t + T_0) = x(t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

então

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt < \infty \quad (\text{real})$$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{complexo})$$

Obs 2 Existem 4 situações:

1. $E_x < \infty$: energia finita (neste caso,

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty$$

2. $E_x = \infty$: energia infinita
3. $P_x < \infty$: potência finita
4. $P_x = \infty$: potência infinita

É fácil ver que

- $E_x < \infty \Rightarrow P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} E_x/T = 0$
- $0 < P_x \leq \infty \Rightarrow E_x = \infty$.

Portanto, não existem sinais $x(t)$ com $E_x < \infty$ e $0 < P_x \leq \infty$. No entanto, existem sinais com $E_x = P_x = \infty$. Por exemplo, $x(t) = t$.

Obs 3 Se $x(t)$ tem duração finita, ou seja,

$$x(t) = 0, \quad t \leq t_1 \text{ ou } t \geq t_2 \quad (\text{veja a Figura 1.7}),$$

então

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty \quad \therefore \quad P_x = 0.$$

Obs 4 Se $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$, então $T_0 = 2\pi/\omega_0$ e

$$\int_{T_0} x(t) dt = \int_{T_0} C \cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0 \quad (\text{veja a Figura 1.8})$$

(integral sobre um intervalo qualquer de comprimento T_0).

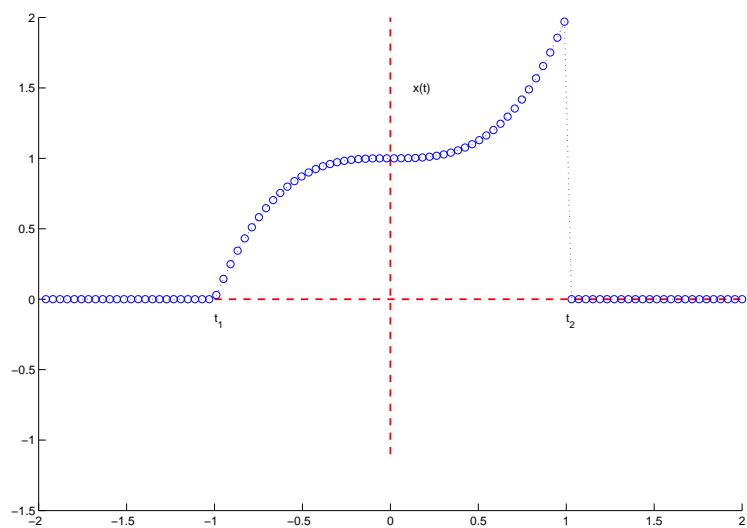


Figura 1.7: Obs. 3

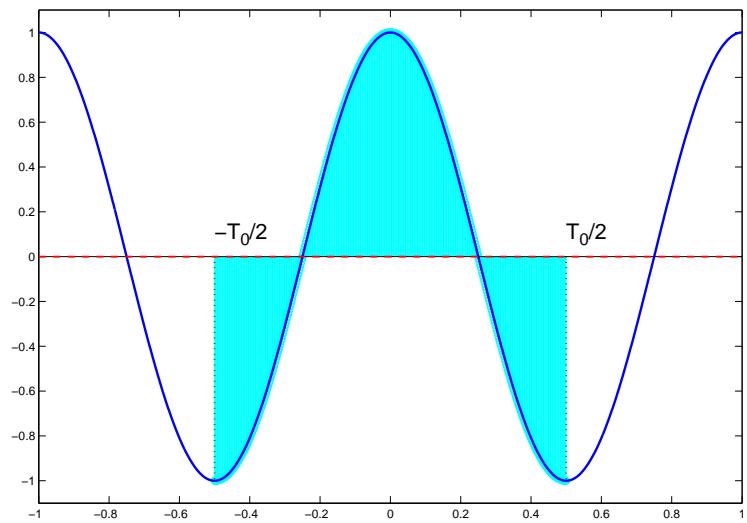


Figura 1.8: Obs. 5

Exemplos

① $x(t) = C$ (veja a Figura 1.9)

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = ?$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} C^2 dt = C^2 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = C^2 T$$

$$\therefore P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C^2 T = \lim_{T \rightarrow \infty} C^2 = C^2$$

$$P_{x \text{ rms}} = \sqrt{P_x} = \sqrt{C^2} = |C|$$

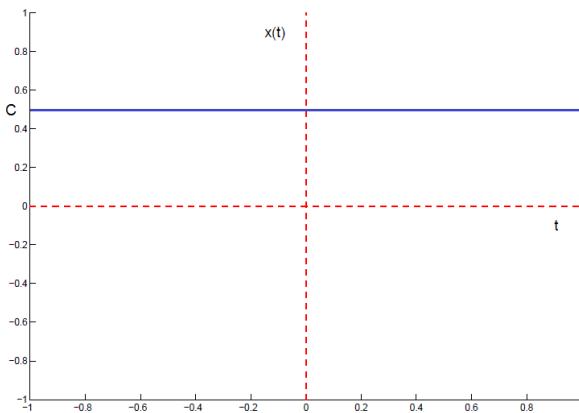


Figura 1.9: Exemplo 1.

(2) $x(t) = \text{Figura 1.10}$

$$E_x = ?$$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} x^2(t) dt + \int_{-1}^0 x^2(t) dt + \int_0^{\infty} x^2(t) dt \\ &= \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{-1} 0 dt}_{=0} + \underbrace{\int_{-1}^0 2^2 dt}_{=4(0 - (-1))} + \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 4e^{-t} dt}_{=4} \end{aligned}$$

$$\int_0^T 4e^{-t} dt = 4 \int_0^T e^{-t} dt = -4 \int_0^{-T} e^u du = -4 e^u \Big|_0^{-T} = -4e^{-T} + 4$$

$\begin{matrix} u = -t \\ du = -dt \end{matrix}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 4e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} -4e^{-T} + 4 = 4$$

$$\therefore [E_x = 4 + 4 = 8] \quad \therefore [P_x = 0]$$

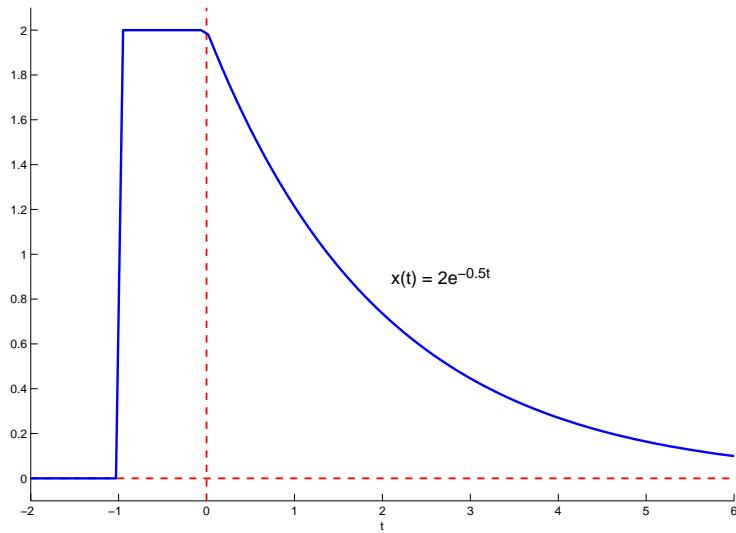


Figura 1.10: Exemplo 2.

(3) $x(t) = \text{Figura 1.11}$

$x(t)$ tem período $T_0 = 2$

$$\therefore P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt$$

$$P_x = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P_{x \text{ rms}} = \sqrt{P_x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\therefore \boxed{E_x = \infty}$$

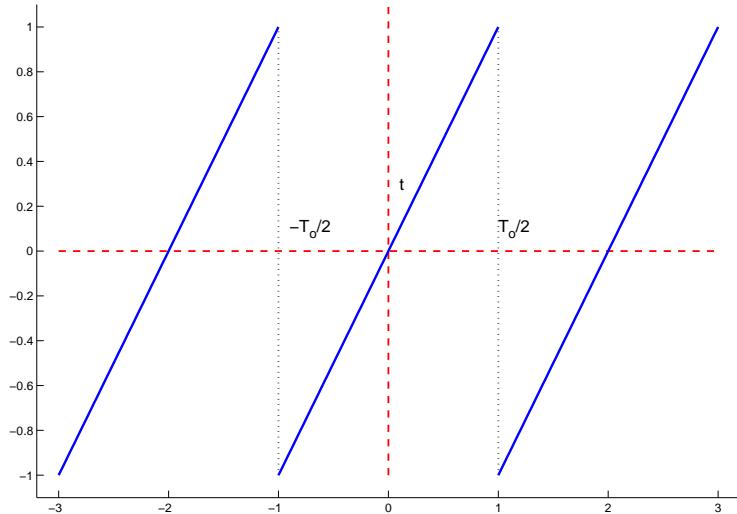


Figura 1.11: Exemplo 3.

(4) $x(t) = e^{-2|t|}$ (veja a Figura 1.12)

$$\begin{cases} |t| = t & \text{se } t \geq 0 \\ |t| = -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\infty} e^{-4t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt \\ &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-4t} dt \rightsquigarrow u = -4t \\ &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{4} \int_0^{-4T} e^u du \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-4T} - 1) = \boxed{\frac{1}{2}} \therefore \boxed{P_x = 0} \end{aligned}$$

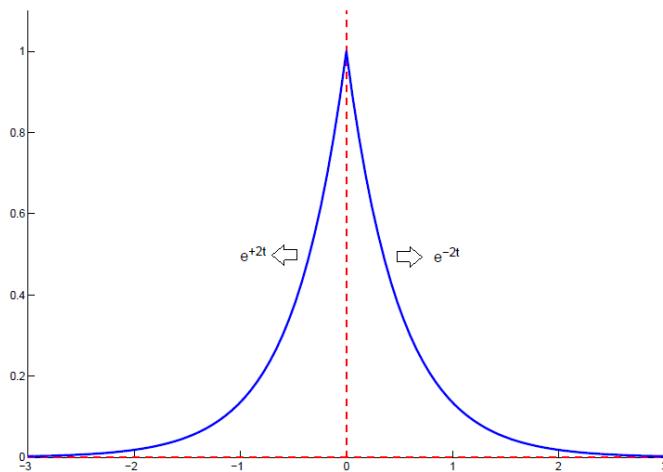


Figura 1.12: Exemplo 4.

(5) $x(t) = e^{-2t}$ (veja a Figura 1.13)

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-4t} dt \\
 \int_{-T/2}^{T/2} e^{-4t} dt &= -\frac{1}{4} e^u \Big|_{-2T}^{2T} = -\frac{1}{4} (e^{-2T} - e^{2T}) = \frac{1}{4} (e^{2T} - e^{-2T}) \\
 u &= -4t \\
 du &= -4dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-4t} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} (e^{2T} - e^{-2T})^0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{2T}}{4T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2e^{2T}}{4} = [\infty] \quad \therefore \quad [E_x = \infty]
 \end{aligned}$$

l'Hôpital

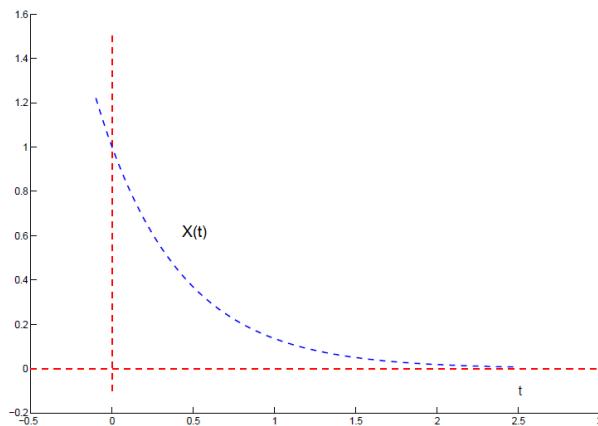


Figura 1.13: Exemplo 5.

$$(6) \quad x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta), \quad [\omega_0 \neq 0]$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

$$x(t) \text{ tem período } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\therefore P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} C^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt$$

$$\text{Mas } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{Logo, } \cos^2(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega_0 t + 2\theta) + 1]$$

Assim,

$$P_x = \frac{C^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\cos(2\omega_0 t + 2\theta) + 1] dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt + \frac{C^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\cos(2\omega_0 t + 2\theta)}_{\text{tem período } \overline{T_0} = T_0/2} dt \\ &= \frac{C^2}{2T_0} \cdot T_0 = \frac{C^2}{2} & &= \int_{-\overline{T_0}}^{\overline{T_0}} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt \\ & & &= \int_{-\overline{T_0}}^0 \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt + \int_0^{\overline{T_0}} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt \\ & & &= 0 & &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_x = C^2/2}$$

$$\boxed{P_{x \text{ rms}} = C/\sqrt{2}}$$

Interpretação: P_x é a potência dissipada em um resistor de 1Ω ao aplicarmos uma tensão constante $V = P_{x \text{ rms}} = C/\sqrt{2}$, pois $P = V^2/R = P_x$.

$$(7) \quad x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)}_{x_1(t)} + \underbrace{C_2 \cos(\omega_0 t + \theta_2)}_{x_2(t)}, \quad [C_1, C_2 > 0, \omega_0 \neq 0]$$

$$P_x = ?$$

Sabemos da teoria de números complexos que

$$x(t) = C_3 \cos(\omega_0 t + \theta_3)$$

onde

$$\begin{cases} C_3 = |z_3| \\ \theta_3 = \text{valor principal de } z_3 \\ z_3 = C_1 e^{j\theta_1} + C_2 e^{j\theta_2} \end{cases}$$

Logo,

$$z_3 = (C_1 \cos \theta_1 + C_2 \cos \theta_2) + j(C_1 \sin \theta_1 + C_2 \sin \theta_2)$$

$$\begin{aligned}
C_3^2 &= |z_3|^2 = (C_1 \cos \theta_1 + C_2 \cos \theta_2)^2 + (C_1 \sin \theta_1 + C_2 \sin \theta_2)^2 \\
&= C_1^2 \cos^2 \theta_1 + C_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2C_1 C_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
&\quad + C_1^2 \sin^2 \theta_1 + C_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2C_1 C_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
&= C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \underbrace{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)}_{=\cos(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$P_x = \frac{C_3^2}{2} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} + C_1 C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{Note que } P_x \neq P_{x_1} + P_{x_2} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} !$$

Obs 5 Relembre do Cálculo 1 que:

- $|C \cos(\omega_0 t + \theta)| \leq C$, $-\infty < t < \infty$, onde $C > 0$
- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ (*desigualdade triangular*)
- Se $f(y)$ é limitada (ou seja $|f(y)| \leq M$, para todo y) e $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$, então $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y)g(y) = 0$
(ex: $x(t) = Ce^{-at} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $a > 0$)

$$(8) \quad x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)}_{x_1(t)} + \underbrace{C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)}_{x_2(t)}, \quad \omega_1, \omega_2 > 0, \quad [\omega_1 \neq \omega_2]$$

$P_x = ?$ $x(t)$ pode não ser periódico!

$$\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)]^2 dt \\
&= \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1)}^{=x_1^2(t)} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{C_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2)}^{=x_2^2(t)}}_{=C_1^2/2 + C_2^2/2} \\
&\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2C_1 C_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2) dt
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o último limite acima é zero. Note que,

$$\begin{aligned}
&\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2C_1 C_2 \overbrace{\cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2)}^{\frac{1}{2}[\cos((\omega_1+\omega_2)t+(\theta_1+\theta_2))+\cos((\omega_1-\omega_2)t+(\theta_1-\theta_2))]} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C_1 C_2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos((\overbrace{\omega_1 + \omega_2}^{\neq 0})t + (\theta_1 + \theta_2)) dt \\
&\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C_1 C_2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos((\overbrace{\omega_1 - \omega_2}^{\neq 0})t + (\theta_1 - \theta_2)) dt
\end{aligned}$$

e que, para $\omega_0 \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega_0 t + \theta) dt &= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta}^{\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta} \cos u du \\ &= \left[\frac{1}{\omega_0} \left[\sin\left(\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta\right) - \sin\left(-\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta\right) \right] \right] \end{aligned}$$

Obtemos da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega_0 t + \theta) dt \right| &= \left| \sin\left(\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta\right) - \sin\left(-\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta\right) \right| \left| \frac{1}{\omega_0} \right| \\ &\leq \left(\left| \sin\left(\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta\right) \right| + \left| \sin\left(-\frac{\omega_0 \pi}{2} + \theta\right) \right| \right) \left| \frac{1}{\omega_0} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{1}{\omega_0} \right| \end{aligned}$$

para todo T . Desse modo, o último resultado da Obs 5 fornece

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0, \quad \text{quando } \omega_0 \neq 0$$

Logo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2C_1 C_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2) dt = 0.$$

Portanto,

$$P_x = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} = P_{x_1} + P_{x_2}, \quad \text{quando } \omega_1 \neq \omega_2$$

Obs 6 Do mesmo modo, se

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad \text{com } x_i(t) = C_i \cos(\omega_i t + \theta), \omega_i \neq \omega_j, i \neq j,$$

então

$$P_x = \sum_{i=1}^n P_{x_i}$$

(9) $x(t) = -10 + 3 \cos(2t + \pi/4) + 5 \cos(8t)$
 $\therefore P_x = (-10)^2 + 3^2/2 + 5^2/2 = 117$

complexo
↑
10) $x(t) = D e^{j\omega_0 t}$ (sinal complexo de período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$)

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |D e^{j\omega_0 t}|^2 dt$$

Mas $|e^{j\omega_0 t}| = 1$ e $|D e^{j\omega_0 t}| = |D| |e^{j\omega_0 t}| = |D|$.

Logo,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |D|^2 dt = |D|^2$$

$$P_{x \text{ rms}} = \sqrt{|D|^2} = |D|$$

1.2 ALGUMAS OPERAÇÕES ÚTEIS COM SINAIS

1. Deslocamento temporal: $\phi(t) = x(t \pm T)$, $T > 0$ (veja a Figura 1.14)

- $+$: *adiantamento* no tempo em T unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x(t)$ para a *esquerda* em T unidades.
- $-$: *atraso* no tempo em T unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x(t)$ para a *direita* em T unidades.

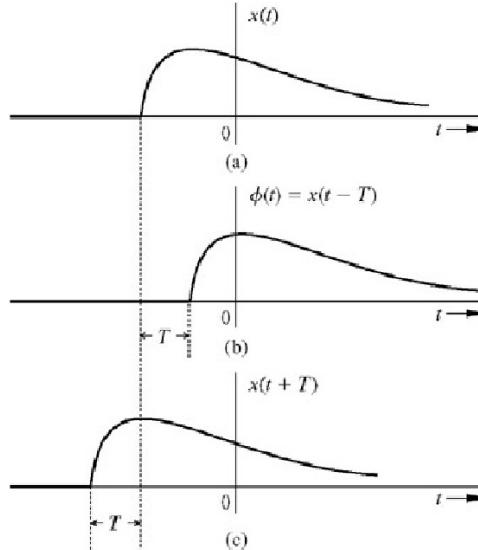


Figura 1.14: Deslocamento temporal de um sinal $x(t)$.

Exemplo 1 $x(t) = C \cos(\omega_0 t)$ e $\phi(t) = C \cos(\omega_0 t \pm \theta)$, $\omega_0 \neq 0$, $\theta > 0$. Logo, $T = \theta/\omega$ é o deslocamento, pois

$$\phi(t) = C \cos(\omega_0 t \pm \theta) = C \cos(\omega_0 t \pm \omega_0 \theta / \omega_0)$$

$$= C \cos(\omega_0[t \pm \theta/\omega_0]) = x(t \pm \underbrace{\theta/\omega_0}_{T})$$

Exemplo 2 Considere (veja a Figura 1.15)

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

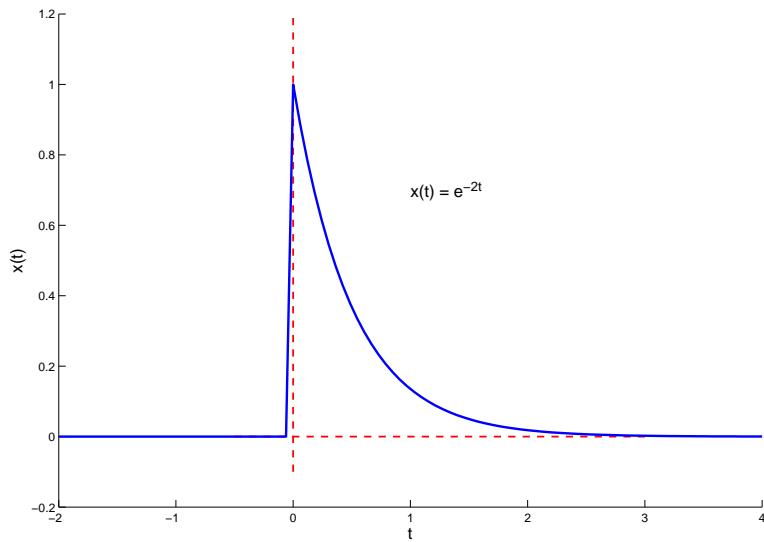


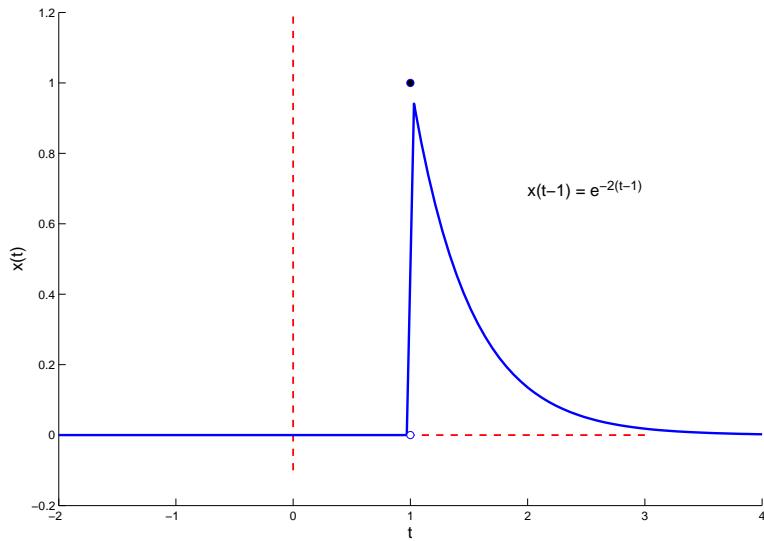
Figura 1.15: Exponencial $x(t)$.

Atraso de 1 segundo: $x_d(t) = x(t-1)$. Graficamente, veja a Figura 1.16.
Descrição matemática de $x_d(t) = x(t-1)$:

$$x_d(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t-1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \\ 0, & t-1 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \end{cases}$$

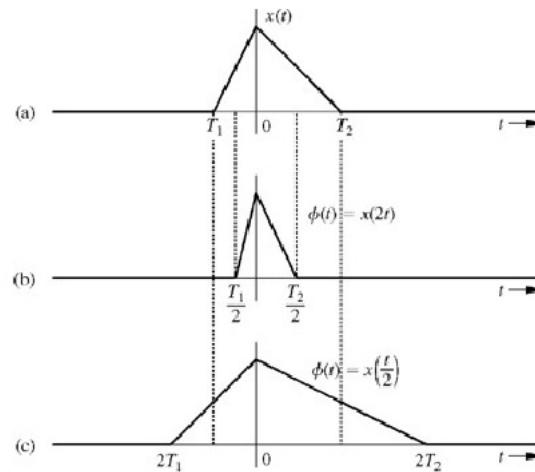
Logo,

$$x_d(t) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{De acordo com a Figura 1.16!}$$

Figura 1.16: Exponencial deslocada $x_d(t)$.

2. Escalonamento temporal: $\phi(t) = x(at)$, $\phi(t) = x(t/a)$, $a > 1$ (veja a Figura 1.17)

- $\phi(t) = x(at)$: compressão no tempo pelo fator a
- $\phi(t) = x(t/a)$: expansão no tempo pelo fator a

Figura 1.17: Escalonamento temporal de um sinal $x(t)$.

3. Reversão (inversão) temporal: $\phi(t) = x(-t)$ (veja a Figura 1.18)

- O gráfico de $x(t)$ é rebatido sobre o eixo *vertical*.

Cuidado: O gráfico de $x(t)$ é rebatido sobre o eixo *horizontal* quando $\phi(t) = -x(t)!$

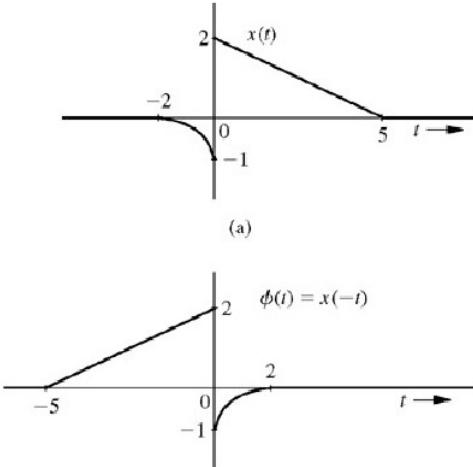


Figura 1.18: Reversão temporal de um sinal $x(t)$.

- Note que $\phi(t) = x(at)$, $a > 0$, corresponde a um escalonamento:

$0 < a < 1 \Rightarrow \phi(t) = x(at)$ é uma *expansão* pelo fator $1/a$

$a > 1 \Rightarrow \phi(t) = x(at)$ é uma *compressão* pelo fator a

- Note que, se $a < 0$, então

$$\phi(t) = x(at) = x(-(-at)) = x((-a)(-t))$$

corresponde a um escalonamento de $x(t)$ por $-a = |a| > 0$, seguido de uma reversão temporal; ou, de maneira equivalente, a uma reversão de $x(t)$, seguida de um escalonamento por $|a|$.

4. Operações Combinadas: $\phi(t) = x(at + b)$, $a \neq 0$, pode ser interpretado de duas maneiras equivalentes:

1. Primeiramente deslocamos $x(t)$ por b , obtendo $\psi(t) = x(t + b)$. Em seguida, escalonamos $\psi(t)$ por a , obtendo $\phi(t) = \psi(at) = x(at + b)$.
2. Primeiramente escalonamos $x(t)$ por a , obtendo $\psi(t) = x(at)$. Em seguida, deslocamos $\psi(t)$ por b/a , obtendo $\phi(t) = \psi(t + (b/a)) = x(a(t + (b/a))) = x(at + b)$.

Obs 1 As operações vistas acima são ferramentas importantes para a análise e construção de sinais.

Obs 2 Veja (e faça) o Exercício 1.1-7 (p. 135) do Lathi para as propriedades entre tais operações e a energia E_x de um sinal $x(t)$.

Exemplo Considere

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2t + \pi/4), & 0 \leq t < 5 \\ e^{5t}, & t \geq 5 \\ 0, & \text{caso contrário } (t < 0) \end{cases}$$

Então,

$$\phi(t) = x(-2t - 3)$$

corresponde a:

1. um atraso de 3 unidades de tempo
2. seguido de uma reflexão
3. seguido de uma compressão pelo fator 2

Descrição matemática:

$$\phi(t) = x(-2t - 3) = \begin{cases} \cos(2(-2t - 3) + \pi/4), & 0 \leq -2t - 3 < 5 \Leftrightarrow -1,5 \geq t > -4 \\ e^{5(-2t-3)}, & -2t - 3 \geq 5 \Leftrightarrow -2t \geq 8 \Leftrightarrow t \leq -4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo,

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos(-4t - 6 + \pi/4), & -4 < t \leq -1,5 \\ e^{-10t-15}, & t \leq -4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1.3 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

1. Sinais em Tempo Contínuo e Sinais em Tempo Discreto

- *Tempo Contínuo:* o *tempo* (eixo horizontal) assume valores *contínuos*.
Ex: $x(t) = \sin(t)$, $t \in [0, 1]$.
- *Tempo Discreto:* o *tempo* (eixo horizontal) assume valores *discretos*, ou seja, o tempo dá *saltos*.
Ex: (a) PIB trimestral e (b) um *bit* de memória de um PC só é atualizado a cada ciclo do *clock*.

2. Sinais Analógicos e Digitais

- *Analógicos*: a amplitude (eixo *vertical*) do sinal pode assumir uma infinidade de valores.
Ex: A tensão sobre um resistor.
- *Digitais*: a amplitude (eixo *vertical*) do sinal só pode assumir um número finito de valores.
Ex: Um *bit* só pode assumir 2 valores; e um *byte*, 256 valores.

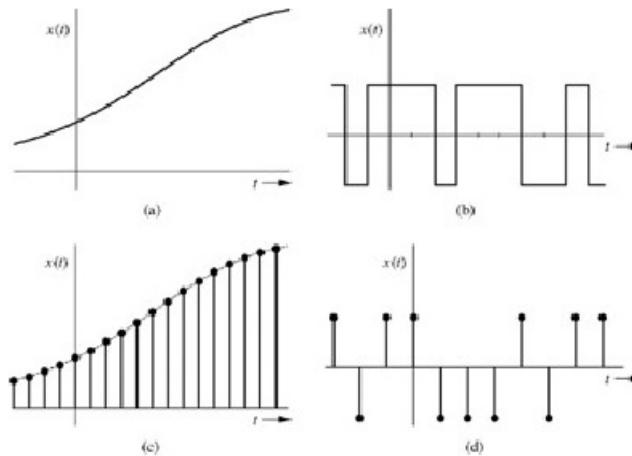


Figura 1.19: (a) Analógico em tempo Contínuo; (b) Digital em tempo Contínuo; (c) Analógico em tempo Discreto; (d) Digital em tempo Discreto.

Sinais digitais em tempo discreto surgem naturalmente a partir da amostragem (conversor D/A) de um sinal analógico em tempo contínuo por um microcontrolador.

3. Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Relembre que $x(t)$ tem *duração finita* se

$$x(t) = 0, \quad t \leq t_1 \text{ ou } t \geq t_2,$$

onde $t_2 > t_1$ e $T = t_2 - t_1$ é a *duração* de $x(t)$ (o sinal “começa” em t_1 e “termina” em t_2). Quando isto não ocorre, ou seja, $x(t)$ assume *algum* valor *não-nulo* em *qualquer* intervalo de tempo, dizemos que $x(t)$ tem *duração infinita*. Assim, $x(t)$ “começa” em $t = -\infty$ e “continua indefinidamente”.

- *Sinais Periódicos*: quando para algum $T_0 > 0$ (*período*),

$$x(t + T_0) = x(t), \text{ para qualquer } t \in (-\infty, \infty)$$

Isto significa que o sinal atrasado de T_0 segundos coincide com o próprio sinal. Um sinal periódico “começa” em $t = -\infty$ e “termina” em $t = \infty$, ou seja, $x(t)$ é de duração infinita e se repete a cada intervalo de T_0 segundos. Logo, basta conhecermos $x(t)$ num certo intervalo de comprimento T_0 para conhecermos todo o sinal. Note que $2T_0, 3T_0, 4T_0, \dots$, também são períodos de $x(t)$ (por exemplo, $x(t + 2T_0) = x((t + T_0) + T_0) = x(t + T_0) = x(t)$). Por isto, denominamos o menor $T_0 > 0$ que satisfaz

$$x(t + T_0) = x(t), \text{ para qualquer } t \in (-\infty, \infty),$$

de período fundamental. Se $x(t)$ é constante, o período fundamental não está definido.

Ex: $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$, $x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow T_0 = 2\pi/\omega_0$ é o período fundamental.

- *Sinais Não-Periódicos:* quando $x(t)$ não for periódico.

Ex: $x(t) = t^2$, $x(t) = e^{at}$.

Extensão periódica: Seja $\phi(t)$ um sinal de duração T . Dado qualquer $T_0 \geq T$, temos que $\phi(t)$ gera uma sinal periódico $x(t)$ de período T_0 através de infinitos deslocamentos de $\phi(t)$ para a direita e para a esquerda (veja a Figura 1.20).

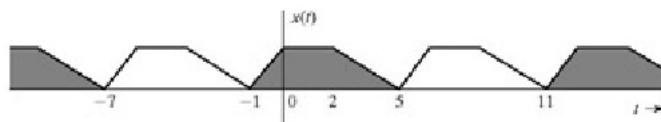


Figura 1.20: Extensão periódica.

Descrição matemática:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t - kT_0), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Obs Sinais de duração infinita, como os periódicos, não existem na prática. No entanto, como veremos mais adiante, eles são bastante úteis no estudo de sistemas.

Propriedades:

1. Suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ têm o *mesmo* período T_0 . Então os seguintes sinais *também* possuem período T_0 :

- $x(t) = Cx_1(t)$, C real ou complexo
- $x(t) = x_1(t) \pm x_2(t)$
- $x(t) = x_1(t)x_2(t)$
- $x(t) = x_1(t)/x_2(t)$, com $x_2(t) \neq 0$ para todo t

Prova da soma: Seja $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Então,

$$x(t + T_0) = x_1(t + T_0) + x_2(t + T_0) = x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

Ex: $x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$

Obs Considere que $x_1(t)$ tem período T_1 e que $x_2(t)$ tem período T_2 (não necessariamente iguais!). Então, a *soma* $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ é periódica $\Leftrightarrow T_1/T_2$ é um número racional.

2. Suponha que $x(t)$ tem período T_0 . Dado a real,

$$\int_a^{a+T_0} x(t) dt = \int_0^{T_0} x(t) dt$$

Assim, a área abaixo de $x(t)$ (a integral) é sempre a mesma, independente do intervalo de comprimento T_0 escolhido. Tal integral é representada por

$$\int_{T_0} x(t) dt$$

Logo,

$$\int_{T_0} x(t) dt = \int_0^{T_0} x(t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

Sinal Causal: quando $x(t)$ *não começa* antes de $t = 0$, ou seja, $x(t) = 0$ para todo $t < 0$.

Sinal Não-Causal: quando $x(t)$ não é causal. Isto significa que $x(t)$ começa antes de $t = 0$, ou seja, existe pelo menos *algum* $\bar{t} < 0$ tal que $x(\bar{t}) \neq 0$.

Sinal Anti-Causal: quando $x(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

4. Sinais de Energia e Potência

- *Sinais de Energia:* $E_x < \infty$ (energia finita).
- *Sinais de Potência:* $0 < P_x < \infty$ (potência finita não-nula).

Relembre que $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$ (e $0 < P_x < \infty \Rightarrow E_x = \infty$). Logo, não existem sinais que são *simultaneamente* de energia e de potência. No entanto, existem sinais que não são *nem de energia nem de potência* (por exemplo, $x(t) = e^{-at}$ com $a > 0$, $E_x = \infty$, $P_x = \infty$).

5. Sinais Determinísticos e Aleatórios

- *Determinísticos*: podem ser preditos de maneira precisa na forma de uma expressão matemática ou graficamente.
- *Aleatórios*: não podem ser preditos de maneira precisa, mas apenas probabilisticamente.

Obs Na prática, geralmente há ruídos externos (que são de natureza aleatória) que interferem nos sinais determinísticos a serem gerados e/ou analisados. Quando a interferência do ruído é relativamente pequena, os mesmos são desprezados, e tudo se passa como se os sinais fossem de fato determinísticos.

1.4 ALGUNS MODELOS ÚTEIS DE SINAIS

1. Função Degrau Unitário: é o sinal definido por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

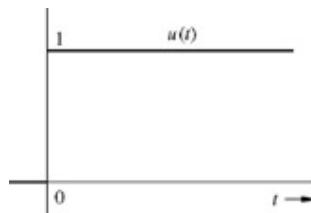


Figura 1.21: Degrau unitário.

O degrau unitário, que por si só é fundamental na análise de sistemas, permite que sinais mais complexos sejam descritos por uma única expressão matemática.

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad x(t) = \begin{cases} 5e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = 5e^{-at}u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

(veja a Figura 1.22)

$$\textcircled{2} \quad x(t) = 2u(t - 3) \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{atraso} \end{matrix} \quad (\text{veja a Figura 1.25})$$

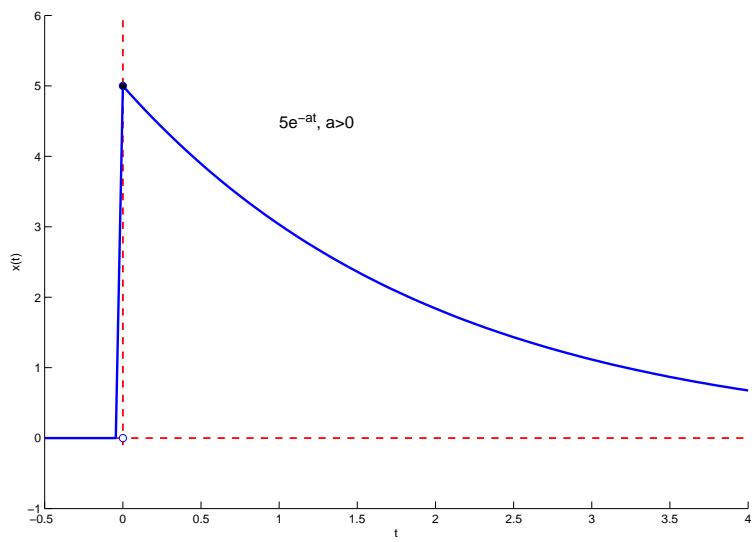


Figura 1.22: Exemplo 1.

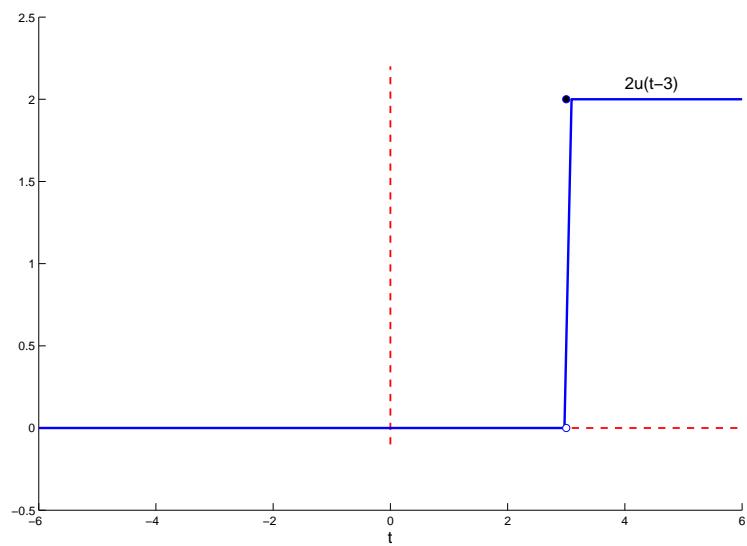


Figura 1.23: Exemplo 2.

(3) $x(t) = u(-t)$ (veja a Figura 1.24)
 \downarrow
 reflexão

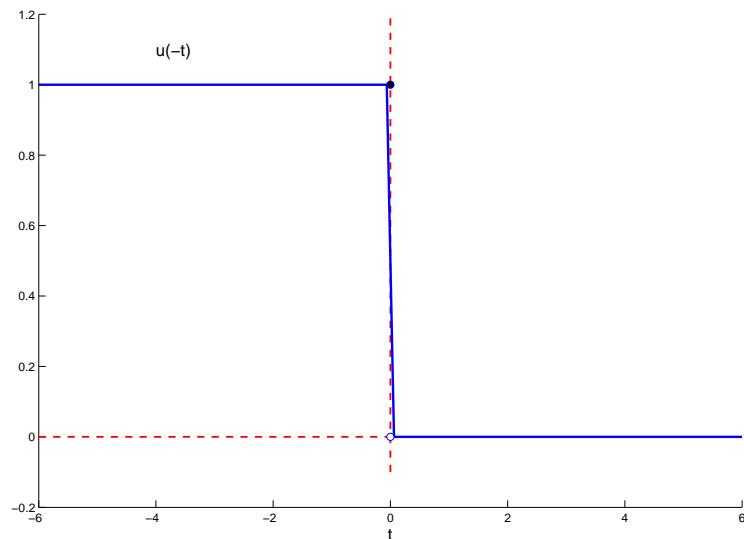


Figura 1.24: Exemplo 3.

(4) $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{-at}u(-t), \quad t \in (-\infty, \infty)$
 (veja a Figura 1.25)

Figura 1.25: Exemplo 4.

(5) $x(t) = 2u(t-3) + (-2u(t-7)) = 2[u(t-3) - u(t-7)]$ (pulso retangular)
 (veja a Figura 1.26)

(6) $x(t) = u(t-a) - u(t-b)$ (pulso retangular entre a e b, $b > a$)
 (veja a Figura 1.27)

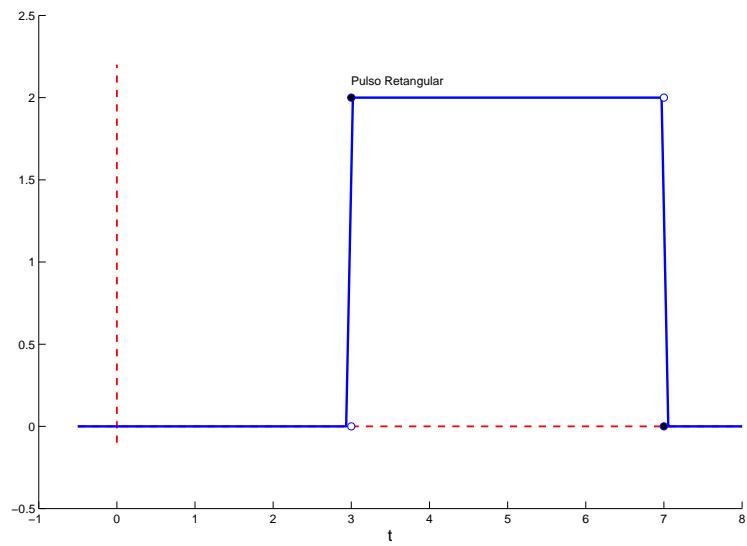
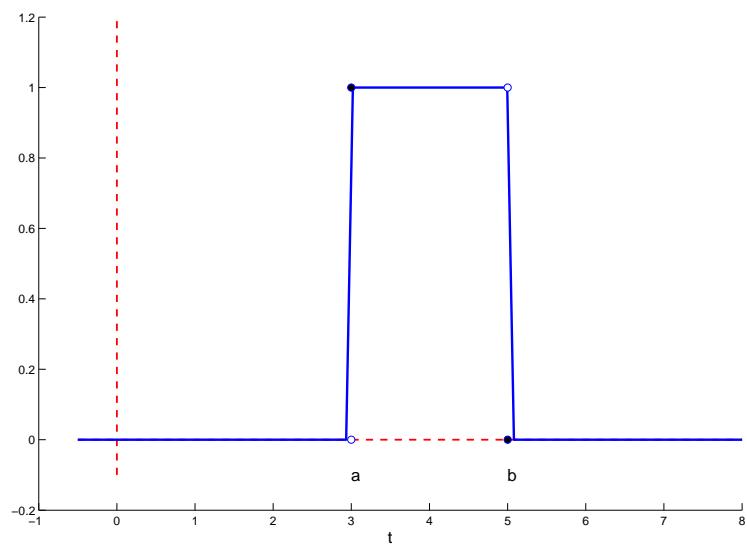


Figura 1.26: Exemplo 5.

Figura 1.27: Pulso retangular entre a e b , com $b > a$.

(7) $x(t) = \text{Figura 1.28}$

$$x_1(t) = t \underbrace{[u(t) - u(t-2)]}_{\text{pulso entre } 0 \text{ e } 2}$$

$$x_2(t) = (-2t+6) \underbrace{[u(t-2) - u(t-3)]}_{\text{pulso entre } 2 \text{ e } 3}$$

$$\therefore x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\begin{aligned} &= t[u(t) - u(t-2)] + (-2t+6)[u(t-2) - u(t-3)] \\ &= tu(t) - 3(t-2)u(t-2) + 2(t-3)u(t-3) \end{aligned}$$

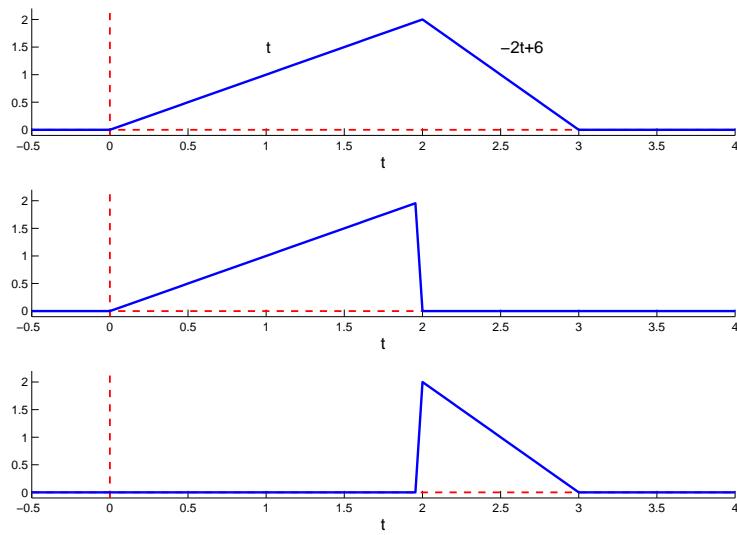


Figura 1.28: Exemplo 7.

(8) $x(t) = \text{Figura 1.29}$

$$x_1(t) = 2 \underbrace{[u(t+1,5) - u(t)]}_{\text{pulso entre } -1,5 \text{ e } 0}$$

$$x_2(t) = 2e^{-t/2} \underbrace{[u(t) - u(t-3)]}_{\text{pulso entre } 0 \text{ e } 3}$$

$$\therefore x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= 2u(t+1,5) - 2(1 - e^{-t/2})u(t) - 2e^{-t/2}u(t-3)$$

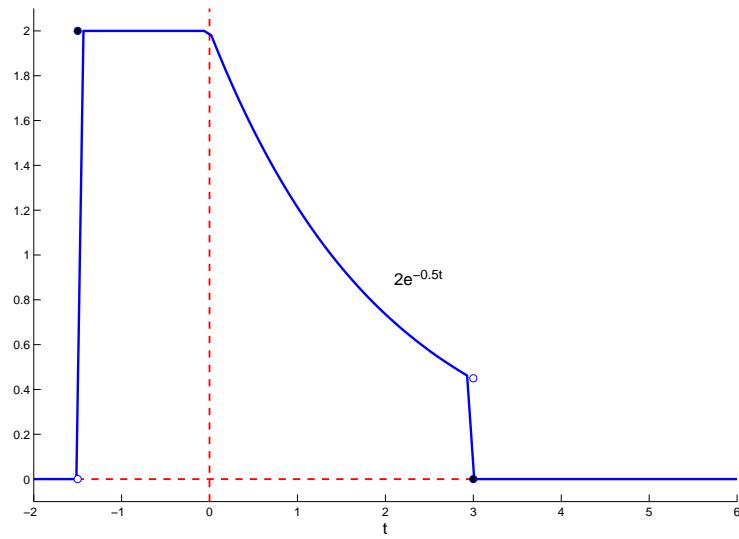


Figura 1.29: Exemplo 8.

2. Função Impulso Unitário

Motivação Considere o circuito elétrico abaixo:

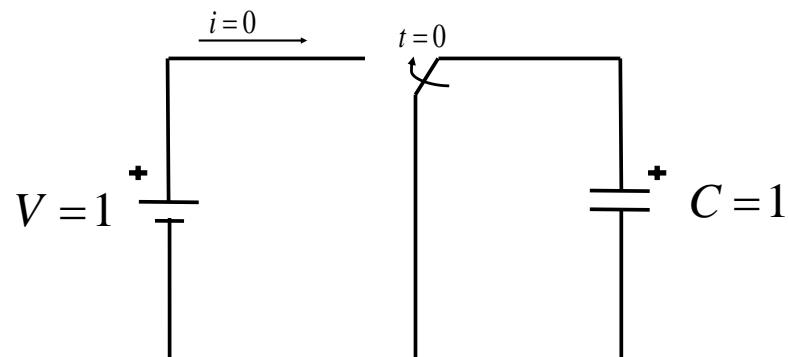


Figura 1.30: Circuito Elétrico.

Suponha que a chave permaneceu fechada para todo $t < 0$. Logo, para $t < 0$:

$$\begin{cases} i(t) = 0 \\ v_c(t) = 0 \quad (\text{capacitor está descarregado}) \end{cases}$$

Em $t = 0$, a chave é fechada. Desse modo, para $t > 0$:

$$\begin{cases} i(t) = 0 \\ v_c(t) = V = 1 \end{cases}$$

(veja a Figura 1.31)

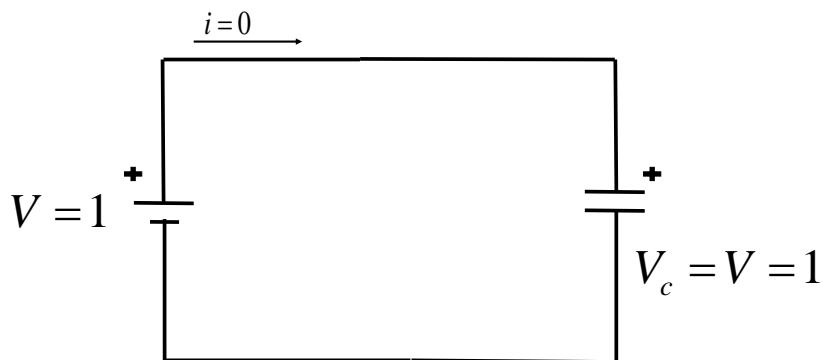


Figura 1.31: Circuito Elétrico para $t > 0$.

Assim, o capacitor foi *instantaneamente* carregado em $t = 0$. Temos que:

$$\begin{cases} i(t) = 0, & \text{se } t \neq 0 \\ i(t) = ?, & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Mas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = Q = CV = 1 \quad (1.2)$$

A *dificuldade técnica* é que (1.1) implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = 0,$$

pois $i(t)$ é sempre nula, com exceção do instante $t = 0$. No entanto, fisicamente, interpretamos (1.1) e (1.2) como uma corrente $i(t)$ de duração infinitamente pequena, mas de área unitária, não importando a forma de $i(t)$ no intervalo infinitesimal em que $i(t) \neq 0$ (veja a Figura 1.32).

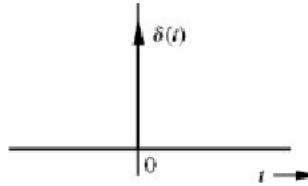


Figura 1.32: Corrente $i(t)$.

Agora, vamos introduzir o impulso unitário para “formalizarmos” as ideias acima. O *impulso unitário* $\delta(t)$ é o objeto matemático (*não é uma função no sentido usual!*) que possui as seguintes propriedades:

a) $\delta(t) = 0$, para $t \neq 0$ (não está definido em $t = 0$!)

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ (a área sob $\delta(t)$ é unitária!)

Graficamente:

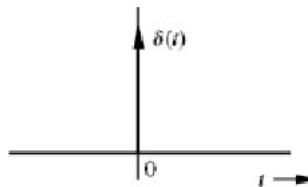


Figura 1.33: Impulso unitário.

Interpretação: $\delta(t)$ tem duração infinitamente pequena, mas com área unitária.

O impulso unitário $\delta(t)$ pode ser “construído” da seguinte maneira:

a) $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ (veja a Figura 1.34). Logo, $\delta(t) = 0$, para $t \neq 0$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt}_{=1} = 1$

No entanto, os argumentos acima apresentam algumas inconsistências matemáticas:

1. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ não converge para uma função (no sentido usual), pois $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(0) = \infty$. Portanto, $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ não é uma função no sentido usual.

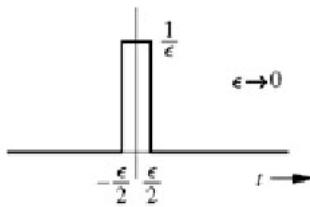


Figura 1.34: Pulso $\delta_\epsilon(t)$ de largura $\epsilon > 0$ com $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$ (área unitária).

2. Como $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ não é uma função (no sentido usual) e não há convergência uniforme, não podemos passar $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ para fora da integral em b).

Para contornar tais problemas, poderíamos definir $\delta(t)$ rigorosamente como uma *função generalizada* (ou *distribuição*). No entanto, em termos *operacionais*, o efeito é exatamente o mesmo do que foi feito acima. Assim, em nosso curso, para não termos que entrar na complexa teoria de funções generalizadas, vamos aceitar os argumentos acima de forma intuitiva e não-rigorosa.

Propriedades: Seja $x(t)$ um sinal contínuo em $t = 0$. Então,

- $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$ (*propriedade de amostragem*)

“**Prova**”: Como $x(t)$ é contínuo em $t = 0$, temos que

$$x(t) \approx x(0), \quad t \in [-\epsilon/2, \epsilon/2] \text{ com } \epsilon > 0 \text{ pequeno}$$

Logo, para $\epsilon > 0$ pequeno, temos

$$\begin{aligned} x(t)\delta(t) &= x(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{x(t)\delta_\epsilon(t)}_{\approx x(0)\delta_\epsilon(t)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(0)\delta_\epsilon(t) = x(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \boxed{x(0)\delta(t)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t) dt = x(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt}_{=1} = \boxed{x(0)}$$

Novamente, as propriedades acima podem ser colocadas de forma rigorosa através de funções generalizadas. Vamos agora generalizá-las para $\delta(t - T)$ (impulso unitário deslocado de T segundos).

Propriedades: Seja $x(t)$ um sinal contínuo em $t = T$. Então,

- $x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - T) dt = x(T)$ (*propriedade de amostragem*)

Como $\delta(t - T)$ está “concentrado” em $t = T$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t - T) dt = \int_{T^-}^{T^+} \delta(t - T) dt = 1,$$

para $t_1 < T < t_2$. No entanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - T) dt = 0$$

se $t_1 < t_2 < T$ ou $T < t_1 < t_2$.

Por razões de consistência, *não definimos*

$$\int_{t_1}^T \delta(t - T) dt \quad \text{nem} \quad \int_T^{t_2} \delta(t - T) dt.$$

Assim, para $t_1 < T < t_2$, devemos fazer

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - T) dt = \underbrace{\int_{t_1}^{T^-} \delta(t - T) dt}_{=0} + \underbrace{\int_{T^-}^{T^+} \delta(t - T) dt}_{=1} + \underbrace{\int_{T^+}^{t_2} \delta(t - T) dt}_{=0} = 1$$

Exemplos

- (1) $x(t) = \delta(t)$ (veja a Figura 1.35)
- (2) $x(t) = 5\delta(t)$ (veja a Figura 1.36)
- (3) $x(t) = -2\delta(t)$ (veja a Figura 1.37)
- (4) $x(t) = 2\delta(t - 3)$ (veja a Figura 1.38)

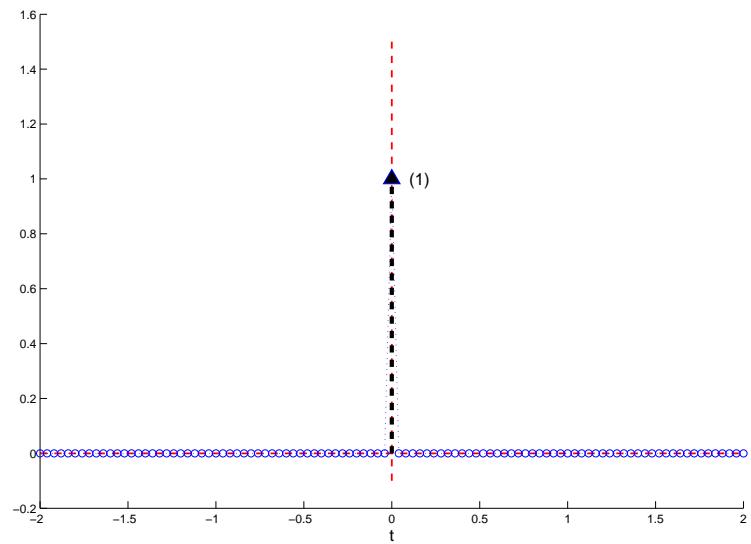


Figura 1.35: Gráfico de $x(t) = \delta(t)$ (Exemplo 1).

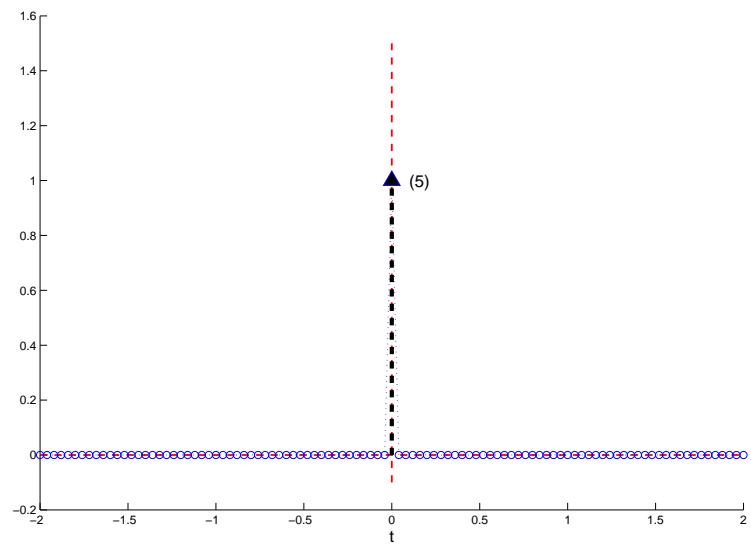
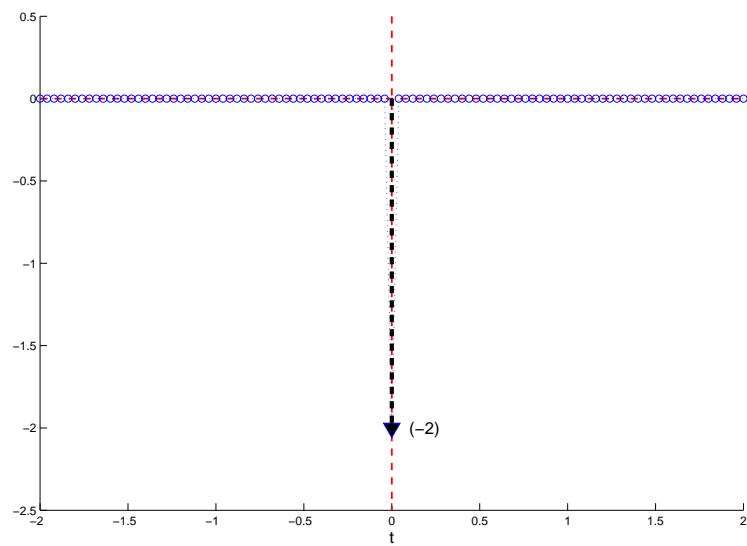
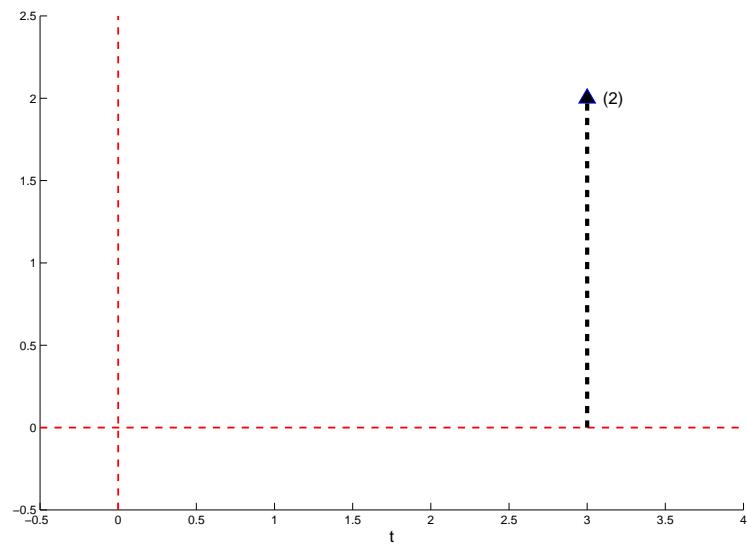


Figura 1.36: Gráfico de $x(t) = 5\delta(t)$ (Exemplo 2).

Figura 1.37: Gráfico de $x(t) = -2\delta(t)$ (Exemplo 3).Figura 1.38: Gráfico de $x(t) = 2\delta(t - 3)$ (Exemplo 4).

$$\textcircled{5} \quad y(t) = (\underbrace{t^5 + t^2 + 9}_{x(t)})\delta(t) = x(0)\delta(t) = 9\delta(t)$$

(veja a Figura 1.39)

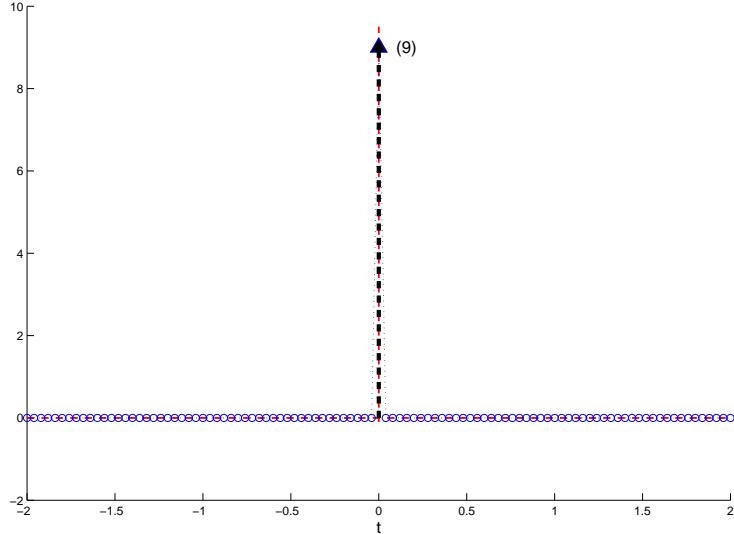


Figura 1.39: Exemplo 5.

$$\textcircled{6} \quad y(t) = (\underbrace{-e^{-8t} + \sin(5t)}_{x(t)})\delta(t) = x(0)\delta(t) = -\delta(t)$$

(veja a Figura 1.40)

$$\textcircled{7} \quad y(t) = (\underbrace{t^3 + 4}_{x(t)})\delta(t-2) = x(2)\delta(t-2) = 12\delta(t-2)$$

\downarrow
 $T = 2$

(veja a Figura 1.41)

$$\textcircled{8} \quad y(t) = (\underbrace{e^{-t}\cos(\pi t)}_{x(t)})\delta(t+1) = x(-1)\delta(t+1) = -e^1\delta(t+1)$$

\downarrow
 $T = -1$

(veja a Figura 1.42)

$$\textcircled{9} \quad \int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(t-2) dt = 3 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) dt}_{=1} = 3$$

(veja a Figura 1.43)

$$\textcircled{10} \quad \int_{-2}^0 \delta(t+1) dt = 1 \quad \text{(veja a Figura 1.44)}$$

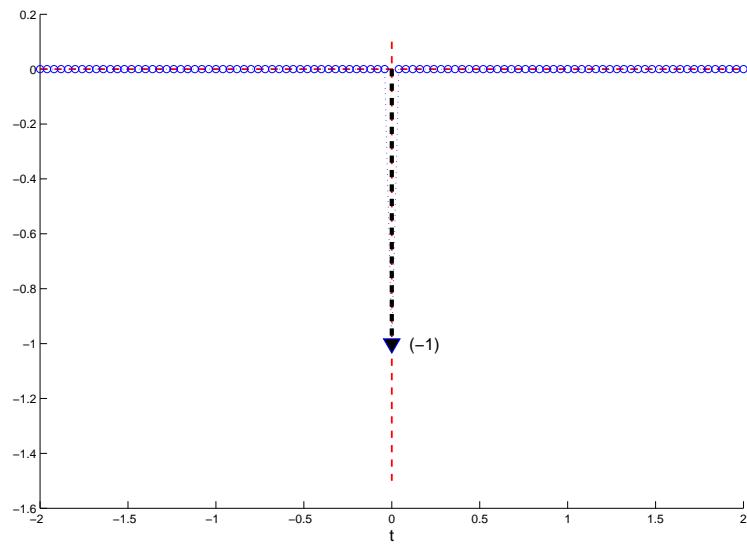


Figura 1.40: Exemplo 6.

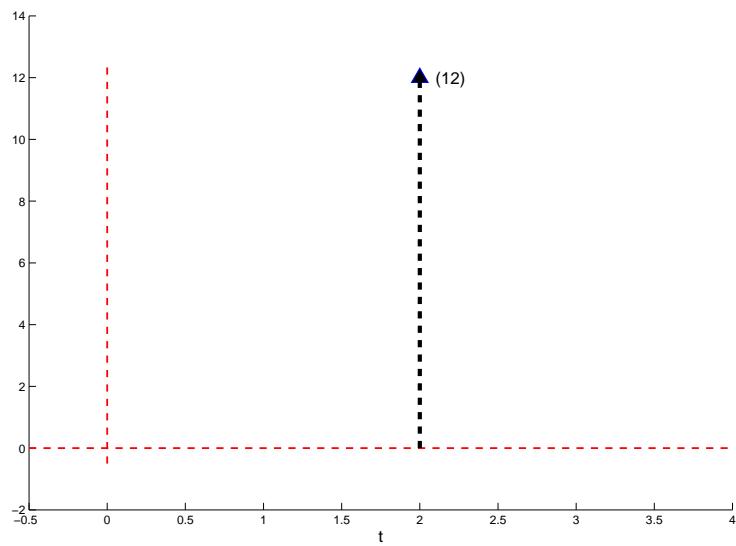


Figura 1.41: Exemplo 7.

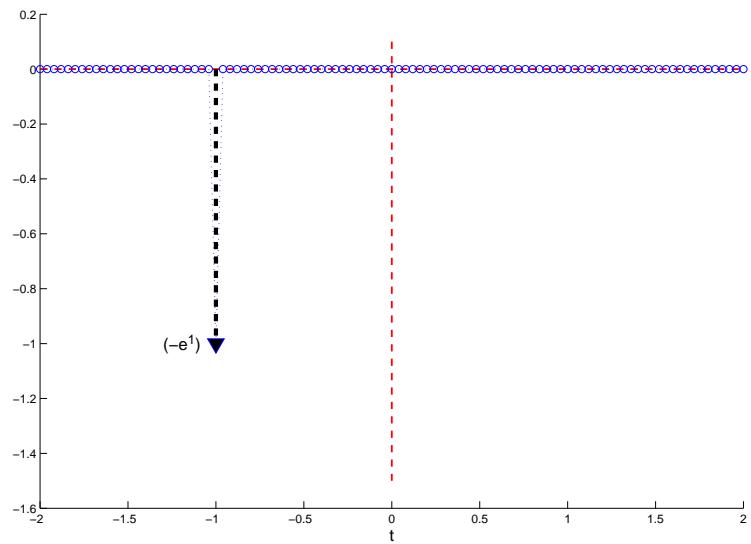


Figura 1.42: Exemplo 8.

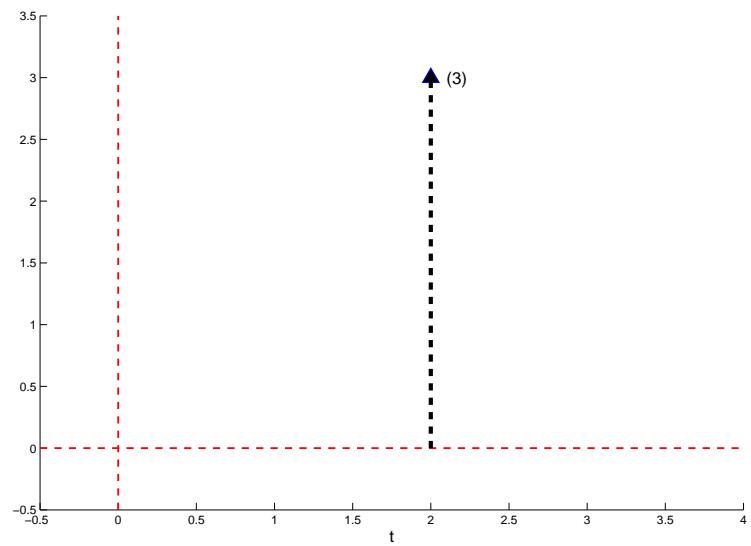


Figura 1.43: Exemplo 9.

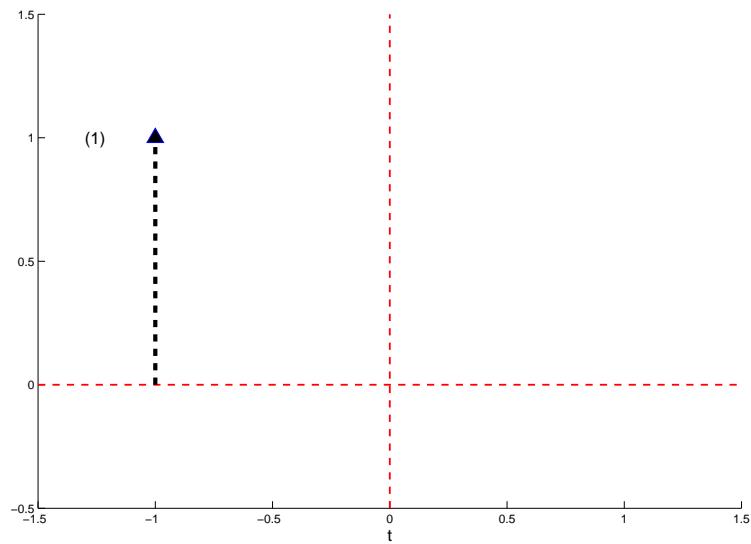


Figura 1.44: Exemplo 10.

$$\textcircled{11} \quad \int_{-0.5}^0 \delta(t+1) dt = 0$$

$$\textcircled{12} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(t^3 + 5)}_{x(t)} \delta(t) dt = x(0) = 5$$

$$\textcircled{13} \quad \int_{-5}^1 \underbrace{e^{j\omega t}}_{x(t)} \delta(t) dt = \int_{-5}^1 \delta(t) dt = 1$$

$y(t) = x(0)\delta(t) = \delta(t)$

$$\textcircled{14} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2 \sin(t + \pi/2)}_{x(t)} \delta(t) dt = x(0) = 2$$

$$\textcircled{15} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}_{x(t)} \delta(t+2) dt = x(-2) = -1$$

$$\textcircled{16} \quad \int_{-1}^1 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}_{x(t)} \delta(t+2) dt = \int_{-1}^1 x(-2)\delta(t+2) dt$$

$$= x(-2) \int_{-1}^1 \delta(t+2) dt = 0$$

Relembre do Cálculo 1 que se um sinal $x(t)$ é descontínuo em $t = t_0$, então $x(t)$ não é derivável (no sentido usual) em t_0 . No entanto, com o auxílio do impulso unitário $\delta(t)$, podemos generalizar o conceito usual de derivada para sinais $x(t)$ que apresentam saltos de descontinuidade.

Em todo o restante do curso, *assumiremos* que os sinais $x(t)$ são *diferenciáveis por partes*.

Definimos a *derivada generalizada* (ou *derivada distribucional*) de $x(t)$ em $t = t_0$ por:

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \begin{cases} x'(t_0), & \text{quando a derivada usual de } x(t) \text{ existe em } t_0 \\ (x(t_0^+) - x(t_0^-))\delta(t - t_0), & \text{quando } x(t) \text{ apresenta um salto em } t_0 \end{cases}$$

onde $x'(t)$ é a derivada usual de $x(t)$ e $(x(t_0^+) - x(t_0^-))$ é o tamanho do salto de descontinuidade.

Portanto, se $x(-\infty) = 0$, então

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau$$

para todo t em que a *derivada usual* $x'(t)$ existe.

Exemplos

① $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad \text{e} \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad [t \neq 0], u(-\infty) = 0$
 (veja a Figura 1.45)

② $x(t) = \text{pulso retangular entre } a \text{ a } b \text{ com amplitude 2}$
 (veja a Figura 1.46)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dx(t)}{dt} &= 2\delta(t-a) - 2\delta(t-b) = 2(\delta(t-a) - \delta(t-b)) \\ x(-\infty) &= 0 \\ x(t) &= \int_{-\infty}^t 2(\delta(\tau-a) - \delta(\tau-b)) d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^t (\delta(\tau-a) - \delta(\tau-b)) d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^a \delta(\tau-a) d\tau - 2 \int_{-\infty}^b \delta(\tau-b) d\tau \end{aligned}$$

para $t \neq a$ e $t \neq b$. Logo,

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < a \\ 2, & \text{se } a < t < b \\ 0, & \text{se } t > b \end{cases}$$

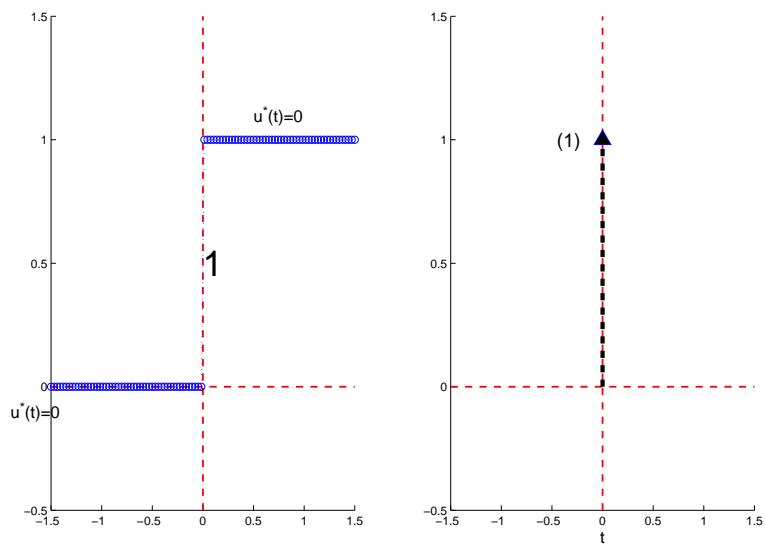
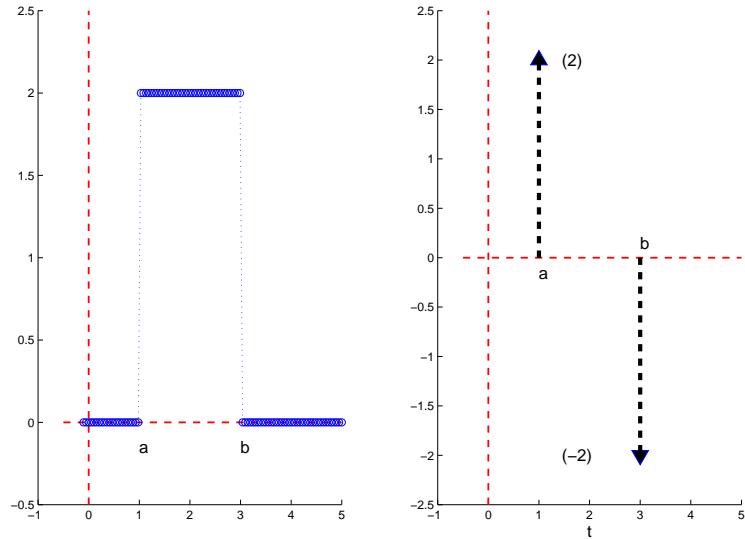
Figura 1.45: Gráficos $u(t)$ e $du(t)/dt = \delta(t)$ (Exemplo 1).

Figura 1.46: Gráfico da derivada generalizada de um pulso retangular (Exemplo 2).

- ③ $x(t) =$ Figura 1.47 (acima). Logo, $dx(t)/dt =$ Figura 1.47 (abaixo).

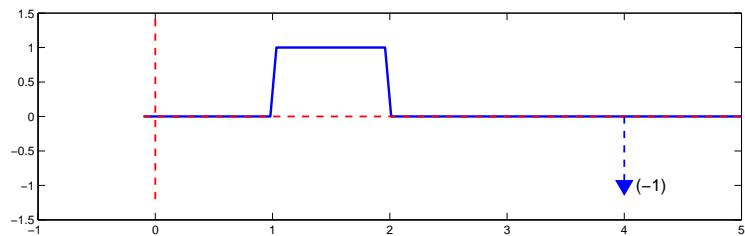
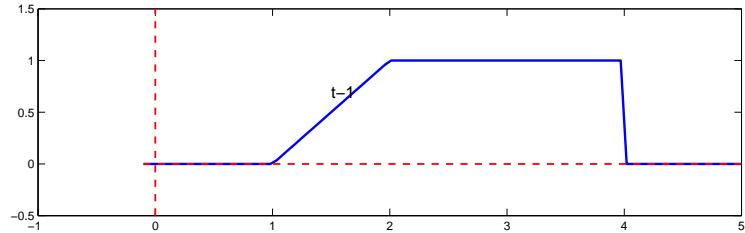


Figura 1.47: Exemplo 3: gráfico de $x(t)$ (acima) e de $dx(t)/dt$ (abaixo). Note que $x'(t)$ não existe em $t = 1$ e $t = 2$, mas a magnitude do salto é **zero**! Assim, $dx(t)/dt$ possui impulsos de área **zero** em $t = 1$ e $t = 2$!

Obs As propriedades usuais de derivação da soma, diferença e produto permanecem válidas para a derivada generalizada.

3. Função Exponencial Complexa

Seja $s = \sigma + j\omega$. Relembre que

$$\sigma = (s + s^*)/2 \text{ (parte real)}, \quad \omega = (s - s^*)/2j \text{ (parte imaginária)}$$

Como $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$, $(e^{j\omega})^* = e^{-j\omega}$, obtemos que

$$\boxed{\cos \omega = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}, \quad \sin \omega = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}}$$

Do mesmo modo, para $s = \sigma + j\omega$, relembre que

$$e^{st} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)], \quad (e^{st})^* = e^{s^* t}$$

Logo,

$$\boxed{e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{e^{st} + e^{s^* t}}{2}}$$

Denominamos s de *frequência complexa* (generaliza a frequência ω em $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$), $|\omega|$ de *frequência angular* e σ de *frequência neperiana*.

Assim, vários sinais *reais* podem ser escritos em função de e^{st} (veja a Figura 1.48):

$$\text{a)} \quad x(t) = e^{\sigma t} \Rightarrow s = \sigma, \omega = 0$$

$$\text{b)} \quad x(t) = \cos \omega t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (s = \pm j\omega, \sigma = 0)$$

$$\text{c)} \quad x(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t, \sigma < 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) \quad (s = \sigma \pm j\omega)$$

$$\text{d)} \quad x(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t, \sigma > 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) \quad (s = \sigma \pm j\omega)$$

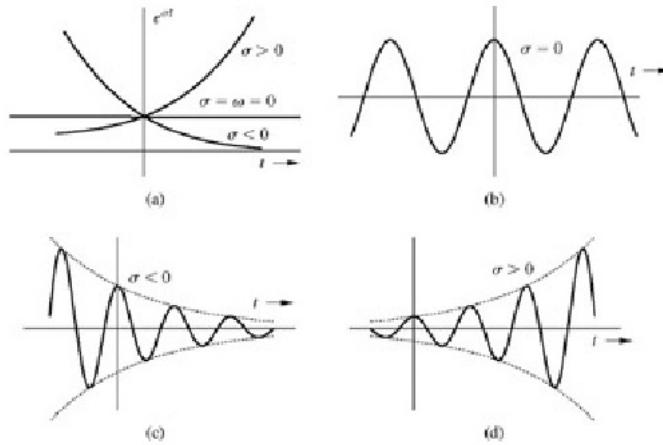


Figura 1.48: Senóides de frequência complexa $s = \sigma \pm j\omega$.

Plano s (plano de frequência complexa): veja as Figuras 1.49 e 1.50

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad x(t) = e^{-3t} \cos 10t = \frac{1}{2}(e^{(-3+j10)t} + e^{(-3-j10)t}) \\ \Rightarrow s = -3 \pm j10 \quad (\text{veja a Figura 1.51})$$

$$\textcircled{2} \quad x(t) = \cos 2t = \frac{1}{2}(e^{j2t} + e^{-j2t}) \Rightarrow s = \pm j2 \quad (\text{veja a Figura 1.52})$$

$$\textcircled{3} \quad x(t) = e^{8t} \Rightarrow s = \sigma = 8 \text{ (real)}, \omega = 0 \quad (\text{veja a Figura 1.53})$$

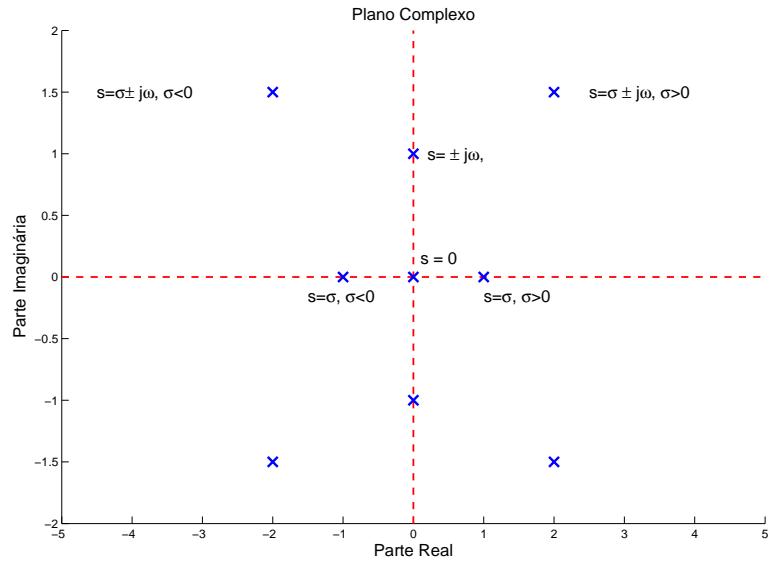


Figura 1.49: Plano s (plano de frequência complexa), onde $s = \sigma \pm j\omega$.

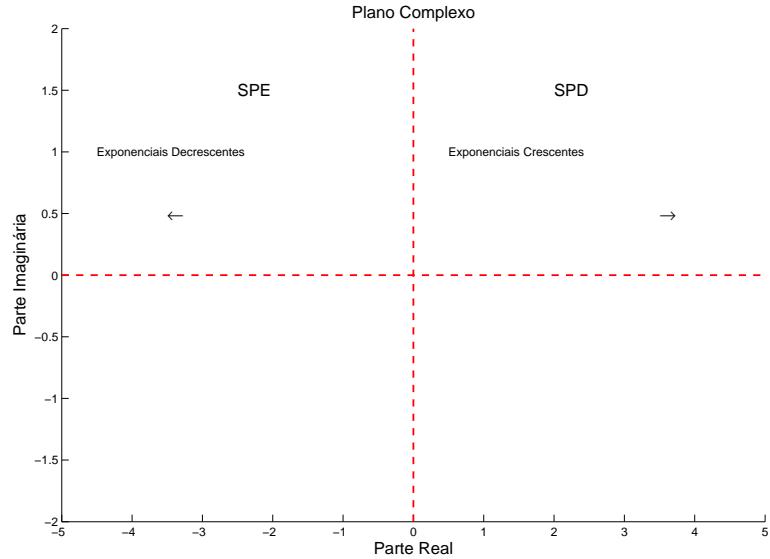


Figura 1.50: Semi-plano Esquerdo (SPE) e Semi-plano Direito (SPD). Sinais de amplitude constante correspondem ao eixo imaginário.

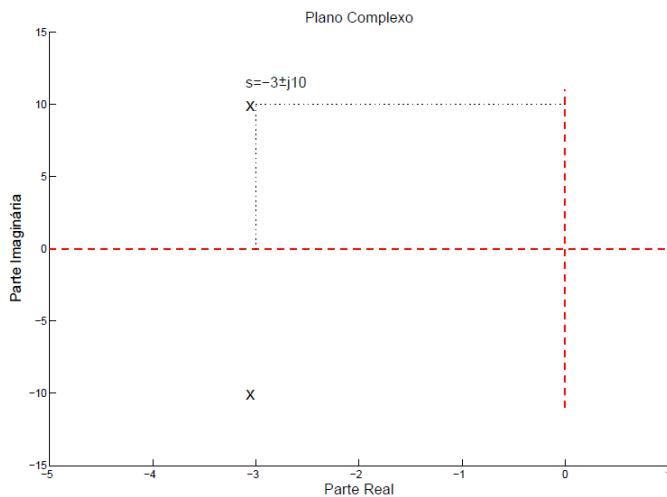


Figura 1.51: Frequência complexa de $x(t) = e^{-3t} \cos 10t$ (Exemplo 1).

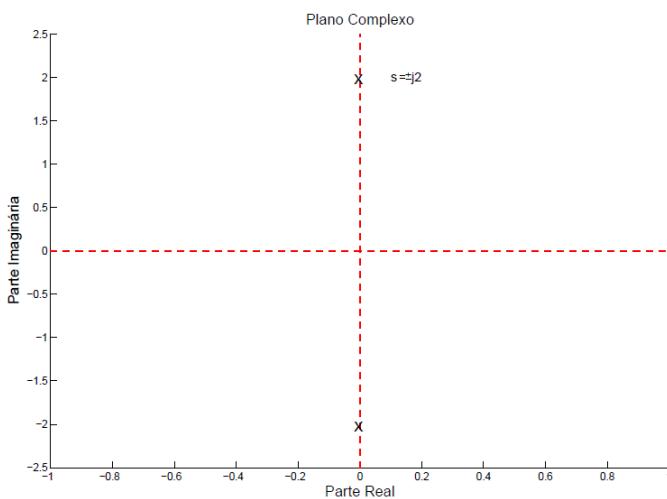


Figura 1.52: Frequência complexa de $x(t) = \cos 2t$ (Exemplo 2).

Figura 1.53: Frequência complexa de $x(t) = e^{8t}$ (Exemplo 3).

1.5 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Um sinal $x_e(t)$ é *par* quando, para todo t ,

$$x_e(t) = x_e(-t) \quad (\text{simetria em relação ao eixo vertical})$$

Um sinal $x_o(t)$ é *ímpar* quando, para todo t ,

$$x_o(t) = -x_o(-t) \quad (\text{rebatimento diagonal do gráfico})$$

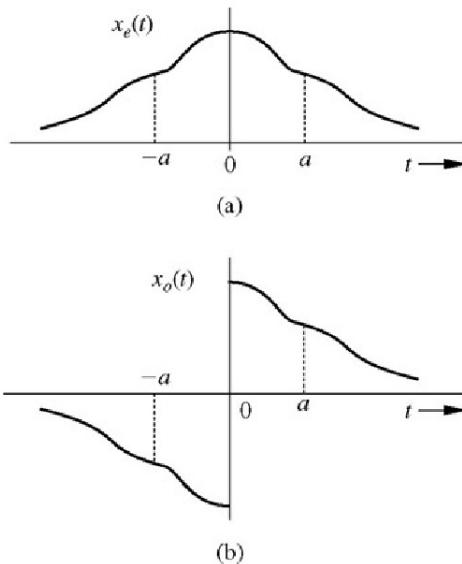


Figura 1.54: Função par (a), e função ímpar (b).

Se $x(t)$ é ímpar, então $x(0) = -x(-0)$, ou seja, $x(0) = 0$.
Portanto:

- $x(t)$ é ímpar $\Rightarrow x(0) = 0$
- $x(0) \neq 0 \Rightarrow x(t)$ não é ímpar

Exemplos

- ① $x(t) = C \cos(\omega t)$ é par, pois $C \cos(\omega t) = C \cos(-\omega t)$.
- ② $x(t) = C \sin(\omega t)$ é ímpar, pois $C \sin(\omega t) = -C \sin(-\omega t)$.
- ③ $x(t) = t^n$, com $n > 0$ par, é um sinal par.
- ④ $x(t) = t^n$, com $n > 0$ ímpar, é um sinal ímpar.
- ⑤ O impulso $\delta(t)$ é par. Logo, $\delta(t) = \delta(-t)$ e $\delta(T-t) = \delta(t-T)$.

Propriedades:

1. par \pm par = par
2. ímpar \pm ímpar = ímpar
3. par \times ímpar = ímpar
4. par \times par = ímpar \times ímpar = par
5. $1/\text{par} = \text{par}$ $1/\text{ímpar} = \text{ímpar}$
6. Se $x_e(t)$ é par, então $\int_{-a}^a x_e(t) dt = 2 \int_0^a x_e(t) dt$
7. Se $x_o(t)$ é ímpar, então $\int_{-a}^a x_o(t) dt = 0$

Demonstração de 3: par \times ímpar = ímpar

Suponha que $x(t)$ é par e que $y(t)$ é ímpar. Então,

$$x(t) = x(-t), \quad y(t) = -y(-t)$$

Seja $z(t) = x(t)y(t)$. Logo,

$$z(-t) = x(-t)y(-t) = x(t)(-y(t)) = -(x(t)y(t)) = -z(t)$$

$\therefore z(t) = x(t)y(t)$ é ímpar.

Exemplos

(1) $x(t) = \underbrace{\cos(10t)}_{\text{par}} \underbrace{\sin(15t)}_{\text{ímpar}}$ é ímpar

(2) $x(t) = \underbrace{t^3}_{\text{ímpar}} \underbrace{(t^2 + 1)}_{\substack{\downarrow \\ \underbrace{\text{par} \quad \text{par}}_{\text{par}}} \underbrace{\sin(5t)}_{\text{ímpar}}$ é par

(3) $\int_{-5}^5 \underbrace{t^{10}}_{\substack{\downarrow \\ \underbrace{\text{par} \quad \text{ímpar}}_{\text{ímpar}}} \underbrace{\sin^3(100t)}_{\text{ímpar}} dt = 0$

(4) $x(t) = e^{-at} \cos(\omega t)$, nem par nem ímpar

Componentes Pares e Ímpares de um Sinal: Seja $x(t)$ um sinal. Então, podemos decompor $x(t)$ como

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]}_{x_e(t) \text{ é par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]}_{x_o(t) \text{ é ímpar}}$$

Note que:

- $x(t) = x_e(t)$ ($x_o(t) = 0$) $\Leftrightarrow x(t)$ é par
- $x(t) = x_o(t)$ ($x_e(t) = 0$) $\Leftrightarrow x(t)$ é ímpar

Exemplos

(1) $x(t) = e^{jt} = \cos t + j \sin t$

$$\Rightarrow x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) = \cos t$$

$$\Rightarrow x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = \frac{1}{2}(e^{jt} - e^{-jt}) = j \sin t$$

(2) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

$$\Rightarrow x_e(t) = \frac{1}{2}(e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t))$$

$$\Rightarrow x_o(t) = \frac{1}{2}(e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t))$$

(veja a Figura 1.55)

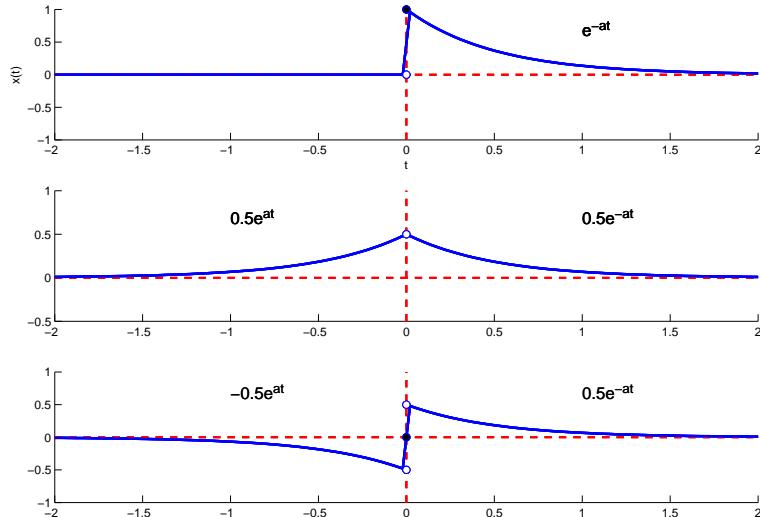


Figura 1.55: Gráficos do Exemplo 2: $x(t)$ (acima), $x_e(t)$ (ao meio), $x_o(t)$ (abaixo).

1.6 SISTEMAS

Sistema: é uma entidade em que os sinais de saída são alterados pelos sinais de entrada.

Ex: motor elétrico, motor mecânico, equalizador de áudio, computador, automóvel, ecossistemas.

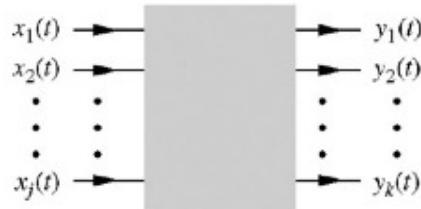


Figura 1.56: Representação de um sistema.

Modelagem matemática: obter relações matemáticas entre as entradas e as saídas.

- Sistema Real \times Modelagem \times Análise ($x(t) \rightarrow y(t) = ?$)
 \times Controle ($x(t) = ? \rightarrow y(t)$)
- Modelagem de sistemas elétricos: Leis de Kirchhoff
- Modelagem de sistemas mecânicos: Leis de Newton

1.7 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Em nosso curso, estudaremos *apenas* sistemas SISO (*Single Input, Single Output* – Única Entrada, Única Saída). Além disso, consideraremos somente sistemas em que *cada* entrada $x(t)$ gera uma *única* saída $y(t)$. Neste contexto, um *sistema* nada mais é do que um *mapeamento* do conjunto de entradas no conjunto de saídas.

1. Sistemas Sem Memória e Com Memória

Sem Memória (ou Instantâneo): quando a saída no instante t depende apenas da entrada no instante t , ou seja, a saída em t *independe* dos valores da entrada antes de t (passado) e após t (futuro).

Com Memória (ou Dinâmico): quando o sistema não é sem memória. Isto significa que a saída no instante t *depende* de *algum* valor passado ou futuro da entrada.

2. Sistemas Causais e Não-Causais

Causal (ou Físico ou Não-Antecipativo): quando a saída no instante t *independe* dos valores da entrada após t (futuro).

Não-Causal (ou Antecipativo): quando o sistema não é causal. Isto significa que a saída no instante t depende de *algum* valor futuro da entrada.

Exemplos

(1) $v(t) = R_i(t)$ (resistor), $x(t) = i(t)$ é a entrada, $y(t) = v(t)$ é a saída: sem memória e causal

(2) $y(t) = f(x(t))$: sem memória e causal

(3) $y(t) = \cos(x(t-1))$: com memória e causal

(4) $y(t) = \cos(x(t-1)) + \sin(x(t+1))$: com memória e não-causal

(5) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (*sistema integrador*): com memória e causal

(6) $y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$: com memória e não-causal

Obs Todo *sistema real* deve ser *causal*. No entanto, sistemas não-causais possuem importância prática. Por exemplo, um *filtro passa-baixas* (FPB) ideal é não-causal e, portanto, não pode ser construído (*realizado*) na prática. Assim, o objetivo da engenharia é construir filtros passa-baixas reais que possuem um desempenho próximo ao do ideal.



$$x(t) = C \cos(\omega t)$$

$$\text{FPB Ideal } \begin{cases} y(t) = x(t), & \omega \leq \bar{\omega} \\ y(t) = 0, & \omega > \bar{\omega} \end{cases}$$

$\bar{\omega}$ é a frequência de corte (veja a Figura 1.57).

Figura 1.57: FPB ideal e prático (real).

3. Sistemas Lineares e Não-Lineares

3.1 Sistemas Sem Memória

Linear: quando o sistema (sem memória) satisfaz (k é real ou imaginário):

- a) $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 \rightarrow y_3 = y_1 + y_2$ (*aditividade*)
- b) $x \rightarrow y \Rightarrow \bar{x} = kx \rightarrow \bar{y} = ky$ (*homogeneidade*)

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

$$x_1 \rightarrow y_1 \text{ e } x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = k_1 x_1 + k_2 x_2 \rightarrow y_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ (\text{princípio da superposição})$$

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear satisfaz: $x = 0 \rightarrow y = 0$. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x = 0 \rightarrow y = 0$.

Importante 1! Aditividade $\not\Rightarrow$ Homogeneidade

Não-Linear: quando o sistema (sem memória) não é linear. Isto significa que existe (ao menos) uma entrada em que a saída do sistema não satisfaz a aditividade ou não satisfaz a homogeneidade.

Importante 2! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $x(t)$ (ex: resistor (veja a Figura 1.58)). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois a condição de homogeneidade não é satisfeita.

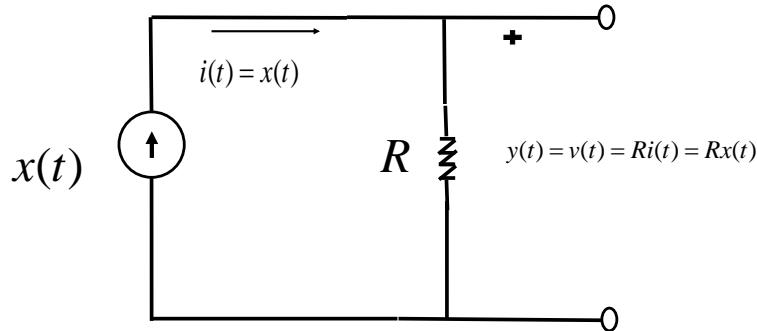


Figura 1.58: Circuito elétrico: $v(t) = Ri(t)$ é o modelo matemático!

Exemplos

- (1) $\overset{\text{modelo matemático}}{y(t) = tx(t)} \Rightarrow \text{sem memória}$
 Escolha quaisquer $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Suponha que

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) = tx_1(t) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) = tx_2(t) \end{aligned}$$

Escolha quaisquer constantes K_1 e K_2 . Tome

$$x_3(t) = K_1x_1(t) + K_2x_2(t)$$

Então,

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) = tK_1x_1(t) + tK_2x_2(t) \\ &= K_1 \underbrace{tx_1(t)}_{y_1(t)} + K_2 \underbrace{tx_2(t)}_{y_2(t)} \\ &= K_1y_1(t) + K_2y_2(t) \end{aligned}$$

\therefore é linear.

- (2) $y(t) = tx(t) + 1$
 $x(t) = 0 \longrightarrow y(t) = 1$
 \therefore não é linear!
- (3) $y(t) = x^2(t)$
 Suponha que

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) \end{aligned}$$

Tome

$$x_3(t) = K_1x_1(t) + K_2x_2(t)$$

Para que o princípio da superposição seja satisfeito, devemos ter que

$$y_3(t) = K_1y_1(t) + K_2y_2(t) \quad \left[\begin{array}{l} \text{para quaisquer } x_1(t) \text{ e } x_2(t) \\ \text{e quaisquer } K_1 \text{ e } K_2! \end{array} \right]$$

No entanto,

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3^2(t) = (K_1x_1(t) + K_2x_2(t))^2 \\ &= K_1^2x_1^2(t) + 2K_1K_2x_1(t)x_2(t) + K_2^2x_2^2(t) \end{aligned}$$

Assim, para $x_1(t) = 1, x_2(t) = 0, K_1 = 2, K_2 = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = 1 \\ y_1(t) = x_1^2(t) = 1 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = 0 \\ y_2(t) = x_2^2(t) = 0 \end{array} \right. \\ & x_3(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) = 2 \\ & y_3(t) = x_3^2(t) = 4 \\ & K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) = 2 \quad] \neq \end{aligned}$$

\therefore não é linear!

3.2 Sistemas com Memória

Condição Inicial (ou Estado Inicial) $v(t_0)$ de um sistema com memória no instante t_0 : é a informação em t_0 que, juntamente com o conhecimento da entrada $x(t), t \geq t_0$ (futuro), determina uma única saída $y(t)$ para todo $t \geq t_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro da saída, não importa a maneira como o sistema atingiu a condição inicial $v(t_0)$, ou seja, $v(t_0)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0), \\ x(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

Resposta Entrada Nula $y_0(t)$: é a resposta do sistema quando $x(t) = 0, t \geq t_0$: $v(t_0), x(t) = 0, t \geq t_0 \rightarrow y_0(t), t \geq t_0$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}(t)$: é a resposta do sistema quando $v(t_0) = 0$: $v(t_0) = 0, x(t), t \geq t_0 \rightarrow y_{esn}(t), t \geq t_0$

Linear: quando o sistema (com memória) satisfaz (k é real ou imaginário):

a) (*Aditividade*) Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1(t_0), \\ x_1(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2(t_0), \\ x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} v_3(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0), \\ x_3(t) = x_1(t) + x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3(t) = y_1(t) + y_2(t), t \geq t_0$$

b) (*Homogeneidade*) Se

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0), \\ x(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}(t_0) = kv(t_0), \\ \bar{x}(t) = kx(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = ky(t), t \geq t_0$$

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

(Princípio da Superposição) Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1(t_0), \\ x_1(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2(t_0), \\ x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} v_3(t_0) = k_1v_1(t_0) + k_2v_2(t_0), \\ x_3(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t), t \geq t_0$$

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear (com memória) satisfaz:

$$[v(t_0) = 0, x(t) = 0, t \geq t_0] \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0.$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $v(t_0) = 0, x(t) = 0, t \geq t_0 \rightarrow y(t) = 0, t \geq t_0$.

Importante 1! Aditividade $\not\Rightarrow$ Homogeneidade

Não-Linear: quando o sistema (com memória) não é linear, ou seja, não satisfaz a aditividade *ou* não satisfaz a homogeneidade.

Importante 2! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $x(t)$ (ex: motor elétrico). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois a condição de homogeneidade não é satisfeita. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam *como se fossem* lineares. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam *como se fossem* lineares. Isto será visto mais adiante em nosso curso no tópico “Linearização de Sistemas Não-Lineares”.

Concluímos então que resposta total $y(t), t \geq t_0$, de um *sistema linear com memória* é dada por $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$, ou seja:

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } v(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } x(t)}$$

Propriedade de Decomposição

Obs Sistemas sem memória não possuem estado inicial. Para sistemas com memória, sempre assumimos que $v(-\infty) = 0$.

Exemplos

- 1) Considere o circuito RC mostrado abaixo:

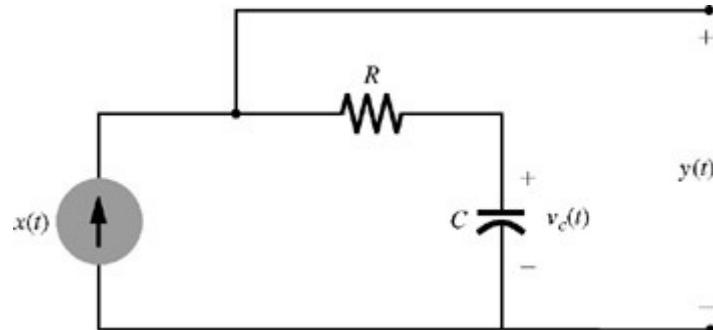


Figura 1.59: Circuito elétrico RC.

$$y(t) = v(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

$$v_R(t) = Ri_R(t) = Rx(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \underbrace{v_C(-\infty)}_{=0}$$

capacitor
descarregado
em $t = -\infty$

Temos que

$$\therefore y(t) = Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = Rx(t) + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) d\tau}_{=v_C(t_0)} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau$$

| | |
|---|-----|
| $y(t) = \underbrace{v_C(t_0)}_{\substack{\text{estado inicial} \\ \text{em } t_0}} + \underbrace{Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau}_{\substack{\text{resposta à} \\ \text{entrada nula}}} + \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) d\tau}_{\substack{\text{resposta ao estado nulo}}}, \quad t \geq t_0$ | (*) |
|---|-----|

Com memória e causal!

Vamos mostrar que (*) é linear.

Suponha que

$$\left. \begin{array}{l} v_{C_1}(t_0), \\ x_1(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1(t), \quad t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_{C_2}(t_0), \\ x_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2(t), \quad t \geq t_0$$

Escolha K_1 e K_2 , e tome

$$\left. \begin{array}{l} v_{C_3}(t_0) = K_1 v_{C_1}(t_0) + K_2 v_{C_2}(t_0) \\ x_3(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right.$$

Seja $y_3(t)$, $t \geq t_0$, a saída correspondente, ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} v_{C_3}(t_0), \\ x_3(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3(t), t \geq t_0$$

Então, para $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} y_3(t) &= v_{C_3}(t_0) + Rx_3(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x_3(\tau) d\tau \\ &= [K_1 v_{C_1}(t_0) + K_2 v_{C_2}(t_0)] + R[K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)] \\ &\quad + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t [K_1 x_1(\tau) + K_2 x_2(\tau)] d\tau \\ &= K_1 [v_{C_1}(t_0) + Rx_1(t)] + K_2 [v_{C_2}(t_0) + Rx_2(t)] \\ &\quad + K_1 \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x_1(\tau) d\tau + K_2 \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau \\ &= K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) \end{aligned}$$

$\therefore (*)$ é linear.

$$(2) \quad \underbrace{\frac{dy(t)}{dt} + t^2 y(t) = (2t + 3)x(t)}_{\text{modelo matemático da relação entrada-saída}}$$

Este modelo significa que: dadas qualquer entrada $x(t)$ e qualquer condição inicial $y(t_0)$, a saída $y(t)$ do sistema é a solução desta equação diferencial.

Verifique se a resposta ao estado nulo (i. e., $y(t_0) = 0$) é linear em $x(t)$.

Solução: Suponha que

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) \end{aligned}$$

Escolha K_1 e K_2 , e tome

$$x_3(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)$$

Seja $y_3(t)$ a saída correspondente, ou seja,

$$x_3(t) \longrightarrow y_3(t)$$

Devemos mostrar que $y_3(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)$.

Temos

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + t^2 y_1(t) = (2t + 3)x_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + t^2 y_2(t) = (2t + 3)x_2(t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_3(t)}{dt} + t^2 y_3(t) &= (2t+3)x_3(t) \\
&= (2t+3)[K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)] \\
&= K_1 \underbrace{(2t+3)x_1(t)}_{=(1)} + K_2 \underbrace{(2t+3)x_2(t)}_{=(2)} \\
&= K_1 \left[\frac{dy_1(t)}{dt} + t^2 y_1(t) \right] + K_2 \left[\frac{dy_2(t)}{dt} + t^2 y_2(t) \right] \\
\frac{dy_3(t)}{dt} + t^2 y_3(t) &= \frac{d(K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t))}{dt} + t^2 (K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)) \\
&= (2t+3)x_3(t)
\end{aligned}$$

Assim, $y_3(t)$ e $K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)$ são soluções da equação diferencial para a entrada $x_3(t)$. Como a saída é única, temos

$$y_3(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)$$

Portanto, é linear.

③ Repita ② para

$$y(t) \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

Solução: Suponha que

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \\ x_3(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) \rightarrow y_3(t) \end{cases}$$

Então,

$$y_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + 3y_1(t) = x_1(t) \quad (1)$$

$$y_2(t) \frac{dy_2(t)}{dt} + 3y_2(t) = x_2(t) \quad (2)$$

$$y_3(t) \frac{dy_3(t)}{dt} + 3y_3(t) = x_3(t)$$

$$= K_1 \underbrace{\frac{dy_1(t)}{dt}}_{=(1)} + K_2 \underbrace{\frac{dy_2(t)}{dt}}_{=(2)}$$

$$= K_1 y_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + 3K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) \frac{dy_2(t)}{dt} + 3K_2 y_2(t)$$

$$= K_1 y_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + K_2 y_2(t) \frac{dy_2(t)}{dt} + 3[K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)]$$

$$\begin{aligned}
&\neq [K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)] \frac{d[K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)]}{dt} \\
&\quad + 3[K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)] \left[K_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + K_2 \frac{dy_2(t)}{dt} \right] \\
&\quad + 3[K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)] \\
&= K_1^2 y_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + K_2^2 y_2(t) \frac{dy_2(t)}{dt} + K_1 K_2 y_1(t) \frac{dy_2(t)}{dt} \\
&\quad + K_1 K_2 y_2(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + 3[K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)] \\
&= \underline{K_1^2 y_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt}} + \underline{K_2^2 y_2(t) \frac{dy_2(t)}{dt}} + \underline{K_1 K_2 \frac{d[y_1(t)y_2(t)]}{dt}} \\
&\quad + 3[K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)]
\end{aligned}$$

∴ não é linear.

4. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

Noção intuitiva: quando as características de um sistema não mudam com o tempo, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *variante no tempo*.

A massa de um transatlântico sofre grandes variações ao longo do tempo devido ao consumo do combustível. Logo, é um sistema variante no tempo. Em geral, sistemas reais são variantes no tempo devido à deterioração e ao envelhecimento dos componentes físicos ao longo do tempo. No entanto, num certo intervalo de tempo finito razoável, diversos sistemas reais se comportam *como se fossem* invariantes no tempo. Por exemplo, um automóvel zero pode ser considerado invariante no tempo no primeiro ano de uso.

Vamos agora definir de maneira precisa este conceito.

4.1 Sistemas sem Memória

Invariante no tempo: quando

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = x(t - T) \rightarrow \bar{y}(t) = y(t - T)$$

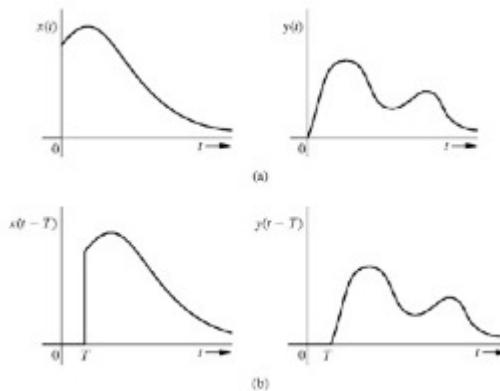


Figura 1.60: Ilustração gráfica da invariância no tempo.

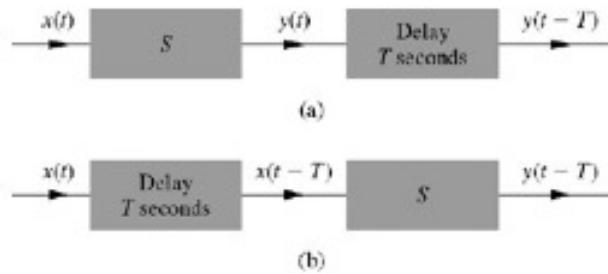


Figura 1.61: Diagrama para sistemas invariantes no tempo: o Sistema S *commuta* com o Atraso.

Variante no tempo: quando não é invariante no tempo.

Exemplos

1) $y(t) = \sin(x(t))$

Suponha que

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \sin(x(t)) \quad \therefore \quad y(t-T) = \sin(x(t-T))$$

Logo,

$$\bar{x}(t) = x(t-T) \longrightarrow \bar{y}(t) = \sin(\bar{x}(t)) = \sin(x(t-T)) = y(t-T)$$

\therefore é invariante no tempo.

2) $y(t) = (\sin t)x(t-2)$

Suponha que

$$x(t) \longrightarrow y(t) = (\sin t)x(t-2)$$

Assim,

$$y(t-T) = \sin(t-T)x(t-T-2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = x(t-T) \longrightarrow \bar{y}(t) &= (\sin t)\bar{x}(t-2) = (\sin t)x(t-T-2) \\ &\neq y(t-T) \end{aligned}$$

\therefore é variante no tempo.

3) Todo sistema da forma

$$y(t) = a(t)x(t)$$

é sem memória e linear. Se $a(t)$ independe do tempo, ou seja $a(t) = \text{cte.}$, então o sistema é invariante no tempo. Caso contário, é variante no tempo.

4.2 Sistemas com Memória

Invariante no tempo: quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0) = v_0, \\ x(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}(t_0 + T) = v_0, \\ \bar{x}(t) = x(t - T), t \geq t_0 + T \end{array} \right\} \rightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), t \geq t_0 + T$$

Ilustração de invariância no tempo:

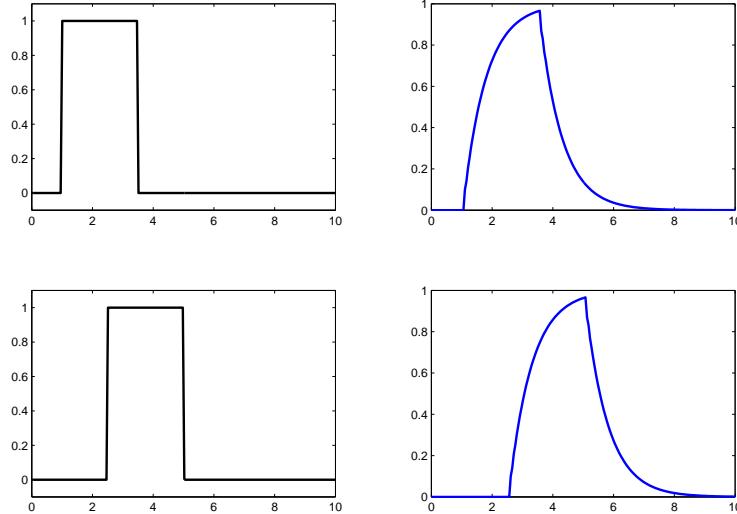


Figura 1.62: Sistema com memória invariante no tempo.

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial t_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $t_0 = 0$.

Variante no tempo: quando não é invariante no tempo.

Pode-se mostrar que todo sistema descrito por uma equação diferencial da forma

$$a_0 \frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_N y = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + \cdots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x \quad (*)$$

é um sistema *causal, com memória e linear*, onde $N \geq M$ e os coeficientes (*parâmetros*) a_i, b_i são constantes ou dependentes do tempo t .

Exemplo: $3 \frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt} + \cos(5t)y = t \frac{dx}{dt} + x \quad (N=2, M=1)$

Quando todos os parâmetros a_i, b_i em (*) são constantes, o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, é *variante*.

Propriedade (será mostrada na Seção 2.4): Considere um sistema linear com memória causal invariante no tempo. Suponha que $x(t), t \in \mathbb{R}$, é uma entrada causal e seja $T > 0$. Então, $y_{\text{esn}}(t), t \in \mathbb{R}$, é causal e:

Se

$$v(0) = 0, x(t), t \geq 0 \rightarrow y_{\text{esn}}(t), t \geq 0$$

então

$$v(0) = 0, \bar{x}(t) = x(t - T), t \geq 0 \rightarrow \bar{y}_{\text{esn}}(t) = y_{\text{esn}}(t - T), t \geq 0$$

Isto significa que $x(t), t \geq 0 \rightarrow y_{\text{esn}}(t), t \geq 0$, se comporta como um sistema linear sem memória invariante no tempo!

5. Sistemas em Tempo Contínuo e em Tempo Discreto: um sistema em tempo contínuo é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais em tempo contínuo. Um sistema em tempo discreto é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais em tempo discreto.

6. Sistemas Analógicos e Digitais: um sistema analógico é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais analógicos. Um sistema digital é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais digitais.

Ex: motor elétrico (sistema analógico em tempo contínuo), computador (sistema digital em tempo discreto).

Sinais em tempo discreto surgem naturalmente no processamento de sinais em tempo contínuo por um computador (veja a Figura 1.63).

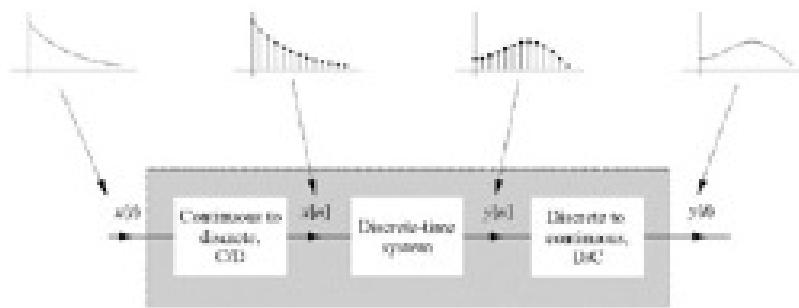


Figura 1.63: Processamento de um sinal analógico por um computador.

7. Sistemas Invertíveis e Não-Invertíveis

Relembre que um sistema S associa uma única saída $y(t)$ para cada entrada $x(t)$, ou seja, corresponde a um mapeamento do conjunto de entradas no conjunto de saídas. Quando diferentes entradas geram diferentes saídas, isto é,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 \quad (\text{ou, equivalentemente, } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$$

dizemos que o sistema é *invertível*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *não-invertível*.

Note que dizer que um sistema S é *invertível* é o mesmo que dizer que o mapeamento correspondente é *injetivo*. Neste caso, podemos, a princípio, determinar o *sistema inverso* S_i do sistema original S , o qual determina $x(t)$ a partir de $y(t)$. Desse modo, S em série com S_i resulta no *sistema identidade* ($y = x$). Isto é ilustrado na Figura 1.64.

Ex: gravação em vinil, .ZIP, criptografia

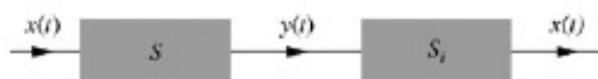


Figura 1.64: Sistema S em série com seu sistema inverso S_i .

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad y(t) = 2x(t) \quad (\text{S})$$

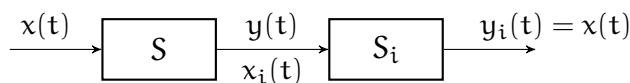
É invertível, pois

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = 2x_1 = 2x_2 \neq y_2$$

O sistema inverso é dado por

$$y_i(t) = \frac{1}{2}x_i(t) \quad (\text{S}_i)$$

e



pois

$$y_i(t) = \frac{1}{2}x_i(t) = \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{2}2x(t) = x(t)$$

$$\textcircled{2} \quad y(t) = x^2(t)$$

não é invertível, pois

$$\neq \begin{bmatrix} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 1 \end{bmatrix} =$$

$$\textcircled{3} \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (\text{integrador ideal}) \quad (\text{S})$$

Este sistema é invertível, pois se

$$y_1 = y_2$$

então

$$x_1 = \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = x_2$$

O sistema inverso é dado por

$$y_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \quad (\text{S}_i)$$

pois

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = y(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau \\ \therefore \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned} \right] \begin{array}{l} \text{válido nos instantes } t \text{ em} \\ \text{que } x(t) \text{ é contínuo} \end{array}$$

e, para $x_i = y$, temos

$$y_i(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t)$$

No entanto, S_i não é invertível!

- ④ Aplicou-se 4 entradas diferentes (esquerda) num sistema linear e as saídas correspondentes foram observadas (direita), conforme os gráficos abaixo:

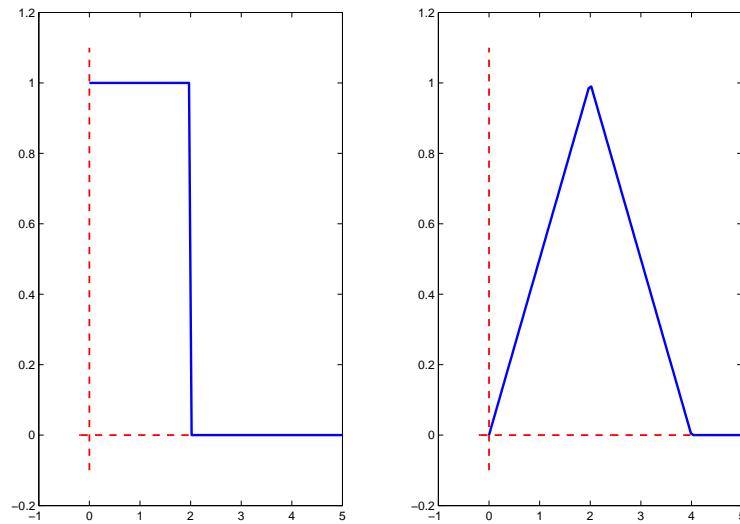


Figura 1.65: (a)

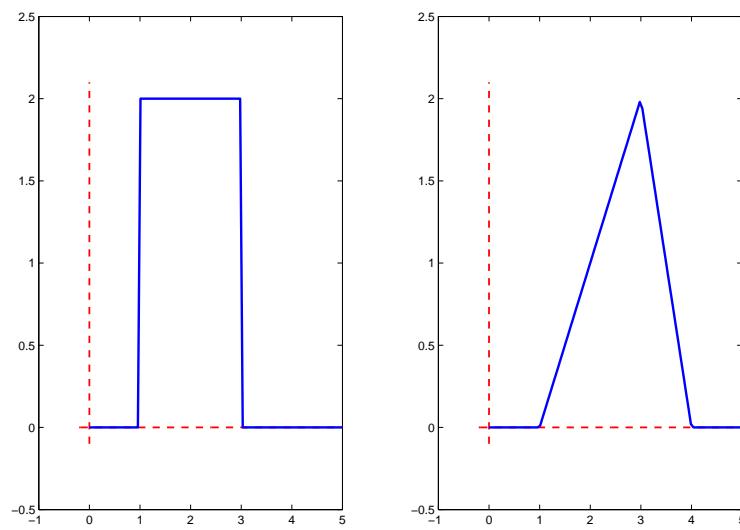


Figura 1.66: (b)

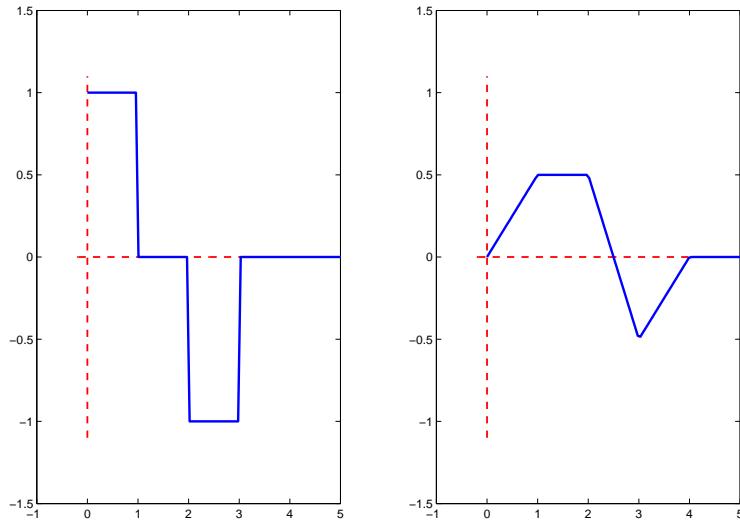


Figura 1.67: (c)

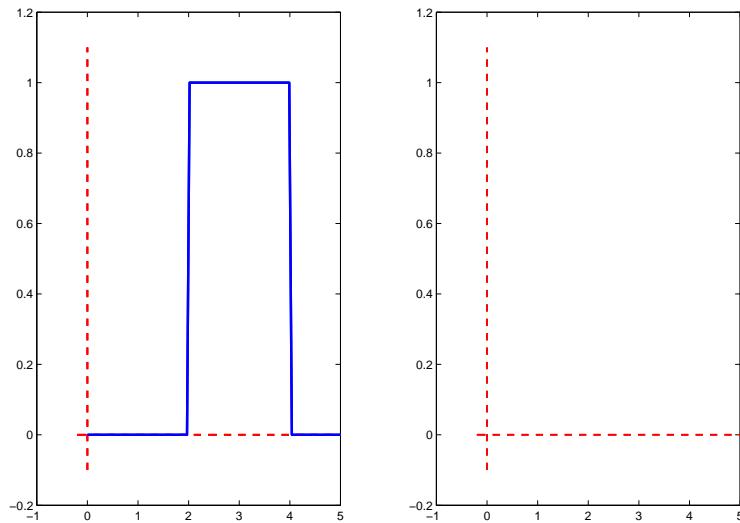


Figura 1.68: (d)

- A partir de (a) e (b), podemos concluir se o sistema é variante ou invariante no tempo?

Solução: Como o sistema é linear, para $\bar{x}(t) = 2x_1(t)$, temos $\bar{y}(t) = 2y_1(t)$. Note que $x_2(t) = 2x_1(t-1) = \bar{x}(t-1)$. Assim, para que o sistema seja invariante no tempo, devéramos ter que $y_2(t) = \bar{y}(t-1) = 2y_1(t-1)$. Mas, $y_2(t) \neq 2y_1(t-1)$. Logo, é variante no tempo.

- É possível determinarmos $y_3(t)$ a partir de (a) e (b)?

Solução: Temos que $x_3(t) = x_1(t) - 0,5x_2(t)$. Como o sistema é linear, concluímos que $y_3(t) = y_1(t) - 0,5y_2(t)$ (e não é preciso invariância no tempo!).

- É possível determinarmos $y_4(t)$ a partir de (a) e (b)?

Solução: Temos que $x_4(t) = x_1(t-2)$. No entanto, como o sistema é variante no tempo, não podemos assegurar que $y_4(t) = y_1(t-2)$. Portanto, não é possível.

8. Sistemas BIBO (*Bounded Input/Bounded Output*) Estáveis e Instáveis

Relembre que um sinal $f(t)$ é limitado quando existe $M_f < \infty$ tal que

$$|f(t)| \leq M_f < \infty, \text{ para todo } t \in (-\infty, \infty)$$

ou, de maneira equivalente,

$$-M_f \leq f(t) \leq M_f, \text{ para todo } t \in (-\infty, \infty)$$

Propriedades:

- a) Se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, então $f(t)$ é *ilimitado*.
- b) Se $f(t) = 0$ para $t < t_0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$, então $f(t)$ é *limitado*.

Dizemos que um sistema é *BIBO estável* quando *toda* entrada limitada resultar numa saída limitada. Caso contrário, dizemos que o sistema é *BIBO instável*. Isto significa que *existe* (ao menos) uma entrada limitada $x(t)$ em que a saída $y(t)$ é ilimitada.

Ex de sistemas BIBO instáveis: reatores químicos, aviões de alto desempenho

Exemplos

(1) $y(t) = x^2(t)$

Suponha que

$$|x(t)| \leq M_x < \infty$$

Então

$$|y(t)| = |x^2(t)| = |x(t)||x(t)| = |x(t)|^2 \leq \underbrace{M_x^2}_{= M_y}, \text{ para todo } t$$

Logo, é BIBO estável.

(2) $y(t) = x(t) - x(t-1)$

A desigualdade triangular fornece que

$$|y(t)| = |x(t) - x(t-1)| \leq |x(t)| + |x(t-1)| \leq M_x + M_x = \underbrace{2M_x}_{= M_y}, \text{ para todo } t$$

∴ é BIBO estável.

(3) $y(t) = tx(t)$

É BIBO instável, pois para

$$x(t) = 1$$

temos

$$|x(t)| \leq 1 \quad (\text{é limitado})$$

e

$$y(t) = t \quad (\text{é ilimitado! Veja a Figura 1.69})$$

(4) $y(t) = e^{x(t)}$

Suponha que

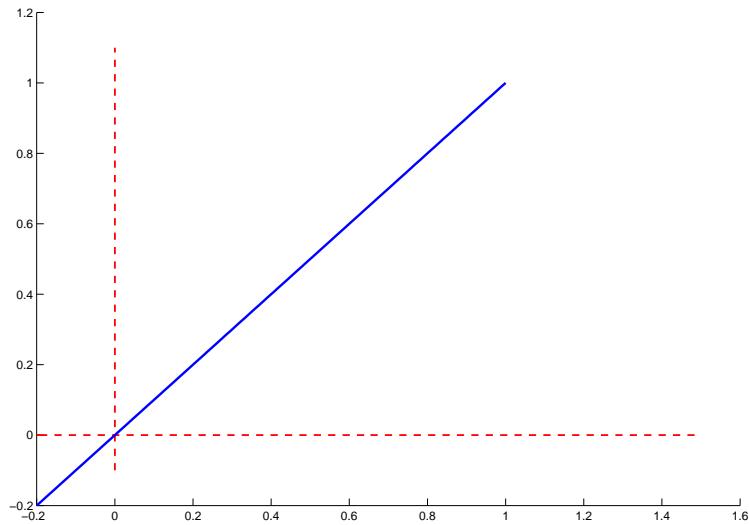
$$|x(t)| \leq M_x < \infty, \text{ para todo } t$$

Assim,

$$-M_x \leq x(t) \leq M_x$$

Como $f(t) = e^t$ é uma função crescente, obtemos que

$$-e^{M_x} \leq 0 \leq e^{-M_x} \leq y(t) \leq e^{M_x}$$

Figura 1.69: Saída ilimitada $y(t) = t$.

Logo,

$$|y(t)| \leq e^{M_x}, \text{ para todo } t \quad (\text{é limitado!})$$

Portanto, é BIBO estável.

$$(5) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Para

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin(e^{2t}), & t \geq 0 \\ f(t), & t < 0 \end{cases} \quad (\text{veja a Figura 1.70})$$

temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Logo, $x(t)$ é limitado. No entanto, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t} \sin(e^{2t}) + e^{-t} \cos(e^{2t}) 2e^{2t} \\ &= -\cancel{e^{-t} \sin(e^{2t})}^{\xrightarrow{0 (t \rightarrow \infty)}} + \underbrace{2e^t \cos(e^{2t})}_{\text{é ilimitado!}} \end{aligned}$$

Portanto, $y(t)$ é ilimitado e o sistema é BIBO instável.

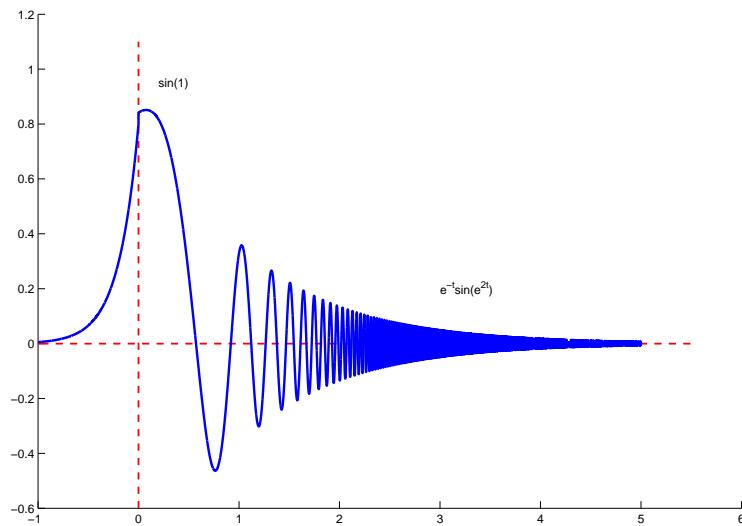


Figura 1.70: Exemplo de um sinal que converge para zero (limitado) com derivada ilimitada!

1.8 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

1. Descrição Entrada-Saída (Externa)

- Resistor (R): $v_R(t) = R i_R(t)$
- Capacitor (C): $i_C(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$
- Indutor (L): $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

Utilizamos então a Lei de Kirchhoff da Tensões (LKT) e a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) para obter a relação entrada-saída.

Para simplificar, definimos os operadores diferenciais: $D = d/dt$, $D^2 = d^2/dt^2$, e assim por diante.

Exemplos

- 1 Considere o circuito dado abaixo:

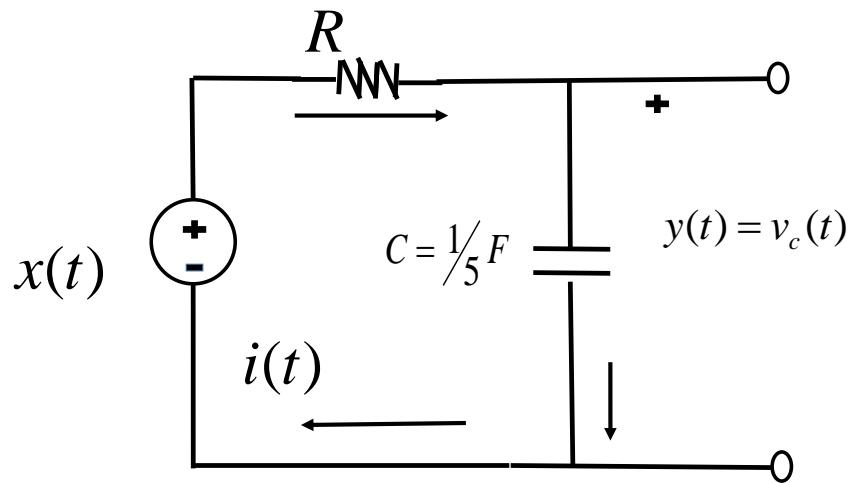


Figura 1.71: Circuito RC com $R = 5\Omega$ e $C = 1/5F$.

- LKT: $-x(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$
- $i(t) = i_R(t) = i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = CDv_C(t) = CDy(t)$

$$\therefore v_R(t) + v_C(t) = x(t)$$

$$Ri_R(t) + y(t) = x(t)$$

$$Ri_C(t) + y(t) = x(t)$$

$$\boxed{RC\text{D}y(t) + y(t) = x(t)} \Rightarrow \boxed{\text{D}y(t) + y(t) = x(t)} \quad (\text{RC} = 1)$$

ou

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)}$$

Sistema linear invariante no tempo com memória!

ou

$$\boxed{(D + 1)y(t) = x(t)}$$

- 2 Considere o circuito dado abaixo:

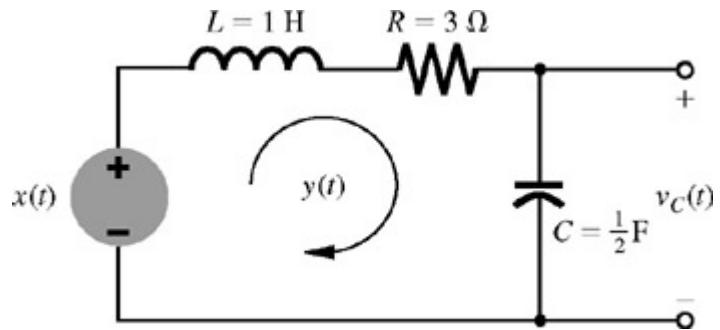


Figura 1.72: Circuito RLC, com $y(t) = v_c(t)$.

- LKT: $-x(t) + v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$
- $i(t) = i_L(t) = i_R(t) = i_C(t) = CDv_C(t) = CDy(t)$

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t)$$

$$LDi_L(t) + Ri_R(t) + y(t) = x(t)$$

$$LDi_C(t) + Ri_C(t) + y(t) = x(t)$$

$$LCD^2y(t) + RCDy(t) + y(t) = x(t)$$

$$\therefore 0,5D^2y(t) + 1,5Dy(t) + y(t) = x(t) \quad (\times 2)$$

$$\boxed{D^2y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = 2x(t)}$$

ou

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)}$$

Sistema linear invariante no tempo com memória!

ou

$$\boxed{(D^2 + 3D + 2)y(t) = 2x(t)}$$

Veja as Seções 1.8-2 e 1.8-3 do Lathi para modelagem de sistemas mecânicos e eletromecânicos (motor CC).

2. Descrição Interna: Descrição em Espaço de Estado

Descrição interna: é a descrição matemática que é capaz de determinar todos os possíveis sinais de um sistema.

Variáveis de estado: é um certo conjunto de sinais que permite determinar todos os demais sinais de um sistema.

Descrição em espaço de estado: é a descrição matemática que determina as relações entre as variáveis de estado e a entrada do sistema por diversas equações diferenciais de primeira ordem (uma para cada variável de estado). Por exemplo, se $q_1(t), \dots, q_n(t)$ são as variáveis de estado e $x(t)$ é a entrada, então o descrição em espaço de estado é:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n, x) \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= f_n(q_1, \dots, q_n, x)\end{aligned}$$

Para um dado sistema, escolhemos as *variáveis de estado* como os sinais que correspondem aos *elementos armazenadores de energia* no sistema. Por exemplo, em *circuitos elétricos*, as variáveis de estado são: as *tensões nos capacitores* (energia armazenada no campo elétrico) e as *correntes dos indutores* (energia armazenada no campo magnético).

Exemplos

- ① Considere o circuito dado abaixo:

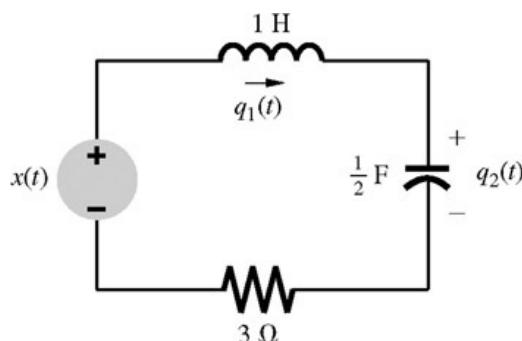


Figura 1.73: Circuito elétrico, com $q_1(t) = i_L(t)$ e $q_2(t) = v_c(t)$.

- $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são as variáveis de estado \Rightarrow a descrição em espaço de estados corresponde a *duas* equações diferenciais de primeira ordem da forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= f_1(q_1, q_2, x) \\ \dot{q}_2(t) &= f_2(q_1, q_2, x)\end{aligned}$$

- LKT: $-x(t) + v_L(t) + v_C(t) + v_R(t) = 0$

- $i(t) = i_R(t) = i_C(t) = i_L(t) = q_1(t)$

$$\Rightarrow q_1(t) = i_L(t) = C\dot{v}_C(t) = C\dot{q}_2(t) \Rightarrow \boxed{\dot{q}_2 = 2q_1}$$

$$\therefore v_L(t) + v_C(t) + v_R(t) = x(t)$$

$$v_L(t) + v_C(t) + R i_R(t) = x(t)$$

$$\dot{L}i_L(t) + v_C(t) + R i_L(t) = x(t)$$

$$\underset{1}{\downarrow} L\dot{q}_1(t) + \underset{2}{\downarrow} q_2(t) + \underset{3}{\downarrow} Rq_1(t) = x(t) \Rightarrow \boxed{\dot{q}_1 = -3q_1 - q_2 + x}$$

2) Considere o circuito dado abaixo:

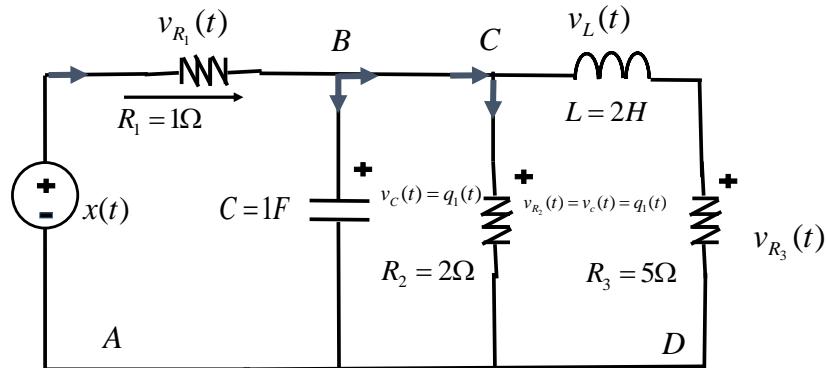


Figura 1.74: Circuito elétrico.

$$\left. \begin{array}{l} q_1(t) = v_C(t) \\ q_2(t) = i_L(t) \end{array} \right\} \text{variáveis de estado}$$

• LKT_A:

$$-x(t) + v_{R_1}(t) + v_C(t) = 0$$

$$\therefore v_{R_1}(t) + v_C(t) = x(t)$$

$$\underset{1}{\downarrow} R_1 i_{R_1}(t) + q_1(t) = x(t)$$

• LKC_{BC}:

$$\begin{aligned} i_{R_1}(t) &= \overbrace{i_C(t)}^{=C\dot{v}_C(t)} + i(t) \Rightarrow i_{R_1}(t) = \dot{q}_1(t) + q_2(t) + \frac{q_1(t)}{2} \\ i(t) &= i_L(t) + i_{R_2}(t) = q_2(t) + \frac{q_1(t)}{2} \\ &= \frac{v_{R_2}(t)}{R_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore i_{R_1}(t) + q_1(t) &= x(t) \\ \dot{q}_1(t) + q_2(t) + \frac{q_1(t)}{2} + q_1(t) &= x(t) \\ \boxed{\dot{q}_1 = -1,5q_1 - q_2 + x} \end{aligned}$$

• LKT_D:

$$\begin{aligned} -q_1(t) + v_L(t) + v_{R_3}(t) &= 0 \\ -q_1(t) + \dot{L}i_L(t) + R_3i_L(t) &= 0 \\ -q_1(t) + 2\dot{q}_2(t) + 5q_2(t) &= 0 \Rightarrow \boxed{\dot{q}_2 = 0,5q_1 - 2,5q_2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -1,5q_1 - q_2 + x \\ \dot{q}_2 &= 0,5q_1 - 2,5q_2 \end{aligned}$$

ou, em forma matricial,

$$\dot{q} = Aq + Bx,$$

onde

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1,5 & -1 \\ 0,5 & -2,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simulação no Matlab:

$$y = Cq + Dx, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = u(t) \quad \text{com } t_f = 10,$$

$$x_2(t) = \sin(t) \quad \text{com } t_f = 10 \text{ e } t_f = 100$$

2

ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS EM TEMPO CONTÍNUO

2.1 SISTEMAS LCIT

Considere um *sistema linear em tempo contínuo invariante no tempo (LCIT)* em que a *relação entrada-saída* é descrita por uma equação diferencial da forma

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} y = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + \cdots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x$$

onde $N \geq M$ e os parâmetros a_i, b_i são *constantes e reais*. Denominamos N de *ordem* do sistema. Utilizando o operador diferencial $D = d/dt$, podemos rescrever tal equação como

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_{N-M} D^M + \cdots + b_{N-1} D + b_N$$

O estado inicial do sistema em $t_0 = 0^-$ é o *vetor*

$$v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \ \dots \ y^{(1)}(0^-) \ y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$$

Isto significa que

$$\left. \begin{array}{l} v_0, \\ x(t), \ t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t), \ t \geq 0$$

Como o sistema é *linear*, sabemos que a *resposta total* $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

| | | | |
|---|-----|--|---|
| $\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)}$ | $=$ | $\underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t) \ (x=0)}$ | $+ \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t) \ (v_0=0)}$ |
| <i>Propriedade de Decomposição</i> | | | |

Obs Para efeitos de cálculo de $y_{esn}(t)$, $t \geq 0$, considera-se que $x(t) = 0$, $t < 0$ (*entrada causal!*).

Relembre que um sinal $f(t)$ é *suave* quando as derivadas de todas ordens existem. Em nosso curso, *assumiremos* que a entrada $x(t)$ é *suave por partes*.

Seja $S_x = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \dots\} \subset [0, \infty)$ o conjunto de instantes de tempo em que $x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$ apresentam saltos de descontinuidade. A saída correspondente do sistema é o (único) sinal suave por partes $y(t)$, $t \geq 0$, tal que:

1. $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(N)}(t)$ são contínuas por partes, e os possíveis saltos de descontinuidade estão em S_x ;
2. Para todo $t \geq 0$ com $t \notin S_x$, temos que $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(N)}(t)$ satisfazem

$$y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \dots + a_N y = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + \dots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + \dots + b_N x$$

3. A resposta estado nulo satisfaz $y_{esn}(t) = 0$, $t < 0$. A resposta entrada nula $y_0(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é suave e satisfaz

$$Q(D)y_0(t) = (D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y_0(t) = 0$$

$$\text{com } [y_0^{(N-1)}(0) \ \dots \ y_0^{(1)}(0) \ y_0(0)] = v_0;$$

4. A saída $y(t)$ satisfaz $[y^{(N-1)}(t) \ \dots \ y^{(1)}(t) \ y(t)]|_{t=0^-} = v_0$.

Obs $y_0(t)$ e $y_{esn}(t)$ são determinados de maneira independente.

Exemplo

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t) \quad (N = 2, M = 1)$$

com

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} y(0^-) = 0 \\ \dot{y}(0^-) = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = [-5 \ 0]$$

$$x(t) = 10e^{-3t}u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Veremos mais adiante que

$$y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t), \quad t \geq 0$$

onde

$$y_0(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

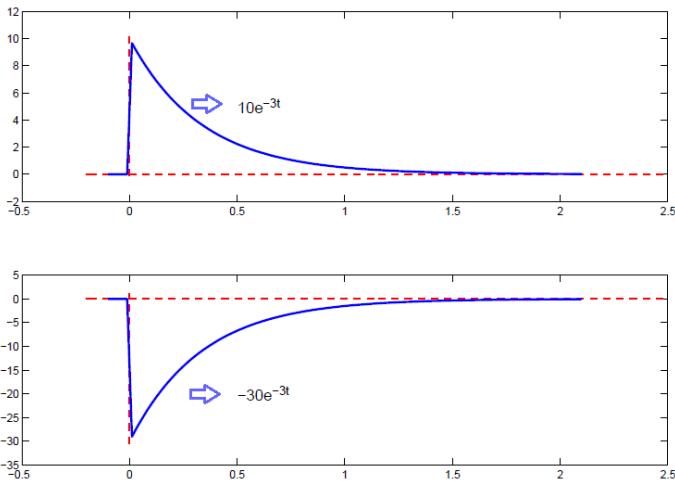
$$y_{esn}(t) = [-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}]u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Verificação de que $y(t)$ é a saída do sistema:

$$\textcircled{1} \quad x(t) = 10e^{-3t}u(t)$$

$$\dot{x}(t) = -30e^{-3t}, \quad t > 0$$

De acordo com a Figura 2.1, vemos que $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ apresentam saltos apenas em $\bar{t}_1 = 0$. Logo, $S_x = \{0\}$.

Figura 2.1: Gráficos de $x(t)$ (acima) e $\dot{x}(t)$ (abaixo).

$$(2) \quad y(t) = -10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t}, \quad t > 0$$

$$\dot{y}(t) = 10e^{-t} - 50e^{-2t} + 45e^{-3t}, \quad t > 0$$

$$\ddot{y}(t) = -10e^{-t} + 100e^{-2t} - 135e^{-3t}, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) &= -10e^{-t} + 100e^{-2t} - 135e^{-3t} \\ &\quad + 30e^{-t} - 150e^{-2t} + 135e^{-3t} \\ &\quad - 20e^{-t} + 50e^{-2t} - 30e^{-3t} \\ &= -30e^{-3t} = \dot{x}(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad y_0(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\dot{y}_0(t) = 5e^{-t} - 10e^{-2t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\ddot{y}_0(t) = -5e^{-t} + 20e^{-2t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\begin{cases} y_0(0) = 0 \\ \dot{y}_0(0) = -5 \end{cases}$$

$$\ddot{y}_0(t) + 3\dot{y}_0(t) + 2y_0(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\boxed{y_{\text{esn}}(t) = 0, \quad t < 0}$$

$y_0(t)$ é contínua OK com (*)

$$(4) \quad y(0^-) = y_0(0^-) + \underbrace{y_{\text{esn}}(0^-)}_{=0} = y_0(0) = 0$$

$$y(0^+) = -10 + 25 - 15 = 0$$

$\rightsquigarrow y(t)$ é contínua em $\bar{t}_1 = 0$!

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &\text{ é contínua} & \text{OK com } (*) \\ \dot{y}(0^-) &= \dot{y}_0(0^-) + \underbrace{\dot{y}_{\text{esn}}(0^-)}_{=0} = \dot{y}_0(0) = -5 \\ \dot{y}(0^+) &= 10 - 50 + 45 = 5 \\ \rightsquigarrow \dot{y}(t) &\text{ apresenta um salto em } \bar{t}_1 = 0! \end{aligned}$$

2.2 RESPOSTA ENTRADA NULA

Considere o sistema

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \dots y^{(1)}(0^-) y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$. Desse modo, a resposta entrada zero $y_0(t)$ é a solução suave da equação diferencial homogênea

$$Q(D)y_0(t) = (D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y_0(t) = 0$$

$$\text{com } [y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0.$$

- $Q(\lambda) = \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_{N-1} \lambda + a_N$: polinômio característico do sistema (grau N !!!)
- $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$: equação característica
- $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$: raízes características (ou valores característicos, autovalores, frequências naturais)
- Raízes características $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ distintas e reais: temos que

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

ou seja, $y_0(t)$ é uma combinação linear dos N modos característicos (ou modos naturais) $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}$. Os N coeficientes reais c_1, \dots, c_N são determinados a partir da condição $[y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0$.

- Raízes características $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ repetidas e reais: quando a raiz característica λ_1 tem multiplicidade $r \geq 1$, temos que

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r t^{r-1} e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} \dots + c_N e^{\lambda_N t},$$

ou seja, $y_0(t)$ é uma combinação linear dos N modos característicos $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_{r+1} t}, \dots, e^{\lambda_N t}$. No caso de existirem várias raízes características com multiplicidade maior que 1, a expressão para $y_0(t)$ é análoga.

- *Raízes características* $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ *complexas*: as raízes complexas do polinômio característico

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_{N-1}\lambda + a_N$$

sempre ocorrem em pares complexos conjugados, pois os coeficientes a_i são reais. Logo, se $Q(\lambda) = 0$ com λ complexo, então $Q(\lambda^*) = 0$.

Suponha que $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ é uma raiz característica *complexa* do sistema de multiplicidade $r = 1$. Neste caso,

$$e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1)$$

é o *modo característico* do sistema associado a λ_1 complexo.

Por exemplo, se $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^*, \lambda_3, \dots, \lambda_N$ são raízes características com $\lambda_3, \dots, \lambda_N$ *reais e distintas*, então

$$y_0(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1) + c_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

onde os N coeficientes *reais* $c_1, \beta_1, c_3, \dots, c_N$ são determinados a partir da condição $[y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0$.

De maneira semelhante, se $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ é *complexo* e tem multiplicidade $r \geq 1$, então

$$e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1), te^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1), \dots, t^{r-1} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1),$$

são os r *modos característicos* do sistema associados a λ_1 .

Método Alternativo (equivalente e mais fácil!): podemos sempre escolher $2r$ *modos característicos* associados a uma raiz característica complexa $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ de multiplicidade $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, te^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, te^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, \\ & \dots, t^{r-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, t^{r-1} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t \end{aligned}$$

Em resumo: $y_0(t)$ é sempre uma combinação linear (com coeficientes reais) dos modos característicos do sistema. Os coeficientes da tal combinação linear sempre existem, são *únicos*, e são obtidos a partir da condição $[y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0$.

Portanto, quando $x(t) = 0, t \geq 0$ (entrada nula), então $y(t) = y_0(t), t \geq 0$, fica *completamente determinada* pela condição inicial v_0 e pelos *modos característicos* do sistema!

Obs 1 Quando utilizamos o *método alternativo*, $y_0(t)$ será uma combinação linear de N modos característicos. Os N coeficientes reais de tal combinação linear sempre existem, são *únicos*, e são obtidos a

partir de um *sistema de equações lineares* determinado pela condição $[y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0$.

Obs 2 Quando $v_0 = 0$, então $y_0(t) = 0$, $t \in (-\infty, \infty)$, ou seja a resposta entrada nula é zero! Logo, se $v_0 = 0$, então $y(t) = y_{\text{esn}}(t)$, $t \geq 0$ (como teria que ser!).

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad (D + 5)y(t) = x(t), \quad y(0^-) = 5 (= v_0)$$

$$y_0(t) = ? \quad ((D + 5)y_0(t) = 0)$$

$$Q(D) = D + 5$$

$$Q(\lambda) = \lambda + 5$$

$$Q(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \Rightarrow \text{modo característico: } e^{-5t}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0(t) = ce^{\lambda t} = ce^{-5t} \\ \dot{y}_0(t) = y(0^-) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 = ce^{-5 \cdot 0} = c \\ c = 5 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{y_0(t) = 5e^{-5t}} \quad (\text{veja a Figura 2.2})$$

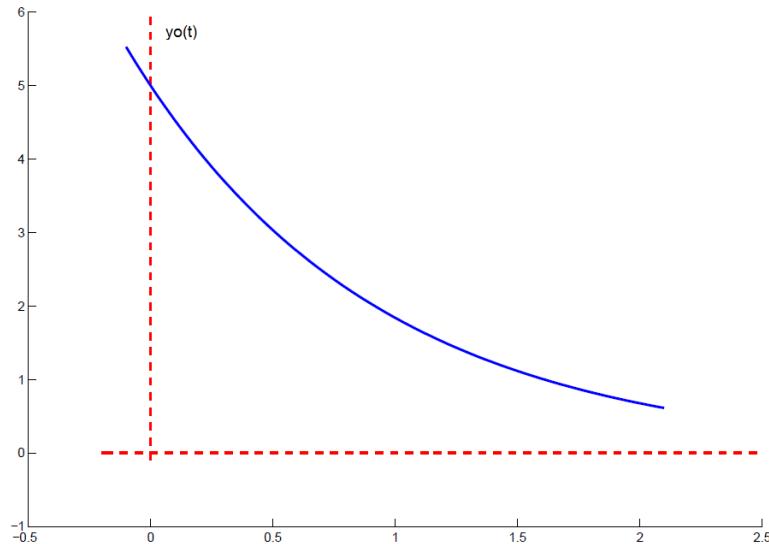


Figura 2.2: Gráfico de $y_0(t) = 5e^{-5t}$.

$$\textcircled{2} \quad (D^2 + 2D)y(t) = x(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0^-) = 1 \\ \dot{y}(0^-) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = [4 \ 1]$$

$$Q(D) = D^2 + 2D$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{modos} \\ e^{0t}, e^{-2t} \end{array}$$

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 + c_2 e^{-2t}$$

$$c_1 = ?, c_2 = ?$$

$$y_0(t) = c_1 + c_2 e^{-2t}$$

$$\dot{y}_0(t) = -2c_2 e^{-2t}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0(0) = y(0^-) = 1 = c_1 + c_2 e^{-0} = c_1 + c_2 \\ \dot{y}_0(0) = \dot{y}(0^-) = 4 = -2c_2 e^{-0} = -2c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

$$\therefore y_0(t) = 3 - 2e^{-2t} \quad (\text{veja a Figura 2.3})$$

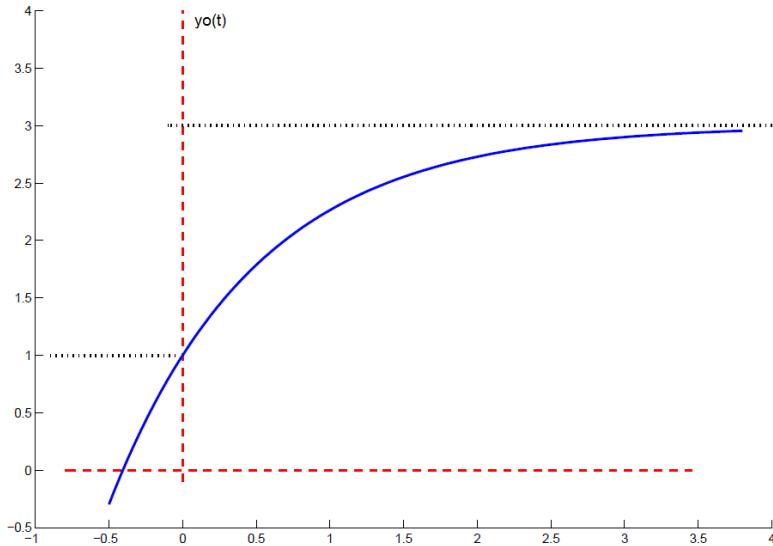


Figura 2.3: Gráfico de $y_0(t) = 3 - 2e^{-2t}$.

$$(3) (D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0^-) = 0 \\ \dot{y}(0^-) = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = [-5 \ 0]$$

$$Q(D) = D^2 + 3D + 2$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{modos} \\ e^{-t}, e^{-2t} \end{array}$$

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$$\dot{y}_0(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0(0) = y(0^-) = 0 = c_1 + c_2 \\ \dot{y}_0(0) = \dot{y}(0^-) = -5 = -c_1 - 2c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -5 \\ c_2 = 5 \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{y_0(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$$

$$(4) \quad (D^2 + 6D + 9)y(t) = (3D + 5)x(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0^-) = 3 \\ \dot{y}(0^-) = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = [-7 \ 3]$$

$$Q(D) = D^2 + 6D + 9$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -3} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{modos} \\ \text{caracter\'isticos:} \\ e^{-3t}, te^{-3t} \end{array}$$

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t} = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$$

$$\dot{y}_0(t) = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-3t} - 3c_2 t e^{-3t}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0(0) = y(0^-) = 3 = c_1 \\ \dot{y}_0(0) = \dot{y}(0^-) = -7 = -3c_1 + c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \end{array}}$$

$$\therefore \boxed{y_0(t) = (3 + 2t)e^{-3t}}$$

Note que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$ pois, por L'Hopital, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2te^{-3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^{3t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{3e^{3t}} = 0$$

$$(5) \quad (D^2 + 4D + 40)y(t) = (D + 2)x(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0^-) = 2 \\ \dot{y}(0^-) = 16,78 \end{array} \right\} \Rightarrow v_0 = [16,78 \ 2]$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm j6 \text{ (complexo!)}$$

Modos caracter\'isticos: $e^{-2t} \cos 6t, e^{-2t} \sin 6t$

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} \cos 6t + c_2 e^{-2t} \sin 6t$$

$$\dot{y}_0(t) = -2c_1 e^{-2t} \cos 6t - 6c_1 e^{-2t} \sin 6t - 2c_2 e^{-2t} \sin 6t + 6c_2 e^{-2t} \cos 6t$$

$$y_0(0) = 2 = c_1$$

$$\dot{y}_0(0) = 16,78 = -2c_1 + 6c_2 \Rightarrow c_2 = 3,463$$

$$y_0(t) = e^{-2t} (2 \cos 6t + 3,463 \sin 6t)$$

$$z = a - jb = 2 - j3,463$$

$$C = |z| = 4, \theta = \text{valor principal de } z$$

$$\boxed{y_0(t) = 4e^{-2t} \cos(6t - \pi/3)}$$

$$(6) \quad (D^2 + D(a+2) + 2a)y(t) = x(t)$$

O que acontece qualitativamente com $y_0(t)$ para diferentes valores do par\'ametro a ?

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(a+2) + 2a = (\lambda+2)(\lambda+a) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -a \end{array}}$$

- $a > 0$ e $a \neq 2 \Rightarrow$ duas ra\'izes reais e distintas

$$y_0(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-2t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$$

- $a = 2 \Rightarrow$ duas raízes reais iguais

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + t c_2 e^{-2t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0 \quad \text{pois } a < 0$$

- $a < 0 \Rightarrow$ duas raízes reais e distintas

$$y_0(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-2t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = \infty \quad \text{pois } a > 0$$

$$(7) [(D^2 + 4D + 13)^2(D^2 - 2D + 2)(D + 8)^3(D + 5)^4]y(t) = x(t)$$

$$y_0(t) = ?$$

$$Q(\lambda) = (\lambda^2 + 4\lambda + 13)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda + 8)^3(\lambda + 5)^4$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -2 \pm j3 \quad (\text{complexo de multiplicidade 2})$$

$$\lambda_{5,6} = -1 \pm j \quad (\text{complexo de multiplicidade 1})$$

$$\lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = -8 \quad (\text{real de multiplicidade 3})$$

$$\lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = -5 \quad (\text{real de multiplicidade 4})$$

Modos característicos:

$$e^{-2t} \cos(3t), e^{-2t} \sin(3t), te^{-2t} \cos(3t), te^{-2t} \sin(3t)$$

$$e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t)$$

$$e^{-8t}, te^{-8t}, t^2 e^{-8t}$$

$$e^{-5t}, te^{-5t}, t^2 e^{-5t}, t^3 e^{-5t}$$

$$\begin{aligned} \therefore y_0(t) = & c_1 e^{-2t} \cos(3t) + c_2 e^{-2t} \sin(3t) + c_3 te^{-2t} \cos(3t) + c_4 te^{-2t} \sin(3t) \\ & + c_5 e^{-t} \cos(t) + c_6 e^{-t} \sin(t) \\ & + c_7 e^{-8t} + c_8 te^{-8t} + c_9 t^2 e^{-8t} \\ & + c_{10} e^{-5t} + c_{11} te^{-5t} + c_{12} t^2 e^{-5t} + c_{13} t^3 e^{-5t} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$$

2.3 RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO DE UM SISTEMA LCIT

Considere um sistema descrito por

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

onde ($N = M$)

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Suponha que $x(t) = \delta(t)$, ou seja, aplicamos um impulso unitário em $t = 0$ no sistema. Nossa objetivo é determinar $h(t) = y_{esn}(t), t \in (-\infty, \infty)$, ou seja, encontrar a *resposta estado nulo* do sistema quando $x(t) = \delta(t)$. Isto pode ser feito da seguinte maneira:

$$h(t) = b_0 \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

onde $y_n(t), t \in (-\infty, \infty)$, é a solução de

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

com as seguintes condições iniciais

$$y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \dots = y^{(N-2)}(0) = 0, \quad y^{(N-1)}(0) = 1$$

Em outras palavras, $y_n(t)$ é uma combinação linear dos modos característicos do sistema, cujos coeficientes são obtidos a partir das condições iniciais

$$y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \dots = y^{(N-2)}(0) = 0, \quad y^{(N-1)}(0) = 1$$

Denominamos $h(t)$ de *resposta ao impulso* ou *resposta impulsiva* do sistema.

Obs 1 Quando $N > M$, temos que $b_0 = 0$. Logo,

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

e a resposta impulsiva não apresenta nenhum impulso em $t = 0$.

Obs 2 Note que a resposta impulsiva $h(t)$ é *causal* para $N = M$ ou $N > M$. Além disso, $h(t)$ é determinada pelos *modos característicos* do sistema!

Exemplos

(1) $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t) \quad (N = 2, M = 1)$

$h(t) = ?$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{modos} \\ e^{-t}, e^{-2t} \end{array}$$

Logo,

$$y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$$\dot{y}_n(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_n(0) = 0 = c_1 + c_2 \\ \dot{y}_n(0) = 1 = -c_1 - 2c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array} \right.$$

Assim,

$$y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Temos que

$$P(D)y_n(t) = Dy_n(t) = \dot{y}_n(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Portanto,

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) $(D + 2)y(t) = (3D + 5)x(t) \quad (N = M = 1, b_0 = 3)$

$$Q(\lambda) = \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$y_n(t) = ce^{-2t}$$

$$\dot{y}_n(t) = -2ce^{-2t}$$

$$y_n(0) = 1 = c \Rightarrow c = 1$$

Logo,

$$y_n(t) = e^{-2t}$$

$$\begin{aligned} P(D)y_n(t) &= (3D + 5)y_n(t) = 3\dot{y}_n(t) + 5y_n(t) \\ &= -6e^{-2t} + 5e^{-2t} = -e^{-2t} \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(t) = 3\delta(t) - e^{-2t}u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$(3) \quad (D^2 + 2D + 1)y(t) = Dx(t) \quad (N = 2, M = 1)$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad (\text{repetidas})$$

$$y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

$$\dot{y}_n(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t}$$

$$y_n(0) = 0 = c_1$$

$$\dot{y}_n(0) = 1 = -c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

Logo,

$$y_n(t) = t e^{-t}$$

$$P(D)y_n(t) = D y_n(t) = \dot{y}_n(t) = e^{-t} - t e^{-t} = e^{-t}(1 - t)$$

Portanto,

$$h(t) = e^{-t}(1 - t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

2.4 RESPOSTA DO SISTEMA À ENTRADA EXTERNA: RESPOSTA ESTADO NULO

Considere um sistema LCIT com memória. Relembre que a *resposta total* $y(t)$, $t \geq t_0$, é dada por

$$\underbrace{Resposta\ Total}_{y(t)} = \underbrace{Resposta\ Entrada\ Nula}_{y_0(t)} + \underbrace{Resposta\ Estado\ Nulo}_{y_{esn}(t)}$$

Propriedade de Decomposição

Assuma que $t_0 = -\infty$. Relembre que $v(-\infty) = 0$ por hipótese. Assim, $y(t) = y_{esn}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ para uma dada entrada $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Como o impulso unitário $\delta(t)$ é uma função par, obtemos pela *propriedade de amostragem* que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \text{entrada} &\longrightarrow \text{saída} \\
 \delta(t) &\longrightarrow h(t) \quad (\text{resposta impulsiva}) \\
 \delta(t - n\Delta\tau) &\longrightarrow h(t - n\Delta\tau) \quad (\text{invariância}) \\
 x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) &\longrightarrow x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau) \quad (\text{homogeneidade})
 \end{aligned}$$

Portanto, usando a *propriedade de aditividade* (e assumindo continuidade na relação entrada-saída do sistema), concluímos que

$$\begin{aligned}
 x(t) \longrightarrow y(t) = y_{\text{esn}}(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \\
 &\triangleq x(t) * h(t) \quad (\text{integral de convolução})
 \end{aligned}$$

pois

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)$$

Ao repetirmos o mesmo raciocínio acima considerando que $t_0 = 0$ e $v(0) = 0$, obtemos que

$$x(t), t \geq 0 \longrightarrow y_{\text{esn}}(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau, t \geq 0$$

Portanto, para *efeitos de cálculo*, podemos assumir (e é o que *sempre faremos!*) que $x(t) = 0$, $t < 0$ (*entrada causal!*), e assim

$$\begin{aligned}
 x(t), t \geq 0 \longrightarrow y_{\text{esn}}(t) &= \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \\
 &= x(t) * h(t), t \geq 0
 \end{aligned}$$

2.4.1 A Integral de Convolução

Sejam $x_1(t), x_2(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, sinais reais. A *integral de convolução* de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é o sinal real $c(t)$ definido por

$$\begin{aligned}
 c(t) = x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau, t \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

(desde que a integral imprópria seja *finita* para qualquer $t \in \mathbb{R}$).

Obs 1 A variável de integração é τ , e não t !

Obs 2 Para calcularmos $c(\bar{t})$ no instante \bar{t} , primeiro fazemos uma reversão temporal de $x_2(\tau)$ seguida de um deslocamento por \bar{t} , depois multiplicamos por $x_1(\tau)$, e então integramos de $-\infty$ a ∞ .

Obs 3 O valor de $c(\bar{t})$ no instante \bar{t} depende do comportamento dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em *todo* o eixo temporal $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$!

Propriedades Sejam $x_1(t), x_2(t), x_3(t), t \in (-\infty, \infty)$, sinais reais e k um número real. Então:

1. $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$ (comutatividade)
2. $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$ (associatividade)
3. $x_1(t) * [x_2(t) \pm x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] \pm [x_1(t) * x_3(t)]$ (distributividade)
4. Se $x_1(t) * x_2(t) = c(t)$, então

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t - T) &= x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T) \\ x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) &= c(t - T_1 - T_2) = c(t - (T_1 + T_2)) \end{aligned}$$

(propriedade de deslocamento)

5. $x_1(t) * \delta(t) = x_1(t)$ ($\delta(t)$ é o elemento neutro da convolução)
6. $[kx_1(t)] * x_2(t) = x_1(t) * [kx_2(t)] = k[x_1(t) * x_2(t)]$
7. Se $x_1(t)$ é diferenciável, então $[Dx_1(t)] * x_2(t) = D[x_1(t) * x_2(t)]$
8. Se $x_1(t)$ tem duração finita T_1 , e $x_2(t)$ tem duração finita T_2 , então $c(t) = x_1(t) * x_2(t)$ tem duração finita $T_1 + T_2$

Considere um sistema descrito por

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \dots y^{(1)}(0^-) \ y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$ em $t_0 = 0^-$, onde ($N = M$)

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Relembre que este é um sistema LCIT com *memória* e *causal*, e que a resposta total $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t) (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t) (v_0=0)}$$

Propriedade de Decomposição

Além disso, relembrar que a *resposta impulsiva* $h(t)$ é *causal* e determinada a partir dos *modos característicos* do sistema.

Relembre, ainda, que para encontrarmos $y_{\text{esn}}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, assumimos que $x(t) = 0$, para $t < 0$ (*entrada causal*). Ao seguirmos o mesmo raciocínio utilizado no início da Seção 2.4, encontramos que

$$\begin{aligned} y_{\text{esn}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)h(t-\tau) d\tau + \int_{0^-}^{0^+} x(\tau)h(t-\tau) d\tau + \int_{0^+}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

No entanto, como $x(t)$ e $h(t)$ são *causais*, temos que $x(\tau) = 0$, para $\tau < 0$, e $h(t-\tau) = 0$, para $t < \tau$. Portanto,

$$\begin{cases} t < 0 \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0 \text{ para } \tau \in \mathbb{R} \Rightarrow y_{\text{esn}}(t) = 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0 \text{ para } \tau > t \Rightarrow y_{\text{esn}}(t) = \int_{0^-}^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau \end{cases}$$

Logo, a *resposta estado nulo* $y_{\text{esn}}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é *causal* e dada por

$$y_{\text{esn}}(t) = \begin{cases} \int_{0^-}^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_{0^-}^t h(\tau)x(t-\tau) d\tau, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$y_{\text{esn}}(t) = \left[\int_{0^-}^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau \right] u(t) = \left[\int_{0^-}^t h(\tau)x(t-\tau) d\tau \right] u(t), t \in \mathbb{R}$$

Obs 1 O limite inferior de integração é escolhido como 0^- para cobrirmos o caso em que a entrada $x(t)$ e/ou a resposta impulsiva $h(t)$ possuem um impulso $\delta(t)$ em $t = 0$. Em tal situação, não temos como calcular $y_{\text{esn}}(0)$, mas somente $y_{\text{esn}}(0^+)$. Quando nem $x(t)$ nem $h(t)$ possuem impulsos em $t = 0$, podemos trocar 0^- por 0 no limite inferior de integração.

Obs 2 Relembre que a resposta impulsiva $h(t)$ é calculada a partir dos modos característicos do sistema. Desta maneira, concluímos que a *resposta estado nulo* $y_{\text{esn}}(t)$ fica *completamente determinada* pela *entrada* $x(t)$ e pelos *modos característicos*!

Obs 3 A resposta estado nulo possui o comportamento esperado:

- Se $x(t) = \delta(t)$, então $y_{\text{esn}}(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$, pois $\delta(t)$ é o elemento neutro da convolução.
- Se $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, então $y_{\text{esn}}(t) = x(t) * h(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $y(t) = y_0(t)$, $t \geq 0$.

Obs 4 Há duas maneira de interpretar $h(t)$:

- (*Intuitiva*) Se $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ e $h_\epsilon(t)$ é a resposta estado nulo para a entrada $\delta_\epsilon(t)$, então $h(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(t)$.
- (*Técnica*) $\delta(t)$ é o sinal tal que $x(t) * \delta(t) = x(t)$, e $h(t) = b_0 \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$ é o sinal tal que $y_{esn}(t) = x(t) * h(t) = b_0 x(t) + x(t) * \{[P(D)y_n(t)]u(t)\}$ é a resposta estado nulo para a entrada $x(t)$.

Tabela de Convolução: veja a Tabela 2.1, p. 166, do Lathi. Por exemplo:

$$e^{\lambda t} u(t) * u(t) = \frac{1 - e^{\lambda t}}{-\lambda} u(t) \quad (\text{Linha 1})$$

$$u(t) * u(t) = t u(t) \quad (\text{Linha 2})$$

$$e^{\lambda_1 t} u(t) * e^{\lambda_2 t} u(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (\text{Linha 4})$$

$$e^{\lambda t} u(t) * e^{\lambda t} u(t) = t e^{\lambda t} u(t) \quad (\text{Linha 5})$$

$$e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) u(t) * e^{\lambda t} u(t) = \frac{\cos(\theta - \phi) e^{\lambda t} - e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} u(t),$$

$$\text{onde } z = (\alpha + \lambda) - j\beta = |z| e^{j\phi} \quad (\text{Linha 12})$$

Relembre que $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$ (*comutatividade*).

Exemplos

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad h(t) = e^{-2t} u(t) \\ x(t) = e^{-t} u(t) \end{array} \right\} \text{sem impulsos em } t = 0$$

$$y_{esn}(t) = ?$$

Solução:

$$\begin{cases} x(\tau) = e^{-\tau} u(\tau) \Rightarrow x(\tau) = e^{-\tau}, \tau \geq 0 \\ h(t-\tau) = e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau) = e^{-2(t-\tau)}, t \geq \tau \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{esn}(t) = \left[\int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] u(t)$$

$$\int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau, \quad t \geq 0$$

$$= \int_0^t e^{-\tau} e^{-2t} e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^\tau d\tau$$

$$= e^{-2t} e^\tau \Big|_0^t = e^{-2t} (e^t - 1)$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\therefore \boxed{y_{esn}(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t), \quad t \in \mathbb{R}}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} h(t) = 6e^{-t}u(t) \\ x(t) = 2u(t) \end{array} \right\} \text{sem impulsos em } t=0$$

$$\begin{cases} x(\tau) = 2u(\tau) \Rightarrow x(\tau) = 2, \tau \geq 0 \\ h(t-\tau) = 6e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau) = 6e^{-(t-\tau)}, t \geq \tau \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 2 \cdot 6e^{-(t-\tau)} d\tau, \quad t \geq 0 \\ & = 12e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau = 12e^{-t} e^\tau \Big|_0^t \\ & = 12e^{-t}(e^t - 1) = 12(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

$$\therefore [y_{\text{esn}}(t) = 12(1 - e^{-t})u(t), \quad t \in \mathbb{R}]$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{array}{l} h(t) = 6e^{-t}u(t) \\ x(t) = 3e^{-3t}u(t) \end{array} \right\} \begin{cases} x(\tau) = 3e^{-3\tau}u(\tau) \Rightarrow x(\tau) = 3e^{-3\tau}, \tau \geq 0 \\ h(t-\tau) = 6e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau) = 6e^{-(t-\tau)}, t \geq \tau \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 3e^{-3\tau} 6e^{-(t-\tau)} d\tau = 18e^{-t} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau, \quad t \geq 0 \\ & \quad \underbrace{\begin{array}{l} v = -2\tau \\ dv = -2d\tau \end{array}}_{\text{substituição}} \\ & = \frac{18}{-2} e^{-t} \int_0^{-2t} e^v dv = -9e^{-t} e^v \Big|_0^{-2t} \\ & = -9e^{-t}(e^{-2t} - 1) = 9(e^{-t} - e^{-3t}) \end{aligned}$$

$$\therefore [y_{\text{esn}}(t) = 9(e^{-t} - e^{-3t})u(t), \quad t \in \mathbb{R}]$$

$$\textcircled{4} \quad \left. \begin{array}{l} h(t) = 6e^{-t}u(t) \\ x(t) = e^{-t}u(t) \end{array} \right\} \begin{cases} x(\tau) = e^{-\tau}u(\tau) \Rightarrow x(\tau) = e^{-\tau}, \tau \geq 0 \\ h(t-\tau) = 6e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau) = 6e^{-(t-\tau)}, t \geq \tau \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} 6e^{-(t-\tau)} d\tau, \quad t \geq 0 \\ & = 6e^{-t} \int_0^t d\tau = 6e^{-t}t \end{aligned}$$

$$\therefore [y_{\text{esn}}(t) = 6te^{-t}u(t), \quad t \in \mathbb{R}]$$

$$\textcircled{5} \quad \left. \begin{array}{l} h(t) = b_0\delta(t) + f(t)u(t) \quad (f(t) \text{ arbitrária!}) \\ x(t) = u(t) \end{array} \right\}$$

$$x(t-\tau) = u(t-\tau) \Rightarrow x(t-\tau) = 1, \quad t \geq \tau \geq 0$$

$$\int_{0^-}^t h(\tau) \underbrace{x(t-\tau)}_{=1} d\tau = \int_{0^-}^t h(\tau) d\tau$$

Portanto, a resposta estado nulo $y_{\text{esn}}(t)$ quando a entrada é um degrau unitário é

$$g(t) = y_{\text{esn}}(t) = \left[\int_{0^-}^t h(\tau) d\tau \right] u(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

Consequentemente,

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{derivada generalizada!})$$

$$(6) \quad (D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

$$x(t) = 10e^{-3t}u(t), \quad y_{\text{esn}}(t) = ?$$

Determinamos anteriormente que $h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$

Logo,

$$\begin{aligned} y_{\text{esn}}(t) &= x(t) * h(t) \\ &= 10e^{-3t}u(t) * [(2e^{-2t} - e^{-t})u(t)] \\ &= 10e^{-3t}u(t) * [2e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t)] \\ &= [10e^{-3t}u(t) * 2e^{-2t}u(t)] - [10e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t)] \\ &\downarrow \end{aligned}$$

propriedade distributiva

$$\begin{aligned} &= 20[e^{-3t}u(t) * e^{-2t}u(t)] - 10[e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t)] \\ &= 20 \frac{e^{-3t} - e^{-2t}}{-3 - (-2)} u(t) - 10 \frac{e^{-3t} - e^{-t}}{-3 - (-1)} u(t) \\ &\downarrow \end{aligned}$$

Linha 4 Tabela

$$y_{\text{esn}}(t) = -20[e^{-3t} - e^{-2t}]u(t) + 5[e^{-3t} - e^{-t}]u(t)$$

$$y_{\text{esn}}(t) = [-15e^{-3t} + 20e^{-2t} - 5e^{-t}]u(t)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{esn}}(t) = 0$$

$$(7) \quad h(t) = 6e^{-t}u(t)$$

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

$$y_{\text{esn}}(t) = ?$$

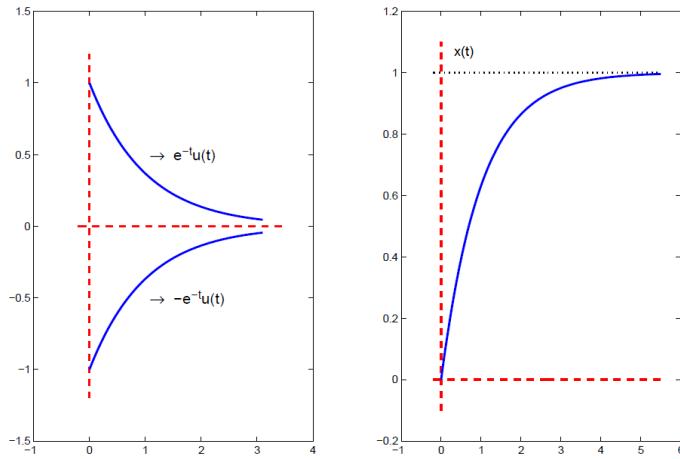
$$\begin{aligned} y_{\text{esn}}(t) &= x(t) * h(t) \\ &= e^{-t}u(t) * [6e^{-t}u(t)] \\ &= 6[e^{-t}u(t) * e^{-t}u(t)] \\ &= 6te^{-t}u(t) \\ &\downarrow \end{aligned}$$

Linha 5

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{esn}}(t) = 0 \text{ (por L'Hopital!)}$$

$$(8) \quad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$x(t) = (1 - e^{-t})u(t) \text{ (veja a Figura 2.4)}$$

Figura 2.4: Gráfico de $x(t) = (1 - e^{-t})u(t)$.

$$\begin{aligned}
 y_{\text{esn}}(t) &= x(t) * h(t) \\
 &= (1 - e^{-t})u(t) * e^{-2t}u(t) \\
 &= [u(t) - e^{-t}u(t)] * e^{-2t}u(t) \\
 &= \underbrace{[u(t) * e^{-2t}u(t)]}_{\substack{\downarrow \\ \text{distributiva}}} - \underbrace{[e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t)]}_{\substack{\text{Linha 4}}} \\
 &= \frac{1 - e^{-2t}}{-(-2)}u(t) - \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{-1 - (-2)}u(t) \\
 &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) - [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \\
 &= \left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right]u(t) \\
 \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{esn}}(t) &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(9) $h(t) = e^{-2t}u(t)$

$x(t) = \sin 3t u(t)$

$y_{\text{esn}}(t) = ?$

$$\begin{aligned}
 y_{\text{esn}}(t) &= x(t) * h(t) \\
 &= \sin 3t u(t) * e^{-2t}u(t) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{Linha 12}
 \end{aligned}$$

$\alpha = 0, \beta = 3, \theta = 90^\circ, \lambda = -2$

$z = (\alpha + \lambda) - j\beta = -2 - j3 = \sqrt{13}e^{j56.31^\circ} = |z|e^{j\phi}$

$$\begin{aligned}
 y_{\text{esn}}(t) &= \frac{\cos(90^\circ - 56,31^\circ)e^{-2t} - \cos(3t + 90^\circ - 56,31^\circ)}{\sqrt{13}} u(t) \\
 &= \frac{(3/\sqrt{13})e^{-2t} - \cos(3t + 33,68^\circ)}{\sqrt{13}} u(t) \\
 &= \frac{1}{13} [3e^{-2t} - \sqrt{13} \cos(3t + 33,68^\circ)] u(t)
 \end{aligned}$$

Veja a Figura 2.5.

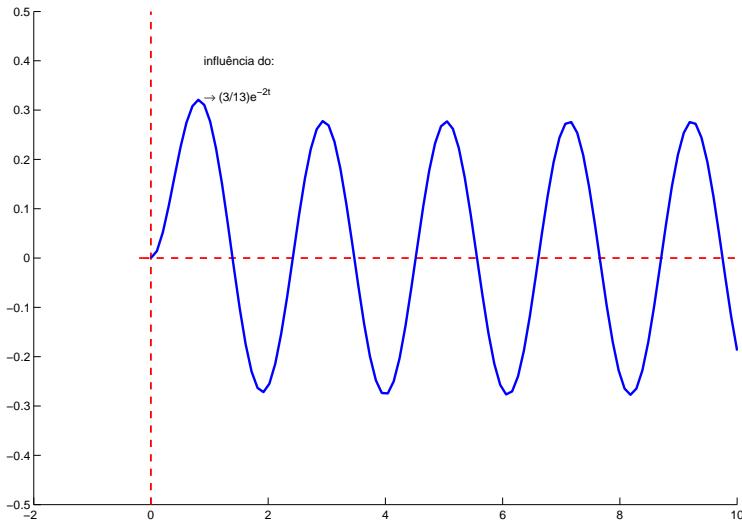


Figura 2.5: Gráfico de $y_{\text{esn}}(t)$.

Convolução e Sistemas LCIT Causais

Pelo o que mostramos anteriormente, podemos concluir que:

- Se $x_1(t) = f_1(t)u(t)$ é um *sinal causal*, então

$$c(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau) d\tau = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\tau)x_2(t-\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Se $x_1(t) = f_1(t)u(t)$ e $x_2(t) = f_2(t)u(t)$ são *causais*, então

$$c(t) = x_1(t) * x_2(t) = \left[\int_{0^-}^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau \right] u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso, temos que:

Um sistema LCIT é causal \Leftrightarrow a resposta impulsiva $h(t)$ é causal

Considere um sistema LCIT causal com $x(t), t \in \mathbb{R}$, causal (logo, $y_{\text{esn}}(t), t \in \mathbb{R}$, é causal). Obtemos pela propriedade de deslocamento da convolução que, para $T > 0$:

$$\begin{aligned} \text{se } v(0) = 0, x(t), t \geq 0 \} &\longrightarrow y_{\text{esn}}(t), t \geq 0 \\ \text{então } v(0) = 0, \bar{x}(t) = x(t - T), t \geq 0 \} &\longrightarrow \bar{y}_{\text{esn}}(t) = y_{\text{esn}}(t - T), t \geq 0 \end{aligned}$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LCIT a Entradas Complexas

Considere um sistema LCIT. Em um sistema físico real, as entradas e saídas só podem ser sinais que assumem valores reais, e não valores complexos. Na Seção 1.4, vimos que diversos sinais reais de interesse prático podem ser expressos como uma combinação linear de exponenciais complexas e^{st} . Desse modo, pela linearidade, se soubermos encontrar a resposta do *modelo do sistema* para a exponencial complexa e^{st} , então saberemos a resposta do *sistema real* para tais sinais reais.

Considere um sinal complexo $x(t) = x_r(t) + j x_i(t)$, onde $x_r(t)$ e $x_i(t)$ são sinais reais. Considere que

$$\begin{aligned} x_r(t) &\longrightarrow y_{\text{esn}_r}(t) \\ x_i(t) &\longrightarrow y_{\text{esn}_i}(t) \end{aligned}$$

Definimos então

$$x(t) = x_r(t) + j x_i(t) \longrightarrow y_{\text{esn}}(t) = y_{\text{esn}_r}(t) + j y_{\text{esn}_i}(t)$$

Agora, seja $h(t)$ a resposta impulsiva (real) do sistema. Definimos

$$\begin{aligned} y_{\text{esn}}(t) = x(t) * h(t) &= (x_r(t) + j x_i(t)) * h(t) \triangleq x_r(t) * h(t) + j x_i(t) * h(t) \\ &= y_{\text{esn}_r}(t) + j y_{\text{esn}_i}(t) \end{aligned}$$

Assim,

$$x(t) = x_r(t) + j x_i(t) \longrightarrow y_{\text{esn}}(t) = y_{\text{esn}_r}(t) + j y_{\text{esn}_i}(t)$$

se e somente se

$$\begin{aligned} x_r(t) &\longrightarrow y_{\text{esn}_r}(t) \\ x_i(t) &\longrightarrow y_{\text{esn}_i}(t) \end{aligned}$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LCIT a Múltiplas Entradas

Suponha que

$$x(t) = \sum_{k=1}^m x_k(t) \quad (\text{m entradas})$$

Concluímos então pela linearidade do sistema que

$$y_{\text{esn}}(t) = \sum_{k=1}^m y_{\text{esn}_k}(t),$$

onde

$$x_k(t) \longrightarrow y_{\text{esn}_k}(t)$$

2.4.2 Entendimento Gráfico da Operação de Convolução

Desejamos calcular a integral de convolução dos sinais $x(t)$ e $g(t)$:

$$c(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau = g(t) * x(t)$$

Note que a variável de integração é τ , e que $g(t-\tau)$ e $x(t-\tau)$ correspondem a uma *reversão* seguida de um *deslocamento* por t . Como *regra geral* para facilitar o cálculo de $c(t)$, escolhemos o sinal a ser revertido como o *mais simples* entre x e g . Suponha que vamos reverter g . Seguimos então o método abaixo.

*Procedimento Gráfico para Calcular $c(t) = x(t) * g(t)$:*

1. Mantenha o sinal $x(\tau)$ fixo.
2. Faça a reversão de $g(\tau)$, obtendo $g(-\tau)$.
3. Faça um deslocamento de $g(-\tau)$ por t , obtendo $g(t-\tau)$. Logo, $t > 0$ é um *atraso* de $g(-\tau)$ (deslocamento de $g(-\tau)$ pra *direita*), e $t < 0$ é um *avanço* (deslocamento pra *esquerda*).
4. A área abaixo do produto $x(\tau)g(t-\tau)$ é o valor da convolução $c(t)$ no instante t . Temos que variar t em $(-\infty, \infty)$.

Exemplos

$$(1) \quad x(t) = e^{-t}u(t)$$

$$g(t) = e^{-2t}u(t)$$

Veja a Figura 2.6. Vamos reverter g , conforme a Figura 2.7.

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

$$\text{Figura 2.8} \Rightarrow c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)g(t-\tau)}_{=0} d\tau = 0, \quad t \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Figura 2.9} \Rightarrow c(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-2t} e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\therefore [c(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t), \quad t \in \mathbb{R}]$$

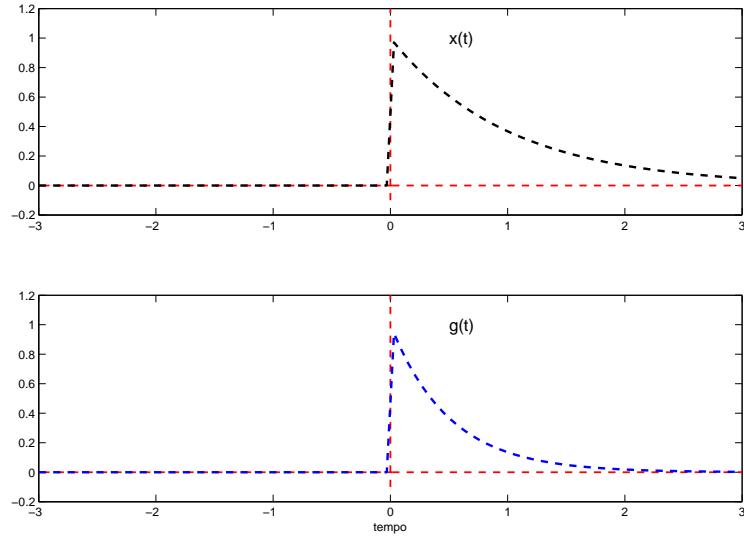


Figura 2.6: Gráficos de $x(t) = e^{-t}u(t)$ e $g(t) = e^{-2t}u(t)$.

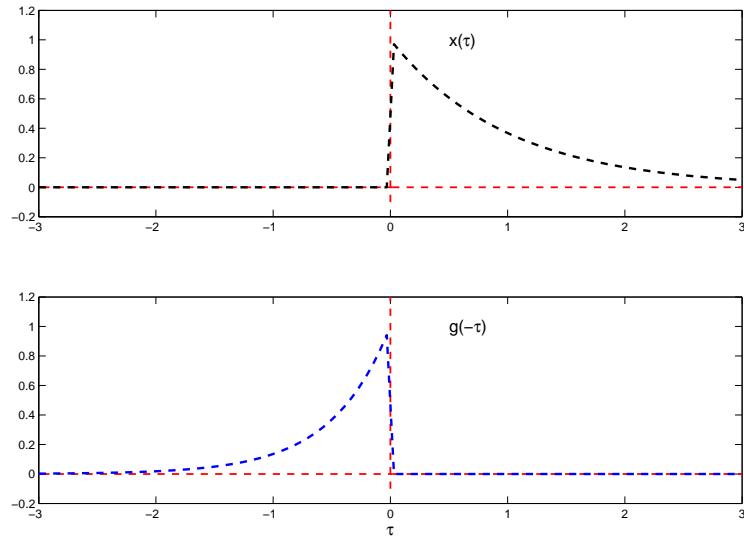
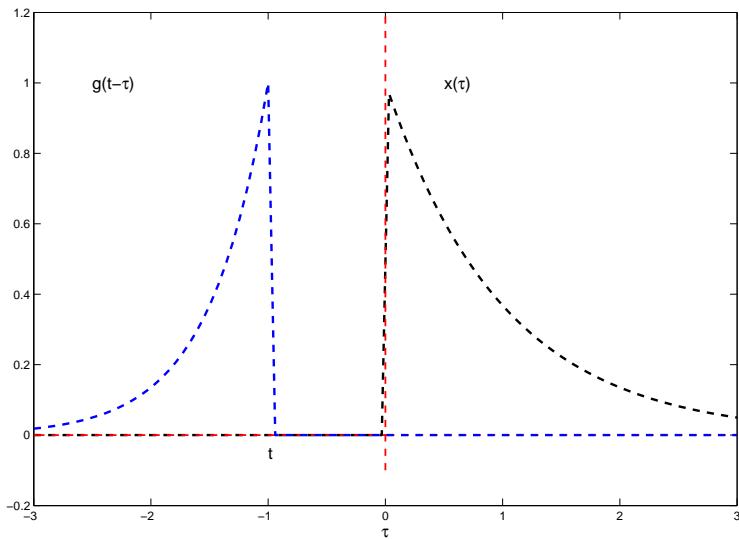
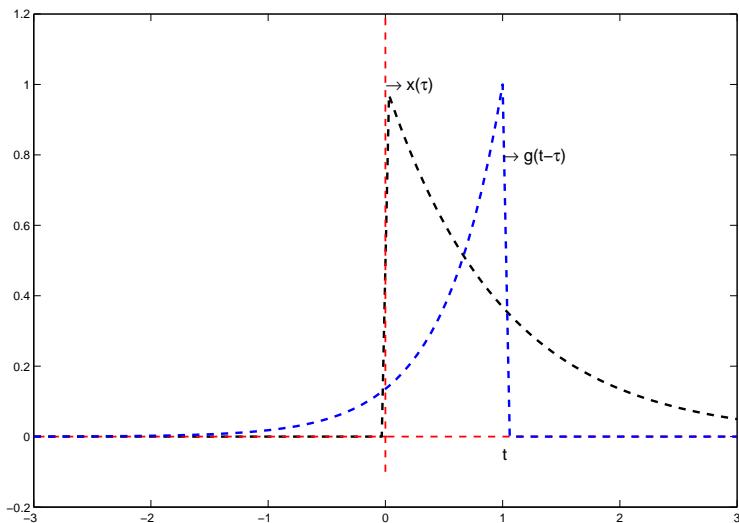


Figura 2.7: Reversão de $g(\tau)$.

Figura 2.8: Gráfico de $x(\tau)$ e $g(t - \tau)$ para $t \leq 0$.Figura 2.9: Gráficos de $x(\tau)$ e $g(t - \tau)$ para $t > 0$.

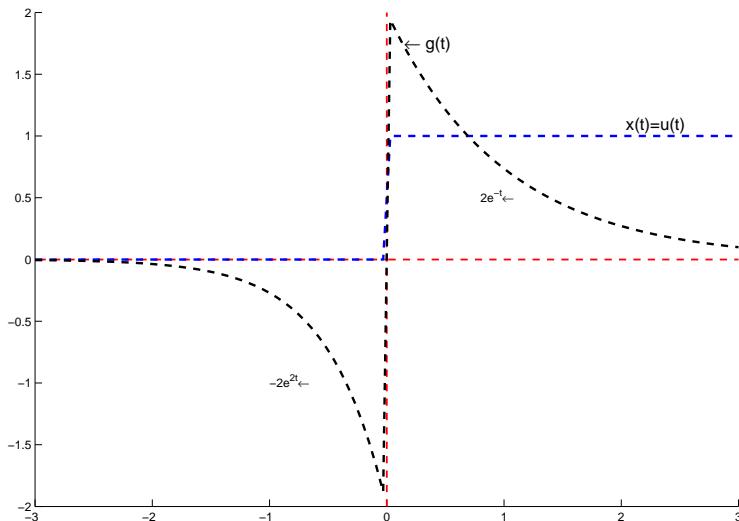
2 Veja a Figura 2.10.

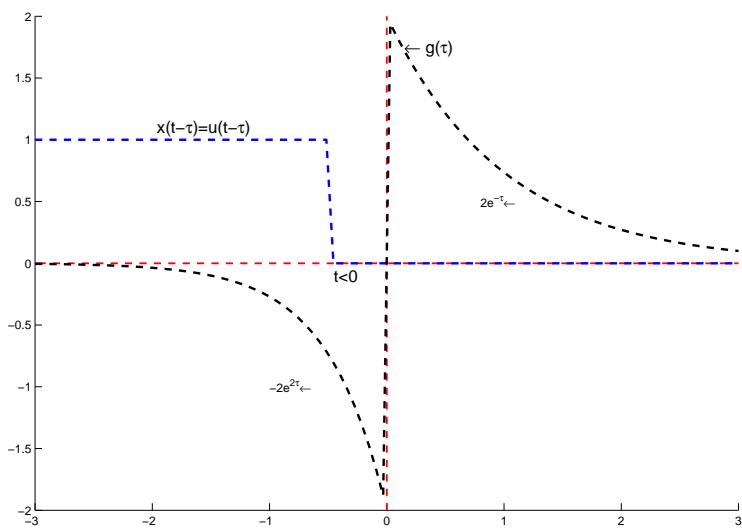
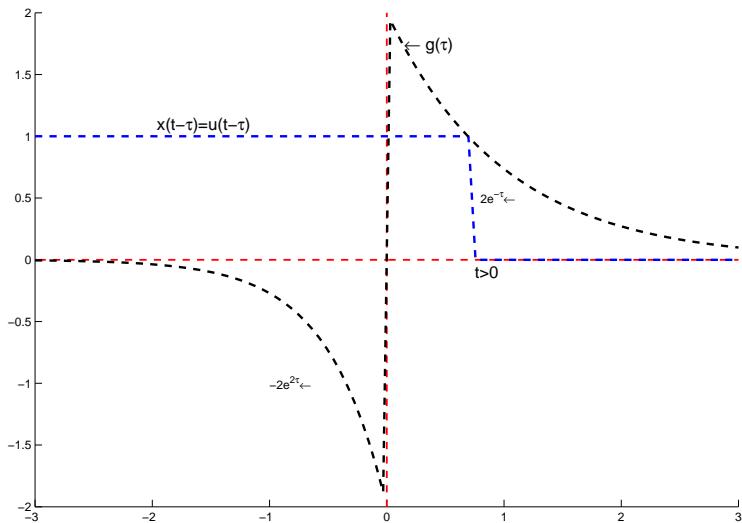
$x(t)$ é mais simples! Vamos reverter $x(\tau)$!

$$\begin{aligned}
 \text{Figura 2.11} \Rightarrow c(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t (-2e^{2\tau}) \cdot 1 d\tau, \quad t \leq 0 \\
 &= -2 \int_{-\infty}^t e^{2\tau} d\tau = -2 \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-T}^t e^{2\tau} d\tau}_{\substack{v = 2\tau \\ dv = 2d\tau}} \\
 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} e^v \Big|_{-2T}^{2t} = -\lim_{T \rightarrow \infty} e^{2t} - e^{-2T} \\
 &= -e^{2t} + \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-2T}}_{=0} = -e^{2t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Figura 2.12} \Rightarrow c(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 (-2e^{2\tau}) \cdot 1 d\tau}_{-e^{2 \cdot 0} = -1} + \underbrace{\int_0^t 2e^{-\tau} \cdot 1 d\tau}_{\substack{v = -\tau \\ dv = -d\tau}} \\
 &= -1 - 2e^v \Big|_0^{-t} = -1 - 2e^{-t} + 2 \\
 &= 1 - 2e^{-t}, \quad t > 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore c(t) = \begin{cases} -e^{2t}, & t \leq 0 \\ 1 - 2e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

Figura 2.10: Gráficos de $x(t) = u(t)$ e $g(t)$.

Figura 2.11: Gráfico de $x(t - \tau)$ e $g(\tau)$ para $t \leq 0$.Figura 2.12: Gráfico de $x(t - \tau)$ e $g(\tau)$ para $t > 0$.

(3) Veja a Figura 2.13.

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

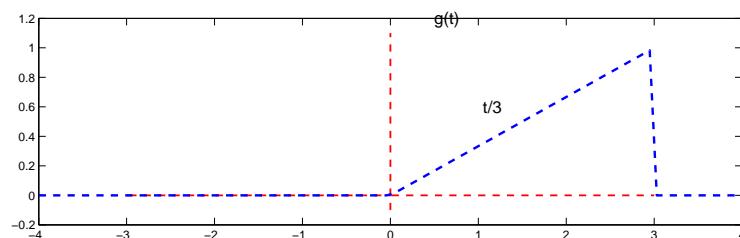
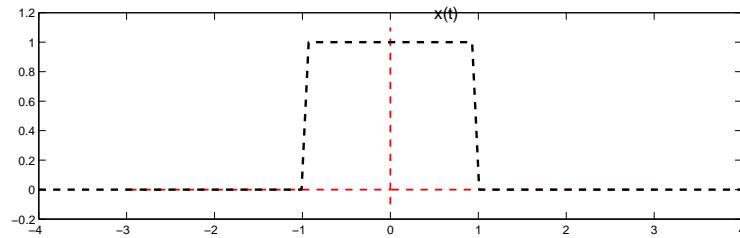
Figura 2.14 $\Rightarrow c(t) = 0$
 $t \leq -1$ ou $t \geq 4$ ($3 \leq -1+t$)

$$\text{Figura 2.15} \Rightarrow c(t) = \int_{-1 \leq t \leq 1}^{1+t} \frac{\tau}{3} \cdot 1 d\tau = \frac{\tau^2}{6} \Big|_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Figura 2.16} \Rightarrow c(t) &= \int_{-1+t \leq t \leq 2}^{1+t} \frac{\tau}{3} \cdot 1 d\tau = \frac{\tau^2}{6} \Big|_{-1+t}^{1+t} \\ &= \frac{(1+t)^2 - (-1+t)^2}{6} = \frac{4t}{6} = \frac{2t}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Figura 2.17} \Rightarrow c(t) &= \int_{2 \leq t \leq 4}^3 \frac{\tau}{3} \cdot 1 d\tau = \frac{\tau^2}{6} \Big|_{-1+t}^3 \\ &= \frac{9}{6} - \frac{(-1+t)^2}{6} = -\frac{1}{6}(t^2 - 2t - 8) \end{aligned}$$

$$\therefore c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ \frac{(t+1)^2}{6}, & -1 < t \leq 1 \\ \frac{2t}{3}, & 1 < t \leq 2 \\ -\frac{1}{6}(t^2 - 2t - 8), & 2 < t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

Figura 2.13: Gráficos de $x(t)$ e $g(t)$.

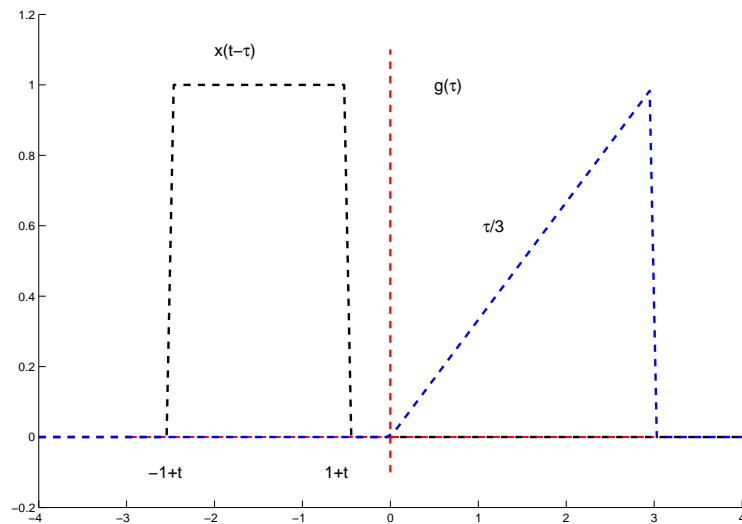


Figura 2.14: Gráficos de $x(t - \tau)$ e $g(\tau)$ para $1 + t \leq 0$, ou seja, $t \leq -1$.

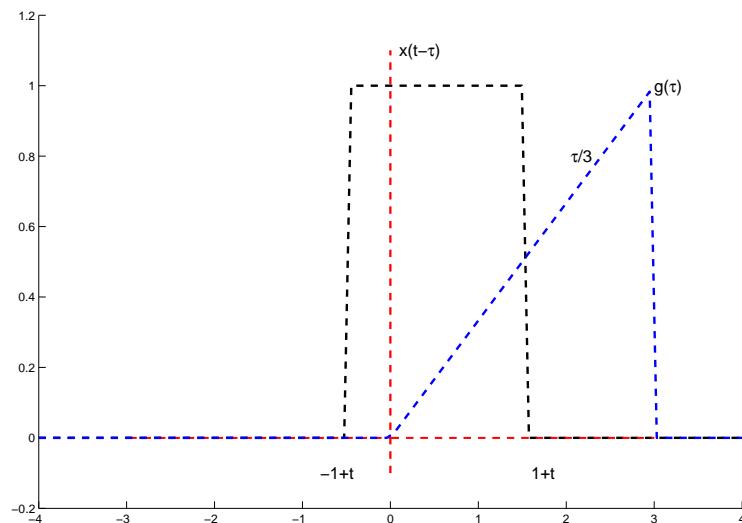


Figura 2.15: Gráficos de $x(t - \tau)$ e $g(\tau)$ para $0 \leq 1 + t \leq 3$ e $-1 + t \leq 0$, ou seja, $-1 \leq t \leq 1$.

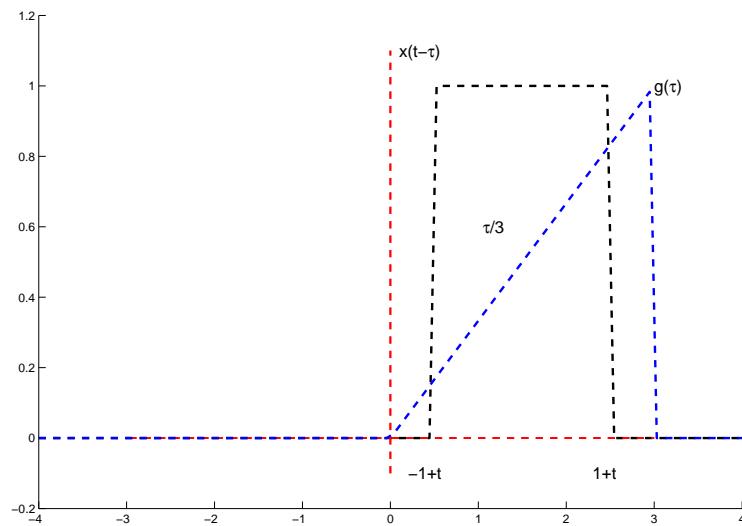


Figura 2.16: Gráficos de $x(t-\tau)$ e $g(\tau)$ para $0 \leq -1+t$ e $1+t \leq 3$, ou seja,
 $1 \leq t \leq 2$.

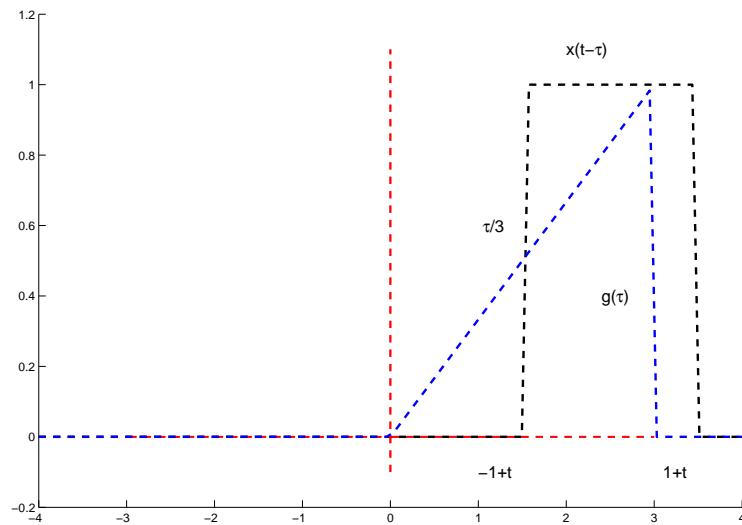


Figura 2.17: Gráficos de $x(t-\tau)$ e $g(\tau)$ para $0 \leq -1+t \leq 3$ e $1+t \geq 3$, ou
seja, $2 \leq t \leq 4$.

2.5 SISTEMAS LCIT — CÁLCULO DA RESPOSTA TOTAL E SIMULAÇÃO

Considere um sistema LCIT descrito por

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y(t) = (b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N) x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y(0^-) \ y^{(1)}(0^-) \ \dots \ y^{(N-1)}(0^-)] \in \mathbb{R}^N$ em $t_0 = 0^-$ e $M = N - 1$ ($b_0 = 0$). Para simularmos este sistema num pacote computacional como o Matlab, seguimos os seguintes passos:

1. Montamos as matrizes

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N} & B &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}_{N \times 1} \\ C &= [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N} & D &= 0 \end{aligned}$$

2. Definimos a matriz quadrada (é sempre *invertível!*)

$$K = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (\text{comando } K=\text{ctrb}(A', C')' \text{ no Matlab})$$

3. Simulamos (*espaço de estados*)

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cq(t) + \underbrace{D}_{=0}$$

com condição inicial

$$q(0) = K^{-1}v_0'$$

onde $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_N(t)]' \in \mathbb{R}^N$ são as *variáveis de estado*.

Exemplo Motor CC:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v : \text{tensão de armadura (entrada)} \\ y = \omega : \text{velocidade angular do eixo do motor (saída)} \\ L : \text{indutância do enrolamento} \\ R : \text{resistência do enrolamento} \\ K_b : \text{constante de tensão} \\ J : \text{momento de inércia equivalente do motor} \\ b : \text{coeficiente de atrito viscoso} \\ K_t : \text{constante de torque do motor} \end{array} \right.$$

$$L = 0.01H, R = 1.2\Omega, J = 0.2, b = 0.1, K_b = K_t = 1$$

$$\begin{aligned} & \left[D^2 + \frac{(bL + JR)D}{JL} + \frac{K_b K_t}{JL} \right] y(t) = \frac{K_t}{JL} x(t) \\ & \left\{ \begin{array}{l} Q(D) = D^2 + \frac{(bL + JR)D}{JL} + \frac{K_b K_t}{JL} \quad N = 2 \\ P(D) = \frac{K_t}{JL} \quad M = 0 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} Q(D) = D^2 + 120,5D + 560 \quad a_1 = 120,5 \quad a_2 = 560 \\ P(D) = 500 \quad b_0 = 0 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 500 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} y(0^-) = 1 \\ \dot{y}(0^-) = 2 \end{array} \right. \\ & x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = ? \\ & \boxed{y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t), \quad t \geq 0} \quad \boxed{y_{esn}(t) = x(t) * h(t)} \end{aligned}$$

1º Cálculo de $y_0(t)$:

$$\begin{aligned} & Q(D)y_0(t) = 0, \quad y_0(0) = 1, \quad \dot{y}_0(0) = 2 \\ & Q(\lambda) = \lambda^2 + 120,5\lambda + 560 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \approx -115,66 \\ \lambda_2 \approx -4,84 \end{array} \right\} \text{distintas e reais} \end{aligned}$$

Raízes características no Matlab: `roots([1 120.5 560])`

Modos característicos: $e^{-115,66t}, e^{-4,84t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(t) = c_1 e^{-115,66t} + c_2 e^{-4,84t} \\ \dot{y}_0(t) = -115,66c_1 e^{-115,66t} - 4,84c_2 e^{-4,84t} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0(0^-) = 1 = c_1 + c_2 \\ \dot{y}_0(0^-) = 2 = -115,66c_1 - 4,84c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 \approx -0,0617 \\ c_2 \approx 1,0617 \end{array}}$$

Temos que $A\mathbf{c} = \mathbf{v}_0 \therefore$ No Matlab: `c=linsolve(A,v0)`

$$\therefore \boxed{y_0(t) = -0,0617e^{-115,66t} + 1,0617e^{-4,84t}, t \in \mathbb{R}}$$

2º Cálculo de $h(t)$:

$$Q(D)y_n(t) = (D^2 + 120,5D + 560)y_n(t) = 0 \quad (N = 2)$$

$$\begin{cases} y_n(0) = 0 \\ \dot{y}_n(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_n(t) = c_1 e^{-115,66t} + c_2 e^{-4,84t} \\ \dot{y}_n(t) = -115,66c_1 e^{-115,66t} - 4,84c_2 e^{-4,84t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_n(0) = 0 = c_1 + c_2 \\ \dot{y}_n(0) = 1 = -115,66c_1 - 4,84c_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 \approx -0,009 \\ c_2 \approx 0,009 \end{array}}$$

$$y_n(t) = -0,009e^{-115,66t} + 0,009e^{-4,84t}$$

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t) = \boxed{-4,51e^{-115,66t}u(t) + 4,51e^{-4,84t}u(t)}$$

3º Cálculo de $y_{esn}(t)$:

$$y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = u(t)$$

$$y_{esn}(t) = u(t) * [-4,51e^{-115,66t}u(t) + 4,51e^{-4,84t}u(t)]$$

$$y_{esn}(t) = -4,51 \left[\underbrace{u(t) * e^{-115,66t}u(t)}_{\substack{= \frac{1-e^{-115,66t}}{115,66}u(t) \\ \downarrow \\ \text{Tabela}}} \right] + 4,51 \left[\underbrace{u(t) * e^{-4,84t}u(t)}_{\substack{= \frac{1-e^{-4,84t}}{4,84}u(t) \\ \downarrow \\ \text{Tabela}}} \right]$$

$$\boxed{y_{esn}(t) = [0,9318(1 - e^{-4,84t}) - 0,0390(1 - e^{-115,66t})]u(t), t \in \mathbb{R}}$$

4º Cálculo de $y(t)$:

$$y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t), t \geq 0$$

$$\boxed{y(t) = 0,8928 + 0,1299e^{-4,84t} - 0,0227e^{-115,66t}, t \geq 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = (1 - e^{-t})u(t) \\ x(t) = (\cos 10t)u(t) \end{array} \right\} \rightsquigarrow \text{no Simulink}$$

2.6 SISTEMAS INTERCONECTADOS

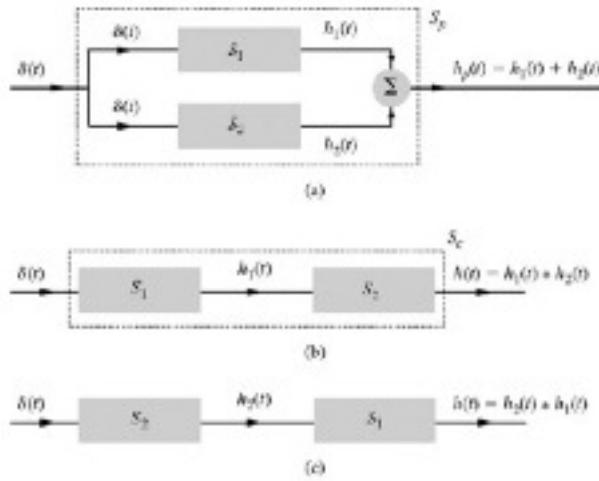


Figura 2.18: Sistemas interconectados.

Suponha que o sistema S_1 tem resposta impulsiva $h_1(t)$ e que o sistema S_2 tem resposta impulsiva $h_2(t)$. Então:

- Conexão em *paralelo*: o sistema S_p tem resposta impulsiva $h_p(t) = h_1(t) + h_2(t)$.
- Conexão em *cascata (ou série)*: o sistema S_c tem resposta impulsiva $h_c(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$. Assim, em termos da resposta impulsiva $h_c(t)$, tanto faz ligarmos S_2 após S_1 ou S_1 após S_2 . No entanto, *fisicamente* a ordem importa. Por exemplo, o sistema *motor-gerador* é diferente do sistema *gerador-motor*.
- *Integração*:

$$x(t) \rightarrow y_{\text{esn}}(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \rightarrow \bar{y}_{\text{esn}}(t) = \int_{-\infty}^t y_{\text{esn}}(\tau) d\tau$$

Exemplos:

a) Seja $g(t)$ a resposta estado nulo para $x(t) = u(t)$ (*degrau unitário*). Como $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$, temos $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$.

b) Seja $f(t)$ a resposta estado nulo para $x(t) = tu(t)$ (*rampa unitária*). Como $tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$, temos $f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$.

- *Derivação* (veja a Propriedade 7 da Convolução):

$$x(t) \rightarrow y_{\text{esn}}(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \bar{y}_{\text{esn}}(t) = \frac{dy_{\text{esn}}(t)}{dt} \text{ (der. gen!)}$$

Exemplos:

- a) $h(t) = dg(t)/dt$, pois $\delta(t) = du(t)/dt$.
- b) $y_{esn}(t) = x(t) * h(t) = x(t) * dg(t)/dt = dx(t)/dt * g(t)$,
pela Propriedade 7 da Convolução.

2.7 RESPOSTA NATURAL E RESPOSTA FORÇADA

Considere um sistema LCIT descrito por

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \dots y^{(1)}(0^-) \ y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$
em $t_0 = 0^-$ e $N \geq M$. Temos que

$$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t) \ (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t) \ (v_0=0)}$$

Relembre que $y_0(t)$ depende da *condição inicial* v_0 e dos *modos característicos* do sistema, e que $y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$ depende da *entrada* $x(t)$ e dos *modos característicos* através de $h(t)$.

Para o sistema

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

com $v_0 = [0 \ -5]$ e $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$, determinamos anteriormente que os modos característicos são $\{e^{-t}, e^{-2t}\}$, e que

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_0(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{esn}(t)}, \quad t \geq 0$$

Agora, ao juntarmos os termos envolvendo os *modos característicos* em $y(t)$, obtemos uma componente $y_n(t)$ denominada de *resposta natural* (ou *solução homogênea*). E, ao juntarmos os termos que *não envolvem* os *modos característicos* em $y(t)$, encontramos uma componente $y_\phi(t)$ denominada de *resposta forçada* (ou *solução particular*). Logo,

$$y(t) = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{y_n(t)} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{y_\phi(t)}, \quad t \geq 0$$

Obs Em geral, $y_0(t) \neq y_n(t)$ e $y_{esn}(t) \neq y_\phi(t)$!

2.8 SOLUÇÃO CLÁSSICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Tarefa Ler a Seção 2.5 do Lathi

Desvantagens da solução clássica em relação às técnicas estudadas até aqui:

1. Fornece $resposta\ total = resposta\ natural + resposta\ forçada$, e não $resposta\ total = resposta\ entrada\ nula + resposta\ estado\ nulo$.
2. Restringe as entradas $x(t)$ possíveis de serem aplicadas.
3. Exige que as condições iniciais sejam conhecidas em $t_0 = 0^+$ (e não em $t_0 = 0^-$). E isto pode ser bastante complicado de se determinar na prática (veja a p. 152 e o Exemplo 2.2 do Lathi). *Dica:* no Exemplo 2.2 do Lathi, a tensão no capacitor e a corrente no indutor são as *variáveis de estados* (armazenadores de energia). E as variáveis de estado são *sempre funções contínuas do tempo!* É por isso que podemos garantir que $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+)$!
4. Não apresenta uma relação direta com a Transformada de Laplace (Capítulo 4 do Lathi).

2.9 ESTABILIDADE DE SISTEMAS

Considere um sistema LCIT com memória (não necessariamente descrito por uma equação diferencial). Assuma que $v(-\infty) = 0$ (condição inicial nula em $t_0 = -\infty$). Na Seção 2.4, encontramos que

$$y(t) = y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$$

Dizemos que o sistema é *BIBO estável* quando *toda* entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é *BIBO instável*.

Propriedade

$$\text{O sistema é BIBO estável} \Leftrightarrow M_h = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Neste caso, se $|x(t)| \leq M_x < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ (entrada limitada), então $|y_{esn}(t)| \leq M_x M_h = M_{y_{esn}}$, $t \in \mathbb{R}$ (saída limitada). Isto significa que para termos $M_{y_{esn}}$ arbitrariamente pequeno, basta que M_x seja suficientemente pequeno.

Agora, considere um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial da forma

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$. Suponha que $v_0 = 0$. Assim, $y_0(t) = 0$. Dizemos que o sistema é *BIBO estável* quando *toda* entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t) = y_{esn}(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é *BIBO instável*.

Propriedade

Se $\text{grau}(Q)=N < \text{grau}(P)=M$, então o sistema é BIBO *instável*.

Obs BIBO estabilidade refere-se à estabilidade *externa* ($v_0 = 0$ e $x \neq 0$) do sistema.

2.9.1 Estabilidade Interna (Assintótica)

Considere um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial da forma

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$.

Relembre que

$$v_0 = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = y_0 = y_{\text{esn}} = 0$$

No entanto, o que acontece com $y = y_0$ quando $x = 0$ mas $v_0 \neq 0$? Este é o conceito de *estabilidade interna* (ou *assintótica*) do sistema.

Temos então a seguinte classificação em relação à *estabilidade interna* ($v_0 \neq 0$ e $x(t) = 0$) do sistema:

1. *Assintoticamente estável*: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$.

Ex: pêndulo simples com atrito.

Critério (\Leftrightarrow): todas as raízes características estão no SPE (Semi-Plano Esquerdo) do plano complexo, ou seja, possuem parte real negativa.

2. *Assintoticamente instável*: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $y(t) = y_0(t)$ é *ilimitada*.

Critério (\Leftrightarrow): quando houver *ao menos uma* raiz característica no SPD (Semi-Plano Direito) (i.e. com parte real positiva) *e/ou* raízes com multiplicidade em cima do eixo imaginário.

3. *Marginalmente estável*: quando para termos $y(t) = y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, limitada e *arbitrariamente* próxima de zero, basta que $v_0 \neq 0$ seja *suficientemente* próxima de zero.

Ex: pêndulo simples sem atrito.

Critério (\Leftrightarrow): quando *não há* raízes características no SPD (Semi-Plano Direito), mas *existem* raízes sem multiplicidade em cima do eixo imaginário.

Veja a Figura 2.19.

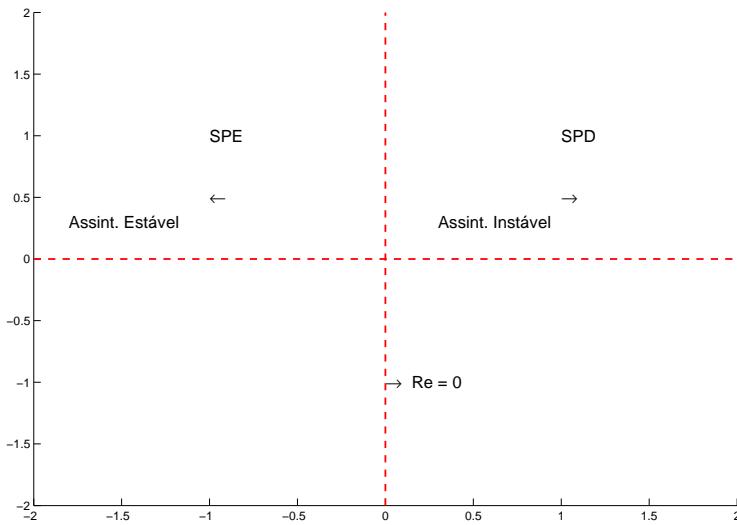


Figura 2.19: Relação entre estabilidade interna (assintótica) e o plano complexo.

2.9.2 Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

Temos as seguintes relações entre a estabilidade *externa* (BIBO) e a estabilidade *interna* (assintótica) de um sistema *descrito* por uma equação diferencial:

Propriedades

1. Assintoticamente estável \Rightarrow BIBO estável
2. Assintoticamente instável ou marginalmente estável \Rightarrow BIBO instável

Exemplos

(1) $(D + 1)(D^2 + 4D + 8)y(t) = (D - 3)x(t)$

$$Q(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 8) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_{2,3} &= -2 \pm j2 \end{aligned}$$

É assintoticamente estável (veja a Figura 2.20). Logo é BIBO estável.

(2) $(D - 1)(D^2 + 4D + 8)y(t) = (D - 3)x(t)$

$$Q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 8) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_{2,3} &= -2 \pm j2 \end{aligned}$$

É assintoticamente instável (veja a Figura 2.21). Logo é BIBO instável.

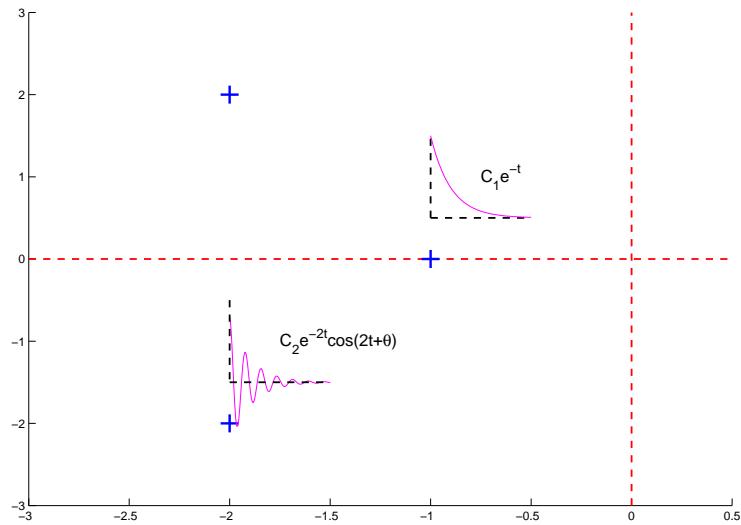


Figura 2.20: Exemplo 1.

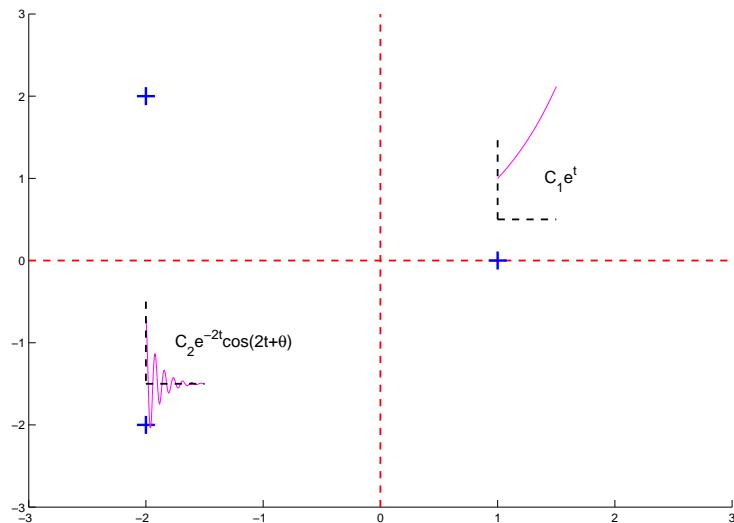


Figura 2.21: Exemplo 2.

$$(3) \quad (D + 2)(D^2 + 4)y(t) = (D^2 + D + 1)x(t)$$

$$Q(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_{2,3} &= \pm j2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(multiplicidade 1} \\ \text{em cima do eixo} \\ \text{imaginário)} \end{array}$$

Marginalmente estável (veja a Figura 2.22). Logo é BIBO instável.

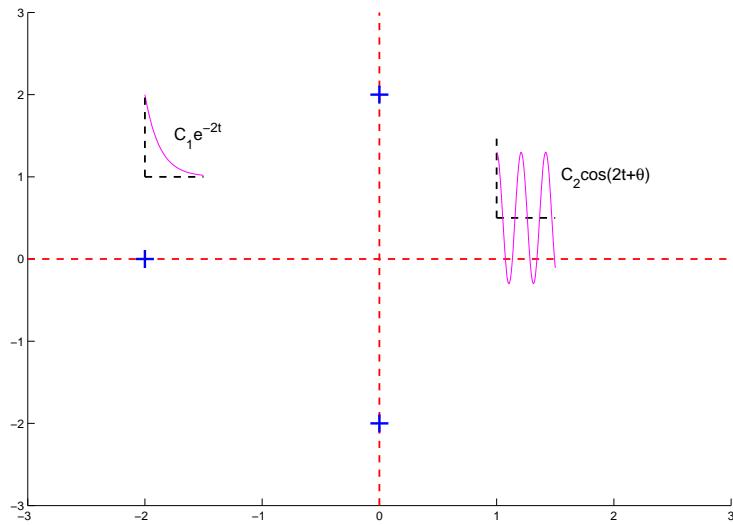


Figura 2.22: Exemplo 3.

$$(4) \quad (D + 1)(D^2 + 4)^2 y(t) = (D^2 + 2D + 8)x(t)$$

$$Q(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_{2,3} &= \lambda_{4,5} = \pm j2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(multiplicidade 2} \\ \text{em cima do eixo} \\ \text{imaginário)} \end{array}$$

Assintoticamente instável (veja a Figura 2.23). Logo é BIBO instável.

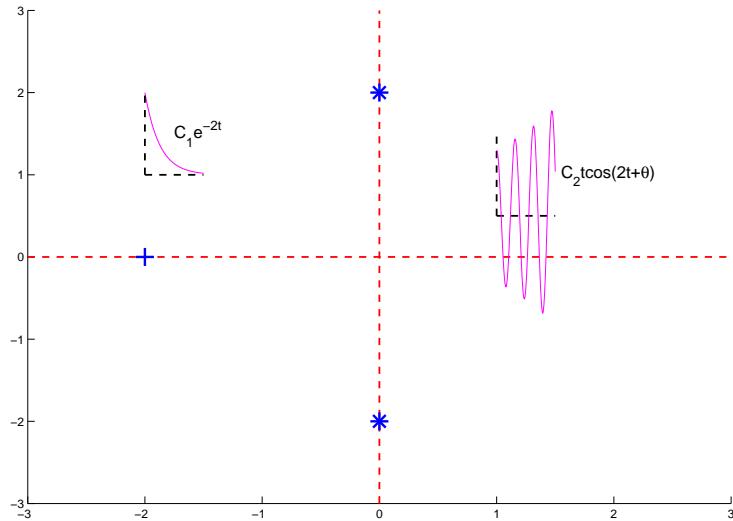


Figura 2.23: Exemplo 4.

$$(5) D(D+3)y(t) = 3x(t)$$

$$Q(\lambda) = \lambda(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{(multiplicidade 1)} \\ & \text{em cima do eixo} \\ & \text{imaginário} \\ \lambda_2 = -3 & \end{cases}$$

Marginalmente estável (veja a Figura 2.24). Logo é BIBO instável.

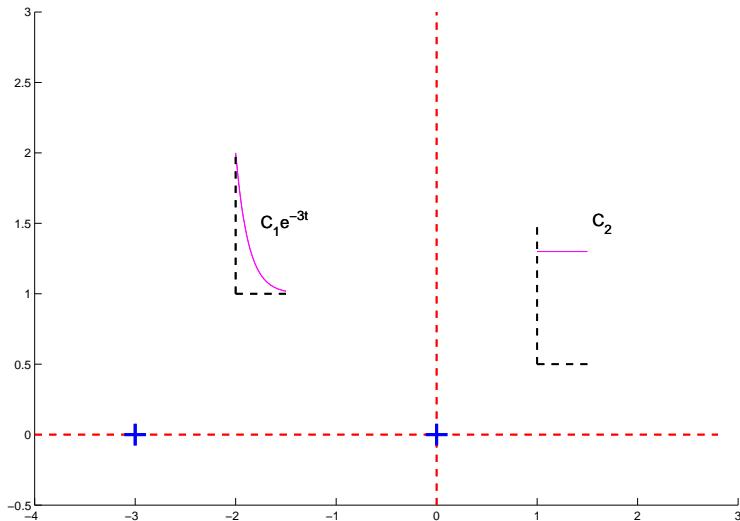


Figura 2.24: Exemplo 5.

$$(6) D^2(D+3)y(t) = (D+5)x(t)$$

$$Q(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 & \text{(multiplicidade 2)} \\ & \text{em cima do eixo} \\ & \text{imaginário} \\ \lambda_3 = -3 & \end{cases}$$

Assintoticamente instável (veja a Figura 2.25). Logo é BIBO instável.

$$(7) (D^2 + 1)(D^2 + 9)y(t) = x(t)$$

$$Q(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \pm j \\ \lambda_{3,4} = \pm j3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{multiplicidade 1} \\ \text{em cima do eixo} \\ \text{imaginário} \end{array}$$

Marginalmente estável (veja a Figura 2.26). Logo é BIBO instável.

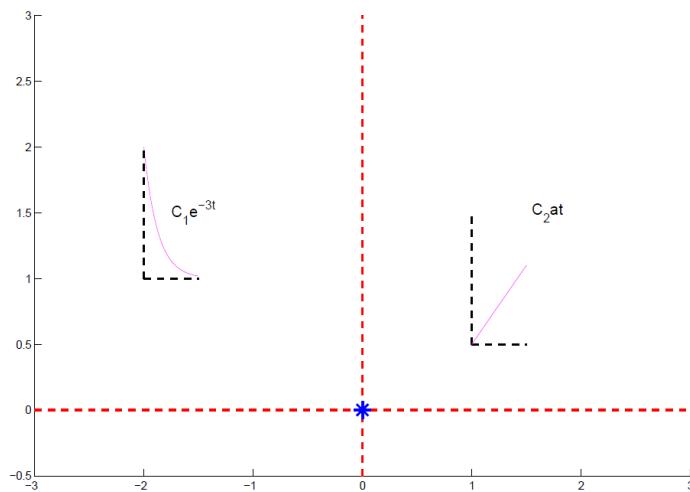


Figura 2.25: Exemplo 6.

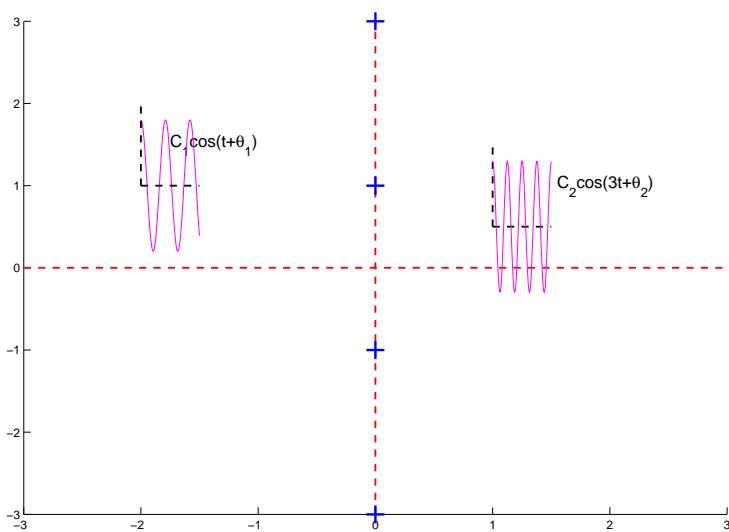


Figura 2.26: Exemplo 7.

3

ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO

Um sinal em *tempo discreto* é aquele em que o tempo *dá saltos*. Matematicamente, o sinal é dado por uma função

$$x[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde \mathbb{Z} é o conjunto dos *números inteiros*. Desse modo, $x[n]$ é uma sequência de números:

$$\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots$$

Exemplos:

- Os valores $x[n]$ do PIB no trimestre n
- Amostragem de um *sinal contínuo* $x(t)$ com período $T > 0$:

$$x[n] = x(nT)$$

é a n -ésima amostra de $x(t)$, e as amostras estão espaçadas no tempo em T segundos. Denominamos $T > 0$ de *período de amostragem*. Note que $x[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) dt$.

Um *sistema em tempo discreto* é um sistema em que os sinais de entrada $x[n]$ e de saída $y[n]$ são sinais em tempo discreto.

Exemplo: computador (digital)

Motivação: Processamento Digital de um Sinal Analógico $x(t)$ por um Microcontrolador (veja as Figuras 3.1 e 3.24)

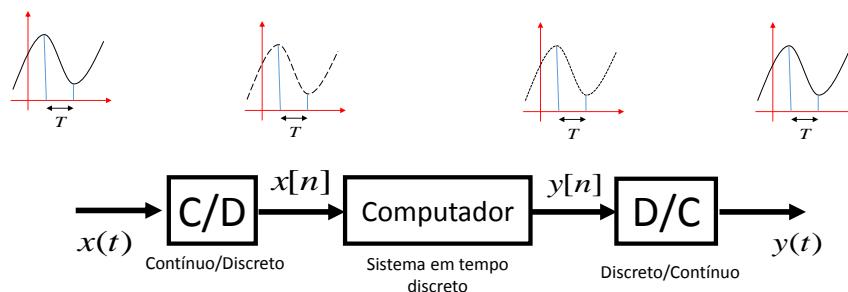


Figura 3.1: Processamento digital de um sinal analógico $x(t)$.

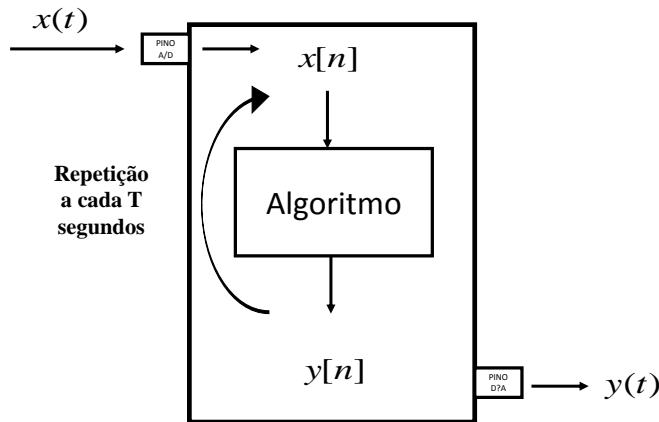


Figura 3.2: Microcontrolador.

Teoria de Sinais e Sistemas (em Sinais e Sistemas Lineares II):

- Como escolher T ?
- Como deve ser o Algoritmo que calcula $y[n]$ a partir de $x[n]$?

Na sequência, apresentaremos para sinais e sistemas *em tempo discreto*, definições, propriedades, operações e modelos, de maneira semelhante ao que estudamos anteriormente para sinais e sistemas em *tempo contínuo*.

Seja $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, um sinal. Considere as *somas parciais*

$$s[n] = x[0] + x[1] + \cdots + x[n] = \sum_{m=0}^n x[m], \quad n \geq 0$$

$$r[n] = x[-n] + x[-n+1] + \cdots + x[-2] + x[-1] = \sum_{m=-n}^{-1} x[m], \quad n \geq 1$$

Se os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n x[m], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^{-1} x[m]$$

existem, então escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n x[m], \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^{-1} x[m]$$

3.1 TAMANHO DO SINAL

Quando ambos os limites acima existem, definimos a *série* associada a $x[n]$ por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] + \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]$$

Energia de um sinal real $x[n]$:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2 \leq \infty$$

Energia de um sinal complexo $x[n]$:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \infty$$

Potência de um sinal real $x[n]$:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]^2 \leq \infty$$

Potência de um sinal complexo $x[n]$:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \leq \infty$$

- P_x : valor médio quadrático de $x[n]$
- $P_x \text{ rms} = \sqrt{P_x}$: valor *rms* (Raiz Média Quadrática — *Root Mean Square*)

3.2 SINAIS PERIÓDICOS

Dizemos que $x[n]$ é *periódico* quando existe $N \geq 1$ tal que

$$x[n+N] = x[n], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O menor $N_0 \geq 1$ que satisfaz $x[n+N_0] = x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é denominado de *período fundamental* de $x[n]$. Neste caso,

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]^2 < \infty \quad (\text{real})$$

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 < \infty \quad (\text{complexo})$$

Propriedades:

Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ têm o *mesmo* período N_0 . Então os seguintes sinais *também* possuem período N_0 :

- $x[n] = Cx_1[n]$, C real ou complexo
- $x[n] = x_1[n] \pm x_2[n]$
- $x[n] = x_1[n]x_2[n]$
- $x[n] = x_1[n]/x_2[n]$, com $x_2[n] \neq 0$ para todo n

Prova da soma: Seja $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$. Então,

$$x[n + N_0] = x_1[n + N_0] + x_2[n + N_0] = x_1[n] + x_2[n] = x[n]$$

3.3 ENERGIA E POTÊNCIA DE UM SINAL

[Obs 1] Existem 4 situações:

1. $E_x < \infty$: energia finita (neste caso, $E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x[n]^2 < \infty$)
2. $E_x = \infty$: energia infinita
3. $P_x < \infty$: potência finita
4. $P_x = \infty$: potência infinita

É fácil ver que:

- $E_x < \infty \Rightarrow P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} E_x/(2N+1) = 0$
- $0 < P_x \leq \infty \Rightarrow E_x = \infty$

Quando $E_x < \infty$, dizemos que $x[n]$ é um sinal de *energia*. E, quando $0 < P_x < \infty$, dizemos $x[n]$ é um sinal de *potência*. Logo, não existem sinais $x[n]$ que são *simultaneamente* de energia e de potência. No entanto, existem sinais que não são *nem de energia nem de potência* (por exemplo, $x[n] = n$, $E_x = \infty$, $P_x = \infty$).

[Obs 2] Se $x[n]$ tem *duração finita*, ou seja,

$$x[n] = 0, \quad n < N_1 \text{ ou } n > N_2,$$

então

$$E_x = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]^2 < \infty \text{ e } P_x = 0.$$

Obs 3 Seja a um número real. Considere o sinal definido por

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

Então:

- $|a| < 1 \Rightarrow E_x = \frac{1}{1 - |a|^2}$ (sinal de energia)
- $|a| = 1 \Rightarrow P_x = 0.5$ (sinal de potência)
- $|a| > 1 \Rightarrow$ nem de energia nem de potência

Exemplos

(1) $x[n]$ =Figura 3.3

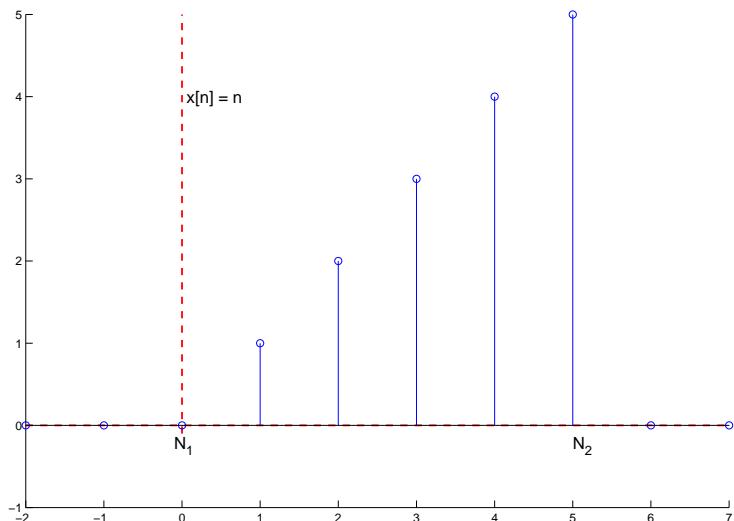


Figura 3.3: Exemplo 1.

$x[n]$ tem duração finita de $N_2 - N_1 + 1 = 6!$

$$E_x = \sum_{n=0}^{5} n^2 = 0 + 1 + 2^2 + \dots + 5^2 = 55$$

$$\therefore P_x = 0$$

(2) $y[n]$ =Figura 3.4

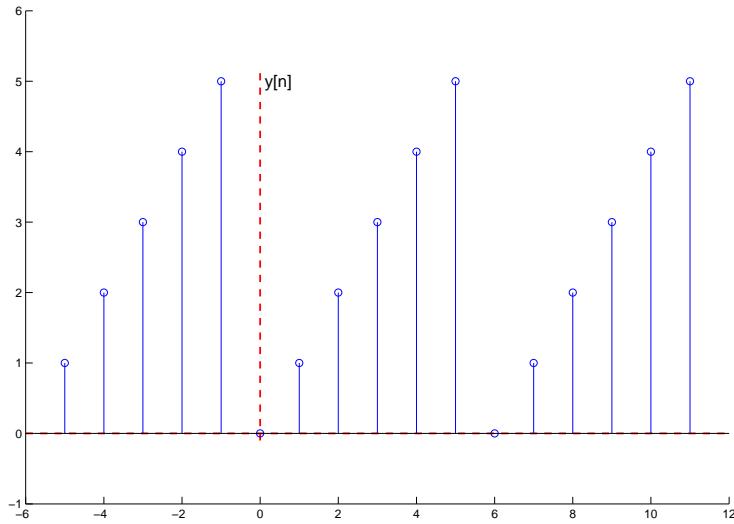


Figura 3.4: Exemplo 2.

Note que $y[n]$ é a extensão periódica de $x[n]$ do exemplo anterior com período $N = 6$. Logo:

$$P_y = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6} E_x = \frac{55}{6}$$

$$\therefore E_y = \infty$$

$$(3) x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (1/2)^n, & n \geq 0 \end{cases} \quad (\text{veja a Figura 3.5})$$

$$a = 1/2$$

$$E_x = \frac{1}{1 - |a|^2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore P_x = 0$$

$$(4) x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (-1)^n, & n \geq 0 \end{cases} \quad (\text{veja a Figura 3.6})$$

$$a = -1, \quad |a| = 1 \Rightarrow P_x = 0,5$$

$$\therefore E_x = \infty$$

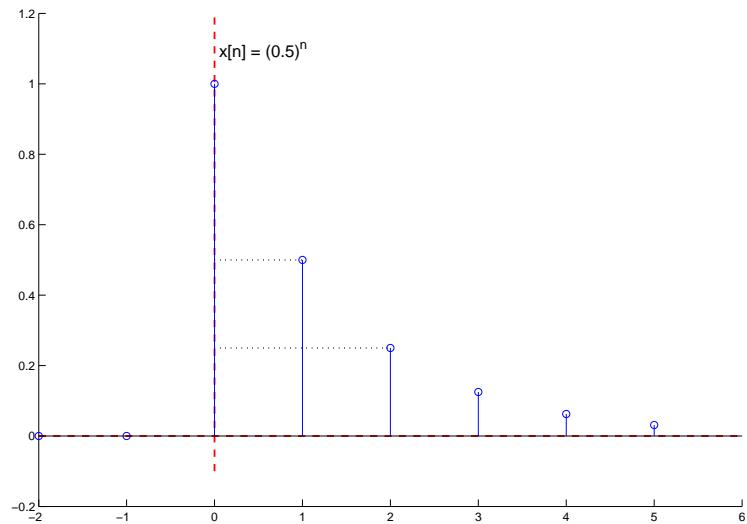


Figura 3.5: Exemplo 3.

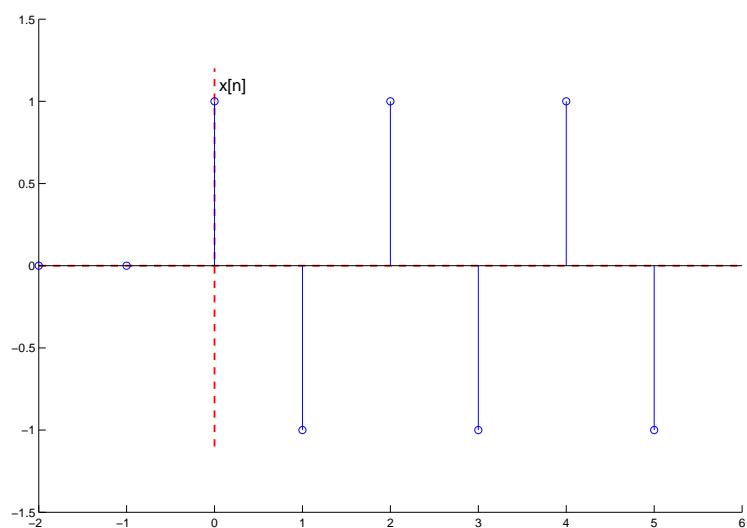


Figura 3.6: Exemplo 4.

(5) $x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2^n, & n \geq 0 \end{cases}$ (veja a Figura 3.7)

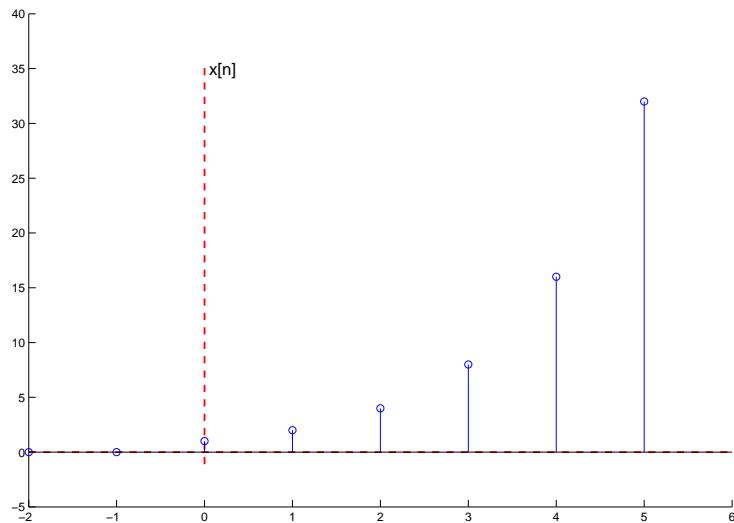


Figura 3.7: Exemplo 5.

$$a = 2, \quad |a| = 2 \Rightarrow P_x = E_x = \infty$$

3.4 OPERAÇÕES ÚTEIS COM SINAIS

1. Deslocamento temporal: $x_s[n] = x[n \pm M]$, $M \geq 1$ (inteiro)

- $+$: *adiantamento* no tempo em M unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x[n]$ para a *esquerda* em M unidades.
- $-$: *atraso* no tempo em M unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x[n]$ para a *direita* em M unidades.

2. Reversão (inversão) temporal: $x_r[n] = x[-n]$

- O gráfico de $x[n]$ é rebatido sobre o eixo *vertical*.

Cuidado: O gráfico de $x[n]$ é rebatido sobre o eixo *horizontal* quando $x_r[n] = -x[n]!$

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad x[n] = \begin{cases} 0, & n < 3 \text{ ou } n > 10 \\ (0,9)^n, & 3 \leq n \leq 10 \end{cases} \quad (\text{veja a Figura 3.8})$$

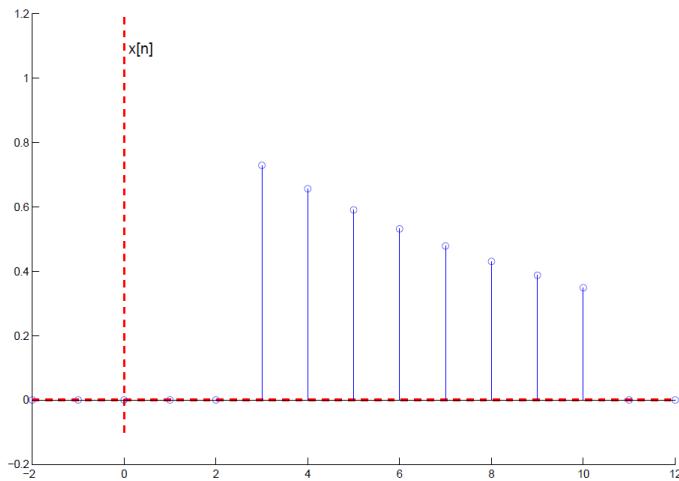
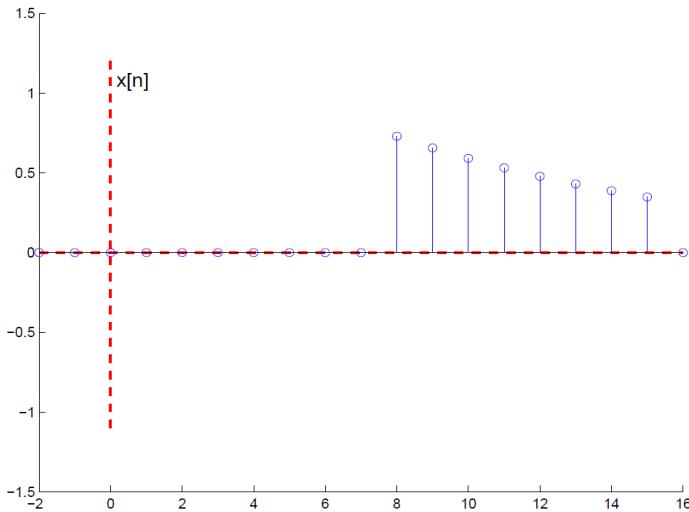


Figura 3.8: Sinal $x[n]$.

$x_s[n] = x[n - 5]$, $M = 5$ (atraso!) $\quad (\text{veja a Figura 3.9})$

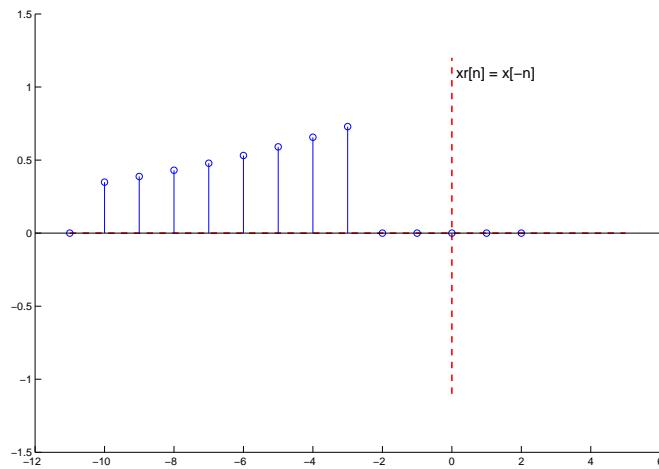
$$x_s[n] = \begin{cases} x[n - 5] = 0, & n - 5 < 3 \text{ ou } n - 5 > 10 \\ x[n - 5] = (0,9)^{n-5}, & 3 \leq n - 5 \leq 10 \end{cases}$$

Figura 3.9: Atraso temporal $x_s[n] = x[n - 5]$ com $M = 5$.

$$x_s[n] = \begin{cases} 0, & n < 8 \text{ ou } n > 15 \\ (0,9)^{n-5} \approx 1,69(0,9)^n, & 8 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

(2) $x_r[n] = x[-n]$ (veja a Figura 3.10)

$$x_r[n] = \begin{cases} 0, & n < -10 \text{ ou } n > -3 \\ (0,9)^{-n} = \left(\frac{1}{0,9}\right)^n \approx 1,11^n, & -10 \leq n \leq -3 \end{cases}$$

Figura 3.10: Reversão temporal $x_r[n] = x[-n]$.

3. Operações Combinadas: $z[n] = x[k - n]$ com k inteiro pode ser interpretado de duas maneiras equivalentes:

1. Primeiramente fazemos a reversão de $x[n]$, obtendo $y[n] = x[-n]$. Em seguida, deslocamos $y[n]$ por k , obtendo $z[n] = y[n - k] = x[-(n - k)] = x[k - n]$.
2. Primeiramente deslocamos $x[n]$ por k , obtendo $y[n] = x[n + k]$. Em seguida, fazemos a reversão de $y[n]$, obtendo $z[n] = y[-n] = x[k - n]$.

Propriedades: Suponha que um sinal $x[n]$ tem energia E_x e potência P_x .

1. Se $y[n] = -x[n]$, então $E_y = E_x$ e $P_y = P_x$.
2. Se $y[n] = x[-n]$, então $E_y = E_x$ (e $P_y = P_x$ quando $x[n]$ for periódico).
3. Se $y[n] = x[n - M]$ com M inteiro, então $E_y = E_x$ (e $P_y = P_x$ quando $x[n]$ for periódico).
4. Se $y[n] = Cx[n]$ com C real, então $E_y = C^2E_x$ e $P_y = C^2P_x$.

4. Decimação pelo fator $M \geq 1$ (inteiro): $x_d[n] = x[Mn]$

- Há perda de valores de $x[n]$!

5. Expansão pelo fator $L \geq 1$ (inteiro) :

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{quando } n/L \text{ é inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_e[0] = x[0], \underbrace{0, \dots, 0}_{L-1 \text{ zeros}}, x_e[L] = x[1], \underbrace{0, \dots, 0}_{L-1 \text{ zeros}}, x_e[2L] = x[2], \dots$$

- Não há perda de valores de $x[n]$!

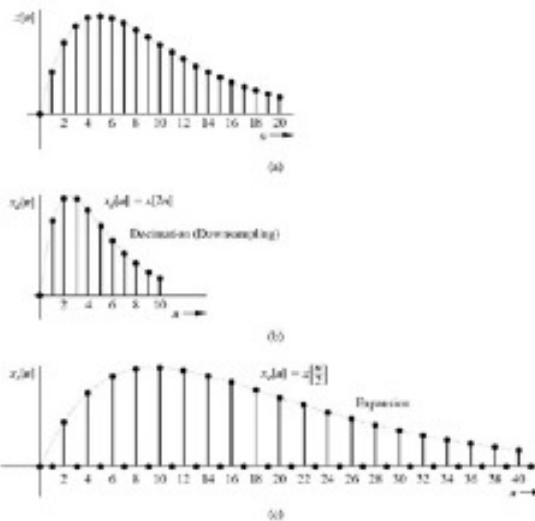
A decimação e a expansão de um sinal estão ilustradas na Figura 3.11.

3.5 ALGUNS MODELOS ÚTEIS EM TEMPO DISCRETO

1. Função Impulso Unitário ou delta de Kronecker $\delta[n]$: é o sinal definido por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

- Note que $\delta[n]$ é um sinal *usual*, ao contrário de $\delta(t)$!

Figura 3.11: Decimação e expansão de $x[n]$ pelo fator $M = L = 2$.

Propriedades

a) $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n], \quad x[n]\delta[n-m] = x[m]\delta[n-m]$

b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-m] = 1$

c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-m] = x[m]$

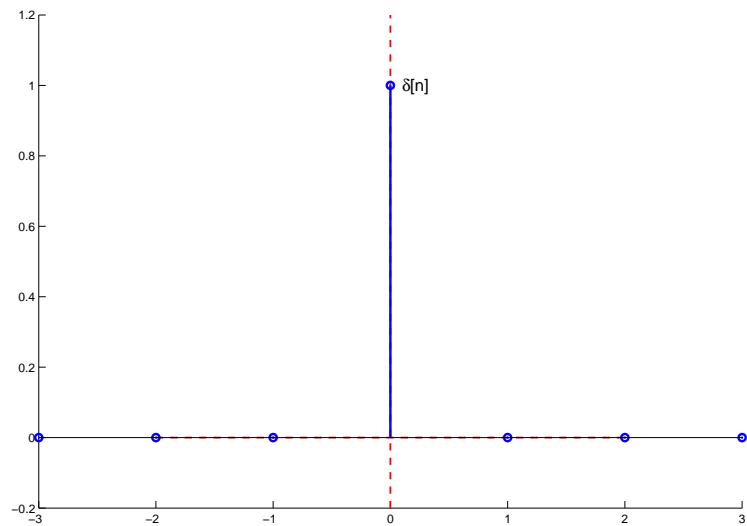
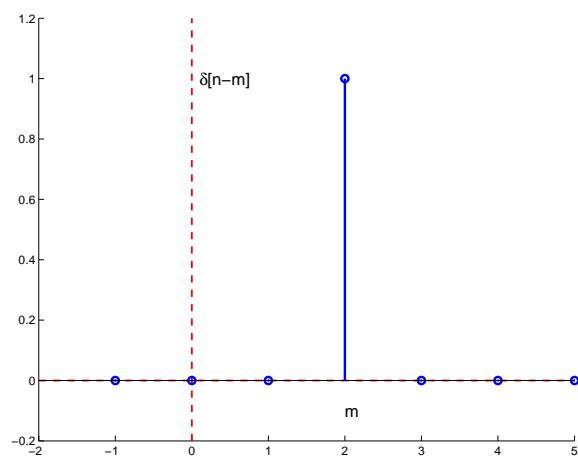
2. Função Degrau Unitário $u[n]$: é o sinal definido por

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Exemplos

① $\delta[n] =$ Figura 3.12

$\delta[n-m] =$ Figura 3.13

Figura 3.12: Gráfico do impulso unitário $\delta[n]$.Figura 3.13: Gráfico de $\delta[n - m]$.

(2) $u[n] =$ Figura 3.14

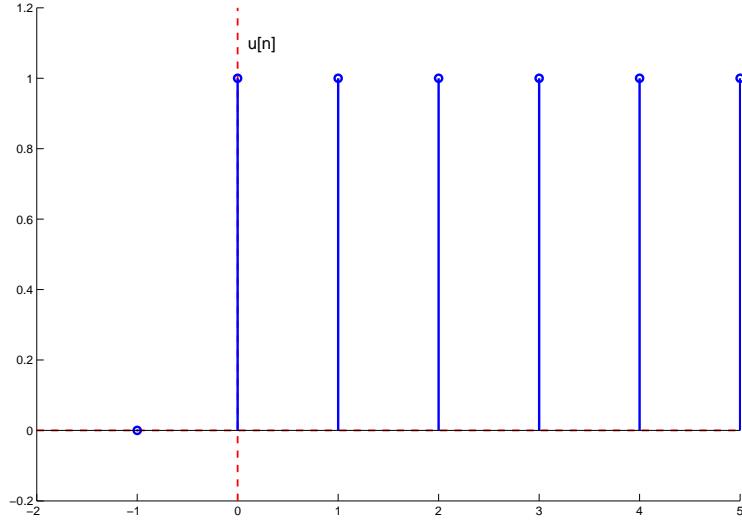


Figura 3.14: Gráfico do degrau unitário $u[n]$.

(3) Pulso retangular entre a e b , $a \leq b$ (cuidado!):

$$\begin{aligned} x[n] &= u[n-a] - u[n-(b+1)] \\ &= u[n-a] - u[n-1-b], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{veja a Figura 3.15}) \\ &= \sum_{m=a}^{b} \delta[n-m] \end{aligned}$$

(4) $\delta[n-m] = u[n-m] - u[n-(m+1)]$ (veja a Figura 3.16)

(5) $x[n] =$ Figura 3.17

$$\begin{aligned} x_1[n] &= n(u[n-1] - u[n-5]) \text{ ou } x_1[n] = n(u[n] - u[n-5]) \\ x_2[n] &= 4(u[n-5] - u[n-11]) \\ x_3[n] &= 2\delta[n-8] \text{ ou } x_3[n] = 2(u[n-8] - u[n-9]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x[n] &= x_1[n] + x_2[n] - x_3[n] \\ x[n] &= n(u[n-1] - u[n-5]) + 4(u[n-5] - u[n-11]) \\ &\quad - \underbrace{2(u[n-8] - u[n-9])}_{=\delta[n-8]} \end{aligned}$$

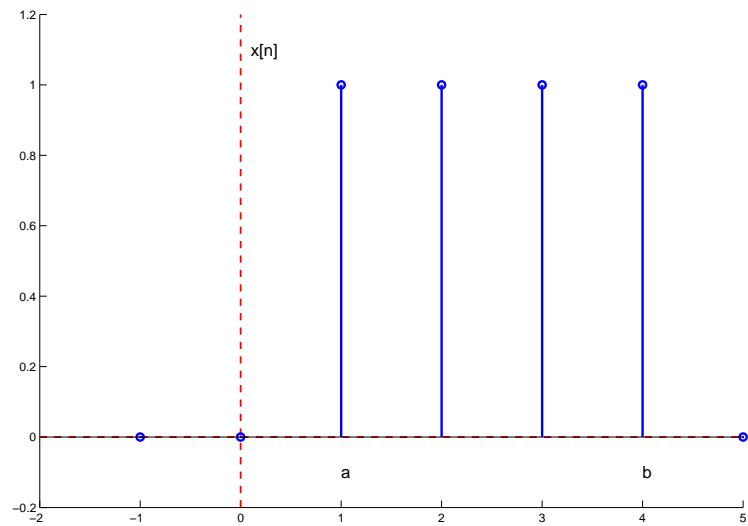


Figura 3.15: Pulso retangular entre a e b. **Cuidado!**

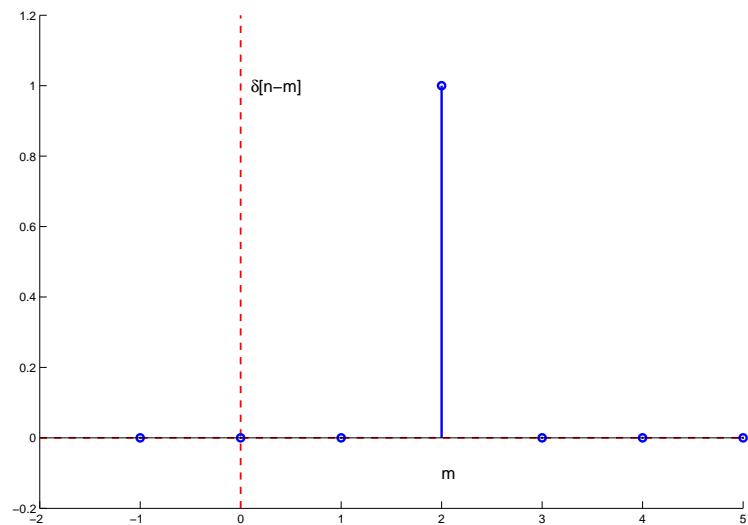
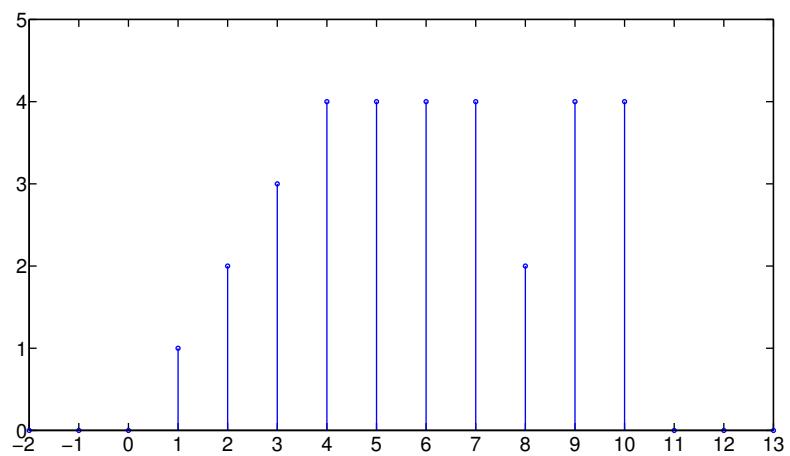


Figura 3.16: $\delta[n-m] = u[n-m] - u[n-(m+1)]$ (pulso retangular entre $a = m$ e $b = m$).

Figura 3.17: Gráfico de $x[n]$ do Exemplo 5.

3. Exponencial γ^n

- $\gamma \neq 0$ real: é o sinal definido por

$$x[n] = \gamma^n = e^{\lambda n} = (e^\lambda)^n \ (\gamma > 0) \quad \text{ou} \quad x[n] = (\gamma)^n = (-e^\lambda)^n \ (\gamma < 0)$$

onde $|\gamma| = e^\lambda$ ou $\lambda = \ln |\gamma|$. Logo,

- $|\gamma| < 1$ (dentro do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow \lambda < 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 0$
- $|\gamma| > 1$ (fora do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow x[n]$ é ilimitado
- $|\gamma| = 1$ (no Círculo Unitário) $\Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow |x[n]| = 1$

- $\gamma = e^\lambda$ com $\lambda = a + jb$: é o sinal definido por

$$x[n] = \gamma^n = (e^\lambda)^n = (e^{a+jb})^n = (e^a e^{jb})^n = (e^a)^n e^{jb n}$$

Note que $|\lambda| = |e^a||e^{jb}| = e^a$. Logo,

- $|\gamma| < 1$ (dentro do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 0$
- $|\gamma| > 1$ (fora do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow x[n]$ é ilimitado
- $|\gamma| = 1$ (no Círc. Unit.) $\Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x[n] = e^{jb n} \Leftrightarrow |x[n]| = 1$

Veja as Figuras 3.18 e 3.19.

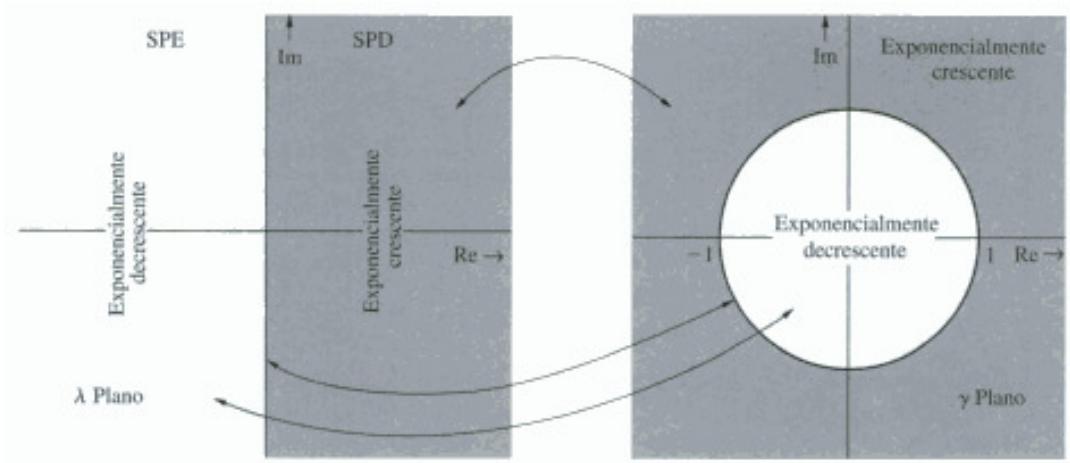


Figura 3.18: Plano λ e plano γ .

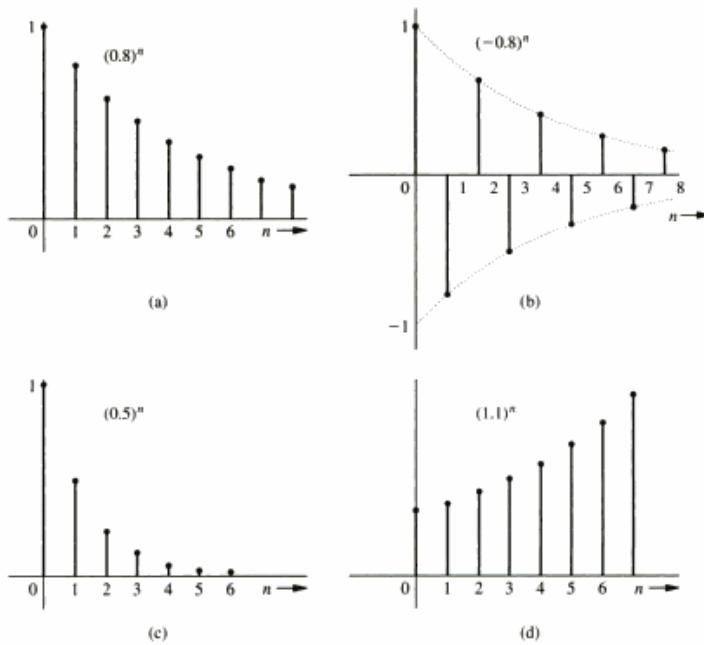


Figura 3.19: (a) $\gamma = 0.8 \Rightarrow$ dentro do Cir. Unit. (b) $\gamma = -0.8 \Rightarrow$ dentro do Cir. Unit. (c) $\gamma = 0.5 \Rightarrow$ dentro do Cir. Unit. (d) $\gamma = 1.1 \Rightarrow$ fora do Cir. Unit.

4. Exponencial complexa $e^{j\Omega n}$ com Ω real: é o sinal definido por

$$x[n] = e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega n$$

Cuidado! (veja as Seções 5.5-1 e 9.1 do Lathi)

$x[n] = e^{j\Omega n}$ é periódico $\Leftrightarrow \frac{\Omega}{2\pi}$ é racional

Relembre que $\gamma^{-n} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n$ para γ real.

Exemplos

1) $x[n] = 1^n u[n] = u[n]$ (veja a Figura 3.20)

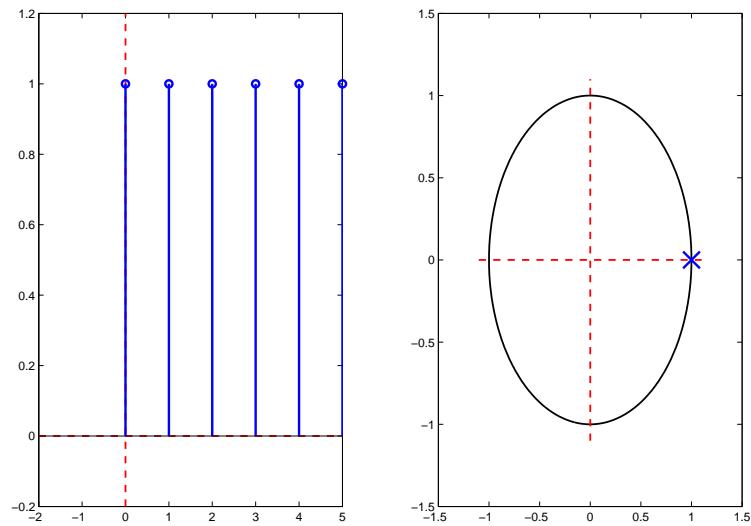
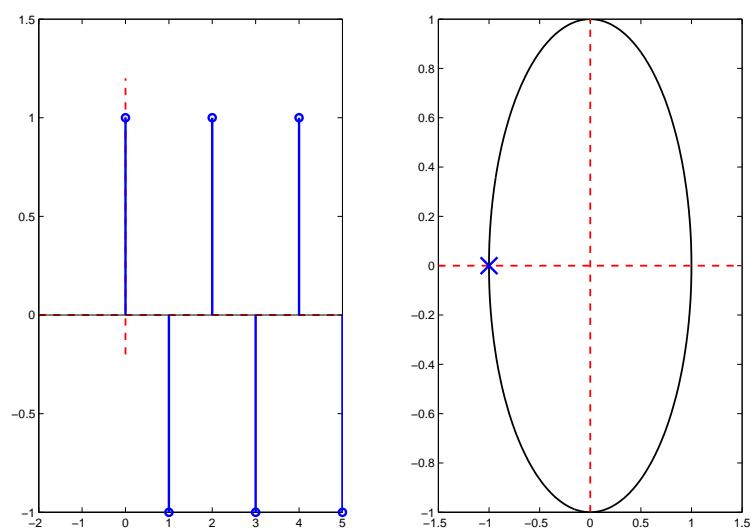
$$\gamma = 1$$

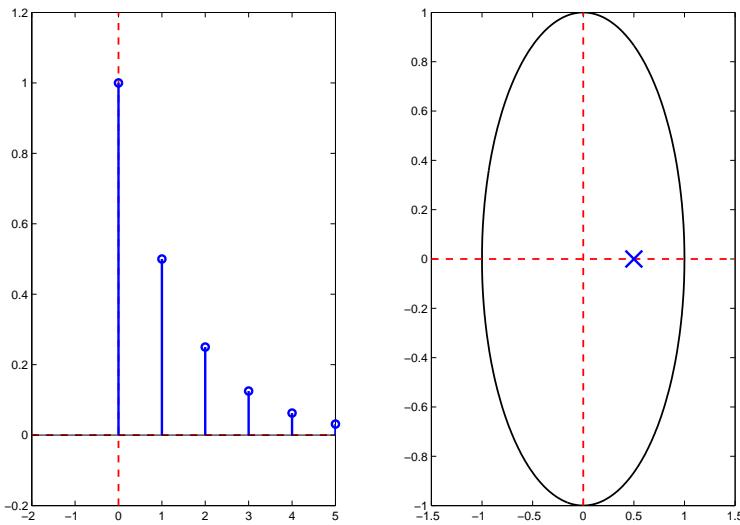
2) $x[n] = (-1)^n u[n]$ (veja a Figura 3.21)

$$\gamma = -1$$

3) $x[n] = 2^{-n} u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = (0,5)^n u[n]$ (veja a Figura 3.22)

$$\gamma = 0,5$$

Figura 3.20: Sinal $x[n] = 1^n u[n] = u[n]$.Figura 3.21: Sinal $x[n] = (-1)^n u[n]$.

Figura 3.22: Sinal $x[n] = 2^{-n}u[n] = (0,5)^n u[n]$

(4) $x[n] = e^{-2n} = (e^{-2})^n = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n \approx (0,1353)^n$

$\gamma = 0,1353 < 1$ (dentro)

(5) $x[n] = 2^n = (e^{1n} 2)^n = e^{0,6931n}$

$\gamma = 2 > 1$ (fora)

(6) $x[n] = e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$

$\gamma = -1$ (em cima)

$$e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$$

(7) $x[n] = e^{-(1+j\pi)n} = (e^{-1} e^{-j\pi})^n = \left(-\frac{1}{e}\right)^n$

$\gamma = e^{-(1+j\pi)}$, $|\gamma| = e^{-1} < 1$ (dentro do círculo unitário)

5. Senóide: é o sinal definido por

$$x[n] = C \cos(\Omega n + \theta) = C \cos(2\pi F n + \theta)$$

- $C \geq 0$ é a *amplitude*
- $\Omega > 0$ é a *frequência angular*
- θ é a *fase* (radianos)
- $F = \Omega/(2\pi)$ é a *frequência*
- $N_0 = 1/F = 2\pi/\Omega$ é o *período*

Cuidado! (veja as Seções 5.5-1 e 9.1 do Lathi)

$$x[n] = C \cos(\Omega n) \text{ é periódico} \Leftrightarrow \mathcal{F} = \frac{\Omega}{2\pi} \text{ é racional}$$

Exemplos:

- a) $x[n] = \sin(0.1\pi n)$ é periódica pois $0.1\pi/(2\pi) = 1/20$ é racional
- b) $x[n] = \sin(3n)$ não é periódica pois $3/(2\pi)$ não é racional
- c) $x(t) = \sin(3t)$, $T = 1.8 \Rightarrow x[n] = x(nT) = \sin(5.4n)$ não é periódica (e tem *frequência aparente menor!*)

3.6 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

Sinal Causal: quando $x[n]$ não começa antes de $n = 0$, ou seja, $x[n] = 0$ para todo $n < 0$.

Sinal Não-Causal: quando $x[n]$ não é causal. Isto significa que $x[n]$ começa antes de $n = 0$, ou seja, existe pelo menos *algum* $\bar{n} < 0$ tal que $x[\bar{n}] \neq 0$

Sinal Anti-Causal: quando $x[n] = 0$ para todo $n \geq 0$

Um sinal $x_e[n]$ é **par** quando, para todo n ,

$$x_e[n] = x_e[-n], \text{ (simetria em relação ao eixo vertical)}$$

Um sinal $x_o[n]$ é **ímpar** quando, para todo n ,

$$x_o[n] = -x_o[-n], \text{ (rebatimento diagonal do gráfico)}$$

Se $x[n]$ é ímpar, então $x[0] = -x[-0]$, ou seja, $x[0] = 0$. Portanto:

- $x[n]$ é ímpar $\Rightarrow x[0] = 0$
- $x[0] \neq 0 \Rightarrow x[n]$ não é ímpar

Exemplos:

1. $x[n] = C \cos[\Omega n]$ é par, pois $C \cos(\Omega n) = C \cos(-\Omega n)$
2. $x[n] = C \sin[\Omega n]$ é ímpar, pois $C \sin(\Omega n) = -C \sin(-\Omega n)$
3. $x[n] = n^p$, com $p > 0$ par, é um sinal par
4. $x[n] = n^p$, com $p > 0$ ímpar, é um sinal ímpar
5. O impulso $\delta[n]$ é par. Logo, $\delta[n] = \delta[-n]$ e $\delta[k-n] = \delta[n-k]$

Propriedades:

1. par \pm par = par
2. ímpar \pm ímpar = ímpar
3. par \times ímpar = ímpar
4. par \times par = ímpar \times ímpar = par
5. $1/\text{par} = \text{par}$ $1/\text{ímpar} = \text{ímpar}$

Componentes Pares e Ímpares de um Sinal: Seja $x[n]$ um sinal. Então, podemos decompor $x[n]$ como

$$x[n] = \underbrace{\frac{1}{2}(x[n] + x[-n])}_{x_e[n] \text{ é par}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x[n] - x[-n])}_{x_o[n] \text{ é ímpar}}$$

Note que:

- $x[n] = x_e[n]$ ($x_o[n] = 0$) $\Leftrightarrow x[n]$ é par
- $x[n] = x_o[n]$ ($x_e[n] = 0$) $\Leftrightarrow x[n]$ é ímpar

3.7 EXEMPLOS DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO

Exemplo 1 — Conta Bancária

n : mês

$x[n]$: depósito ($x[n] > 0$) ou saque ($x[n] < 0$) realizado no instante n

$y[n]$: saldo da conta no instante n após a contabilização de $x[n]$

r : taxa de juros por real

$$\therefore \underbrace{y[n]}_{\text{saldo atual}} = \underbrace{y[n-1]}_{\text{saldo anterior}} + \underbrace{ry[n-1]}_{\text{juros}} + x[n]$$

$$y[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]$$

$$(*) \quad \boxed{y[n] - (1+r)y[n-1] = x[n]} \quad \begin{cases} x[n] : \text{entrada} \\ y[n] : \text{saída} \end{cases}$$

sistema em tempo discreto
descrito por uma equação a diferenças
(forma operador atraso)

$$\begin{cases} n_0 = 0 : \text{instante inicial (mês atual)} \\ y[-1] : \text{condição inicial} \end{cases}$$

Dada uma entrada $x[n]$, $n \geq 0$, a saída $y[n]$, $n \geq 0$, do sistema é a solução de $(*)$ para uma certa condição inicial $y[-1]$.

Podemos reescrever a forma operador atraso (*) como

$$(**) \quad \boxed{\begin{array}{c} y[n+1] - (1+r)y[n] = x[n+1] \\ \text{saída adiantada} \qquad \qquad \qquad \text{entrada adiantada} \\ \hline \text{forma operador avanço} \end{array}}$$

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ y[-1] : \text{ condição inicial} \end{cases}$$

Temos que $y[n]$, $n \geq -1$, com $y[-1] = v_0$, é solução de (**) para $n \geq -1$ se e somente se é a solução de (*) para $n \geq 0$. Portanto, a forma operador atraso e a forma operador avanço são *equivalentes*, ou seja, descrevem o *mesmo sistema*.

Representação de (*) por um diagrama esquemático:

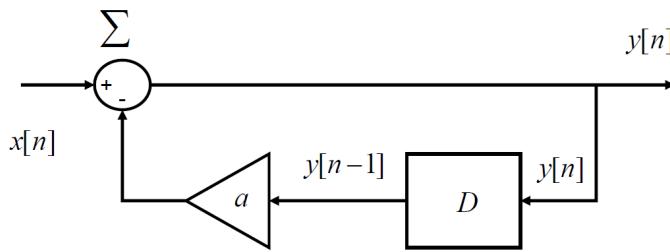


Figura 3.23: Diagrama esquemático de (*), onde $a = 1 + r$ é o ganho e D é o operador atraso (delay).

Considere que

$$\begin{aligned} y[-1] &= 10 \\ x[n] &= 1, \quad n \geq 0 \quad (\text{depósitos constantes}) \\ r &= 0,1 \quad (\text{taxa de juros de } 10\% \text{ ao mês}) \end{aligned}$$

Como podemos obter os saldos $y[n]$, $n \geq 0$, a partir de (*)?

Solução:

$$\begin{aligned} y[n] - (1+r)y[n-1] &= x[n] \\ (***) \quad \boxed{y[n] = 1,1y[n-1] + 1, \quad n \geq 0} \\ &\text{y[n] é calculada a partir de} \\ &\text{forma recursiva } \rightsquigarrow y[n-1] \text{ utilizando somente} \\ &\text{as 4 operações básicas!} \end{aligned}$$

$$\therefore y[0] = 1,1 \cdot y[-1] + 1 = 1,1 \cdot 10 + 1 = 12$$

$$y[1] = 1,1 \cdot y[0] + 1 = 14,2$$

$$y[2] = 1,1 \cdot y[1] + 1 = 16,62$$

⋮

Assim, $y[n]$, $n \geq 0$, é calculada recursivamente (iterativamente) na seguinte ordem:

$y[0], y[1], y[2], \dots, y[n-1], y[n]$] pode haver propagação de erros numéricos!

Agora, desejamos conhecer $y[n]$ para $n = 300$ (daqui a 25 anos!).

Problema: vamos ter que repetir o procedimento recursivo 300 vezes!

Solução: obter uma solução analítica (fechada) para $y[n]$, $n \geq 0$.

Veremos mais adiante que

$$y[n] = 22 \cdot 1,1^n - 10 \quad (\text{não recursiva!})$$

é a solução de (***) com $y[-1] = 10$.

Verificação:

$$\begin{aligned} y[n-1] &= 22 \cdot 1,1^{n-1} - 10 \\ 1,1y[n-1] + 1 &= 1,1(22 \cdot 1,1^{n-1} - 10) + 1 \\ &= 22 \cdot 1,1^n - 11 + 1 \\ &= 22 \cdot 1,1^n - 10 = y[n] \end{aligned}$$

e

$$y[-1] = 22 \cdot 1,1^{-1} - 10 = 10$$

Portanto,

$$\left. \begin{array}{l} y[0] = 22 \cdot 1,1^0 - 10 = 12 \\ y[1] = 22 \cdot 1,1^1 - 10 = 14,2 \\ y[2] = 22 \cdot 1,1^2 - 10 = 16,62 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como antes!} \\ \text{Não há iterações!} \\ \text{Mas necessita da} \\ \text{operação exponencial!} \end{array}$$

$$y[300] = 22 \cdot 1,1^{300} - 10 = \boxed{50,76 \times 10^{12} \text{ reais}}$$

Exemplo 2 — Integrador Digital: Discretização do Integrador Ideal

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (\text{integrador ideal}) \quad \begin{cases} x(t) : \text{entrada} \\ y(t) : \text{saída} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y[n] = y(nT) &= \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^n x(kT)T, \quad x[k] = x(kT), T > 0 \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} T \sum_{k=-\infty}^n x[k] \end{aligned}$$

Para $T \approx 0$, temos

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{forma não recursiva})$$

Mas,

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + Tx[n]$$

$\underbrace{\phantom{T \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]}}_{=y[n-1]}$

Logo,

$$y[n] = y[n-1] + Tx[n] \quad (\text{forma recursiva})$$

ou

| | |
|--|--|
| $y[n] - y[n-1] = Tx[n]$ descrição do sistema integrador por uma equação a diferenças | $\begin{cases} x[n] : \text{entrada} \\ y[n] : \text{saída} \end{cases}$ |
|--|--|

Método Alternativo:

Relembre que o sistema integrador é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$Dy(t) = x(t)$$

Seja $T > 0$, $y[n] = y(nT)$, $x[n] = x(nT)$. Logo,

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=nT} = x(nT) = x[n]$$

Mas, para $T \cong 0$,

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=nT} \approx \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

Portanto,

| |
|-------------------------|
| $y[n] - y[n-1] = Tx[n]$ |
|-------------------------|

A Figura 3.24 ilustra a implementação do integrador digital num microcontrolador.

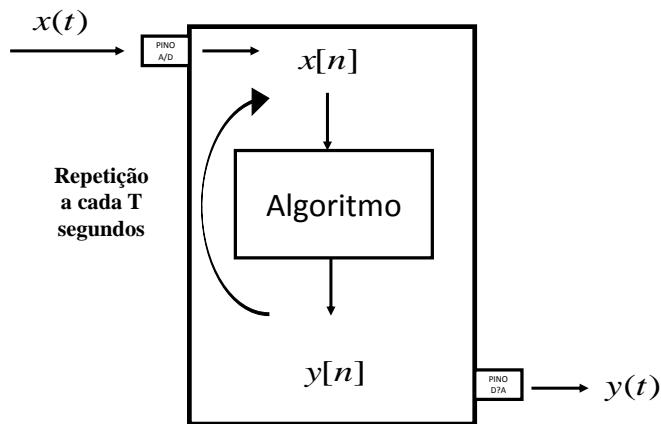


Figura 3.24: Implementação do integrador digital num microcontrolador.

3.8 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO

1. Sistemas Sem Memória e Com Memória

Sem Memória (ou Instantâneo): quando a saída no instante n depende apenas da entrada no instante n , ou seja, a saída em n *independe* dos valores da entrada antes de n e após n .

Com Memória (ou Dinâmico): quando o sistema não é sem memória. Isto significa que a saída no instante n *depende* de *algum* valor passado ou futuro da entrada.

2. Sistemas Causais e Não-Causais

Causal (ou Físico ou Não-Antecipativo): quando a saída no instante n *independe* dos valores da entrada após n (futuro).

Não-Causal (ou Antecipativo): quando o sistema não é causal. Isto significa que a saída no instante n *depende* de *algum* valor futuro da entrada.

Obs Todo *sistema real* deve ser *causal*. Sistemas não-causais não podem ser construídos (*realizados*) na prática. No entanto, alguns sistemas não-causais são vistos como sistemas ideais a serem aproximados por sistemas causais reais.

3. Sistemas Lineares e Não-Lineares

3.1 Sistemas Sem Memória

- *Linear:* quando o sistema satisfaz (k é real ou imaginário):
 - $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 \rightarrow y_3 = y_1 + y_2$ (*aditividade*)

b) $x \rightarrow y \Rightarrow \bar{x} = kx \rightarrow \bar{y} = ky$ (*homogeneidade*)

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

$$x_1 \rightarrow y_1 \text{ e } x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = k_1 x_1 + k_2 x_2 \rightarrow y_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

(princípio da superposição)

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear satisfaz: $x = 0 \rightarrow y = 0$. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x = 0 \rightarrow y = 0$.

Importante! Aditividade $\not\Rightarrow$ Homogeneidade

- *Não-Linear*: quando o sistema não é linear. Isto significa que *existe* (ao menos) uma entrada em que a saída do sistema não satisfaz a aditividade ou não satisfaz a homogeneidade.

3.2 Sistemas com Memória

Condição Inicial (ou *Estado Inicial*) $v[n_0]$ de um sistema com memória no instante n_0 : é a informação em n_0 que, juntamente com o conhecimento da entrada $x[n]$, $n \geq n_0$ (futuro), determina uma única saída $y[n]$ para todo $n \geq n_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro da saída, não importa a maneira como o sistema atingiu a condição inicial $v[n_0]$, ou seja, $v[n_0]$ contém toda a informação passada do sistema até o instante n_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} v[n_0], \\ x[n], \quad n \geq n_0 \end{array} \right\} \rightarrow y[n], \quad n \geq n_0$$

Resposta Entrada Nula $y_0[n]$: é a resposta do sistema quando $x[n] = 0, n \geq n_0$: $\boxed{v[n_0], x[n] = 0, n \geq n_0 \rightarrow y_0[n], n \geq n_0}$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}[n]$: é a resposta do sistema quando $v[n_0] = 0$: $\boxed{v[n_0] = 0, x[n], n \geq n_0 \rightarrow y_{esn}[n], n \geq n_0}$

- *Linear*: quando o sistema (com memória) satisfaz (k é real ou imaginário):

a) (*Aditividade*) Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1[n_0], \\ x_1[n], \quad n \geq n_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_1[n], \quad n \geq n_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2[n_0], \\ x_2[n], \quad n \geq n_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_2[n], \quad n \geq n_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} v_3[n_0] = v_1[n_0] + v_2[n_0], \\ x_3[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad n \geq n_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_3[n] = y_1[n] + y_2[n], \quad n \geq n_0$$

b) (*Homogeneidade*) Se

$$\left. \begin{array}{l} v[n_0], \\ x[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y[n], n \geq n_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}[n_0] = kv[n_0], \\ \bar{x}[n] = kx[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}[n] = ky[n], n \geq n_0$$

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

(*Princípio da Superposição*) Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1[n_0], \\ x_1[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1[n], n \geq n_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2[n_0], \\ x_2[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2[n], n \geq n_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} v_3[n_0] = k_1v_1[n_0] + k_2v_2[n_0], \\ x_3[n] = k_1x_1[n] + k_2x_2[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3[n] = k_1y_1[n] + k_2y_2[n], n \geq n_0$$

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear (com memória) satisfaz:

$$[v[n_0] = 0, x[n] = 0, n \geq n_0] \longrightarrow y[n] = 0, n \geq n_0$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $v[n_0] = 0, x[n] = 0, n \geq n_0 \rightarrow y[n] = 0, n \geq n_0$.

Importante! Aditividade $\not\Rightarrow$ Homogeneidade

- *Não-Linear*: quando o sistema (com memória) não é linear, ou seja, não satisfaz a aditividade *ou* não satisfaz a homogeneidade.

Obs Sistemas sem memória não possuem estado inicial. Para sistemas com memória, sempre assumimos que $v[-\infty] = 0$.

Concluímos então que resposta total $y[n], n \geq n_0$, de um *sistema linear com memória* é dada por $y[n] = y_0[n] + y_{esn}[n]$, ou seja:

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } v[n_0]} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } x[n]}$$

Propriedade de Decomposição

4. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

4.1 Sistemas sem Memória

- *Invariante no tempo*: quando

$$x[n] \rightarrow y[n] \Rightarrow \bar{x}[n] = x[n-M] \rightarrow \bar{y}[n] = y[n-M]$$

- *Variente no tempo*: quando não é invariante no tempo.

4.2 Sistemas com Memória

- *Invariante no tempo*: quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} v[n_0] = v_0, \\ x[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \rightarrow y[n], n \geq n_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}[t_0 + M] = v_0, \\ \bar{x}[n] = x[n - M], n \geq n_0 + M \end{array} \right\} \rightarrow \bar{y}[n] = y[n - M], n \geq n_0 + M$$

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial n_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $n_0 = 0$.

- *Variente no tempo*: quando não é invariante no tempo.

Propriedade (*será mostrada adiante*): Considere um sistema linear com memória causal invariante no tempo. Suponha que $x[n], n \in \mathbb{Z}$, é uma entrada causal e seja $M > 0$. Então $y_{esn}[n], n \in \mathbb{Z}$, é causal e:

$$\text{se } v[0] = 0, x[n], n \geq 0 \rightarrow y_{esn}[n], n \geq 0$$

$$\text{então } v[0] = 0, \bar{x}[n] = x[n - M], n \geq 0 \rightarrow \bar{y}_{esn}[n] = y_{esn}[n - M], n \geq 0$$

Isto significa que $x[n], n \geq 0 \rightarrow y_{esn}[n], n \geq 0$, se comporta como um sistema linear sem memória invariante no tempo!

5. Sistemas Invertíveis e Não-Invertíveis

Relembre que um sistema S associa uma única saída $y[n]$ para cada entrada $x[n]$, ou seja, corresponde a um mapeamento do conjunto de entradas no conjunto de saídas. Quando diferentes entradas geram diferentes saída, ou seja,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 \quad (\text{ou, equivalentemente, } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$$

dizemos que o sistema é *invertível*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *não-invertível*.

Note que dizer que um sistema é *invertível* é o mesmo que dizer que o mapeamento correspondente é *injetivo*. Neste caso, podemos, a princípio, determinar o *sistema inverso* S_i do sistema original S , o qual determina $x[n]$ a partir de $y[n]$. Desse modo, S em série com S_i resulta no *sistema identidade* ($y = x$).

6. Sistemas BIBO Estáveis e Instáveis

Um sinal $f[n]$ é *limitado* quando existe $M_f < \infty$ tal que

$$|f[n]| \leq M_f < \infty, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

ou, de maneira equivalente,

$$-M_f \leq f[n] \leq M_f, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Propriedades:

- a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \infty$, então $f[n]$ é *ilimitado*.
- b) Se $f[n] = 0$ para $n < n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = c$, então $f[n]$ é *limitado*.

Dizemos que um sistema é *BIBO estável* quando *toda* entrada limitada resultar numa saída limitada. Caso contrário, dizemos que o sistema é *BIBO instável*. Isto significa que *existe* (ao menos) uma entrada $x[n]$ limitada em que a saída $y[n]$ é ilimitada.

Exemplos

① $y[n] = \cos[n]x[n - 1]$

- com memória
- causal
- linear?

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = \cos[n]x_1[n - 1]$$

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = \cos[n]x_2[n - 1]$$

$$x_3[n] = K_1x_1[n] + K_2x_2[n] \longrightarrow y_3[n] = \cos[n]x_3[n]$$

$$y_3[n] = \cos[n](K_1x_1[n - 1] + K_2x_2[n - 1])$$

$$= K_1 \underbrace{\cos[n]x_1[n - 1]}_{y_1[n]} + K_2 \underbrace{\cos[n]x_2[n - 1]}_{y_2[n]}$$

$$= K_1y_1[n] + K_2y_2[n]$$

\therefore é linear

- invariante?

$$x[n] \rightarrow y[n] = \cos[n]x[n-1]$$

Logo,

$$\begin{aligned} y[n-M] &= \cos[n-M]x[n-M-1] \\ \bar{x}[n] = x[n-M] &\rightarrow \bar{y}[n] = \cos[n]\bar{x}[n] = \cos[n]x[n-M] \end{aligned} \quad] \neq$$

\therefore é variante no tempo

- BIBO estável?

Suponha que $x[n]$ é limitado, ou seja, existe $M_x \geq 0$ tal que

$$|x[n]| \leq M_x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Então,

$$|y[n]| = |\cos[n]x[n-1]| = |\cos[n]||x[n-1]| \leq 1 \cdot M_x = M_x = M_y$$

\therefore é BIBO estável

- é invertível?

Se

$$x_1[\bar{n}] \neq x_2[\bar{n}], \quad \text{para algum } \bar{n} \in \mathbb{Z},$$

então

$$y_1[\bar{n}+1] = \underbrace{\cos[\bar{n}+1]}_{\neq 0} x_1[\bar{n}] \neq \underbrace{\cos[\bar{n}+1]}_{\neq 0} x_2[\bar{n}] = y_2[\bar{n}+1]$$

\therefore é invertível

O sistema inverso é dado por

$$y_i[n] = \frac{1}{\underbrace{\cos[n+1]}_{\neq 0}} x_i[n+1] \quad (\text{não-causal!})$$

(2) $y[n] = x[2n] \quad (\text{decimação})$

É não invertível pois compressão no tempo causa perda de dados! Por exemplo, considere os sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ mostrados na Figura 3.25. Note que $x_1 \neq x_2$. No entanto,

$$y_1[n] = x_1[2n] = x_2[2n] = y_2[n] = u[n]$$

(3) $y[n] = x[n+1] \quad (\text{avanço unitário ideal})$

É não-causal. Portanto, não pode ser realizado (construído) na prática.

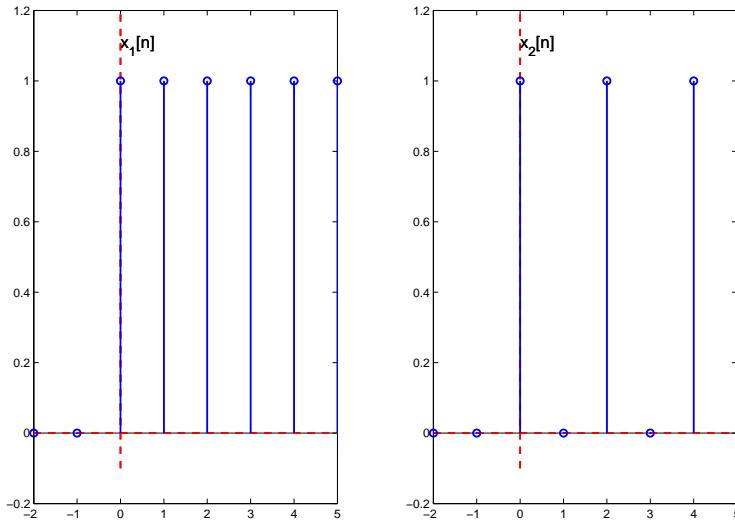


Figura 3.25: Exemplo 2.

$$(4) \quad y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{integrador digital})$$

É com memória e causal.

3.9 EQUAÇÕES DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO

Considere um sistema em tempo discreto descrito por uma equação a diferenças na forma operador *avanço*

$$\begin{aligned} y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \cdots + a_{N-1} y[n+1] + a_N y[n] \\ = b_{N-M} x[n+M] + \cdots + b_{N-1} x[n+1] + b_N x[n] \end{aligned} \quad (*)$$

onde $N \geq 1$, $M \geq 0$, e os coeficientes (*parâmetros*) a_i, b_i são constantes ou dependentes do tempo t . Pode-se mostrar que tal sistema é *linear* e *com memória*. De agora em diante, vamos considerar que $x[n_0 - N] = x[n_0 - N + 1] = \cdots = x[n_0 - 1] = 0$. O *estado inicial* no instante n_0 é o vetor

$$v[n_0] = (y[n_0 - N] \dots y[n_0 - 2] \ y[n_0 - 1]) \in \mathbb{R}^N.$$

Se $N \geq M$, então o sistema é *causal*. E, se $M > N$, então o sistema é *não-causal*. Quando todos os parâmetros a_i, b_i em (*) são constantes, o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, é *variante*. Denominamos $\max(N, M)$ de *ordem* do sistema.

Exemplo: $y[n+2] - 2y[n+1] + 3y[n] = 5x[n+1] + x[n]$ ($N = 2, M = 1$) é um sistema LDIT (Linear em tempo Discreto Invariante no Tempo) causal de 2a ordem

Agora, atrasando ambos os lados de (*) por N , obtemos a forma operador atraso

$$\begin{aligned} y[n] + a_1y[n-1] + \dots + a_{N-1}y[n-N+1] + a_Ny[n-N] \\ = b_{N-M}x[n+M-N] + \dots + b_{N-1}x[n-N+1] + b_Nx[n-N] \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Suponha que especificamos um *estado inicial* do sistema em n_0

$$v[n_0] = (y[n_0-N] \dots y[n_0-2] \ y[n_0-1]) \in \mathbb{R}^N,$$

e que escolhemos uma *entrada*

$$x[n], \ n \geq n_0.$$

Temos que um sinal discreto $y[n], n \geq n_0 - N$, com $(y[n-N] \dots y[n-2] \ y[n-1])|_{n=n_0} = v[n_0]$ satisfaz (*) para todo $n \geq n_0 - N$ se e somente se satisfaz (**) para todo $n \geq n_0$. Isto significa que (*) e (**) possuem as mesmas soluções, ou seja, descrevem o mesmo sistema!

Suponha que $N = M$ (sistema causal). Rescrevemos (**) como

$$\begin{aligned} y[n] = -a_1y[n-1] - \dots - a_{N-1}y[n-N+1] - a_Ny[n-N] \\ + b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_{N-1}x[n-N+1] + b_Nx[n-N] \end{aligned}$$

Portanto, a solução $y[n], n \geq n_0 - N$, desta equação a diferenças pode ser obtida recursivamente (iterativamente) a partir de $v[n_0]$ e da entrada $x[n], n \geq n_0$.

Exemplo: Considere o sistema LDIT descrito por

$$y[n+2] - y[n+1] + 0.24y[n] = x[n+2] - 2x[n+1]$$

com $n_0 = 0, v[0] = (y[-2] \ y[-1]) = (1 \ 2)$ e $x[n] = nu[n], n \in \mathbb{Z}$ (entrada causal). Logo,

$$\begin{aligned} y[n] &= y[n-1] - 0.24y[n-2] + x[n] - 2x[n-1] \\ y[0] &= y[-1] - 0.24y[-2] + x[0] - 2x[-1] = 1.76 \quad (n = 0) \\ y[1] &= y[0] - 0.24y[-1] + x[1] - 2x[0] = 2.28 \quad (n = 1) \\ y[2] &= y[1] - 0.24y[0] + x[2] - 2x[1] = 1.8576 \quad (n = 2) \\ \text{e assim por diante ...} \end{aligned}$$

3.10 SISTEMAS LDIT

Considere um *sistema linear em tempo discreto invariante no tempo (LDIT)* em que a *relação entrada-saída* é descrita por uma equação a diferenças na forma operador *avanço*

$$\begin{aligned} y[n+N] + a_1y[n+N-1] + \cdots + a_{N-1}[n+1]y + a_Ny[n] \\ = b_0x[n+N] + b_1x[n+N-1] + \cdots + b_{N-1}x[n+1] + b_Nx[n] \end{aligned}$$

onde $N = M$ (*causal*) e os parâmetros a_i, b_i são *constantes e reais*. Assim, N é a *ordem* do sistema. Utilizando o operador *avanço unitário E* ($Ef[n] = f[n+1], E^2f[n] = f[n+2], \dots$), podemos rescrever tal equação como

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

onde

$$\begin{aligned} Q(E) &= E^N + a_1E^{N-1} + \cdots + a_{N-1}E + a_N \\ P(E) &= b_0E^N + b_1E^{N-1} + \cdots + b_{N-1}E + b_N \end{aligned}$$

O estado inicial do sistema em $n_0 = 0$ é o *vetor*

$$v_0 = (y[-N] \dots y[-2] \ y[-1]) \in \mathbb{R}^N$$

Isto significa que

$$\left. \begin{array}{l} v_0, \\ x[n], \ n \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y[n], \ n \geq 0$$

Como o sistema é *linear*, sabemos que a *resposta total* $y[n]$, $n \geq 0$, é dada por

| | | |
|---|--|---|
| $\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y[n]}$ | $\underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0[n] \ (x=0)}$ | $\underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}[n] \ (v_0=0)}$ |
|---|--|---|

Propriedade de Decomposição

Obs Para efeitos de cálculo de $y_{esn}[n]$, $n \geq 0$, considera-se que $x[n] = 0$, $n < 0$ (*entrada causal!*).

A saída correspondente do sistema é o (*único*) sinal discreto $y[n]$, $n \geq -N$, tal que:

1. $(y[n-N] \dots y[n-2] \ y[n-1])|_{n=0} = v_0$ e, para todo $n \geq -N$,

$$\begin{aligned} y[n+N] + a_1y[n+N-1] + \cdots + a_{N-1}[n+1]y + a_Ny[n] \\ = b_0x[n+N] + b_1x[n+N-1] + \cdots + b_{N-1}x[n+1] + b_Nx[n] \end{aligned}$$

2. A resposta estado nulo satisfaz $y_{esn}[n] = 0, n < 0$. A resposta entrada nula $y_0[n], n \in \mathbb{Z}$, é a solução da equação a diferenças homogênea

$$Q(E)y_0[n] = (E^N + a_1E^{N-1} + \dots + a_{N-1}E + a_N)y_0[n] = 0$$

$$\text{com } (y_0[-N] \dots y_0[-2] \ y_0[-1]) = v_0.$$

Obs $y_0[n]$ e $y_{esn}[n]$ são determinados de maneira independente.

3.11 RESPOSTA ENTRADA NULA

Considere o sistema LDIT causal ($N = M$)

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial $v_0 = (y[-N] \dots y[-2] \ y[-1]) \in \mathbb{R}^N$.

Desse modo, a resposta entrada zero $y_0[n], n \in \mathbb{Z}$, é a solução da equação a diferenças homogênea

$$Q(E)y_0[n] = (E^N + a_1E^{N-1} + \dots + a_{N-1}E + a_N)y_0[n] = 0$$

$$\text{com } (y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0.$$

- $Q(\gamma) = \gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + \dots + a_{N-1}\gamma + a_N$: polinômio característico do sistema (grau N !!!)
- $Q(\gamma) = (\gamma - \gamma_1)\dots(\gamma - \gamma_N) = 0$: equação característica
- $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{C}$: raízes características (ou valores característicos, auto-valores, frequências naturais)
- Raízes características $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ distintas e reais: temos que

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + \dots + c_N\gamma_N^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ou seja, $y_0[n]$ é uma combinação linear dos N modos característicos (ou modos naturais) $\gamma_1^n, \dots, \gamma_N^n$. Os N coeficientes reais c_1, \dots, c_N são determinados a partir da condição $(y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0$.

- Raízes características $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ repetidas e reais: quando a raiz característica γ_1 tem multiplicidade $r \geq 1$, temos que

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + c_2n\gamma_1^n + \dots + c_rn^{r-1}\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \dots + c_N\gamma_N^n,$$

ou seja, $y_0[n]$ é uma combinação linear dos N modos característicos $\gamma_1^n, n\gamma_1^n, \dots, n^{r-1}\gamma_1^n, \gamma_{r+1}^n, \dots, \gamma_N^n$. No caso de existirem várias raízes características com multiplicidade maior que 1, a expressão para $y_0[n]$ é análoga.

- *Raízes características* $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ *complexas:* As raízes complexas do polinômio característico

$$Q(\gamma) = \gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + a_{N-1}\gamma + a_N$$

sempre ocorrem em pares complexos conjugados, pois os coeficientes a_i são reais. Logo, se $Q(\gamma) = 0$ com γ complexo, então $Q(\gamma^*) = 0$. Suponha que $\gamma_1 = |\gamma_1|e^{j\beta_1}$ (forma polar com β_1 em rad) é uma raiz característica *complexa* do sistema de multiplicidade $r = 1$. Neste caso,

$$|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], \quad |\gamma_1|^n \sin[\beta_1 n]$$

são os *dois modos característicos* do sistema associado a γ_1 complexo.

Por exemplo, se $\gamma_1, \gamma_2 = \gamma_1^*, \gamma_3, \dots, \gamma_N$ são raízes características com $\gamma_3, \dots, \gamma_N$ *reais e distintas*, então

$$y_0[n] = c_1|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n] + c_2|\gamma_1|^n \sin[\beta_1 n] + c_3\gamma_3^n + \dots + c_N\gamma_N^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde os N coeficientes *reais* $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N$ são determinados a partir da condição $(y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0$.

De maneira semelhante, se $\gamma_1 = |\gamma_1|e^{j\beta_1}$ é *complexo* e tem multiplicidade $r \geq 1$, então

$$\begin{aligned} &|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], \quad |\gamma_1|^n \sin[\beta_1 n], \\ &n|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], \quad n|\gamma_1|^n \sin[\beta_1 n], \\ &\vdots \quad \vdots \\ &n^{r-1}|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], \quad n^{r-1}|\gamma_1|^n \sin[\beta_1 n] \end{aligned}$$

são os $2r$ *modos característicos* do sistema associados a γ_1 .

Em resumo: $y_0[n]$ é sempre uma combinação linear (com N coeficientes *reais*) dos N modos característicos do sistema. Os N coeficientes da tal combinação linear sempre existem, são *únicos*, e são obtidos a partir de um *sistema de equações lineares* determinado pela condição $(y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0$.

Portanto, quando $x[n] = 0, n \geq 0$ (entrada nula), então $y[n] = y_0[n], n \geq 0$, fica *completamente determinada* pela condição *inicial* v_0 e pelos *modos característicos* do sistema!

Obs 1 Quando $v_0 = 0$, então $y_0[n] = 0, n \in \mathbb{Z}$, ou seja a resposta entrada nula é *zero!* Logo, se $v_0 = 0$, então $y[n] = y_{\text{esn}}[n], n \geq 0$ (como teria que ser!)

Obs 2 Suponha que $\gamma > 0$ (real). Então $\gamma = e^{\ln(\gamma)}$. Portanto, $\gamma^n = e^{n \ln(\gamma)}$. Do mesmo modo, considere que $\bar{\gamma} = -\gamma$ com $\gamma > 0$. Então, $\gamma = e^{\ln(\gamma)}$. Logo, $(\bar{\gamma})^n = (-\gamma)^n = (-1)^n \gamma^n = (-1)^n e^{n \ln(\gamma)}$.

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$$

$$\begin{cases} Q(E) = E^2 - 0,6E - 0,16 \\ P(E) = 5E^2 \end{cases}$$

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

$$y[-1] = 0, \quad y[-2] = 2^{5/4} \quad \therefore \quad v_0 = [2^{5/4} \ 0]$$

$$y_0[n] = ?$$

$$Q(\gamma) = \gamma^2 - 0,6\gamma - 0,16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -0,2 \\ \gamma_2 = 0,8 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{reais e} \\ \text{distintas} \end{array} \right\}$$

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n$$

$$y_0[n] = c_1(-0,2)^n + c_2(0,8)^n$$

$$0 = y_0[-1] = c_1(-0,2)^{-1} + c_2(0,8)^{-1} = -5c_1 + \frac{5}{4}c_2$$

$$\frac{25}{4} = y_0[-2] = c_1(-0,2)^{-2} + c_2(0,8)^{-2} = 25c_1 + \frac{25}{16}c_2$$

$$\begin{cases} -5c_1 + \frac{5}{4}c_2 = 0 \\ 25c_1 + \frac{25}{16}c_2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} c_1 = 0,2 \\ c_2 = 0,8 \end{cases}}$$

$$\therefore \boxed{y_0[n] = 0,2(-0,2)^n + 0,8(0,8)^n, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_0[n] = 0$.

$$\textcircled{2} \quad y[n+2] + 6y[n+1] + 9y[n] = 2x[n+2] + 6x[n+1]$$

$$y[-1] = -1/3, \quad y[-2] = -2/9 \quad \therefore \quad v_0 = [-2/9 \ -1/3]$$

$$\begin{cases} Q(E) = E^2 + 6E + 9 \\ P(E) = 2E^2 + 6E \end{cases}$$

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

$$y_0[n] = ?$$

$$Q(\gamma) = \gamma^2 + 6\gamma + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = \gamma_2 = -3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{reais e} \\ \text{repetidas} \end{array} \right\}$$

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + c_2n\gamma_1^n$$

$$y_0[n] = c_1(-3)^n + c_2n(-3)^n$$

$$-\frac{1}{3} = y_0[-1] = c_1(-3)^{-1} + c_2(-1)(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2$$

$$-\frac{2}{9} = y_0[-2] = c_1(-3)^{-2} + c_2(-2)(-3)^{-2} = +\frac{1}{9}c_1 - \frac{2}{9}c_2$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{9}c_1 - \frac{2}{9}c_2 = -\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 3 \end{cases}}$$

$$\therefore \boxed{y_0[n] = 4(-3)^n + 3n(-3)^n, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

$$(3) \quad y[n] - 1,56y[n-1] + 0,81y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$$

(operador atraso!)

Anançando os dois lados da equação por 2, obtemos

$$y[n+2] - 1,56y[n+1] + 0,81y[n] = x[n+2] + 3x[n+1]$$

(operador avanço!)

$$\begin{cases} Q(E) = E^2 - 1,56E + 0,81 \\ P(E) = E^2 + 3E \end{cases}$$

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

$$y[-1] = 2, \quad y[-2] = 1 \quad \therefore \quad v_0 = [1 \ 2]$$

$$y_0[n] = ?$$

$$Q(\gamma) = \gamma^2 - 1,56\gamma + 0,81 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_{1,2} = 0,78 \pm j0,45} \text{ complexas!}$$

$$\gamma_1 = 0,78 + j0,45 = \underbrace{0,9e^{j(\pi/6)}}_{\text{forma polar!}} = |\gamma_1|e^{j\beta_1}$$

$$y_0[n] = c_1|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n] + c_2|\gamma_1|^n \sin[\beta_1 n]$$

$$y_0[n] = c_1 0,9^n \cos \left[\frac{\pi}{6} n \right] + c_2 0,9^n \sin \left[\frac{\pi}{6} n \right]$$

$$\begin{aligned} 2 &= y_0[-1] = c_1 0,9^{-1} \cos \left[-\frac{\pi}{6} \right] + c_2 0,9^{-1} \sin \left[-\frac{\pi}{6} \right] \\ &= 0,9623c_1 - 0,5556c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= y_0[-2] = c_1 0,9^{-2} \cos \left[-\frac{\pi}{3} \right] + c_2 0,9^{-2} \sin \left[-\frac{\pi}{3} \right] \\ &= 0,6173c_1 - 1,0692c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0,9623c_1 - 0,5556c_2 = 2 \\ 0,6173c_1 - 1,0692c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = 2,3076 \\ c_2 = 0,3970 \end{array}}$$

$$\therefore \boxed{y_0[n] = 2,3076(0,9)^n \cos \left[\frac{\pi}{6} n \right] + 0,3970(0,9)^n \sin \left[\frac{\pi}{6} n \right], \quad n \in \mathbb{Z}}$$

ou

$$a = 2,3076$$

$$b = 0,3970$$

$$z = a - jb = \underbrace{2,3076 - j0,3970}_{4^\circ Q} = \underbrace{2,3415e^{-j0,17}}_{\text{forma polar}}$$

$$\therefore \boxed{y_0[n] = 2,3415(0,9)^n \cos \left[\frac{\pi}{6} n - 0,17 \right], \quad n \in \mathbb{Z}}$$

3.12 RESPOSTA $h[n]$ AO IMPULSO UNITÁRIO

Considere um sistema descrito por

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

onde ($N = M$)

$$\begin{aligned} Q(E) &= E^N + a_1E^{N-1} + \cdots + a_{N-1}E + a_N \\ P(E) &= b_0E^N + \cdots + b_{N-1}E + b_N \end{aligned}$$

Suponha que $x[n] = \delta[n]$, ou seja, aplicamos um impulso unitário em $n = 0$ no sistema. Nosso objetivo é determinar $h[n] = y_{\text{esn}}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, encontrar a *resposta estado nulo* do sistema quando $x[n] = \delta[n]$.

Denominamos $h[n]$ de *resposta ao impulso* ou *resposta impulsiva* do sistema.

- Quando $a_N \neq 0$, determinamos $h[n]$ da seguinte maneira:

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N}\delta[n] + y_c[n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde $y_c[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é uma *combinação linear* dos N *modos característicos* do sistema com coeficientes reais c_1, \dots, c_N . Para encontrarmos c_1, \dots, c_N , devemos resolver *recursivamente*

$$\begin{aligned} h[n] &= -a_1h[n-1] - \cdots - a_{N-1}h[n-N+1] - a_Nh[n-N] \\ &\quad + b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + \cdots + b_{N-1}\delta[n-N+1] + b_N\delta[n-N] \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$ com $h[-N] = \cdots = h[-2] = h[-1] = 0$.

- Quando $a_N = \cdots = a_{N-K-1} = 0$ mas $a_{N-K} \neq 0$ (lembre que $a_0 = 1!$), determinamos $h[n]$ da seguinte maneira:

$$h[n] = A_0\delta[n] + A_1\delta[n-1] + \cdots + A_K\delta[n-K] + y_c[n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde $y_c[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é uma *combinação linear* dos N *modos característicos* do sistema com coeficientes c_1, \dots, c_N . Para encontrarmos os $N+K+1$ coeficientes reais $A_0, A_1, \dots, A_K, c_1, \dots, c_N$, devemos resolver *recursivamente*

$$\begin{aligned} h[n] &= -a_1h[n-1] - \cdots - a_{N-1}h[n-N+1] - a_Nh[n-N] \\ &\quad + b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + \cdots + b_{N-1}\delta[n-N+1] + b_N\delta[n-N] \end{aligned}$$

para $n = 0, \dots, N+K$ com $h[-N] = \cdots = h[-2] = h[-1] = 0$.

Obs Note que a resposta impulsiva $h[n]$ é *causal* para $N \geq M$. Além disso, $h[n]$ é determinada pelos *modos característicos* do sistema!

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad y[n] - 0,6y[n-1] - 0,16y[n-2] = 5x[n]$$

$$\begin{cases} Q(E) = E^2 - 0,6E - 0,16 & (N=2, a_2 = -0,16 \neq 0) \\ P(E) = 5E^2 & (b_2 = 0) \end{cases}$$

$$h[n] = ?$$

$$Q(\gamma) = \gamma^2 - 0,6\gamma - 0,16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -0,2 \\ \gamma_2 = 0,8 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{reais e} \\ \text{distintas!} \end{array} \right\}$$

∴

$$y_c[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n$$

$$y_c[n] = c_1(-0,2)^n + c_2(0,8)^n$$

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N} \delta[n] + y_c[n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$h[n] = \frac{\overbrace{b_2}^{=0}}{\overbrace{a_2}^{=0}} \delta[n] + y_c[n]u[n]$$

$$h[n] = [c_1(-0,2)^n + c_2(0,8)^n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

$$h[n] = 0,6h[n-1] + 0,16h[n-2] + 5\delta[n] \quad (**)$$

Devemos obter $h[0]$ e $h[1]$ recursivamente a partir de $(**)$ para então encontrar c_1 e c_2 através do sistema de equações lineares determinado por $(*)$. Assim,

$$h[0] = 0,6 \overbrace{h[-1]}^{=0} + 0,16 \overbrace{h[-2]}^{=0} + 5 \overbrace{\delta[0]}^{=1} = 5$$

$$h[1] = 0,6 \overbrace{h[0]}^{=5} + 0,16 \overbrace{h[-1]}^{=0} + 5 \overbrace{\delta[1]}^{=0} = 3$$

$$5 = h[0] = [c_1(-0,2)^0 + c_2(0,8)^0] \underbrace{u[0]}_{=1} = c_1 + c_2$$

$$3 = h[1] = [c_1(-0,2)^1 + c_2(0,8)^1] \underbrace{u[1]}_{=1} = -0,2c_1 + 0,8c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 5 \\ -0,2c_1 + 0,8c_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 4 \end{array}}$$

$$\therefore h[n] = [(-0,2)^n + 4(0,8)^n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

é causal!

$$(2) \quad y[n+1] - y[n] = x[n]$$

$$\begin{cases} Q(E) = E - 1 & (N = 1, a_1 = -1 \neq 0) \\ P(E) = 1 & (b_1 = 1) \end{cases}$$

$$Q(\gamma) = \gamma - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

$$\begin{cases} h[n] = \frac{b_1}{a_1} \delta[n] + y_c[n]u[n] = -\delta[n] + y_c[n]u[n] \\ y_c[n] = c\gamma^n = c1^n = c \end{cases}$$

$$h[n+1] - h[n] = \delta[n]$$

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n-1]$$

$$\begin{cases} h[n] = h[n-1] + \delta[n-1] \\ h[-1] = 0 \end{cases}$$

∴

$$h[0] = h[-1] + \delta[-1] = 0$$

$$0 = h[0] = -\underbrace{\delta[0]}_{=1} + \underbrace{y_c[0]}_{=c} \underbrace{u[0]}_{=1} = -1 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\therefore \boxed{h[n] = -\delta[n] + u[n] = u[n-1], n \in \mathbb{Z}}$$

$$(3) \quad y[n] = y[n-1] + 2x[n] - 2x[n-2]$$

$$\therefore y[n+2] - y[n+1] = 2x[n+2] - 2x[n]$$

$$\begin{cases} Q(E) = E^2 - E & (N = 2, \boxed{a_2 = 0}, a_1 = -1 \neq 0, K = 1) \\ P(E) = 2E^2 - 2E \end{cases}$$

$$Q(\gamma) = \gamma^2 - \gamma = \gamma(\gamma - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \gamma_1 = 1 \\ \gamma_2 = 0 \end{array}}$$

$$y_c[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n = c_11^n + c_20^n = c_1$$

$$h[n] = A_0\delta[n] + A_1\delta[n-1] + y_c[n]u[n]$$

$$\boxed{h[n] = A_0\delta[n] + A_1\delta[n-1] + c_1u[n]}$$

$$\begin{cases} h[n] = h[n-1] + 2\delta[n] = 2\delta[n-2] \\ h[-2] = h[-1] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h[0] = h[-1] + 2\delta[0] - 2\delta[-2] = 2 \\ h[1] = h[0] + 2\delta[1] - 2\delta[-1] = 2 \\ h[2] = h[1] + 2\delta[2] - 2\delta[0] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = h[0] = A_0\delta[0] + A_1\delta[-1] + c_1u[0] = A_0 + c_1 \\ 2 = h[1] = A_0\delta[1] + A_1\delta[0] + c_1u[1] = A_1 + c_1 \\ 0 = h[2] = A_0\delta[2] + A_1\delta[1] + c_1u[2] = c_1 \end{cases}$$

$$\therefore A_0 = A_1 = 2, c_1 = 0$$

Logo,

$$h[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1], n \in \mathbb{Z}$$

Verificação: Temos $h[-2] = h[-1] = 0$. E, para $n \geq -2$,

$$\begin{aligned} h[n+2] - h[n+1] &= 2\delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 2\delta[n+1] - 2\delta[n] \\ &= 2\delta[n+2] - 2\delta[n] \end{aligned}$$

- (4) $y[n] = 2x[n] - 2x[n-2]$ (equação *não recursiva* pois o lado direito não depende dos valores passados $y[n-1], y[n-2], \dots$)

$$h[n] = ?$$

$$h[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-2], n \in \mathbb{Z}$$

3.13 RESPOSTA DO SISTEMA À ENTRADA EXTERNA: RESPOSTA ESTADO NULO

Considere um sistema LDIT com memória. Relembre que a *resposta total* $y[n]$, $n \geq n_0$, é dada por

$$\underbrace{Resposta\ Total}_{y[n]} = \underbrace{Resposta\ Entrada\ Nula}_{y_0[n]} + \underbrace{Resposta\ Estado\ Nulo}_{y_{esn}[n]}$$

Propriedade de Decomposição

Assuma que $n_0 = -\infty$. Relembre que $v[-\infty] = 0$ por hipótese. Assim, $y[n] = y_{esn}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ para uma dada entrada $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Como o impulso unitário $\delta[n]$ é uma função par, obtemos que

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[m-n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{entrada} &\longrightarrow \text{saída} \\ \delta[n] &\longrightarrow h[n] \quad (\text{resposta impulsiva}) \\ \delta[n-m] &\longrightarrow h[n-m] \quad (\text{invariância}) \\ x[m]\delta[n-m] &\longrightarrow x[m]h[n-m] \quad (\text{homogeneidade}) \end{aligned}$$

Portanto, usando a *propriedade de aditividade* (e assumindo continuidade na relação entrada-saída do sistema), concluímos que

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m] \longrightarrow y[n] = y_{esn}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \triangleq \underbrace{x[n]*h[n]}_{\text{convolução}}$$

Ao repetirmos o mesmo raciocínio acima considerando que $n_0 = 0$ e $v[0] = 0$, obtemos que

$$x[n], n \geq 0 \longrightarrow y_{\text{esn}}[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m], n \geq 0$$

Portanto, para *efeitos de cálculo*, podemos assumir (e é o que *sempre faremos!*) que $x[n] = 0$, $n < 0$ (*entrada causal!*), e assim

$$\begin{aligned} x[n], n \geq 0 \longrightarrow y_{\text{esn}}[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = x[n] * h[n], n \geq 0 \end{aligned}$$

3.14 O SOMATÓRIO DE CONVOLUÇÃO

Sejam $x_1[n], x_2[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, sinais reais. O *somatório de convolução* de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é o sinal real $c[n]$ definido por

$$c[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$$

(desde que a série seja *finita* para qualquer $n \in \mathbb{Z}$).

Obs 1 A variável do somatório é m , e não n !

Obs 2 Para calcularmos $c[\bar{n}]$ no instante \bar{n} , primeiro fazemos uma reversão temporal de $x_2[m]$ seguida de um deslocamento por \bar{n} , depois multiplicamos por $x_1[m]$, e então somamos de $-\infty$ a ∞ .

Obs 3 O valor de $c[\bar{n}]$ no instante \bar{n} depende do comportamento dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ em *todas* o eixo temporal \mathbb{Z} !

Propriedades Sejam $x_1[n], x_2[n], x_3[n]$, $t \in (-\infty, \infty)$, sinais reais e k um número real. Então:

1. $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$ (comutatividade)
2. $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$ (associatividade)
3. $x_1[n] * (x_2[n] \pm x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) \pm (x_1[n] * x_3[n])$ (distributividade)
4. Se $x_1[n] * x_2[n] = c[n]$, então

$$x_1[n] * x_2[n-M] = x_1[n-M] * x_2[n] = c[n-M]$$

$$x_1[n-M_1] * x_2[n-M_2] = c[n-M_1-M_2] = c[n-(M_1+M_2)]$$

(propriedade de deslocamento)

5. $x_1[n] * \delta[n] = x_1[n]$ ($\delta[n]$ é o elemento neutro da convolução)
6. $(kx_1[n]) * x_2[n] = x_1[n] * (kx_2[n]) = k(x_1[n] * x_2[n])$
7. Se $x_1[n]$ tem duração finita W_1 , e $x_2[n]$ tem duração finita W_2 , então $c[n] = x_1[n] * x_2[n]$ tem duração finita $W_1 + W_2$.

Considere um sistema descrito por

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial $v_0 = (y[-N] \dots y[-2] y[-1]) \in \mathbb{R}^N$ em $n_0 = 0$, onde ($N = M$)

$$\begin{aligned} Q(E) &= E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N \\ P(E) &= b_0 E^N + \dots + b_{N-1} E + b_N \end{aligned}$$

Relembre que este é um sistema LDIT com *memória e causal*, e que a resposta total $y[n], n \geq 0$, é dada por

| | | |
|-----------------------|------------------------------|-----------------------------|
| <u>Resposta Total</u> | <u>Resposta Entrada Nula</u> | <u>Resposta Estado Nulo</u> |
| $y[n]$ | $y_0[n] (x=0)$ | $y_{esn}[n] (v_0=0)$ |

Propriedade de Decomposição

Além disso, relembre que a *resposta impulsiva* $h[n]$ é *causal* e determinada a partir dos *modos característicos* do sistema.

Relembre, ainda, que para encontrarmos $y_{esn}[n], n \in \mathbb{Z}$, assumimos que $x[n] = 0$, para $n < 0$ (*entrada causal*). Ao seguirmos o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, encontramos que

$$\begin{aligned} y_{esn}[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = x[n] * h[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} x[m]h[n-m] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m] \end{aligned}$$

No entanto, como $x[n]$ e $h[n]$ são *causais*, temos que $x[m] = 0$, para $m < 0$, e $h[n-m] = 0$, para $n < m$. Portanto,

$$\begin{cases} n < 0 \Rightarrow x[m]h[n-m] = 0 \text{ para } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_{esn}[n] = 0 \\ n \geq 0 \Rightarrow x[m]h[n-m] = 0 \text{ para } m > n \Rightarrow y_{esn}[n] = \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] \end{cases}$$

Logo, a *resposta estado nulo* $y_{esn}[n], n \in \mathbb{Z}$, é *causal* e dada por

$$y_{esn}[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^n h[m]x[n-m], & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$y_{\text{esn}}[n] = \left(\sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] \right) u[n] = \left(\sum_{m=0}^n h[m]x[n-m] \right) u[n], n \in \mathbb{Z}$$

Obs 1 Relembre que a resposta impulsiva $h[n]$ é calculada a partir dos modos característicos do sistema. Desta maneira, concluímos que a *resposta estado nulo* $y_{\text{esn}}[n]$ fica *completamente determinada* pela *entrada* $x[n]$ e pelos *modos característicos*!

Obs 2 A resposta estado nulo possui o comportamento esperado:

- Se $x[n] = \delta[n]$, então $y_{\text{esn}}[n] = x[n] * h[n] = \delta[n] * h[n] = h[n]$, pois $\delta[n]$ é o elemento neutro da convolução.
- Se $x[n] = 0, n \in \mathbb{Z}$, então $y_{\text{esn}}[n] = x[n] * h[n] = 0, n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $y[n] = y_0[n], n \geq 0$.

Obs 3 $h[n]$ é o sinal tal que $y_{\text{esn}}[n] = x[n] * h[n]$ é a resposta estado nulo para a entrada $x[n]$.

Tabela de Convolução: veja a Tabela 3.1, p. 263, do Lathi. Por exemplo:

$$\gamma^n u[n] * u[n] = \left(\frac{1 - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma} \right) u[n] \quad (\text{Linha 2})$$

$$u[n] * u[n] = (n+1)u[n] \quad (\text{Linha 3})$$

$$\gamma_1^n u[n] * \gamma_2^n u[n] = \left(\frac{\gamma_1^{n+1} - \gamma_2^{n+1}}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) u[n], \quad \gamma_1 \neq \gamma_2 \quad (\text{Linha 4})$$

$$\gamma^n u[n] * \gamma^n u[n] = (n+1)\gamma^n u[n] \quad (\text{Linha 8})$$

Relembre que $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$ (*comutatividade*).

Exemplos

$$\begin{aligned}
 1) \quad (0,8)^{n+1} u[n] * u[n] &= 0,8(0,8)^n u[n] * u[n] \\
 &= 0,8((0,8)^n u[n] * u[n]) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{propriedade 6} \\
 &= 0,8 \left(\frac{1 - (0,8)^{n+1}}{1 - 0,8} \right) u[n] \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{Linha 2} \\
 &\quad \gamma = 0,8 \\
 &= \boxed{4(1 - 0,8(0,8)^n) u[n], \quad n \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad e^{-n}u[n] * 2^{-n}u[n] &= \left(\frac{1}{e}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\
 &= \left(\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{e} - \frac{1}{2}}\right) u[n] \\
 &\stackrel{\text{Linha 4}}{=} \left(\frac{\frac{1}{e}e^{-n} - \frac{1}{2}2^{-n}}{\frac{2-e}{2e}}\right) u[n] \\
 &= \boxed{\frac{2}{2-e} \left(e^{-n} - \frac{e}{2}2^{-n}\right) u[n], \quad n \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$$

$$x[n] = 4^{-n}u[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] = (0,25)^n u[n] \quad (\text{causal!})$$

$$(\text{Note que } \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 0)$$

$$y_{\text{esn}}[n] = ?$$

Temos que

$$\left. \begin{array}{l} Q(E) = E^2 - 0,6E - 0,16 \\ P(E) = 5E^2 \end{array} \right\} N = M \quad (\text{causal!})$$

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

Encontramos num exemplo anterior que

$$h[n] = [(-0,2)^n + 4(0,8)^n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 y_{\text{esn}}[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= (0,25)^n u[n] * [(-0,2)^n + 4(0,8)^n] u[n] \\
 &= (0,25)^n u[n] * (-0,2)^n u[n] + (0,25)^n u[n] * 4(0,8)^n u[n] \\
 &\stackrel{\downarrow}{=} \text{distributividade} \\
 &= \underbrace{(0,25)^n u[n]}_{\gamma_1} * \underbrace{(-0,2)^n u[n]}_{\gamma_2} + 4 \underbrace{[(0,25)^n u[n]]}_{\gamma_3} * \underbrace{[4(0,8)^n u[n]]}_{\gamma_4} \\
 &\stackrel{\downarrow}{=} \left[\frac{(0,25)^{n+1} - (-0,2)^{n+1}}{0,25 - (-0,2)} \right] u[n] + 4 \left[\frac{(0,25)^{n+1} - (0,8)^{n+1}}{0,25 - 0,8} \right] u[n] \\
 &\stackrel{\text{Linha 4}}{=} 2,22[0,25(0,25)^n + 0,2(-0,2)^n] u[n] \\
 &\quad - 7,27[0,25(0,25)^n - 0,8(0,8)^n] u[n] \\
 &= \boxed{[-1,26(0,25)^n + 0,44(-0,2)^n + 5,82(0,8)^n] u[n], \quad n \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

(é causal!)

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\text{esn}}[n] = 0 \\ 0,25 < 1, \quad |-0,2| < 1, \quad 0,8 < 1 \end{cases}$$

3.14.1 Convolução e Sistemas LDIT Causais

Pelo o que mostramos anteriormente, podemos concluir que:

- Se $x_1[n] = f_1[n]u[n]$ é um *sinal causal*, então

$$c[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} f_1[m]x_2[n-m], n \in \mathbb{Z}$$

- Se $x_1[n] = f_1[n]u[n]$ e $x_2[n] = f_2[n]u[n]$ são *causais*, então

$$c[n] = x_1[n] * x_2[n] = \left(\sum_{m=0}^n f_1[m]f_2[n-m] \right) u[n], n \in \mathbb{Z}$$

Além disso, temos que:

Um sistema LDIT é causal \Leftrightarrow a resposta impulsiva $h[n]$ é causal

Considere um sistema LDIT causal com $x[n], n \in \mathbb{Z}$, causal (logo, $y_{esn}[n], n \in \mathbb{Z}$, é causal). Obtemos pela *propriedade de deslocamento da convolução* que, para $M > 0$:

$$\begin{aligned} &\text{se } v(0) = 0, x[n], n \geq 0 \} \rightarrow y_{esn}[n], n \geq 0 \\ &\text{então } v(0) = 0, \bar{x}[n] = x[n-M], n \geq 0 \} \rightarrow \bar{y}_{esn}[n] = y_{esn}[n-M], n \geq 0 \end{aligned}$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT a Entradas Complexas

Considere um sinal complexo $x[n] = x_r[n] + j x_i[n]$, onde $x_r[n]$ e $x_i[n]$ são sinais reais. Considere que

$$\begin{aligned} x_r[n] &\rightarrow y_{esn_r}[n] \\ x_i[n] &\rightarrow y_{esn_i}[n] \end{aligned}$$

Definimos então

$$x[n] = x_r[n] + j x_i[n] \rightarrow y_{esn}[n] = y_{esn_r}[n] + j y_{esn_i}[n]$$

Agora, seja $h[n]$ a resposta impulsiva (real) do sistema. Definimos

$$\begin{aligned} y_{esn}[n] &= x[n] * h[n] = (x_r[n] + j x_i[n]) * h[n] \triangleq x_r[n] * h[n] + j x_i[n] * h[n] \\ &= y_{esn_r}[n] + j y_{esn_i}[n] \end{aligned}$$

Assim,

$$x[n] = x_r[n] + j x_i[n] \longrightarrow y_{\text{esn}}[n] = y_{\text{esn}_r}[n] + j y_{\text{esn}_i}[n]$$

se e somente se

$$\begin{aligned} x_r[n] &\longrightarrow y_{\text{esn}_r}[n] \\ x_i[n] &\longrightarrow y_{\text{esn}_i}[n] \end{aligned}$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT a Múltiplas Entradas

Suponha que

$$x[n] = \sum_{k=1}^m x_k[n] \quad (m \text{ entradas})$$

Concluímos então pela linearidade do sistema que

$$y_{\text{esn}}[n] = \sum_{k=1}^m y_{\text{esn}_k}[n],$$

onde

$$x_k[n] \longrightarrow y_{\text{esn}_k}[n]$$

3.14.2 Procedimento Gráfico para o Somatório de Convolução

Desejamos calcular a integral de convolução dos sinais $x[n]$ e $g[n]$:

$$c[n] = x[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m]x[n-m] = g[n] * x[n]$$

Note que a variável do somatório é m , e que $g[n-m]$ e $x[n-m]$ correspondem a uma *reversão* seguida de um *deslocamento* por m . Como *regra geral* para facilitar o cálculo de $c[n]$, escolhemos o sinal a ser revertido como o *mais simples* entre x e g . Suponha que vamos reverter g . Seguimos então o método abaixo.

Procedimento Gráfico para Calcular $c[n] = x[n] * g[n]$:

1. Mantenha o sinal $x[m]$ fixo.
2. Faça a reversão de $g[m]$, obtendo $g[-m]$.
3. Faça um deslocamento de $g[-m]$ por n , obtendo $g[n-m]$. Logo, $n > 0$ é um *atraso* de $g[-m]$ (deslocamento de $g[-m]$ pra *direita*), e $n < 0$ é um *avanço* (deslocamento pra *esquerda*).
4. O somatório do produto $x[m]g[n-m]$ é o valor $c[n]$ em $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo

$$\left. \begin{array}{l} x[n] = (0,8)^n u[n] \\ g[n] = (0,3)^n u[n] \end{array} \right\} \text{causais!} \therefore c[n] = x[n] * g[n] = \left[\sum_{m=0}^n x[m]g[n-m] \right] u[n]$$

Veja a Figura 3.26.

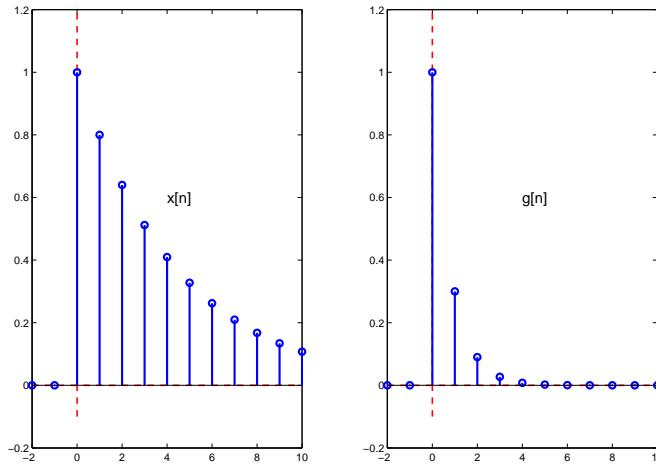


Figura 3.26: Sinais $x[n] = (0,8)^n u[n]$ e $g[n] = (0,3)^n u[n]$.

Vamos reverter $g[m]$, conforme a Figura 3.27.

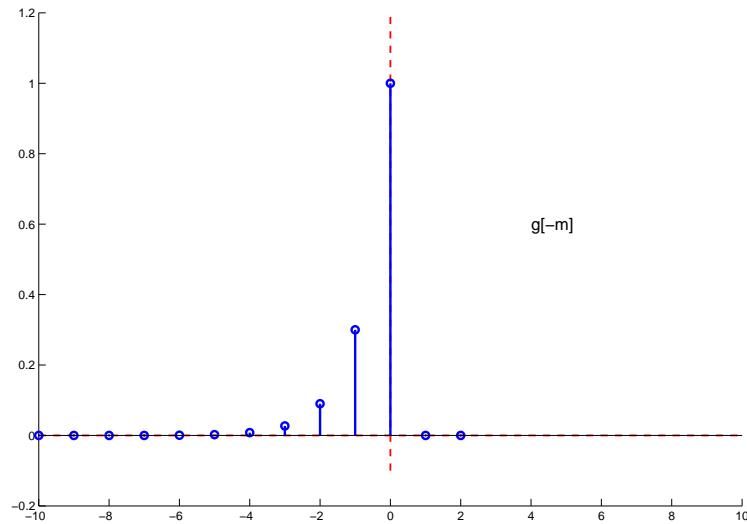


Figura 3.27: Reversão de $g[m]$.

$n < 0$ (veja a Figura 3.28)

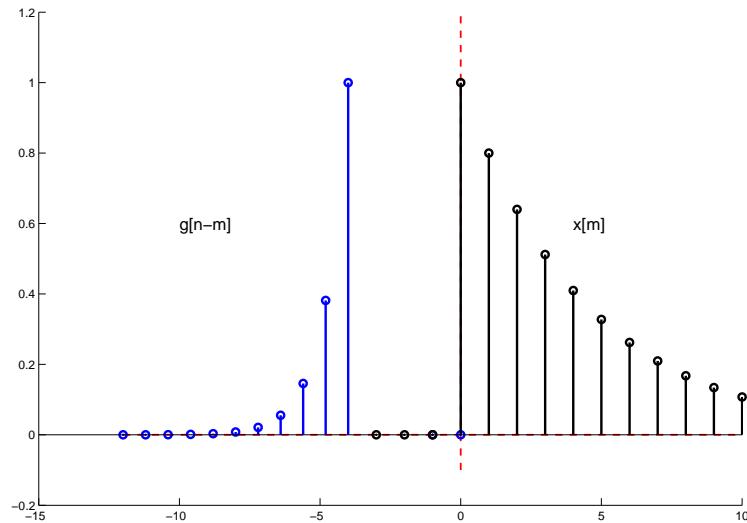


Figura 3.28: Gráficos de $x[m]$ e $g[n - m]$ para $n < 0$.

$$c[n] = x[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g[n-m] = 0, n < 0 \text{ (causal)}$$

$n \geq 0$ (veja a Figura 3.29)

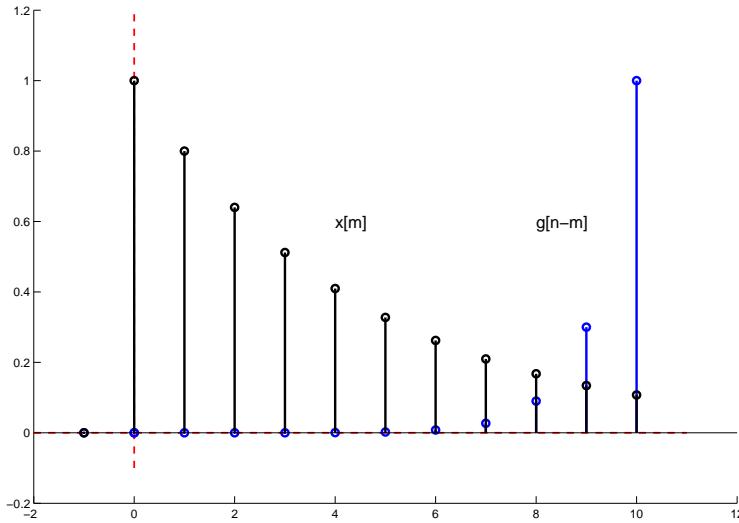


Figura 3.29: Gráficos de $x[m]$ e $g[n-m]$ para $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 c[n] &= x[n] * g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g[n-m] = \overbrace{\sum_{m=-\infty}^{-1} x[m]g[n-m]}^{=0} + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]g[n-m] \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} x[m]g[n-m] = \sum_{m=0}^n x[m]g[n-m] = \sum_{m=0}^n (0,8)^m (0,3)^{n-m} \\
 &= (0,3)^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{0,8}{0,3}\right)^m \stackrel{\downarrow}{=} (0,3)^n \left[\frac{\left(\frac{0,8}{0,3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{0,8}{0,3} - 1} \right] \\
 &\quad \text{pois } \sum_{m=0}^n r^m = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1 \text{ (Lathi, pág. 58)} \\
 &= (0,3)^n \left[\frac{(0,8)^{n+1}(0,3)^{-n-1} - 1}{\frac{0,8}{0,3} - 1} \right] = \frac{(0,3)^n 0,3}{0,3} \left[\frac{(0,8)^{n+1}(0,3)^{-n-1} - 1}{\frac{0,8}{0,3} - 1} \right] \\
 &= \frac{(0,8)^{n+1} - (0,3)^{n+1}}{0,8 - 0,3} = 2[(0,8)^{n+1} - (0,3)^{n+1}], \quad n \geq 0. \\
 &\quad \underbrace{\text{coincide com a Linha 4}}_{\text{da Tabela de Convolução!}}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$c[n] = 2[(0,8)^{n+1} - (0,3)^{n+1}] u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

3.15 SISTEMAS INTERCONECTADOS

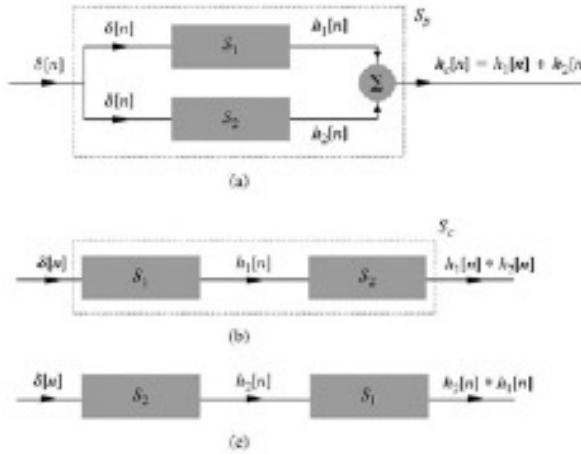


Figura 3.30: Sistemas interconectados.

Suponha que o sistema S_1 tem resposta impulsiva $h_1[n]$ e que o sistema S_2 tem resposta impulsiva $h_2[n]$. Então:

- Conexão em *paralelo*: o sistema S_p tem resposta impulsiva $h_p[n] = h_1[n] + h_2[n]$.
- Conexão em *cascata (ou série)*: o sistema S_c tem resposta impulsiva $h_c[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$. Assim, em termos da resposta impulsiva $h_c[n]$, tanto faz ligarmos S_2 após S_1 ou S_1 após S_2 . No entanto, *fisicamente* a ordem importa!
- *Somatório*

$$x[n] \longrightarrow y_{\text{esn}}[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow \bar{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \longrightarrow \bar{y}_{\text{esn}}[n] = \sum_{m=-\infty}^n y_{\text{esn}}[m]$$

Exemplos:

- a) Seja $g[n]$ a resposta estado nulo para $x[n] = u[n]$ (*degrau unitário*).

$$\text{Como } u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m], n \in \mathbb{Z}, \text{ obtemos } g[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m].$$

- b) Como $g[n] = h[n] + \sum_{m=-\infty}^{n-1} h[m] = h[n] + g[n-1]$, temos $h[n] = g[n] - g[n-1]$.

- c) Seja $f[n]$ a resposta estado nulo para $x[n] = nu[n]$ (*rampa unitária*).

$$\text{Como } nu[n] = \sum_{m=-\infty}^n u[m], \text{ concluímos que } f[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m].$$

3.16 RESPOSTA NATURAL E RESPOSTA FORÇADA

Considere um sistema LDIT descrito por

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial $v_0 = (y[-N] \dots y[-2] y[-1]) \in \mathbb{R}^N$ em $n_0 = 0$ e $N \geq M$ (causal). Temos que

$$\underbrace{y[n]}_{\text{Resposta Total}} = \underbrace{y_0[n] \ (x=0)}_{\text{Resposta Entrada Nula}} + \underbrace{y_{esn}[n] \ (v_0=0)}_{\text{Resposta Estado Nulo}}$$

Relembre que $y_0[n]$ depende da *condição inicial* v_0 e dos *modos característicos* do sistema, e que $y_{esn}[n] = x[n] * h[n]$ depende da *entrada* $x[n]$ e dos *modos característicos* através de $h[n]$.

Para o sistema

$$(E^2 - 0.6E - 0.16)y[n] = 5E^2x[n]$$

com $v_0 = (25/4 \ 0)$ e $x[n] = 4^{-n}u[n]$, determinamos anteriormente que os modos característicos são $\{(-0.2)^n, 0.8^n\}$, e que

$$y[n] = \underbrace{0.2(-0.2)^n + 0.8(0.8)^n}_{y_0[n]} \underbrace{-1.26(4)^{-n} + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n}_{y_{esn}[n]}, \quad n \geq 0.$$

Agora, ao juntarmos os termos *envolvendo* os *modos característicos* em $y[n]$, obtemos uma componente $y_c[n]$ denominada de *resposta natural* (*ou solução homogênea*). E, ao juntarmos os termos que *não envolvem* os *modos característicos* em $y[n]$, encontramos uma componente $y_\phi[n]$ denominada de *resposta forçada* (*ou solução particular*). Logo,

$$y[n] = \underbrace{0.644(-0.2)^n + 6.61(0.8)^n}_{y_c[n]} \underbrace{-1.26(4)^{-n}}_{y_\phi[n]}, \quad n \geq 0$$

Obs Em geral, $y_0[n] \neq y_c[n]$ e $y_{esn}[n] \neq y_\phi[n]!$

3.17 SOLUÇÃO CLÁSSICA DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS LINEARES

Tarefa Ler a Seção 3.9 do Lathi.

Desvantagens da solução clássica em relação às técnicas estudadas até aqui:

1. Fornece *resposta total* = *resposta natural* + *resposta forçada*, e não *resposta total* = *resposta entrada nula* + *resposta estado nulo*.
2. Restringe as entradas $x[n]$ possíveis de serem aplicadas.

3. Exige que as condições iniciais sejam conhecidas em $(y[0] \ y[1] \ \dots \ y[N-1]) \in \mathbb{R}^N$. Isto pode ser obtido recursivamente a partir de $v_0 = (y[-N] \ \dots \ y[-2] \ y[-1]) \in \mathbb{R}^N$.
4. Não apresenta uma relação direta com a Transformada Z (Capítulo 5 do Lathi \Rightarrow Sinais e Sistemas Lineares II !)

3.18 ESTABILIDADE DE SISTEMAS

Considere um sistema LDIT com memória (não necessariamente descrito por uma equação a diferenças). Assuma que $v[-\infty] = 0$ (condição inicial nula em $n_0 = -\infty$). Anteriormente, encontramos que

$$y[n] = y_{\text{esn}}[n] = x[n] * h[n]$$

Dizemos que o sistema é *BIBO estável* quando *toda* entrada $x[n]$ limitada resultar em $y[n]$ limitada. Caso contrário, o sistema é *BIBO instável*.

Propriedade

$$\text{O sistema é BIBO estável} \Leftrightarrow M_h = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty$$

Neste caso, se $|x[n]| \leq M_x < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$ (entrada limitada), então $|y_{\text{esn}}[n]| \leq M_x M_h = M_y$, $n \in \mathbb{Z}$ (saída limitada). Isto significa que para termos M_y arbitrariamente pequeno, basta que M_x seja suficiente pequeno.

Agora, considere um sistema LDIT descrito por uma equação a diferenças da forma

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial v_0 em $n_0 = 0$. Suponha que $v_0 = 0$. Assim, $y_0[n] = 0$. Dizemos que o sistema é *BIBO estável* quando *toda* entrada $x[n]$ limitada resultar em $y[n] = y_{\text{esn}}[n]$ limitada. Caso contrário, o sistema é *BIBO instável*.

Obs *BIBO estabilidade* refere-se à estabilidade *externa* ($v_0 = 0$ e $x \neq 0$) do sistema.

3.18.1 Estabilidade Interna (Assintótica)

Considere um sistema LDIT descrito por uma equação a diferenças da forma

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial v_0 em $n_0 = 0$.

Relembre que

$$v_0 = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = y_0 = y_{\text{esn}} = 0$$

No entanto, o que acontece com $y = y_0$ quando $x = 0$ mas $v_0 \neq 0$? Este é o conceito de *estabilidade interna* (ou *assintótica*) do sistema.

Temos então a seguinte classificação em relação à *estabilidade interna* ($v_0 \neq 0$ e $x = 0$) do sistema:

1. *Assintoticamente estável*: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0[n] = 0$.

Critério (\Leftrightarrow): quando *todas* as raízes características estão *dentro* do Círculo unitário, ou seja, possuem módulo *menor* que 1.

2. *Assintoticamente instável*: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $y[n] = y_0[n]$ é *ilimitada*.

Critério (\Leftrightarrow): quando houver *ao menos uma* raiz característica *fora* do Círculo Unitário (i.e. com módulo *maior* que 1) *e/ou* raízes com multiplicidade em cima do Círculo Unitário.

3. *Marginalmente estável*: quando para termos $y[n] = y_0[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, limitada e *arbitrariamente* próxima de zero, basta que $v_0 \neq 0$ seja *suficientemente* próxima de zero.

Critério (\Leftrightarrow): quando *não há* raízes características *fora* do Círculo Unitário, mas *existem* raízes sem multiplicidade em cima do Círculo Unitário.

3.18.2 Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

Temos as seguintes relações entre a estabilidade *externa* (BIBO) e a estabilidade *interna* (assintótica) de um sistema *causal descrito por uma equação a diferenças*:

Propriedades

1. Assintoticamente estável \Rightarrow BIBO estável
2. Assintoticamente instável *ou* marginalmente estável \Rightarrow BIBO instável

Exemplos

$$\textcircled{1} \quad (\mathbf{E} - 0,5)^2 y[n] = (\mathbf{E} + 1)x[n]$$

$$Q(\gamma) = (\gamma - 0,5)^2 = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = 0,5$$

Assintoticamente estável (veja a Figura 3.31). Logo, é BIBO estável.

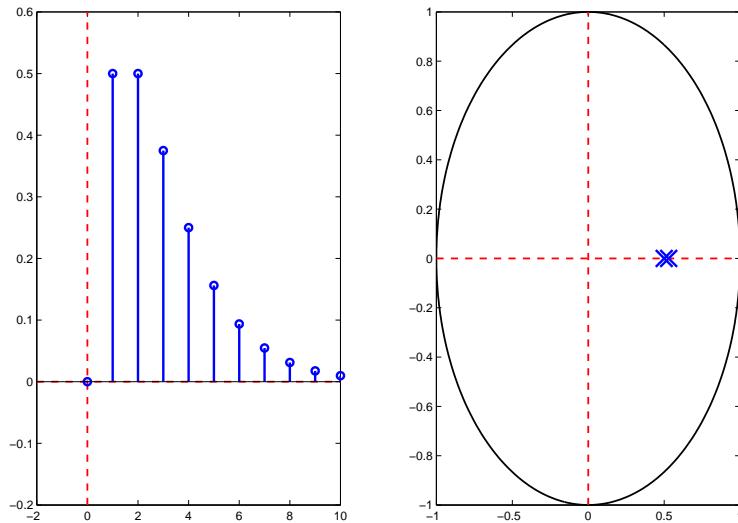


Figura 3.31: Exemplo 1: gráfico do modo característico $n(0,5)^n$.

$$\textcircled{2} \quad (\mathbf{E}^2 + 2\mathbf{E} + 2)(\mathbf{E} - 0,5)y[n] = \mathbf{E}x[n]$$

$$Q(\gamma) = (\gamma^2 + 2\gamma + 2)(\gamma - 0,5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{1,2} = -1 \pm j = \sqrt{2}e^{\pm j3\pi/4} \\ \gamma_3 = 0,5 \end{cases}$$

Assintoticamente instável (veja a Figura 3.32). Logo, é BIBO instável.

$$\textcircled{3} \quad y[n+3] + 2y[n+2] + \frac{3}{2}y[n+1] + \frac{1}{2}y[n] = x[n+1]$$

$$Q(\gamma) = \gamma^3 + 2\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -1 \quad (\text{multiplicidade 1 no circ. unitário}) \\ \gamma_{2,3} = -0,5 \pm j0,5 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j3\pi/4} \end{cases}$$

Marginalmente estável (veja a Figura 3.33). Logo, é BIBO instável.

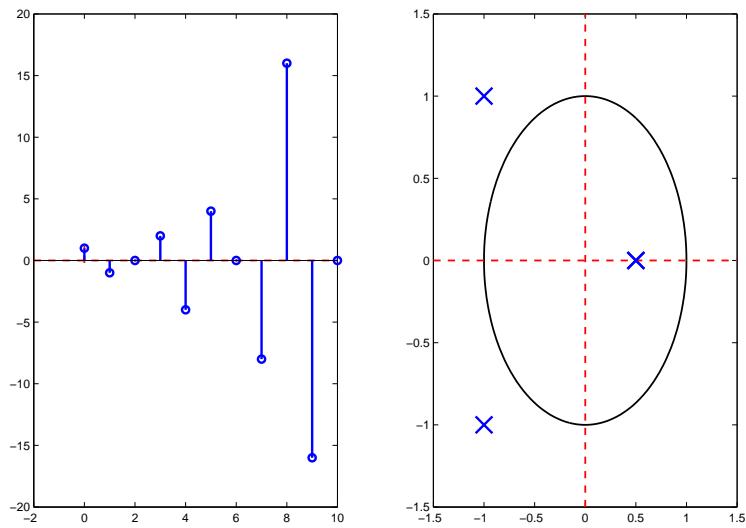


Figura 3.32: Exemplo 2: gráficos dos modos característicos $(0.5)^n$ e $(\sqrt{2})^n \cos[n3\pi/4 + \theta]$.

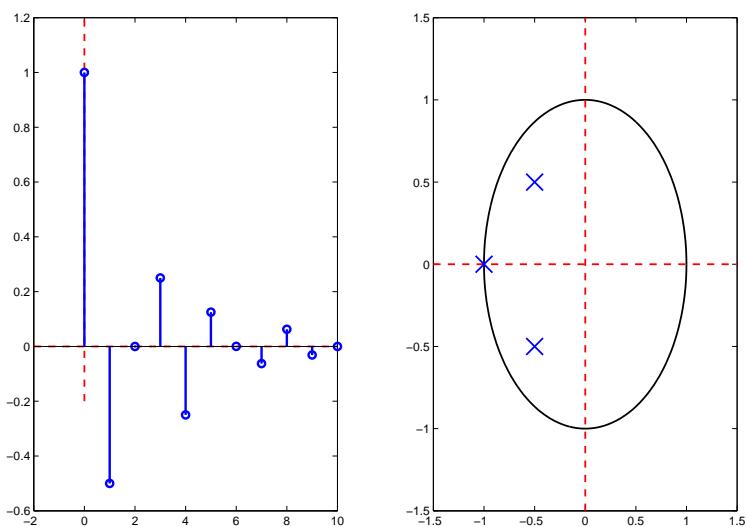


Figura 3.33: Exemplo 3: gráficos dos modos característicos $(-1)^n$ e $(\sqrt{2}/2)^n \cos[n3\pi/4 + \theta]$.

$$(4) (\epsilon^2 - \epsilon + 1)^2 y[n] = (3\epsilon + 1)x[n]$$

$$Q(\gamma) = (\gamma^2 - \gamma + 1)^2 = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1e^{\pm j\pi/3}$$

(multiplicidade 2 em cima do circ. unitário)

Assintoticamente instável (veja a Figura 3.34). Logo, é BIBO instável.

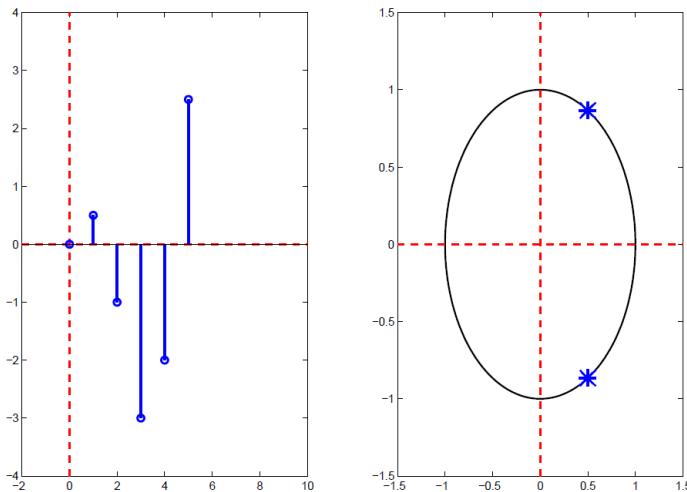


Figura 3.34: Exemplo 4: gráfico do modo característico $n \cos[n\pi/3 + \theta]$.

3.19 SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DISCRETOS

Exemplo 1 Integrador Digital ($T \cong 0$)

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

$$\Rightarrow y[n] = y(nT), x[n] = x(nT) \Rightarrow \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \cong \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = x[n]$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = y[n-1] + Tx[n]}$$

Exemplo 2 Para o sistema

$$y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2]$$

com $v_0 = (25/4 \ 0)$ e $x[n] = 4^{-n}u[n]$, vimos anteriormente que

$$y[n] = 0.2(-0.2)^n + 0.8(0.8)^n - 1.26(4)^{-n} + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n, \ n \geq 0.$$

A forma recursiva é dada por

$$y[n] = 0.6y[n-1] + 0.16y[n-2] + 5x[n]$$

Comandos adicionais do Matlab: veja Lathi, pp. 288–293.

4

ANÁLISE DE SISTEMAS EM TEMPO CONTÍNUO USANDO A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Motivação: Vimos no Capítulo 2 que a determinação da saída total $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$ de um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial envolve:

- a) Manipulações algébricas: as 4 operações básicas ($+, -, \times, /$)
- b) Diferenciações: no cálculo de $y_0(t)$ e $h(t)$
- c) Integrações: no cálculo da convolução $y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$

A grosso modo, neste capítulo introduziremos a *transformada de Laplace* para obter $y(t)$ somente através de *manipulações algébricas de funções racionais* (polinômio $p(s)$ /polinômio $q(s)$) na variável complexa s . Tal método consiste basicamente de 3 passos:

1. Transformar a equação diferencial que descreve o sistema numa equação algébrica através da transformada de Laplace
2. Fazer manipulações algébricas
3. Calcular a transformada inversa de Laplace para obter $y(t)$

Veremos que a transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa para a análise e controle de sistemas. Por exemplo: a análise da *resposta impulsiva* de diversos sistemas em série se torna muito mais fácil: as *convoluções* dão lugar a *manipulações algébricas*.

4.1 A TRANSFORMADA DE LAPLACE (BILATERAL)

Seja $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, um sinal em tempo contínuo. A *transformada de Laplace (bilateral ou de dois lados)* $X(s)$ de $x(t)$ é definida por

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Note que a variável de integração é $t \in \mathbb{R}$, mas $X(s) \in \mathbb{C}$ é uma função complexa na variável complexa $s \in \mathbb{C}$. Pode-se mostrar que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

onde o número real c deve ser adequadamente escolhido. O par de equações acima é denominado de *par da transformada de Laplace*

(*bilateral*), ou simplesmente *par de Laplace*. Dizemos então que $X(s)$ é a transformada *direta* de Laplace de $x(t)$, e que $x(t)$ é a transformada *inversa* de Laplace de $X(s)$. Assim,

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\} \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[x(t)]\} \end{aligned}$$

Para indicar que $x(t)$ e $X(s)$ são um par de Laplace, escrevemos

$$x(t) \iff X(s)$$

- A transformada de Laplace é uma *operação linear*, ou seja,
se

$$x_1(t) \iff X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)] \quad \text{e} \quad x_2(t) \iff X_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)]$$

então

$$ax_1(t) + bx_2(t) \iff \mathcal{L}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\mathcal{L}[x_1(t)] + b\mathcal{L}[x_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$$

- *Região de convergência (RDC)* ou *região de existência* de $X(s)$: é o conjunto de valores de s no plano complexo em que a integral imprópria

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

converge.

Propriedades da RDC:

1. Se $x_1(t)$ tem RDC \mathcal{R}_1 e $x_2(t)$ tem RDC \mathcal{R}_2 , então $ax_1(t) + bx_2(t)$ tem RDC $\mathcal{R} \supset \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.
2. Se $x(t)$ tem *duração finita*, então sua RDC é $\mathcal{R} = \mathbb{C}$.
3. Se $x_1(t)$ tem *duração finita* e $x_2(t)$ tem RDC \mathcal{R}_2 , então $ax_1(t) + bx_2(t)$ tem RDC $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$.

Exemplos

1) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, onde a é complexo

$$X(s) = ?$$

$$\text{RDC} = ?$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-at}u(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt$$

$= 0$ pois $u(t) = 0$, $t < 0$

$\int_0^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt$
 $u(t)=1$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(a+s)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{s+a} \int_0^{-(a+s)T} e^v dv \\
 &\quad \begin{array}{l} v = -(a+s)t \\ dv = -(a+s)dt \end{array} \\
 X(s) &= -\frac{1}{s+a} \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-(a+s)T} - e^0) = -\frac{1}{s+a} \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-\alpha T} e^{-j\beta T} - 1) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad a+s = \alpha + j\beta
 \end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\alpha T} e^{-j\beta T} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha > 0 \quad (\text{pois } |e^{-j\beta T}| = 1) \\ \text{não existe,} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Logo,

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ para } \alpha = \operatorname{Re}(a+s) > 0$$

Assim,

$$x(t) = e^{-at} u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$$

e a RDC é a região dada por $\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$ (veja a Figura 4.1).

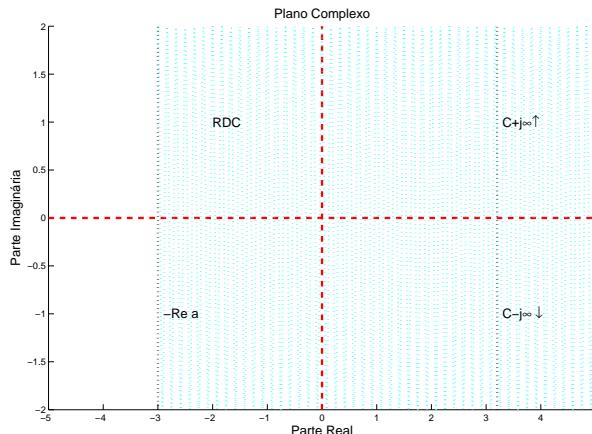


Figura 4.1: Região de convergência de $X(s) = 1/(s+a)$, com a complexo.

Para obtermos $x(t)$ a partir de $X(s)$, devemos escolher $c \in \mathbb{R}$ dentro da RDC e então calcular

$$x(t) = \underbrace{\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds}_{\text{para entendermos o significado desta integral}} = e^{-at} u(t)$$

para entendermos o significado desta integral
e sabermos como calculá-la, necessitamos
conhecer a teoria de funções a variáveis complexas.
Isto não será visto em nosso curso!

(2) $x(t) = e^{-at}u(t)$, onde $a > 0$ é real (veja a Figura 4.2)

Pelo exemplo (1), temos que

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \underbrace{\text{Re}(s) > -a}_{\text{RDC}} \quad (\text{veja a Figura 4.3})$$

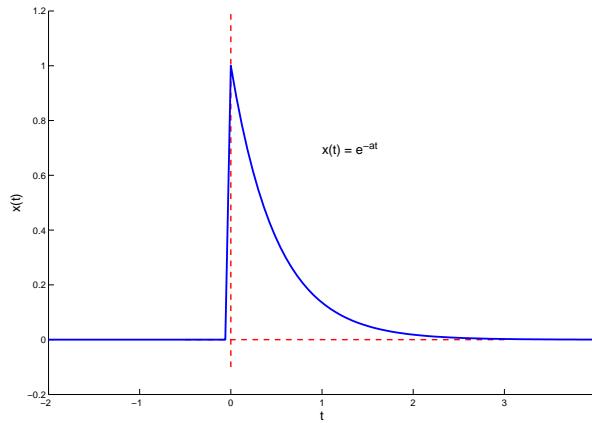


Figura 4.2: Exponencial real decrescente $x(t) = e^{-at}u(t)$.

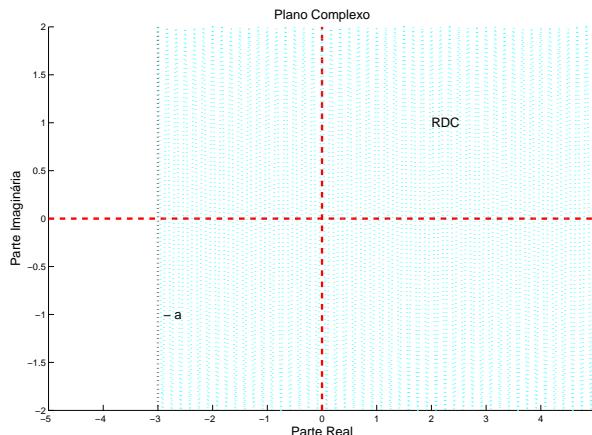
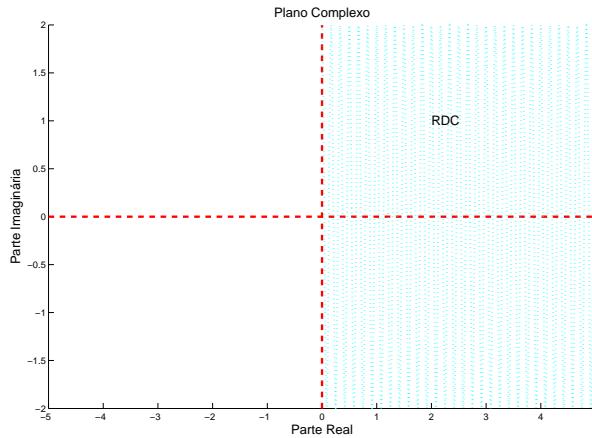


Figura 4.3: Região de convergência de $X(s) = 1/(s + a)$, com $a > 0$ real.

(3) $x(t) = e^{-j\omega_0 t}u(t)$, onde ω_0 é real

Como $a = j\omega_0$, temos que $\text{Re}(a) = 0$ e

$$X(s) = \frac{1}{s + j\omega_0}, \quad \underbrace{\text{Re}(s) > 0}_{\text{RDC}} \quad (\text{veja a Figura 4.4})$$

Figura 4.4: Região de convergência de $X(s) = 1/(s + j\omega_0)$.

$$(4) \quad x(t) = u(t)$$

Como

$$x(t) = u(t) = e^{-0t}u(t)$$

temos que $a = 0$ e

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \underbrace{\text{Re}(s) > 0}_{\text{RDC}}$$

$$(5) \quad x(t) = u(t) - u(t-2) \quad (\text{pulso retangular entre } 0 \text{ e } 2) \text{ é de duração finita} \therefore \boxed{\text{RDC} = \mathbb{C}}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^2 e^{-st} dt = \underbrace{\frac{-1}{s} \int_0^{-2s} e^v dv}_{\begin{matrix} v = -st \\ dv = -s dt \end{matrix}}$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} e^v \Big|_0^{-2s} = -\frac{1}{s} (e^{-2s} - 1)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-2s}), \quad \underbrace{s \in \mathbb{C}}_{\text{RDC}}}$$

$$(6) \quad x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$$

Como

$$x(t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]u(t)$$

e

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \iff \frac{1}{s + j\omega_0}$$

obtemos pela linearidade da transformada de Laplace que

$$X(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \boxed{\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}}$$

Acabamos de ver nos exemplos acima que

$$x(t) = e^{-at} u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s + a}, \text{ Re } s > -\text{Re } a, \text{ onde } a \in \mathbb{C}$$

Semelhantemente, pode-se mostrar que

$$y(t) = -e^{-at} u(-t) \iff Y(s) = \frac{1}{s + a}, \text{ Re } s < -\text{Re } a$$

Note que $x \neq y$ e $X(s) = Y(s)$, mas os RDC's são *diferentes*! Desse modo, existe mais de uma transformada inversa de Laplace para

$$\frac{1}{s + a}$$

dependendo da RDC.

Portanto, concluímos que, *a não ser que seja especificada a RDC, não existe uma correspondência um-para-um* (bijetiva) entre $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, o que gera dificuldades práticas.

Para contornarmos este problema, vamos restringir o tempo a $t \geq 0$. Com isto, *não precisamos especificar a RDC, e temos uma correspondência um-para-um* (bijetiva) entre $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $t \geq 0$. Desse modo, não há ambiguidade entre $x(t)$, $t \geq 0$, e $X(s)$. Isto significa que para cada $X(s)$ existe uma *única* transformada inversa $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $t \geq 0$ (exceto por um conjunto de comprimento nulo!).

Relembre que, para encontrarmos a resposta $y(t)$, $t \geq t_0 = 0$ de um sistema LCIT para uma dada entrada $x(t)$, podemos sempre supor que $x(t)$ é causal!

4.2 A TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

De agora em diante, vamos nos preocupar apenas com o *tempo futuro* dos sinais. Para isto, consideraremos a *transformada de Laplace unilateral* (ou *de um lado*) de um sinal $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, que é dada por

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Com esta definição, *não precisamos mais especificar a RDC* para determinarmos a transformada inversa, e temos uma correspondência *um-para-um* (bijetiva) entre a transformada $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, para $t \geq 0$ (*somente tempo futuro!*). Desse modo, não há ambiguidade entre $x(t)$, $t \geq 0$, e $X(s)$. Isto significa que para cada $X(s)$ existe uma *única* transformada inversa $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $t \geq 0$ (exceto por um conjunto de comprimento nulo!).

Obs 1 Note que, para *sinais causais*, as transformadas bilateral e unilateral *coincidem*!

Obs 2 Definimos o limite de integração inferior como 0^- para considerar sinais $x(t)$ que possuem um impulso na origem $t = 0$ e para tratar equações diferenciais com condições iniciais em $t_0 = 0^-$.

Salvo menção contrária, durante todo o restante deste capítulo o termo *transformada de Laplace* significará a transformada *unilateral*.

Além disso, adotaremos a seguinte *convenção*: ao escrevermos $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = f(t)u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, queremos dizer que $x(t) = f(t)$, para $t \geq 0$, mas *não necessariamente* que $x(t) = 0$, para $t < 0$ (isto será verdade somente quando $x(t)$ for de fato *causal*!).

Relembre que, para encontrarmos a resposta $y(t)$, $t \geq t_0 = 0$ de um sistema LCIT para uma dada entrada $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *não importa* os valores de $x(t)$ para $t < 0$, e podemos sempre supor que $x(t)$ é causal!

Existência da Transformada de Laplace

Dizemos que um sinal $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é de *ordem exponencial* σ_0 quando existirem $M > 0$, σ_0 real e $\bar{t} \geq 0$ tais que

$$|x(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}, \text{ para } t \geq \bar{t} \geq 0$$

Para sinais $x(t)$ de ordem exponencial, a transformada de Laplace (unilateral) $X(s)$ *sempre existe* e sua RDC contém a região $\text{Re } s > \sigma_0$.

De acordo com os interesses práticos em engenharia de nosso curso, consideraremos de agora em diante apenas sinais $x(t)$ de *ordem exponencial* cuja transformada de Laplace é uma *função racional* em s , ou seja,

$$x(t) \iff X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios na variável complexa s com coeficientes reais.

Desse modo, como consequência do resultado de *continuidade analítica* da teoria de funções a variáveis complexas, podemos sempre supor que

a RDC é todo o plano complexo \mathbb{C} , com exceção dos pontos em que $Q(s) = 0$. Por exemplo,

$$e^{-2t}u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s \neq -2$$

No restante deste capítulo, a transformada direta $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e a transformada inversa $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ serão obtidas por tabelas de pares de Laplace.

Tabela de Transformadas de Laplace

Veja a Tabela 4.1, p. 310, do Lathi. Por exemplo:

| | |
|--|-------------|
| $\delta(t) \iff 1$ | (Linha 1) |
| $u(t) \iff \frac{1}{s}$ | (Linha 2) |
| $tu(t) \iff \frac{1}{s^2}$ | (Linha 3) |
| $t^n u(t) \iff \frac{n!}{s^{n+1}}$ | (Linha 4) |
| $e^{\lambda t} u(t) \iff \frac{1}{s - \lambda}$ | (Linha 5) |
| $t^n e^{\lambda t} u(t) \iff \frac{n!}{(s - \lambda)^{n+1}}$ | (Linha 7) |
| $re^{-at} \cos(bt + \theta)u(t) \iff \frac{0.5re^{j\theta}}{s + a - jb} + \frac{0.5re^{-j\theta}}{s + a + jb}$ | (Linha 10b) |
| $t^n re^{-at} \cos(bt + \theta)u(t) \iff \frac{0.5n!re^{j\theta}}{(s + a - jb)^{n+1}} + \frac{0.5n!re^{-j\theta}}{(s + a + jb)^{n+1}}$ | (*) |

4.2.1 Determinando a Transformada Inversa

Seja

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

uma função racional em s com coeficientes reais. Suponha que os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem raízes em comum, e que $\text{grau}(Q(s)) = N \geq M = \text{grau}(P(s))$.

As raízes de $P(s)$ são denominadas de zeros de $X(s)$, e as raízes de $Q(s)$ de pólos de $X(s)$. Assim, $X(s)$ possui $M = \text{grau}(P(s))$ zeros e $N = \text{grau}(Q(s))$ pólos. Dizemos que um polo é *simples* quando sua multiplicidade é igual a 1.

Nosso objetivo é encontrar

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)], \quad \text{para } t \geq 0 \text{ (sómente tempo futuro!)}$$

Para isto, vamos expandir $X(s)$ em frações parciais, de modo que cada termo da expansão pertença à Tabela de Transformadas de Laplace.

Assuma que $X(s)$ possui *pólos simples* a_i e um *pólo repetido* b de multiplicidade $m \geq 2$. Podemos expandir $X(s)$ em frações parciais da seguinte maneira:

$$X(s) = k_0 + \sum_i \frac{k_i}{s - a_i} + \frac{c_1}{s - b} + \frac{c_2}{(s - b)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(s - b)^m} \quad (*)$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} k_0 &= X(\infty) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \rightarrow \infty} X(s) \\ k_i &= [(s - a_i)X(s)] \Big|_{s=a_i} \\ c_j &= \frac{1}{(m-j)!} \left. \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}} [(s - b)^m X(s)] \right|_{s=b} \end{aligned}$$

Quando $X(s)$ possui vários pólos repetidos, a expressão é análoga.

Observações

1. Se $\text{grau}(Q(s)) = N > M = \text{grau}(P(s))$, então $k_0 = X(\infty) = 0$.
2. Se $a_i = \alpha + j\beta$ é um pólo complexo, então $a_{i+1} = a_i^* = \alpha - j\beta$ também é um pólo complexo, e $k_{i+1} = k_i^*$.
3. A forma da expressão $(*)$ é determinada somente pelos *pólos* de $X(s)$! Os zeros de $X(s)$ influenciam apenas nos valores dos *coeficientes* k_i, c_1, \dots, c_m em $(*)$!
4. Para evitarmos as diferenciações envolvidas nos cálculos dos c_j 's, podemos primeiramente encontrar os coeficientes k_0, a_i e $c_m = [(s - b)^m X(s)] \Big|_{s=b}$, e então determinar os $m-1$ coeficientes restantes c_1, c_2, \dots, c_{m-1} através de um *sistema de equações lineares* resultante da substituição de $m-1$ valores reais para s em ambos os lados de $(*)$.

Exemplos

① $X(s) = \frac{7s - 6}{s^2 - s - 6}$
 $x(t) = ?$

$P(s) = 7s - 6 \quad M = 1$

$Q(s) = s^2 - s - 6 \quad N = 2$

$Q(s) = s^2 - s - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_2 = 3 \end{array}} \text{ pólos simples}$

$Q(s) = (s + 2)(s - 3)$

$$X(s) = P(s)/Q(s)$$

$$X(s) = \frac{7s - 6}{(s+2)(s-3)} = K_0 + \frac{K_1}{(s+2)} + \frac{K_2}{(s-3)}$$

$K_0 = X(\infty) = 0$ pois $M < N$

$$\text{Verificação: } K_0 = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{7s - 6}{s^2 - s - 6} \stackrel{\text{Cálculo 1}}{=} \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{7s}{s^2} = 0$$

$$K_1 = [(s+2)X(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{7s - 6}{s-3} \Big|_{s=-2} = \frac{-14 - 6}{-2 - 3} = 4$$

$$K_2 = [(s-3)X(s)] \Big|_{s=3} = \frac{7s - 6}{s+2} \Big|_{s=3} = \frac{21 - 6}{3 + 2} = 3$$

Logo,

$$X(s) = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

$$\text{Verificação: } \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3} = \frac{4(s-3) + 3(s+2)}{(s+2)(s-3)} = \frac{7s - 6}{(s+2)(s-3)} = X(s)$$

$$\therefore x(t) = (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)$$

$$(2) \quad X(s) = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

$$P(s) = 2s^2 + 5 \quad M = 2$$

$$Q(s) = s^2 + 3s + 2 \quad N = M = 2$$

$$Q(s) = s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = -1 \\ a_2 = -2 \end{array}} \text{ pólos simples}$$

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)(s+2)} = K_0 + \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

$$K_0 = X(\infty) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2} \stackrel{\text{Cálculo 1}}{=} \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{2s^2}{s^2} = 2$$

$$K_1 = [(s+1)X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 5}{s+2} \Big|_{s=-1} = 7$$

$$K_2 = [(s+2)X(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 5}{s+1} \Big|_{s=-2} = -13$$

Logo,

$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{13}{s+1}$$

$$\therefore x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$$

$$(3) \quad X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s^2 + 10s + 34)}$$

$$P(s) = 6(s+34) \quad M = 1$$

$$Q(s) = s(s^2 + 10s + 34) \quad N = 3 > 1 = M \therefore K_0 = 0$$

$$Q(s) = s(s^2 + 10s + 34) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_{2,3} = -5 \pm j3 \end{array}} \text{ pôlos simples}$$

$$X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s+5-j3)(s+5+j3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+5-j3} + \frac{\overline{K_2^*}}{s+5+j3} \quad = K_3$$

$$K_1 = [sX(s)] \Big|_{s=0} = \frac{6(s+34)}{s^2 + 10s + 34} \Big|_{s=0} = 6$$

$$K_2 = [(s+5-j3)X(s)] \Big|_{s=-5+j3} = \frac{6(s+34)}{s(s+5+j3)} \Big|_{s=-5+j3} = -3 + j4 = 5e^{j126,9^\circ}$$

$$K_2^* = -3 - j4 = 5e^{-j126,9^\circ}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & a = 5 \\ & b = 3 \\ & r = 10, \theta = 126,9^\circ \\ & \text{Linha 2} \quad \text{Linha 1ob} \\ X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{5e^{j126,9^\circ}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j126,9^\circ}}{s+5+j3} \end{aligned}$$

$$\therefore x(t) = (6 + 10e^{-5t} \cos(3t + 126,9^\circ))u(t)$$

$$(4) \quad X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}$$

$$P(s) = 8s+10 \quad M = 1$$

$$Q(s) = (s+1)(s+2)^3 \quad N = 4 > 1 = M \therefore K_0 = 0$$

$$Q(s) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = -1 \\ b = -2 \end{array}} \quad \text{pôlo simples com multiplicidade } m = 3!$$

$$X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{c_1}{(s+2)} + \frac{c_2}{(s+2)^2} + \frac{c_3}{(s+2)^3}$$

$$K_1 = [(s+1)X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{8s+10}{(s+2)^3} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$c_3 = [(s+2)^3 X(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{8s+10}{s+1} \Big|_{s=-2} = 6$$

Logo,

$$X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{2}{s+1} + \frac{c_1}{(s+2)} + \frac{c_2}{(s+2)^2} + \frac{6}{(s+2)^3} \quad (*)$$

Falta determinar c_1 e c_2 . Substituindo $s = 0$ e $s = 1$ em ambos os lados de (*), obtemos

$$\begin{aligned} s=0: \quad \frac{10}{8} &= 2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{6}{8} \\ s=1: \quad \frac{18}{2 \cdot 27} &= \frac{2}{2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} + \frac{6}{27} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{3}{2} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} \\ -\frac{8}{9} = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -6 = 2c_1 + c_2 \\ -8 = 3c_1 + c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = -2 \end{array}$$

Assim,

$$X(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{6}{(s+2)^3}$$

$\lambda = -1$ Linha 5 $\lambda = -2$ Linha 5 $\lambda = -2$ Linha 7 $\lambda = -2$ Linha 7
 $\overline{}$ $\overline{}$ $\overline{}$ $\overline{}$

$$\therefore \boxed{x(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t} + 3t^2 e^{-2t})u(t)}$$

$$\boxed{x(t) = [2e^{-t} + (3t^2 - 2t - 2)e^{-2t}]u(t)}$$

$$(5) \quad X(s) = \frac{s+17}{s^2+4s-5}$$

$$P(s) = s+17 \quad M = 1$$

$$Q(s) = s^2 + 4s - 5 \quad N = 2 > 1 = M \quad \therefore \boxed{K_0 = 0}$$

$$Q(s) = s^2 + 4s - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = -5 \\ a_2 = 1 \end{array}} \text{ pólos simples}$$

$$X(s) = \frac{s+17}{(s+5)(s-1)} = \frac{K_1}{s+5} + \frac{K_2}{s-1}$$

$$K_1 = [(s+5)X(s)] \Big|_{s=-5} = \frac{s+17}{s-1} \Big|_{s=-5} = -2$$

$$K_2 = [(s-1)X(s)] \Big|_{s=1} = \frac{s+17}{s+5} \Big|_{s=1} = 3$$

$$X(s) = -\frac{2}{s+5} + \frac{3}{s-1}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = [-2e^{-5t} + 3e^t]u(t)}$$

$$(6) \quad X(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}$$

$$\therefore P(s) = 1, Q(s) = s+2 \quad \boxed{\text{pólo em } -2, \text{ e não em } -1, -2!}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = e^{-2t}u(t)}$$

4.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Suponha que $x(t) \iff X(s)$, $x_1(t) \iff X_1(s)$, $x_2(t) \iff X_2(s)$.

1. *Linearidade:* $ax_1(t) + bx_2(t) \iff aX_1(s) + bX_2(s)$
2. *Deslocamento no tempo:* se $x(t) = f(t)u(t) \iff X(s)$, então

$$y(t) = x(t - t_0) = f(t - t_0)u(t - t_0) \iff Y(s) = X(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0.$$

Note que $y(t) = x(t - t_0) = 0$, $t < t_0$ (causal), pois $x(t)$ é causal!

3. *Deslocamento na frequência:*

$$x(t)e^{s_0 t} \iff X(s - s_0)$$

4. *Diferenciação no tempo (derivada generalizada!):*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\iff sX(s) - x(0^-) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &\iff s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-) \\ \frac{d^n x}{dt^n} &\iff s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-) \end{aligned}$$

5. *Integração no tempo:*

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \iff \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$$

Obs: Se $x(t)$ é causal, então

$$\frac{d^n x}{dt^n} \iff s^n X(s) \quad \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \iff \frac{1}{s}X(s)$$

6. *Diferenciação na frequência:*

$$-tx(t) \iff \frac{dX(s)}{ds}$$

7. *Escalonamento:*

$$x(at), \text{ onde } a > 0 \iff \frac{1}{a}X(s/a)$$

8. *Convolução no tempo:*

$$x_1(t) * x_2(t) \iff X_1(s)X_2(s)$$

9. *Teorema do Valor Inicial:* Suponha que $X(s) = P(s)/Q(s)$ com $\text{grau}(Q(s)) = N > M = \text{grau}(P(s))$. Então,

$$x(0^+) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \rightarrow \infty} sX(s)$$

10. *Teorema do Valor Final:* Temos que $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existe se e somente se $sX(s)$ possui todos os pólos no SPE (parte real negativa). Neste caso, $x(\infty)$ pode ser diretamente calculado por

$$x(\infty) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \rightarrow 0} sX(s)$$

Justificativa: Pela Tabela de Transformadas de Laplace, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ se e somente se todos os pólos de $X(s)$ estão no SPE. Além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c \neq 0$ se e somente se $X(s)$ possui um pôlo simples em $s = 0$ e todos os outros pólos estão no SPE.

Exemplos

① $x(t) =$ Figura 4.5

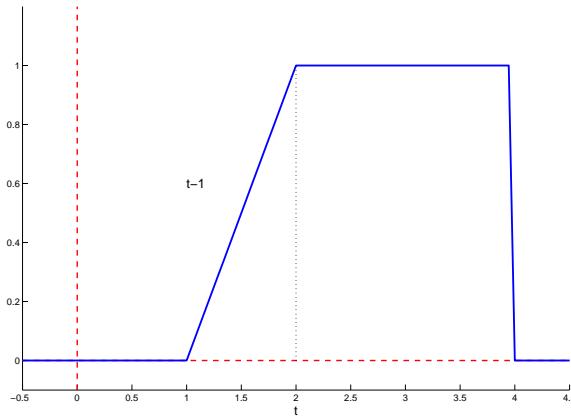


Figura 4.5: Exemplo 1.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = (t-1)[u(t-1) - u(t-2)]$$

$$x_2(t) = u(t-2) - u(t-4)$$

$$x(t) = (t-1)[u(t-1) - u(t-2)] + u(t-2) - u(t-4)$$

$$x(t) = \underbrace{(t-1)u(t-1)}_{\text{tu}(t) \text{ com } t_0=1} - \underbrace{(t-1)u(t-2)}_{?} + \underbrace{u(t-2)}_{u(t) \text{ com } t_0=2} - \underbrace{u(t-4)}_{u(t) \text{ com } t_0=4}$$

$$(t-1)u(t-2) = (t-2+1)u(t-2) = \underbrace{(t-2)u(t-2)}_{\substack{tu(t) \text{ com} \\ t_0=2}} + \underbrace{u(t-2)}_{\substack{u(t) \text{ com} \\ t_0=2}}$$

Logo,

$$x(t) = \underbrace{(t-1)u(t-1)}_{t_0=1} - \underbrace{(t-2)u(t-2)}_{t_0=2} - \underbrace{u(t-4)}_{t_0=4}$$

Portanto,

$$X(s) = \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-4s} \quad u(t) \iff \frac{1}{s} \quad \text{Linha 2}$$

$$tu(t) \iff \frac{1}{s^2} \quad \text{Linha 3}$$

$$\textcircled{2} \quad X(s) = \frac{3e^{-2s}}{(s-1)(s+2)}$$

$$x(t) = ?$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s+2)}$$

$$X(s) = Y(s) \underbrace{e^{-2s}}_{t_0=2} \quad \therefore x(t) = y(t-2)$$

$$y(t) = ?$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s+2)} = \frac{K_1}{s-1} + \frac{K_2}{s+2}$$

| |
|---------------|
| pólos simples |
| $a_1 = 1$ |
| $a_2 = -2$ |

$$K_1 = [(s-1)Y(s)] \Big|_{s=a_1=1} = 1$$

$$K_2 = [(s+2)Y(s)] \Big|_{s=a_2=-2} = -1$$

$$\lambda = a_1 = 1 \quad \lambda = a_2 = -2$$

$$\text{Linha 5} \quad \text{Linha 5}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = [e^t - e^{-2t}]u(t)$$

Logo,

$$x(t) = y(t-2) = [e^{t-2} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

$$\textcircled{3} \quad x(t) = te^{\lambda t}u(t)$$

$$X(s) = ?$$

$$y(t) = tu(t) \iff Y(s) = \frac{1}{s^2} \quad (\text{Linha 3})$$

Mas,

$$x(t) = e^{\lambda t}y(t) \quad \therefore s_0 = \lambda$$

Logo,

$$X(s) = Y(s-\lambda) = \frac{1}{(s-\lambda)^2} \quad \begin{matrix} (\text{Linha 5 obtida} \\ \text{da Linha 3 por} \\ \text{deslocamento na frequência}) \end{matrix}$$

(4) $x(t) =$ Figura 4.6

$$x(t) = e^{-t}(u(t) - u(t-1)) \quad s_0 = -1$$

$$y(t) = u(t) - \underbrace{u(t-1)}_{\substack{u(t) \text{ com} \\ t_0 = 1}} \iff \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \quad (\text{deslocamento no tempo})$$

Logo,

$$X(s) = Y(s - s_0) = Y(s + 1) = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s-1}}{s+1}$$

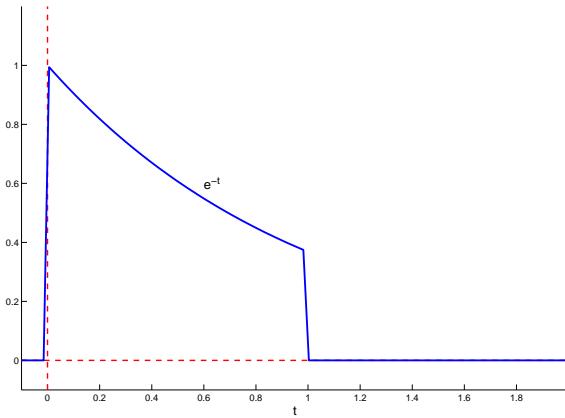


Figura 4.6: Exemplo 4.

(5) $x(t) =$ Figura 4.7 (acima)

$$X(s) = ?$$

$$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \delta(t) - 3\underbrace{\delta(t-2)}_{t_0=2} + 2\underbrace{\delta(t-3)}_{t_0=3} \iff 1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s} = Y(s)$$

↓
Linha 1
+
deslocamento no tempo

Logo,

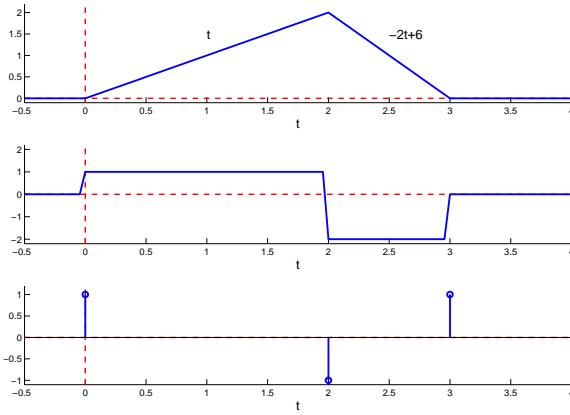
$$1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s} = Y(s) = s^2 X(s) - s \underbrace{x(0^-)}_{=0} - \dot{x}(0^-) \underbrace{= 0}_{=0}$$

$$X(s) = \frac{1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s}}{s^2}$$

(6)



$$h_1(t) = e^{at}u(t) \quad h_2(t) = e^{bt}u(t)$$

Figura 4.7: Exemplo 5: $x(t)$ (acima), $dx(t)/dt$ (meio), e $d^2x(t)/dt^2$ (abaixo).

$$h_c(t) = h_1(t) * h_2(t) = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1(t) = e^{at}u(t) \iff H_1(s) = \frac{1}{s-a} \\ h_2(t) = e^{bt}u(t) \iff H_2(s) = \frac{1}{s-b} \end{array} \right\} \text{Linha 5}$$

$$\therefore H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{K_1}{(s-a)} + \frac{K_2}{(s-b)}$$

$$K_1 = [(s-a)H(s)] \Big|_{s=a} = 1/(a-b)$$

$$K_2 = [(s-b)H(s)] \Big|_{s=b} = 1/(b-a) = -1/(a-b)$$

$$H(s) = \frac{1}{a-b} [e^{at} - e^{bt}] u(t)$$

$$(7) X(s) = \frac{2s+1}{s^2-1} \quad x(0^+) = ?$$

$$2 = N > M = 1$$

Pelo TVI,

$$x(0^+) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} sX(s) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{s(2s+1)}{s^2-1} \stackrel{\text{Cálculo 1}}{=} \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{2s^2}{s^2} = \boxed{2}$$

$$(8) X(s) = \frac{1}{s^3+2s+1}$$

$$3 = N > M = 0$$

$$x(0^+) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{s}{s^3+2s+1} = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{s}{s^3} = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow \infty}} \frac{1}{s^2} = \boxed{0}$$

$$(9) \quad X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$$

$x(\infty)$ existe? Se afirmativo, qual o valor?

$$Y(s) = sX(s) = \frac{s(s-2)}{s(s+1)} = \frac{s-2}{s+1} \rightsquigarrow \text{pólo em } s = -1$$

Logo, pelo TVF, $x(\infty)$ existe e

$$x(\infty) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow 0}} sX(s) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow 0}} Y(s) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow 0}} \frac{s-2}{s+1} \stackrel{\text{Cálculo 1}}{\uparrow} \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$$

(Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios reais. Relembre do Cálculo 1 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(0)}{q(0)}, \text{ desde que } q(0) \neq 0.$$

$$(10) \quad X(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

$x(\infty)$ existe? $x(\infty) = ?$

$$Y(s) = sX(s) = \frac{s(s-2)}{s+1} \rightsquigarrow \text{pólo em } s = -1 \text{ (SPE)}$$

$$x(\infty) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow 0}} sX(s) = \lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow 0}} \frac{s(s-2)}{s+1} = \frac{0(-2)}{1} = \boxed{0}$$

$$(11) \quad X(s) = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow \text{pólo em } s = 1 \text{ (SPD) Cuidado!!!}$$

$$x(t) = e^t u(t)$$

Temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$, mas $\lim_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \rightarrow 0}} sX(s) = 0$!

4.4 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRO-DIFERENCIAIS

Considere um sistema LCIT descrito por ($N = M$)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$ e entrada $x(t)$ causal, onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N, \quad P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Com base na transformada de Laplace, vamos reduzir a equação diferencial acima a uma equação algébrica em s , e então encontrar $Y(s)$ através de operações algébricas. Desse modo, determinamos $y(t)$, $t \geq 0$. Para isto, necessitaremos apenas de:

Linearidade: $ax_1(t) + bx_2(t) \iff aX_1(s) + bX_2(s)$

Diferenciação no tempo:

$$\frac{dx}{dt} \iff sX(s) - x(0^-) \quad \frac{d^2x}{dt^2} \iff s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \iff s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

Exemplo de Motivação

$$\overbrace{(D^2 + 5D + 6)}^{Q(D)} y(t) = \overbrace{(D + 1)}^{P(D)} x(t)$$

$$\begin{cases} y(0^-) = 2 \\ \dot{y}(0^-) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-4t}u(t) \\ y(t) &=? , \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace dos dois lados, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(D^2 + 5D + 6)y(t)] &= \mathcal{L}[(D + 1)x(t)] \\ \mathcal{L}[D^2y(t)] + 5\mathcal{L}[Dy(t)] + 6\mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[Dx(t)] + \mathcal{L}[x(t)] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{por} \\ \text{linearidade} \end{array} \right]$$

Mas

$$\begin{aligned} y(t) &\iff Y(s) \\ Dy(t) &\iff sY(s) - y(0^-) \\ D^2y(t) &\iff s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) \\ x(t) = e^{-4t}u(t) &\iff X(s) = \frac{1}{s+4} \\ Dx(t) &\iff sX(s) - \underbrace{x(0^-)}_{=0} = sX(s) = \frac{s}{s+4} \end{aligned}$$

Logo,

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) - (s + 5)y(0^-) - \dot{y}(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sX(s) + X(s) \quad \left. \begin{array}{l} \text{equação} \\ \text{algébrica} \\ \text{em } s! \end{array} \right]$$

$$\underbrace{(s^2 + 5s + 6)}_{Q(s)} Y(s) - (s + 5)y(0^-) - \dot{y}(0^-) = \underbrace{(s + 1)}_{P(s)} X(s)$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = (s + 5)y(0^-) + \dot{y}(0^-) + (s + 1)X(s)$$

$$Y(s) = \left[\frac{(s+5)y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{s^2 + 5s + 6} \right] + \left[\frac{s+1}{s^2 + 5s + 6} X(s) \right]$$

$$= Y_0(s) \quad \quad \quad = Y_{\text{esn}}(s)$$

para $x=0$
 $\boxed{y_0(t)} \iff Y_0(s)$

$\boxed{y_{\text{esn}}(t)} \iff Y_{\text{esn}}(s)$

para $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$

$$\boxed{H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}} \quad Y_{\text{esn}}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} X(s) \quad \therefore \quad Y_{\text{esn}}(s) = H(s)X(s)$$

Função de Transferência do Sistema

Relembre que

$$\delta(t) \iff 1 \quad e \quad x_1(t) * x_2(t) = X_1(s)X_2(s)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \text{pólos de } H(s) = \text{zeros de } Q(s) = \text{r.c.'s} \quad \text{zeros de } H(s) = \text{raízes de } P(s) \\ h(t), t \geq 0 \iff & \boxed{H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}} \\ & e \quad y_{\text{esn}}(t) = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

Substituindo $y(0^-), \dot{y}(0^-), X(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{(s+5) \cdot 2 + 1}{s^2 + 5s + 6} + \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6} \cdot \frac{1}{s+4}$$

$$Y(s) = \boxed{\frac{2s+11}{(s+2)(s+3)}} + \boxed{\frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}}$$

$$\underbrace{Q(s) = (s+2)(s+3) = 0}_{\text{equação característica do sistema!}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_2 = -3 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{pólos de } Y_0(s) = \text{r.c.'s!} \\ \text{pólos simples} \end{array}$$

$$(s+2)(s+3)(s+4) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_1 = -2 \\ b_2 = -3 \\ b_3 = -4 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{pólos de } Y_{\text{esn}}(s) = \text{r.c.'s} \\ + \text{pólo de } X(s) \\ \text{pólos simples} \end{array}$$

Obs:

- se $x(t) = e^{-3t}u(t)$, então $X(s) = \frac{1}{s+3}$ e pólos de $Y_{\text{esn}}(s) = -2, -3, -3$;
- se $x(t) = e^{-t}u(t)$, então $X(s) = \frac{1}{s+1}$ e pólos de $Y_{\text{esn}}(s) = -2, -3$ ($(s+1)$ em $H(s)$ cancelou $(s+1)$ em $X(s)$)

$$Y_0(s) = \frac{2s+11}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} = \frac{7}{s+2} - \frac{5}{s+3}$$

$$\begin{aligned} Y_{\text{esn}}(s) &= \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{c_1}{s+2} + \frac{c_2}{s+3} + \frac{c_3}{s+4} \\ &= -\frac{0,5}{s+2} + \frac{2}{s+3} - \frac{1,5}{s+4} \end{aligned}$$

$\therefore y_0(t) = (7e^{-2t} - 5e^{-3t})$, $t \geq 0$ ($y_0(t)$ é combinação linear dos m.c.'s!)

$$y_{\text{esn}}(t) = -0,5e^{-2t} + 2e^{-3t} - 1,5e^{-4t}, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = y_0(t) + y_{\text{esn}}(t) = 6,5e^{-2t} - 3e^{-3t} - 1,5e^{-4t}, \quad t \geq 0$$

4.4.1 Resposta Estado Nulo

Considere um sistema LCIT com memória (não necessariamente descrito por uma equação diferencial). Assuma que $v(0^-) = 0$ (condição inicial nula em $t_0 = 0^-$). No Capítulo 2, encontramos que

$$y(t) = y_{\text{esn}}(t) = x(t) * h(t)$$

onde $h(t)$ é a *resposta impulsiva*. Considere que

$$x(t) \iff X(s) \quad y(t) \iff Y(s) \quad h(t) \iff H(s)$$

Logo, pela propriedade de *convolução no tempo* da transformada de Laplace, concluímos que

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Denominamos $H(s)$ de *função de transferência* do sistema e escrevemos

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)}$$

Agora, considere um sistema LCIT descrito por ($N = M$)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = 0$ em $t_0 = 0^-$ e entrada $x(t)$ causal, onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N, \quad P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Assim,

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \dots = y^{(N-1)}(0^-) = 0 \quad x(0^-) = \dot{x}(0^-) = \dots = x^{(N-1)}(0^-) = 0$$

Considere que

$$x(t) \iff X(s) \quad y(t) = y_{\text{esn}}(t) \iff Y(s) = Y_{\text{esn}}(s)$$

Pela propriedade de *diferenciação no tempo* da transformada de Laplace, temos

$$D^k y(t) \iff s^k Y(s) \quad D^k x(t) \iff s^k X(s)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial, obtemos

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s)$$

Considere que

$$h(t) \iff H(s)$$

onde $h(t)$ é a *resposta impulsiva*. Para $x(t) = \delta(t)$, temos que $X(s) = 1$. Portanto,

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

e

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Temos que $H(s)$ é a *função de transferência* do sistema e escrevemos

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$$

Como $H(s) = P(s)/Q(s)$, concluímos que ($P(s)$ e $Q(s)$ podem ter *raízes em comum* = *cancelamento pólo-zero!*):

$$\{\text{pólos } H(s)\} \subset \{\text{pólos } Q(s)\} = \{\text{raízes características}\}$$

E, como

$$Y(s) = H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s)$$

concluímos que (pode haver um *cancelamento* entre um *zero* de $H(s)$ e um *pólo* de $X(s)$, ou um *cancelamento* entre um *pólo* de $H(s)$ e um *zero* de $X(s)$!):

$$\{\text{pólos } Y(s)\} \subset \{\text{pólos } Q(s) + \text{pólos } X(s)\}$$

Obs Seja $g(t)$ a resposta estado nulo para $x(t) = u(t)$ (degrau unitário). Como

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s}$$

concluímos que:

$$\boxed{g(t) \iff G(s) = H(s)X(s) = H(s)\frac{1}{s}} \quad \boxed{h(t) \iff H(s) = sG(s)}$$

De acordo com as propriedades de integração e diferenciação no tempo da Transformada de Laplace, resgatamos que $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$ e $h(t) = dg(t)/dt$ (veja a Seção 2.6).

4.4.2 Resposta Total

Considere um sistema LCIT descrito por ($N = M$)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$ e entrada $x(t)$ causal, onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N, \quad P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Assim,

$$x(0^-) = \dot{x}(0^-) = \dots = x^{(N-1)}(0^-) = 0$$

Pela propriedade de *diferenciação no tempo* da transformada de Laplace, temos

$$D^k y(t) \iff s^k Y(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} y^{(j-1)}(0^-) \quad D^k x(t) \iff s^k X(s)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial, obtemos

$$Q(s)Y(s) - R(s) = P(s)X(s)$$

onde os coeficientes do polinômio $R(s)$ dependem do estado inicial v_0 (mas, se $v_0 = 0$, então $R(s) = 0$!). Portanto,

$$Y(s) = \underbrace{\frac{R(s)}{Q(s)}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{P(s)}{Q(s)}X(s)}_{Y_{esn}(s)} = \underbrace{\frac{R(s)}{Q(s)}}_{Y_0(s)} + \underbrace{H(s)X(s)}_{Y_{esn}(s)}$$

onde

$$h(t) \iff H(s) = P(s)/Q(s) \quad (\text{resposta impulsiva})$$

$$y_0(t) \iff Y_0(s) = R(s)/Q(s) \quad (\text{resposta entrada nula})$$

$$y_{esn}(t) = h(t) * x(t) \iff Y_{esn}(s) = H(s)X(s) \quad (\text{resposta estado nulo})$$

Exemplos

(1) $\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$

$$\begin{cases} y(0^-) = 2 \\ x(t) = u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = ?, \quad t \geq 0$$

$$y(t) \iff Y(s)$$

$$\dot{y}(t) \iff sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$$

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s}$$

$$sY(s) - y(0^-) + 2Y(s) = X(s)$$

$$sY(s) - 2 + 2Y(s) = X(s) = 1/s$$

$$(s+2)Y(s) = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s+1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+2)s} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s} = \frac{1,5}{s+2} + \frac{0,5}{s}$$

$$y(t) = 1,5e^{-2t} + 0,5, \quad t \geq 0$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,5$$

$$sY(s) = \frac{2s+1}{s+2} \quad (\text{pólo em } -2 \text{ (SPE)}) \quad \therefore \quad \boxed{y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0,5}$$

(2) $\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t)$

$$\begin{cases} y(0^-) = 2 \\ x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$sY(s) - y(0^-) + 2Y(s) = sX(s) = \frac{s}{s} = 1$$

$$(dx(t)/dt \iff sX(s) = 1 \iff \delta(t))$$

$$(s+2)Y(s) = 2 + 1$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$\therefore \boxed{y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0}$$

Note que $y(t) \neq y_0(t) = 2e^{-2t}$. Isto mostra que não se pode tomar $\dot{x}(t) = 0$ no lado direito da equação diferencial, apesar de que $x(t) = u(t)$. Além disso,

$$Y_{esn}(s) = H(s)X(s) = \frac{s}{s+2} \frac{1}{s} = \frac{1}{s+2}$$

ou seja, o zero em $s = 0$ de $H(s)$ cancelou o pólo em $s = 0$ de $X(s)$. Portanto, $y_{esn}(t) = e^{-2t}u(t)$, e não $y_{esn}(t) = K_1e^{-2t}u(t) + K_2u(t)$ com $K_2 \neq 0$. Assim, tudo se passa como se tal cancelamento anulasse a influência da entrada $x(t)$ no sistema! De fato, $y_{esn}(t)$ ficou determinada somente pelo pólo em $s = -2$ de $H(s)$!

$$(3) \quad \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

$$\begin{cases} y(0^-) = 1 \\ \dot{y}(0^-) = 2 \end{cases}$$

$$Q(D) = D^2 + 4D + 3$$

$$P(D) = 2D + 1$$

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(t) = ?, t \geq 0$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 4sY(s) - 4y(0^-) + 3Y(s) = 2sX(s) + X(s)$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = s + 6 + (2s + 1) \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+6}{s^2 + 4s + 3} + \frac{2s+1}{s^2 + 4s + 3} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+3)} + \frac{2s+1}{(s+1)(s+3)s} \quad \begin{aligned} &= Y_0(s) &&= Y_{esn}(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{s(s+6) + 2s+1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{s^2 + 8s + 1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3} = \frac{1/3}{s} + \frac{3}{s+1} - \frac{7/3}{s+3}$$

$$\therefore \boxed{y(t) = \frac{1}{3} + 3e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t}, t \geq 0}$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1/3$$

$$sY(s) = \frac{s^2 + 8s + 1}{(s+1)(s+3)} \text{ (pólos no SPE)} \quad \therefore \boxed{y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1/3} \quad \text{TVF}$$

$$(4) \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \dot{x} + x$$

$$\dot{y}(0^-) = y(0^-) = 0$$

$$x(t) = 3e^{-5t}u(t) \iff X(s) = \frac{3}{s+5}$$

$$y(t) = y_{\text{esn}}(t) = ?$$

$$Q(D) = D^2 + 5D + 6 \quad Q(s) = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) \Rightarrow \text{pólos são } -2, -3$$

$$P(D) = D + 1 \quad P(s) = s + 1$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s+1}{\underbrace{(s+2)(s+3)}_{\text{função de transferência}}}$$

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{3(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+5)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{s+5} \\ &= \frac{-1}{s+2} + \frac{3}{s+3} - \frac{2}{s+5} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{y(t) = y_{\text{esn}}(t) = [-e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-5t}]u(t)}$$

(5) $H(s) = ?$ (função de transferência) \rightarrow para $v_0 = 0!!!$

a) Atrasador Ideal:

$$y(t) = x(t-T), \text{ onde } T > 0 \quad (\text{sistema LCIT})$$

$$Y(s) = X(s)e^{-sT} \quad (\text{propriedade do deslocamento no tempo})$$

$$\therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = e^{-sT}$$

b) Diferenciador Ideal:

$$y(t) = \frac{dx}{dt}, x(t) \text{ causal}$$

$$\underbrace{Y(s)}_{=Y_{\text{esn}}(s)} = sX(s)$$

$$\therefore \boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = s}$$

c) Integrador Ideal:

$$\dot{y}(t) = x(t) \quad \text{ou} \quad y(t) = \int_{t_0=0}^t x(\tau) d\tau, \quad x(t) \text{ causal}$$

$$\underbrace{sY(s)}_{\substack{\text{propriedade de} \\ \text{derivação no tempo}}} = X(s)$$

propriedade de derivação no tempo

ou

$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

propriedade de integração no tempo

$$\therefore \boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s}}$$

4.4.3 Funções de Transferência × Equações Diferenciais

Sabemos que um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial determina uma *função de transferência* $Y(s)/X(s) = H(s)$. É possível também fazermos o *caminho contrário*: dado um sistema LCIT com função de transferência $H(s) = P(s)/Q(s)$, podemos encontrar uma equação diferencial cuja função de transferência é $H(s)$.

Para isto, considere um sistema LCIT com $H(s)$ da forma

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde *não há cancelamentos pólo-zero*, ou seja, $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem raízes em comum. Suponha também esta forma de $H(s)$ não é resultante de *cancelamentos anteriores entre pólos e zeros* (isto significa que o sistema é *controlável e observável*).

Fazendo

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

obtemos que

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

é uma equação diferencial cuja função de transferência é de fato $H(s) = P(s)/Q(s)$.

Exemplo

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

$$\therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = (s + 5)X(s)$$

$$(D^2 + 4D + 3)y(t) = (D + 5)x(t)$$

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t)}$$

4.5 ESTABILIDADE

Considere um sistema LCIT com *memória causal* (não necessariamente descrito por uma equação diferencial) com função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $Q(s)$ e $P(s)$ não possuem raízes em comum. Assuma que $v(-\infty) = 0$ em $t_0 = -\infty$. Relembre que dizemos que o sistema é *BIBO estável* quando toda entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t) = y_{esn}(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é *BIBO instável*.

Propriedade 1: Suponha que $\text{grau}(Q)=N \geq \text{grau}(P)=M$. Então:

O sistema é *BIBO estável* \Leftrightarrow todos os pólos de $H(s)$ estão no SPE (parte real < 0)

Propriedade 2: Se $\text{grau}(Q)=N < \text{grau}(P)=M$, então o sistema é *BIBO instável*.

Justificativa: Quando $\text{grau}(Q)=N < \text{grau}(P)=M$, sempre poderemos escrever

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = Z(s) + \frac{P'(s)}{Q'(s)}$$

onde $\text{grau}(Z)=M-N$ e $\text{grau}(P'(s)) \leq \text{grau}(Q')=\text{grau}(Q)=N$. Assim, $Z(s)$ (domínio da frequência) corresponderá a diferenciadores (no tempo)!

Exemplo

Considere

$$H(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

Logo,

$$Y(s) = H(s)X(s) = \underbrace{sX(s)}_{\Leftrightarrow \dot{x}(t)} + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

Portanto, tal sistema é *BIBO instável* pois, conforme vimos no Capítulo 2, o diferenciador ideal é *BIBO instável*!

Agora, considere um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial da forma

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$, onde $Q(\lambda)$ e $P(\lambda)$ não possuem raízes em comum (ou seja, o sistema é *controlável* e *observável*).

Suponha que $v_0 = 0$. Assim, $y_0(t) = 0$ e

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Relembre que o sistema é *BIBO estável* quando toda entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t) = y_{esn}(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é *BIBO instável*.

Obs *BIBO* estabilidade refere-se à estabilidade *externa* ($v_0 = 0$ e $x \neq 0$) do sistema.

Sabemos que

$$v_0 = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = y_0 = y_{\text{esn}} = 0$$

No entanto, o que acontece com $y = y_0$ quando $x = 0$ mas $v_0 \neq 0$? Relembre que este é o conceito de *estabilidade interna* (ou assintótica) do sistema.

Como estamos assumindo que em

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

não há cancelamentos pólo-zero, temos que

$$\{\text{pólos } H(s)\} = \{\text{zeros } Q(s)\} = \{\text{raízes características}\}$$

Desse modo, a partir dos resultados do Capítulo 2, obtemos os seguintes **critérios**:

1. *Assintoticamente estável* se e somente se todos os pólos de $H(s)$ estão no *SPE*, ou seja, possuem parte real negativa.

Relembre que isto significa que, dada qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$.

2. *Assintoticamente instável* se e somente se houver ao menos um pólo de $H(s)$ no *SPD* (i.e. com parte real positiva) e/ou pólos com multiplicidade em cima do eixo imaginário.

Relembre que isto significa que, qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $y(t) = y_0(t)$ é *ilimitada*!

3. *Marginalmente estável* se e somente se não há pólos de $H(s)$ no *SPD*, mas existem pólos simples (sem multiplicidade) em cima do eixo imaginário.

Relembre que isto significa que, para termos $y(t) = y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, limitada e *arbitrariamente* próxima de zero, basta que $v_0 \neq 0$ seja suficientemente próxima de zero.

Obs A posição dos zeros de $H(s)$ no plano complexo *não influenciam* na estabilidade assintótica!

4.5.1 Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

Para um sistema descrito por uma equação diferencial, relembramos do Capítulo 2 que:

Propriedades:

1. Assintoticamente estável \Rightarrow BIBO estável
2. Assintoticamente instável ou marginalmente estável \Rightarrow BIBO instável

Logo (somente para *equações diferenciais* sem cancelamentos pólo-zero!):

$$\text{Assint. estável} \iff \text{BIBO estável} \iff \text{todos os pólos de } H(s) \text{ no SPE}$$

Exemplos

$$(1) \quad H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Assintoticamente estável e BIBO estável (veja a Figura 4.8).

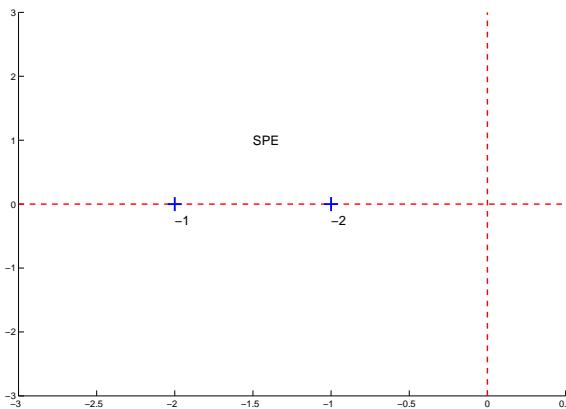


Figura 4.8: Exemplo 1.

$$(2) \quad H(s) = \frac{s^2}{s+3}$$

$2 = M > N = 1 \quad \therefore$ BIBO instável.

$$(3) \quad H(s) = \frac{s+1}{s^2-s+1}$$

$$s^2 - s + 1 = 0 \Rightarrow s = 0,5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assintoticamente instável e BIBO instável (veja a Figura 4.9).

$$(4) \quad H(s) = \frac{10}{s(s+4)}$$

Marginalmente estável e BIBO instável (veja a Figura 4.10).

$$(5) \quad H(s) = \frac{10}{s^2(s+4)}$$

Assintoticamente instável e BIBO instável (veja a Figura 4.11).

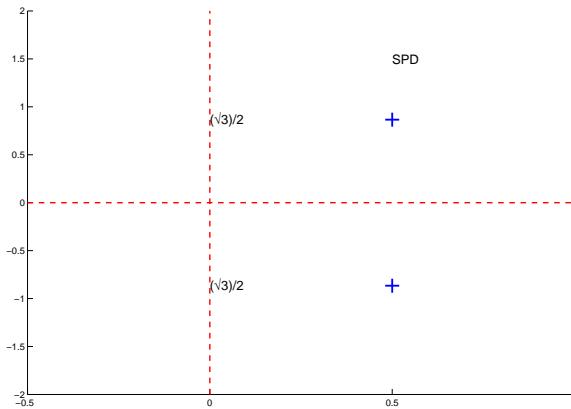


Figura 4.9: Exemplo 3.

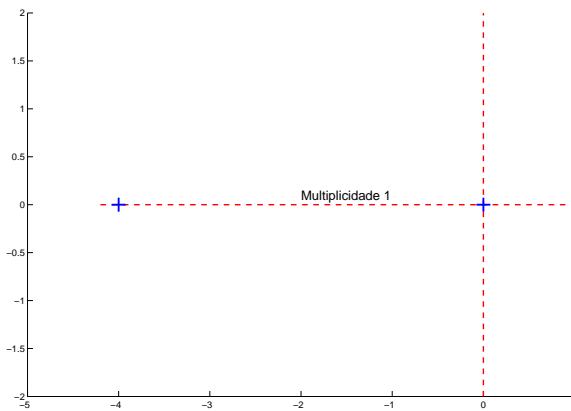


Figura 4.10: Exemplo 4.

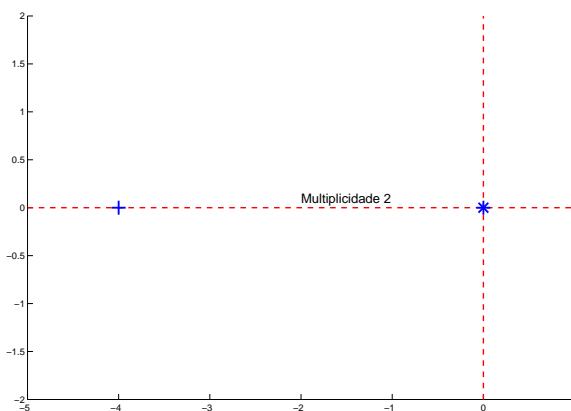


Figura 4.11: Exemplo 5.

4.5.2 O Fenômeno de Ressonância (Lathi Seção 2.7-7)

Considere um sistema LCIT com função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Assim,

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Quando os *pólos* da entrada $X(s)$ estão “longe” dos *pólos* de $H(s)$, a resposta $y(t)$ do sistema tende a ser “fraca”. E, quando a entrada $X(s)$ possui um *pólo* “próximo” de algum dos *pólos* de $H(s)$, a resposta $y(t)$ tende a ser “forte”, podendo inclusive se tornar ilimitada quando os pólos são imaginários e coincidem! Isto é o que denominamos de *ressonância*.

Obs A ponte *Tacoma Narrows* é considerada um exemplo clássico de ressonância, inclusive em livros de física. No entanto, Robert H. Scanlan, um dos precursores de *Aerodinâmica de Pontes*, propôs num artigo científico de 1991 que a causa do colapso da ponte não foi a ressonância (busque por *Resonance* em <http://en.wikipedia.org>).

Exemplos

$$(1) \quad H(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = e^{(-2-\Delta)t}u(t), \text{ onde } \Delta \geq 0$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2+\Delta}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+2+\Delta)}$$

- $\Delta > 0 \therefore$ pólo $X(s) \neq$ pólo $H(s)$

$$y(t) = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+2+\Delta} = \boxed{(K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-(2+\Delta)t})u(t)}$$

- $\Delta = 0 \therefore$ pólo $X(s) =$ pólo $H(s) \Rightarrow$ ressonância!

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \rightarrow \text{pólos repetidos!}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{(s+2)^2} = \boxed{(K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t})u(t)}$$

$$(2) \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1} \rightarrow \text{pólos são } s \approx -0,1 \pm j1$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \rightarrow \text{pólos são } s = \pm j\omega_0 \quad (\text{veja a Figura 4.12})$$

Temos que $y(t)$ se torna mais forte à medida que ω_0 se aproxima de 1 (parte imaginária do pólo de $H(s)$) \Rightarrow ressonância! Mas $y(t)$ é sempre limitada, pois $H(s)$ é BIBO estável! Saberemos explicar tal comportamento quando estudarmos “Resposta em Frequência”.

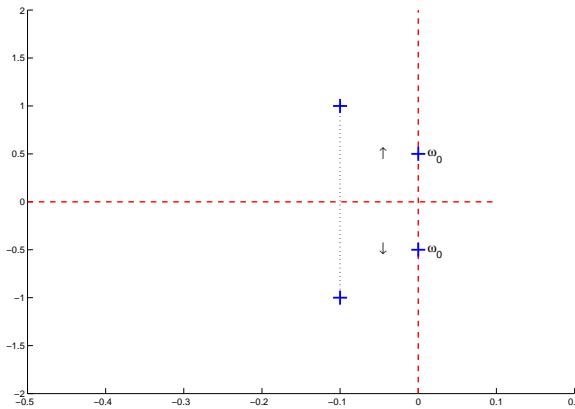


Figura 4.12: Ressonância no Exemplo 2.

$$(3) \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \rightarrow \text{pólos são } s = \pm j \text{ (marginalmente estável e BIBO instável)}$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) \quad (\text{limitada!})$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

- $\omega_0 \neq 1 \therefore$ pólo $X(s) \neq$ pólo $H(s)$

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s+j)} + \frac{K_1^*}{(s-j)} + \frac{K_2}{(s+j\omega_0)} + \frac{K_2^*}{(s-j\omega_0)}$$

Tabela

$$\stackrel{\uparrow}{y(t)} = [c_1 \cos(t+\theta_1) + c_2 \cos(\omega_0 t + \theta_2)]u(t) \rightsquigarrow \text{saída limitada!}$$

- $\omega_0 = 1 \therefore$ pólo $X(s) =$ pólo $H(s) \Rightarrow$ ressonância!

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

Tabela

$$\stackrel{\uparrow}{y(t)} = c_1 \cos(t+\theta_1)u(t) + c_2 t \cos(t+\theta_2)u(t) \rightsquigarrow \text{saída ilimitada!}$$

$$(4) \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow \text{pólos são } s=0, s=-1 \text{ (marginalmente estável e BIBO instável)}$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) \quad (\text{limitada!})$$

$$\omega_0 \geq 0$$

$$\omega_0 = 0 \Rightarrow x(t) = u(t)!$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s}{s(s+1)(s^2 + \omega_0^2)}$$

- $\omega_0 \neq 0 \therefore \text{pólos } X(s) \neq \text{pólos } H(s)$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{(s+j\omega_0)} + \frac{K_3^*}{(s-j\omega_0)}$$

$$y(t) = [K_1 + K_2 e^{-t} + K_3 \cos(\omega_0 t + \theta)]u(t) \rightsquigarrow \text{limitada!}$$

- $\omega_0 = 0 \therefore x(t) = u(t) \Rightarrow \text{ressonância!}$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{(s+1)}$$

$$y(t) = K_1 u(t) + K_2 t u(t) + K_3 e^{-t} u(t) \rightsquigarrow \text{ilimitada!}$$

($t u(t)$ é a integral da entrada $x(t) = u(t)$)

4.6 ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS: O CIRCUITO TRANSFORMADO

Veremos agora como analisar facilmente um *circuito elétrico* com condições iniciais nulas através da *transformada de Laplace*. Relembre que

$$v_R(t) = R i_R(t), \quad i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Como $v_C(0^-) = 0$ e $i_C(0^-) = 0$, obtemos que

$$V_R(s) = \underbrace{R}_{Z_R(s)} I_R(s), \quad V_C(s) = \underbrace{\frac{1}{Cs}}_{Z_C(s)} I_C(s), \quad V_L(s) = \underbrace{Ls}_{Z_L(s)} I_L(s)$$

Nestes 3 casos, podemos escrever

$$V(s) = Z(s)I(s) \quad (\text{generalização da Lei de Ohm})$$

e denominamos $Z(s)$ de *impedância*. Assim,

$$Z(s) = R \text{ (resistor)}, \quad Z(s) = \frac{1}{Cs} \text{ (capacitor)}, \quad Z(s) = Ls \text{ (indutor)}$$

Note que, se considerarmos que $V(s)$ é a *saída* e que $I(s)$ é a *entrada*, então impedância $Z(s)$ é a *função de transferência*, pois $V(s)/I(s) = Z(s)$.

A manipulação de impedâncias é idêntica à manipulação de resistores:

- Se $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são conectadas em *série*, então a impedância equivalente é:

$$Z_{\text{eq}}(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$$

- Se $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são conectadas em *paralelo*, então a impedância equivalente é:

$$Z_{\text{eq}}(s) = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

A consequência dos resultados acima é que podemos facilmente simular um circuito elétrico no Matlab com base em funções de transferência!

Exemplo

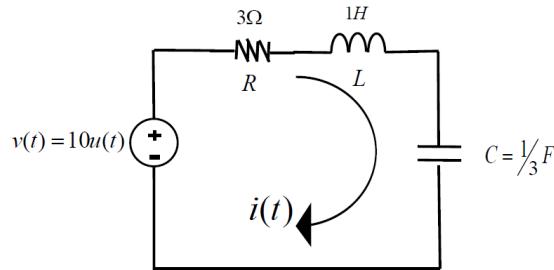


Figura 4.13: Circuito elétrico.

$$\text{LKT: } -v(t) + v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$$

$$V_L(s) + V_R(s) + V_C(s) = V(s)$$

$$Z_L(s)I(s) + Z_R(s)I(s) + Z_C(s)I(s) = V(s)$$

$$V(s) = \underbrace{(Z_L(s) + Z_R(s) + Z_C(s))}_{Z_{\text{eq}}(s) \text{ série}} I(s)$$

ou

RLC em série: $Z_{\text{eq}}(s) = Z_L(s) + Z_R(s) + Z_C(s)$

$$V(s) = Z_{\text{eq}}(s)I(s)$$

$$V(s) = (Z_L(s) + Z_R(s) + Z_C(s))I(s)$$

Logo,

$$\begin{array}{c} I(s) = \frac{V(s)}{Z_{\text{eq}}(s)} = \frac{1}{\boxed{Z_{\text{eq}}(s)}} \cdot V(s) \rightarrow \text{entrada } x(t) = 10u(t) \\ \downarrow \\ \text{saída} \\ y(t) \end{array}$$

$$Z_{\text{eq}}(s) = Ls + R + \frac{1}{Cs} = \boxed{\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}}$$

$$Z_{\text{eq}}(s) = \frac{0,5s^2 + 1,5s + 1}{0,5s} = \boxed{\frac{s^2 + 3s + 2}{s}}$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = H(s) = \frac{1}{Z_{\text{eq}}(s)} = \boxed{\frac{s}{s^2 + 3s + 2}} \quad \begin{array}{l} \text{Função de} \\ \text{Transferência} \\ \text{a ser simulada no} \\ \text{Matlab!} \end{array}$$

$$\therefore I(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \cdot V(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{10}{s}$$

$$I(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 2} = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}$$

$$\therefore \boxed{i(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})u(t)}$$

4.7 DIAGRAMA DE BLOCOS

Suponha que o sistema S_1 tem função de transferência $H_1(s)$ e que o sistema S_2 tem função de transferência $H_2(s)$. Então:

- Conexão em *paralelo*: o sistema S_p tem função de transferência $Y(s)/X(s) = H_p(s) = H_1(s) + H_2(s)$
- Conexão em *cascata (ou série)*: o sistema S_c tem função de transferência $Y(s)/X(s) = H_c(s) = H_1(s)H_2(s) = H_2(s)H_1(s)$. Assim, em termos da função de transferência $H_c(s)$, tanto faz ligarmos S_2 após S_1 ou S_1 após S_2 . No entanto, relembrre que *fisicamente* a ordem importa!
- Conexão em *realimentação (feedback)*: temos que

$$E(s) = X(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)X(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

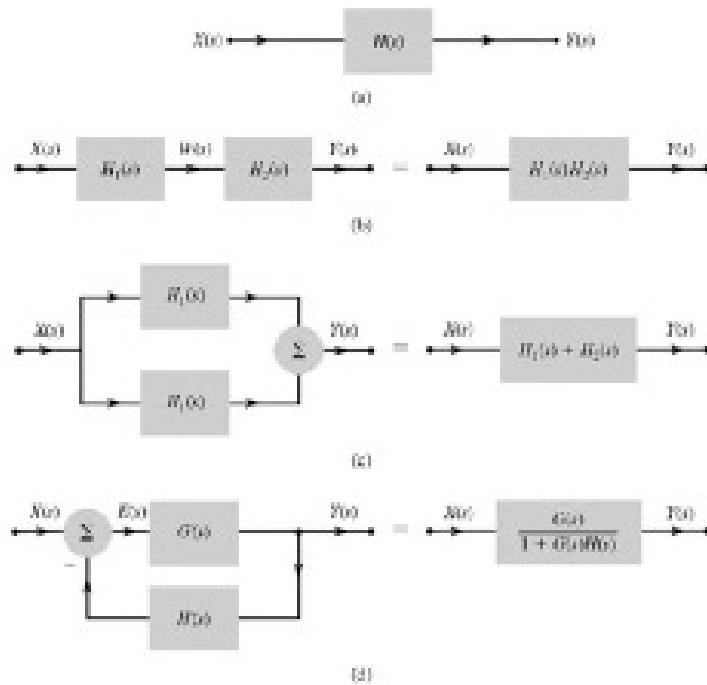


Figura 4.14: Conexões elementares de blocos e seus equivalentes.

Logo,

$$G(s)X(s) = Y(s) + G(s)H(s)Y(s) = Y(s)[1 + G(s)H(s)]$$

Portanto, a função de transferência do sistema realimentado é

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

Quando $H(s) = 1$, dizemos que a realimentação é *unitária*. Neste caso,

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{P(s)}{Q(s)}}{1 + \frac{P(s)}{Q(s)}} = \frac{P(s)}{P(s) + Q(s)}}$$

onde $G(s) = P(s)/Q(s)$, $P(s)$ é o polinômio que determina os zeros de $G(s)$, $Q(s)$ é o polinômio que determina os pólos de $G(s)$, e $\text{grau}(P(s)) \leq \text{grau}(Q(s))$. Desse modo (somente para realimentação unitária!):

1. $F(s)$ e $G(s)$ possuem a mesma ordem e os mesmos zeros!
2. Os pólos de $F(s)$ são dados por $P(s) + Q(s) = 0$, ou seja, são influenciados pelos zeros e pólos de $G(s)$!

Exemplo

Considere que $G(s) = \frac{2}{(s+5)}$ e $H(s) = 1$ (realimentação unitária).
Logo,

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{2}{(s+5)}}{1+\frac{2}{(s+5)}}.$$

Agora, multiplicando o numerador e o denominador por $s+5$, obtemos que:

$$F(s) = \frac{(s+5)\frac{2}{(s+5)}}{(s+5)+(s+5)\frac{2}{(s+5)}} = \boxed{\frac{2}{s+7}}$$

Conforme o esperado, temos que $F(s)$ é de primeira ordem (= ordem de $G(s)$) e, assim como $G(s)$, não possui zeros. Note, ainda, que $G(s)$ possui um pôlo em $s = -5$, mas o pôlo de $F(s)$ está em $s = -7$!

4.8 UTILIZAÇÃO DE AMPLIFICADORES OPERACIONAIS PARA A REALIZAÇÃO DE SISTEMAS

Realizar (ou *implementar*) uma função de transferência $H(s)$ é construir um sistema físico cuja função de transferência é $H(s)$.

A implementação de

$$H(s) = -\frac{Z_f(s)}{Z(s)}$$

através de um *circuito eletrônico* utilizando amplificadores operacionais (amp-ops) é ilustrada abaixo:

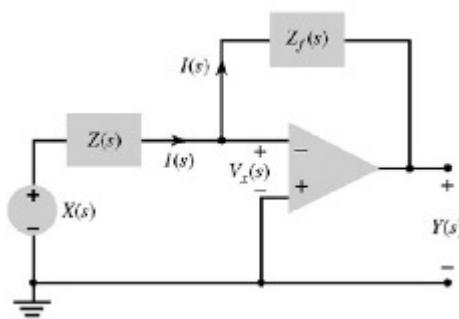


Figura 4.15: Implementação de $Y(s)/X(s) = H(s)$ com amp-ops, onde $Z_f(s)$ e $Z(s)$ são impedâncias.

- Multiplicador escalar: $H(s) = -\frac{R_f}{R}$
 - Intregrador: $H(s) = -\frac{1}{RC} \frac{1}{s}$
- $$\left(Z_f(s) = Z_c(s) = \frac{1}{C_s}, Z(s) = Z_R(s) = R \right)$$

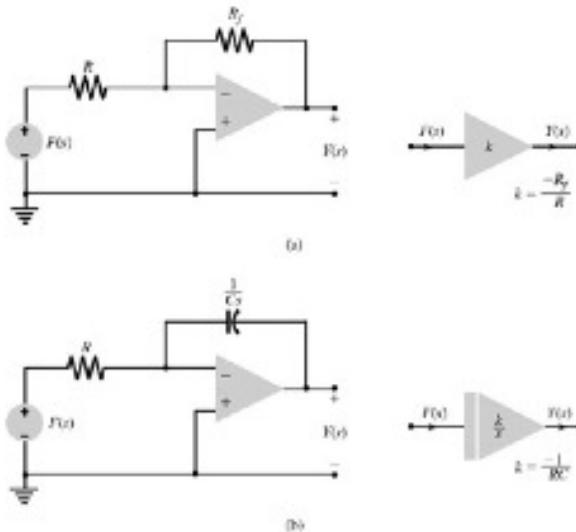
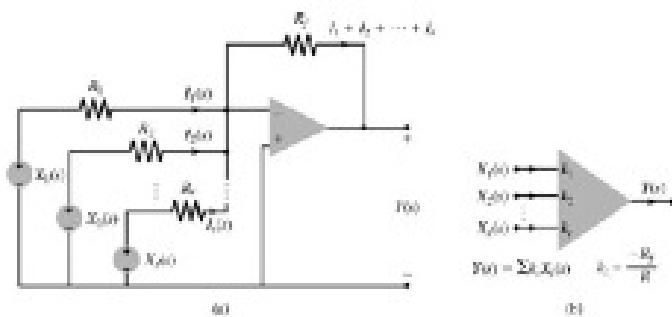


Figura 4.16: (a) Multiplicador escalar (b) Integrador.

- Somador com ponderação: $Y(s) = \sum_{i=1}^r k_i X_i(s)$

Figura 4.17: Somador com ponderação, onde $k_i = -R_f/R_i$.

Aplicações:

- Implementação de um controlador com realimentação.
- Simulação *análogica* de sistemas elétricos, mecânicos, químicos, etc (na época em que não haviam computadores digitais).

4.9 RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE PARA ENTRADAS SENOIDAIS CAUSAIS

Considere a seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)}$$

Suponha que $\text{grau}(P(s)) \leq \text{grau}(Q(s))$, $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem raízes em comum, e que $H(s)$ é BIBO estável, ou seja, os n pólos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ estão no SPE (parte real negativa!).

Primeiramente, vamos analisar a resposta $y(t)$ ($= y_{esn}(t)$), $t \geq 0$, para a entrada

$$x(t) = e^{j\omega t} u(t) \quad (\text{exponencial complexa})$$

Por simplicidade, assumiremos que todos os pólos são simples e reais.

Temos que

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s - j\omega} \\ Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) = \frac{P(s)}{(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)(s - j\omega)} \end{aligned}$$

Expandindo $Y(s)$ em frações parciais, obtemos

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - \lambda_i} + \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=j\omega} \frac{1}{s - j\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - \lambda_i} + H(j\omega) \frac{1}{s - j\omega}$$

Logo,

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t}}_{y_{tr}(t)} + \underbrace{H(j\omega) e^{j\omega t}}_{y_{ss}(t)}, \quad t \geq 0$$

onde $y_{tr}(t)$ é a componente de regime transitório e $y_{ss}(t)$ é a componente de regime permanente (steady state) de $y(t)$.

Como $H(s)$ é BIBO estável, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

Portanto,

$$x(t) = e^{j\omega t} u(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (\star)$$

Obs Rigorosamente, deveríamos escrever $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - H(j\omega) e^{j\omega t}] = 0$.

Agora, considere a entrada senoidal *causal*

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) u(t) = A \operatorname{Re}[e^{j\theta} e^{j\omega t}] u(t)$$

onde $A > 0$ é a amplitude, $\omega \geq 0$ é a frequência angular (em rad/s), e θ é a fase (em rad).

Como

$$\operatorname{Re}[s] = (s + s^*)/2, \quad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \text{ (forma polar)}$$

obtemos de (*) e por linearidade que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) &= A \operatorname{Re}[H(j\omega) e^{j\theta} e^{j\omega t}] = A \operatorname{Re}[|H(j\omega)| e^{j(\theta + \angle H(j\omega))} e^{j\omega t}] \\ &= \underbrace{A|H(j\omega)|}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \underbrace{\theta + \angle H(j\omega)}_{\substack{\text{def. de fase} \\ \text{fase (em rad)}}}) \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Assim, vemos que a saída em *regime permanente* é *senoidal* e com a mesma frequência ω de $x(t)$. Entretanto, a amplitude é $A|H(j\omega)|$, e a fase é $\theta + \angle H(j\omega)$.

Note que, para $\omega > 0$, podemos rescrever (\star\star) como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) &= A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)) \\ &= A|H(j\omega)| \cos(\omega[t + \angle H(j\omega)/\omega] + \theta) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = |H(j\omega)| \underbrace{x(t + \angle H(j\omega)/\omega)}_{\text{atraso (em s)}}$$

onde $\angle H(j\omega)$ é dado em *rad*.

E, como para $\omega = \theta = 0$, temos

$$x(t) = A u(t) \iff X(s) = \frac{A}{s}$$

concluímos pelo *TVF* que

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A H(0)$$

Denominamos $H(0)$ de *ganho estático* ou *ganho CC* (válido apenas apenas para $H(s)$ BIBO estável!).

Obs 1 Relembre que

$$y(t) = y_{esn}(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t) \text{ (resposta estado nulo!)} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

A componente de regime transitório $y_{tr}(t)$ está *sempre presente*, apesar de poder ter uma dinâmica bem rápida em certos casos.

Obs 2 Para um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial sem cancelamentos pólo-zero em $H(s)$, relembre que: BIBO estável \Leftrightarrow Assintoticamente Estável $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$. Logo:

$$y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t) = y_0(t) + \underbrace{y_{tr}(t) + y_{ss}(t)}_{=y_{esn}(t)} \text{ (resposta total!)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))$$

Exemplos

(1) $H(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow$ BIBO estável

$$x(t) = \cos(\omega t)u(t) \quad (A = 1, \theta = 0) \Leftrightarrow X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = Y_{esn}(s) = H(s)X(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2 + \omega^2)}$$

$$\therefore Y(s) = Y_{esn}(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s+1}}_{=Y_{tr}(s)} + \underbrace{\frac{K_2}{s-j\omega}}_{=Y_{ss}(s)} + \underbrace{\frac{K_2^*}{s+j\omega}}$$

$$y_{tr}(t) = K_1 e^{-t} u(t) \text{ (regime transitório!)}$$

$$y_{ss}(t) = ?$$

- $\omega = 0$ ($x(t) = u(t)$)

$$y_{ss}(t) = 1 \overline{H(0)} = 1$$

Verificação pelo TVF:

$$y_{ss}(t) = y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \underbrace{H(s)X(s)}_{=Y(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s+1} \frac{1}{s} = H(0) = 1$$

Matlab: Stop time = 10

Observe a influência de $y_{tr}(t)$ na simulação!

Note que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$!

Cuidado: não temos que $y(t) = y_{ss}(t) = y_\infty = 1$, $t \in \mathbb{R}$!

- $\omega = 0,01$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$H(j0,01) = \frac{1}{j0,01 + 1} = 1 \cdot e^{-j0,001}$$

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= \cos(0,01t - 0,001) = \cos(0,01(t - 0,1)) \\ &= x(t - 0,1) \end{aligned}$$

atraso em segundos!

Matlab: Stop time = 5000, Max Step Size = 0.001

Observe a influência de $y_{tr}(t)$ na simulação!

Note que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$!

Cuidado: não temos que $y(t) = y_{ss}(t) = \cos(0,01t - 0,001)$ para todo t !

- $\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{1}{j+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t - \underbrace{\pi/4}_{=45^\circ}) = 0,7071x(t - \underbrace{0,791}_{\text{atraso em segundos}})$$

Stop time = 50

- $\omega = 100$

$$H(j100) = \frac{1}{j100+1} = 0,01e^{-j1,56}$$

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= 0,01 \cos(100t - \underbrace{1,56}_{\approx 90^\circ}) = 0,01 \cos(100(t - 0,0156)) \\ &= 0,01x(t - \underbrace{0,0156}_{\text{atraso em segundos}}) \end{aligned}$$

Stop time = 0,5

- Ilustração de Filtragem no Matlab:

$$x(t) = \overbrace{\cos(0,01t)}^{\text{sinal}} + \overbrace{0,05 \cos(20t)}^{\text{ruído}}$$

$$(2) \quad \frac{I(s)}{V(s)} = H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \rightarrow \text{BIBO estável}$$

(função de transferência do circuito RLC série de um exemplo anterior)

$$v(t) = 2 \cos(\omega t)$$

- $\omega = 0$

$$i_\infty = i_{ss}(t) = 2 \overbrace{H(0)}^{\text{ganho est\'atico}} = 0 \text{ (ou pelo TVF)}$$

- $\omega = 5$

$$H(j5) = \frac{j5}{(j5)^2 + 3j5 + 2} = 0,18e^{-j0,99}$$

$$v(t) = 2 \cos(5t)$$

$$\begin{aligned} i_{ss}(t) &= 0,36 \cos(5t - 0,99) = 0,36 \cos(5(t - \pi/20 - 0,2)) \\ &= 0,36v(t - 0,2) \\ &\quad \text{i}_{ss}(t) \text{ está atrasada} \\ &\quad \text{de } 0,2\text{s em relação} \\ &\quad \text{a } v(t)! \end{aligned}$$

Vejam as simulações no Matlab do arquivo CircuitoRLC.mdl.

$$\frac{I(s)}{V(s)} = H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{Z_{eq}(s)}$$

$$I(s) = H(s)V(s) = \frac{1}{Z_{eq}(s)}V(s) \quad v(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{Z_{eq}(j\omega)} = \frac{1}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$i(t) = i_{tr}(t) + i_{ss}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_{tr}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = i_{ss}(t)$$

$$i_{ss}(t) = A \left| \frac{1}{Z_{eq}(j\omega)} \right| \cos \left(\omega t + \theta + \underbrace{\angle \frac{1}{Z_{eq}(j\omega)}}_{\text{defasagem de fase!}} \cdot \right)$$

$$= \left| \frac{1}{Z_{eq}(j\omega)} \right| v \left(t + \underbrace{\frac{\angle \frac{1}{Z_{eq}(j\omega)}}{\omega}}_{\text{atraso no tempo!}} \right)$$

4.10 FILTROS

Um *filtro* é um sistema LCIT cuja função de transferência $H(s)$ é BIBO estável (todos os pólos no SPE).

Relembre que todo *sistema físico real* deve ser *causal*. Sistemas não-causais não podem ser realizados (implementados) na prática. Relembre também que um sistema LCIT é causal se e somente se $h(t)$ é causal.

A resposta impulsiva dos *filtros ideais* é *não-causal*. Portanto, filtros ideais não podem ser realizados na prática!

O objetivo da engenharia é construir filtros práticos que possuem um desempenho próximo ao do ideal.

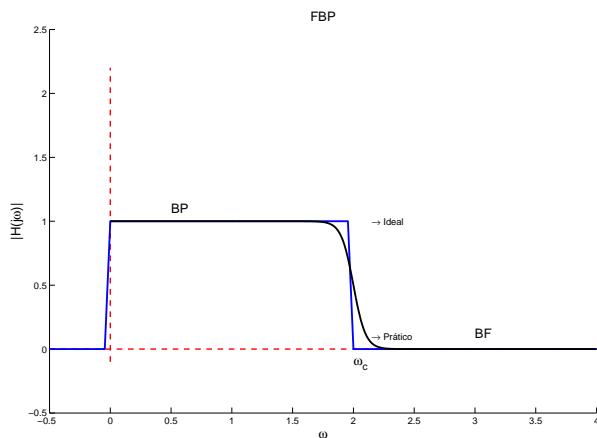
Filtros Ideais × Filtros Práticos

Figura 4.18: Filtro Passa-Baixas (FPB), onde BP=Banda Passante e BF=Banda Filtrada.

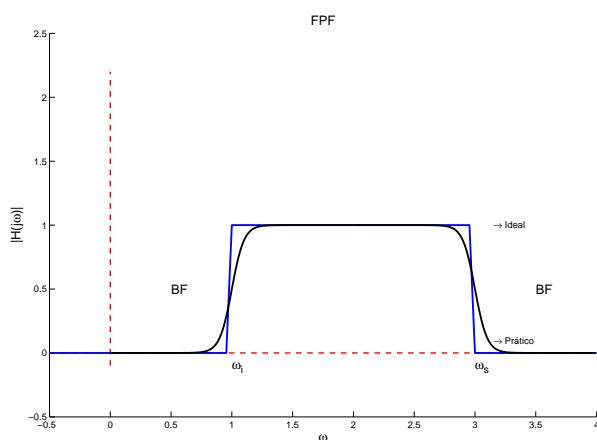


Figura 4.19: Filtro Passa-Faixa (FPP), onde BP=Banda Passante e BF=Banda Filtrada.

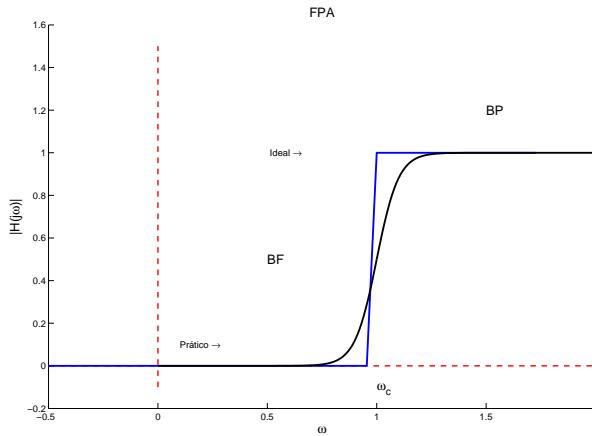


Figura 4.20: Filtro Passa-Altas (FPA), onde BP=Banda Passante e BF=Banda Filtrada.

- Projeto e Implementação de Filtros Práticos ⇒ Sinais II

4.11 DIFERENCIADOR IDEAL E AMPLIFICAÇÃO DE RUÍDOS

Considere o sistema *diferenciador ideal*

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

O diferenciador ideal não deve ser utilizado na prática por amplificar ruídos de alta frequência. Por exemplo,

$$r(t) = A \sin(\omega t) \rightarrow y(t) = \dot{r}(t) = \omega A \cos(\omega t)$$

ou seja, tal sistema amplifica a amplitude A do ruído $r(t)$ pelo fator ω . Logo, quando $\omega > 0$ é grande (alta frequência), temos que a amplitude da saída também será grande.

Exemplo no Matlab:

$$x(t) = s(t) + r(t) = t + 0.01 \sin(1000t) \rightarrow y(t) = \dot{x}(t) = 1 + 10 \cos(1000t)$$

onde $s(t) = t$ é o sinal a ser derivado e $r(t) = 0.01 \sin(1000t)$ é um ruído de alta frequência.

Conclusão: funções de transferência $H(s) = P(s)/Q(s)$ com $M > N$ não devem ser implementadas na prática!

4.12 RESPOSTA DE SISTEMAS DE PRIMEIRA E DE SEGUNDA ORDEM

Considere um sistema LCIT com função de transferência

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $x(t)$ é a *entrada* do sistema e $y(t)$ é a *saída*. Suponha que $N = \text{grau}(Q(s)) \geq \text{grau}(P(s)) = M$ e que não há cancelamentos polo-zero. Denominamos N de *ordem do sistema*.

4.12.1 Resposta de Sistemas de Primeira Ordem

Temos que toda função de transferência $G(s)$ de primeira ordem sem zero pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (\text{forma padrão})$$

De fato,

$$G(s) = \frac{\beta}{s + \alpha} = \frac{\overbrace{\beta/\alpha}^{=K}}{\underbrace{\frac{1}{\alpha}s + 1}_{=\tau}}$$

Suponha que $G(s) = K/(\tau s + 1)$ é (BIBO) estável, ou seja, $\tau > 0$. Considere uma entrada $x(t) = A$ do tipo *degrau* de magnitude A . Temos que a saída correspondente é

$$y(t) = AK(1 - \exp^{-t/\tau}) \iff Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{A}{s}$$

Note que $K = G(0)$ é o *ganho estático*. Denominamos τ de *constante de tempo*. Logo,

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = AG(0) = AK.$$

O instante de tempo para se atingir 95% de $y(\infty)$ é denominado de *tempo de acomodação de 5%* ($t_s(5\%)$), e é calculado por

$$0.95y(\infty) = y(t_s(5\%)) = KA(1 - e^{-t_s(5\%)/\tau}) \Rightarrow t_s(5\%) = 3\tau$$

O instante de tempo para se atingir 63% de $y(\infty)$ é calculado por

$$0.63y(\infty) = y(t(63\%)) = KA(1 - e^{-t(63\%)/\tau}) \Rightarrow t(63\%) = \tau$$

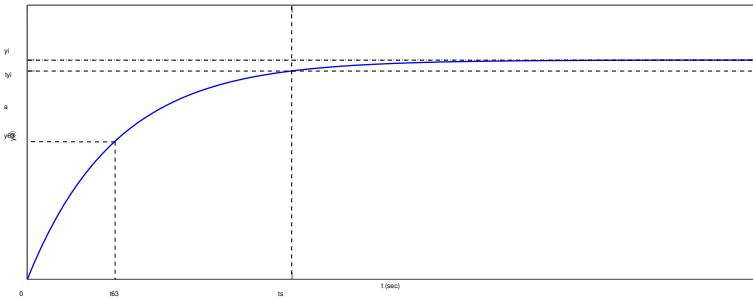


Figura 4.21: Resposta de um sistema de primeira ordem (estável e sem zero) ao degrau. *Não há oscilação nem sobressinal!*

Obs $t_s(5\%)$ e $t(63\%)$ *independem da amplitude A* da entrada do tipo degrau! E quanto menor τ , menor $t_s(5\%)$ e $t(63\%)$!

Portanto,

$$K = \frac{y(\infty)}{A}, \quad \tau = \frac{t_s(5\%)}{3} = t(63\%)$$

4.12.2 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

Toda função de transferência $G(s)$ de segunda ordem sem zeros e com pólos não-nulos pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde $\omega_n > 0$. Os pólos de $G(s)$ são

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Note que $K = G(0)$ é o *ganho estático* quando $G(s)$ é (BIBO) estável. Denominamos ξ de *coeficiente de amortecimento* e ω_n de *frequência natural*. Temos as seguintes situações:

1. *Sistema não-amortecido* ($\xi = 0$): os pólos são *complexos* com $p_{1,2} = \pm j\omega_n$, e a resposta *em regime permanente* a uma entrada do tipo degrau é *senoidal* com frequência ω_n .
2. *Sistema sub-amortecido* ($0 < \xi < 1$): os pólos são *complexos* com $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, e a resposta ao degrau apresenta *oscilação e sobressinal*.
3. *Sistema criticamente amortecido* ($\xi = 1$): os pólos são *reais e iguais* com $p_{1,2} = -\xi\omega_n$, e a resposta ao degrau não apresenta *oscilação nem sobressinal*, e há um ponto de inflexão.

4. *Sistema super-amortecido ($\xi > 1$): os pólos são reais, negativos e diferentes, e a resposta ao degrau não apresenta oscilação nem sobressinal, e há um ponto de inflexão.*
5. *Sistema (BIBO) instável ($\xi < 0$): os pólos possuem parte real positiva (SPD).*

4.12.3 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem Sub-Amortecidos

Suponha que $G(s) = K\omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$ é (BIBO) estável com $0 < \xi < 1$ (sub-amortecido). Considere uma entrada $x(t) = A$ do tipo degrau de magnitude A . Temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= KA \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \underbrace{\sin((\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) t + \cos^{-1}(\xi))}_{\omega_d} \right] \\ \Leftrightarrow Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{A}{s} \end{aligned}$$

Assim,

$$y(\infty) = AG(0) = AK$$

A resposta $y(t)$ apresenta *sobressinal e oscilações*. A frequência de oscilação é $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, denominada de *frequência natural amortecida*.

Para encontrarmos o *instante de pico* t_p e o *valor de pico* $y_p = y(t_p)$, resolvemos a equação $\dot{y}(t) = 0$, encontrando

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-(\xi\pi)/\sqrt{1-\xi^2}}$$

onde M_p é o *sobressinal (máximo) relativo*. Logo,

$$K = \frac{y(\infty)}{A}, \quad M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}, \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\xi^2}}$$

O instante de tempo $t_s(5\%)$ em que $y(t)$ entra na faixa de $\pm 5\%$ de $y(\infty)$ e lá permanece para todo *tempo futuro*, é denominado de *tempo de acomodação de 5%*. Temos que

$$t_s(5\%) \leq \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Obs $t_s(5\%)$ e M_p *independem da amplitude A da entrada do tipo grau!*
E quanto menor o amortecimento $0 < \xi < 1$, maior M_p !

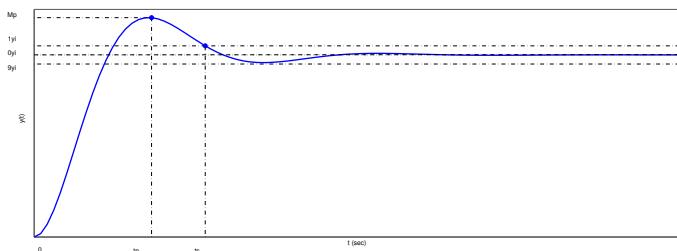


Figura 4.22: Resposta de um sistema de segunda ordem sub-amortecido (sem zeros) ao degrau.

4.12.4 Simulação de Sistemas de Primeira e de Segunda Ordem

1. Considere

$$G(s) = \frac{0.5}{2s + 1}$$

com $x(t) = 1$. Determine analiticamente τ , K , $y(\infty)$, $t_s(5\%)$. Verifique os cálculos por simulação no Matlab. Note que a resposta não apresenta sobressinal nem oscilação. Isto era esperado? Justifique.

2. Simule

$$G(s) = \frac{0.5}{2s - 1}$$

com $x(t) = 1$. Por qual razão não temos que $y(\infty) = G(0)$?

3. Considere

$$G(s) = \frac{4}{s + 10}$$

com $x(t) = 3$. Coloque $G(s)$ na forma padrão e determine analiticamente τ , K , $y(\infty)$, $t_s(5\%)$. Verifique os cálculos por simulação no Matlab.

4. Considere

$$G(s) = \frac{6.4}{s^2 + 3.648s + 16}$$

com $x(t) = 5$. Determine analiticamente K , $y(\infty)$, ξ , ω_n , M_p , e classifique o sistema. Verifique os cálculos por simulação no Matlab. Note que a resposta apresenta sobressinal e oscilação. Isto era esperado? Justifique. Observe que $t_s(5\%) \leq 3/(\xi\omega_n)$.

5. Repita o item anterior para

$$G(s) = \frac{6.4}{s^2 + 5.52s + 16}$$

6. Considere

$$G(s) = \frac{0.5}{(s+2)(s+2.5)} = \frac{0.5}{s^2 + 4.5s + 5}$$

com $x(t) = 10$. Determine analiticamente K , $y(\infty)$, ξ , ω_n , e classifique o sistema. Verifique os cálculos por simulação no Matlab. Note que a resposta não apresenta sobressinal nem oscilação. Isto era esperado? Justifique. Observe o ponto de inflexão na resposta.

4.12.5 Influência de Pólos e Zeros na Resposta

Considere um sistema LCIT com função de transferência

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Relembre que $G(s)$ é (BIBO) *estável* quando todos os pólos estão no SPE. Dizemos que $G(s)$ é de *fase não-mínima* quando há pólos ou zeros no SPD. Quando todos os pólos e zeros estão no SPE, dizemos que $G(s)$ é de *fase mínima*.

Suponha que $G(s)$ é (BIBO) estável. Em geral, para entradas $x(t)$ do tipo degrau, temos:

- A componente da resposta dinâmica referente a um polo afastado da origem (do plano s) é relativamente rápida.
- A componente da resposta dinâmica referente a um polo próximo da origem é relativamente lenta.
- Um zero tende a fazer com que a resposta dinâmica apresente sobressinal. Quanto mais próximo da origem estiver o zero, maior o sobressinal. E, quanto mais longe da origem, menor se torna o sobressinal, podendo o mesmo não existir. Assim, um sistema de segunda ordem com pólos reais e um zero poderá apresentar sobressinal dependendo da posicionamento do zero no plano s.
- Um zero bem próximo de um polo tende a anular os efeitos dos mesmos na resposta dinâmica.

4.12.6 Simulações

1. Considere o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde $\tau = 1$, $\tau = 0.5$. Para cada valor de τ , determine o polo e sua posição no plano s (use os comandos `zpk` e `pzmap` no Matlab), e conclua sobre a estabilidade e a rapidez da resposta do sistema. Simule para uma entrada do tipo degrau unitário.

2. Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{1.6}{(s+1)(s+2)} = \frac{1.6}{s^2 + 3s + 2}$$

Determine os polos e suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que não há sobressinal. Tal resultado era esperado? Justifique.

Agora, adicionando um zero, temos

$$G_z(s) = \frac{1.6(\beta s + 1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1.6(\beta s + 1)}{s^2 + 3s + 2}$$

onde $\beta = 0.1$, $\beta = 0.6$, $\beta = 0.99$, $\beta = 1.2$, $\beta = 2$, $\beta = 10$. Para cada valor de β , determine os polos e zeros, suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados. Note que, dependendo da posição do zero, o sobressinal será maior ou menor, podendo também não estar presente.

3. Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{0.9}{s^2 + s + 1}$$

Determine os polos e suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que há sobressinal. Tal resultado era esperado? Justifique. Agora, adicionando um zero, temos

$$G_z(s) = \frac{0.9(\beta s + 1)}{s^2 + s + 1}$$

onde $\beta = 0.05$, $\beta = 0.5$, $\beta = 1$, $\beta = 2.5$. Para cada valor de β , determine os polos e o zero, suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados.

4. Considere o sistema de segunda ordem de fase não-mínima

$$G(s) = \frac{-\beta s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

onde $\beta = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\beta = 1$, $\beta = 10$. Para cada valor de β , determine os pólos e o zero, suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que a resposta é negativa nos instantes iniciais quando β é grande o suficiente. Justificaremos tal comportamento no que se segue. Escrevemos

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{-\beta s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 3s + 2}}_{G_1(s)} - \underbrace{\frac{\beta s}{s^2 + 3s + 2}}_{G_2(s) = \beta s G_1(s)}$$

Assim,

$$Y(s) = \underbrace{G_1(s)X(s)}_{Y_1(s)} - \underbrace{\beta s G_1(s)X(s)}_{Y_2(s) = \beta s Y_1(s)} \iff y(t) = y_1(t) - y_2(t) = y_1(t) - \beta \dot{y}_1(t)$$

Verifique a validade da equação acima no Simulink para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise o motivo da resposta ser negativa nos instantes iniciais quando β é grande o suficiente.

4.12.7 Pólos Dominantes

O conceito de *dominância* desempenha um papel fundamental na análise e controle de sistemas LCIT. Seja $G(s)$ uma função de transferência, e s_d um pôlo real ou um par de pôlos complexos conjugados de $G(s)$ no SPE. Dizemos que s_d é *dominante* quando:

1. Pólos e zeros à direita de s_d , ou à esquerda e próximos de s_d , sempre ocorrem aos pares e, além disso, cada zero está muito próximo do pôlo do par correspondente. Isto significa que o zero praticamente anula o efeito do pôlo na resposta dinâmica, e vice-versa (o pôlo anula o efeito do zero).
2. Os demais pólos e zeros estão à esquerda de s_d e afastados.

Desse modo, se $G(s)$ tem um *pôlo real dominante*, então a *resposta dinâmica* de $G(s)$ terá características muito *próximas* às de um *sistema de primeira ordem*. E, se $G(s)$ tem um *par de pôlos complexos conjugados dominante*, então a *resposta dinâmica* terá *características* muito próximas às de um *sistema de segunda ordem subamortecido*.

Exemplos no Matlab:

1. Temos que

$$G(s) = \frac{0.8}{(s + 1)(0.05s + 1)}$$

se comporta como o sistema de primeira ordem $F(s) = 0.8/(s + 1)$, pois o pólo real $s_d = -1$ é dominante.

Verificação: utilizar o comando `pzmap` no Matlab e simular!

2. Temos que

$$G(s) = \frac{0.8(0.99s + 1)}{(s^2 + s + 1)(s + 1)(0.1s + 1)}$$

se comporta como o sistema de segunda ordem subamortecido $F(s) = 0.8/(s^2 + s + 1)$, pois os pólos complexos conjugados $s_d = -0.5 \pm j0.87$ são dominantes.

Verificação: utilizar o comando `pzmap` no Matlab e simular!

4.13 CONTROLE DE SISTEMAS EM MALHA-FECHADA

Motivação: (no quadro)

Considere o diagrama de blocos de um sistema em malha-fechada modelado por $G(s)$, onde $r(t)$ é a referência, $w(t)$ é uma perturbação (externa), $y(t)$ é a saída, $e(t) = r(t) - y(t)$ é o erro de rastreamento, $x(t)$ é o controle, e $C(s) = X(s)/E(s)$ é o controlador a ser projetado.

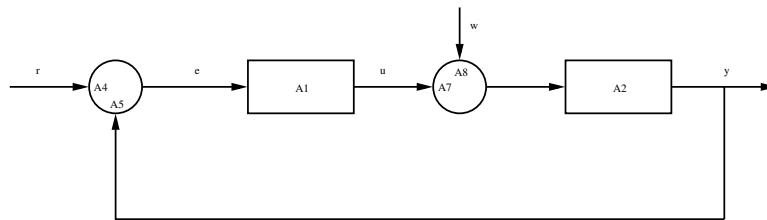


Figura 4.23: Diagrama de blocos do sistema $G(s)$ em malha-fechada com perturbação $w(t)$.

Projetar um controlador significa definir uma estrutura para

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

e então escolher adequadamente os parâmetros correspondentes de modo que o sistema em malha-fechada atenda a determinadas especificações de *regime transitório* (tempo de acomodação e sobressinal, por exemplo) e de *regime permanente* (erro nulo em regime permanente para referências e perturbações do tipo degrau, por exemplo).

4.13.1 Controladores Clássicos

Na prática, as seguintes estruturas de controladores são amplamente utilizadas, onde $K_c > 0$:

- *Proporcional (P):* $C(s) = E(s)/X(s) = K_c \Rightarrow x(t) = K_c e(t)$

- *Integral (I):* $C(s) = E(s)/X(s) = \frac{K_c}{s} \Rightarrow x(t) = K_c \int_0^t e(\tau) d\tau$
- *Proporcional-Integral (PI) = P + I:* $C(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_c(s+z)}{s}$

É importante ressaltar que, na prática, devemos sempre procurar utilizar controladores com a estrutura mais simples possível. Isto implica em menos dificuldades na implementação e em menores custos.

4.13.2 Método Algébrico de Projeto de Controladores

Considerando que $w = 0$ (*sem perturbação*), temos que a função de transferência em malha-fechada é

$$F_{RY}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{N_c(s)N(s)}{\underbrace{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}_{=P_{MF}(s)}} \quad (w = 0)$$

Denominamos

$$P_{MF}(s) = D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)$$

de *polinômio característico de malha-fechada*, e

$$P_{MF}(s) = D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s) = 0$$

de *equação característica de malha-fechada*. Note que as raízes de $P_{MF}(s) = 0$ coincidem com os pólos de $F_{RY}(s)$.

Uma maneira de projetarmos o controlador é primeiramente escolhermos a estrutura de $C(s)$ de modo que as especificações de regime permanente sejam atendidas e que $F_{RY}(s)$ seja uma função de transferência *estável* de primeira ou de segunda ordem. Note que a ordem de $F_{RY}(s)$ é *igual* à ordem de $C(s)G(s)$. Em muitos casos, isto pode ser alcançado através de um cancelamento entre um zero de $C(s)$ e um pôlo de $G(s)$. Em seguida, os parâmetros de $C(s)$ são determinados por igualdade polinomial.

Obs $F_{RY}(s)$ sempre deverá ser *estável*!

No entanto, tal método algébrico apresenta algumas restrições:

- Em geral, o método é válido para $G(s)$ de 1ª ou 2ª ordem.
- Cancelamentos pôlo-zero em $C(s)G(s)$ que estão no SPD (instável) não podem ser efetuados.
- Mesmo quando fazemos um cancelamento pôlo-zero em $C(s)G(s)$ que está no SPE (estável), temos que o regime transitório referente à perturbação $w(t)$ será influenciado pelo pôlo de $G(s)$

que foi cancelado. Desse modo, se o pólo cancelado de $G(s)$ é muito lento, ou seja, está muito próximo do eixo imaginário, a dinâmica da rejeição de tais perturbações também será bastante lenta. Na disciplina *Sistemas Realimentados*, serão estudadas técnicas de projeto de controladores em que não se faz cancelamentos pólo-zero.

- Quando desejamos que $F_{RY}(s)$ seja de segunda ordem, muitas vezes não conseguimos atender simultaneamente às especificações de tempo de acomodação ($t_s(5\%)$) e de sobressinal (M_p).

4.13.3 Erro em Regime Permanente

Analisaremos agora o erro de rastreamento $e(t) = r(t) - y(t)$ em *regime permanente* ($t \rightarrow \infty$) para referências e perturbações do tipo degrau. Temos que

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - [C(s)G(s)E(s) + G(s)W(s)] \\ \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}W(s) \\ \Rightarrow E(s) &= \underbrace{\frac{D_c(s)D(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}}_{=P_{MF}(s)}R(s) - \underbrace{\frac{D_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}}_{=P_{MF}(s)}W(s) \end{aligned}$$

Considere que $r(t)$ e $w(t)$ são do *tipo degrau* de magnitudes A e B, respectivamente. Assim, $R(s) = A/s$, $W(s) = B/s$. Suponha que $F_{RY}(s)$ é *estável*, ou seja, todas as raízes do polinômio característico de malha-fechada

$$P_{MF}(s) = D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)$$

estão no SPE. Isto garante que o *Teorema do Valor Final* pode ser aplicado em $E(s)$ para se analisar o erro em regime permanente $e(\infty)$.

Erro em Reg. Perm. para um Controlador Proporcional (P)

Suponha que $D(0) \neq 0$, ou seja, $G(s)$ não tem pólos em $s = 0$. Para $C(s) = K_c$, temos que

$$E(s) = \frac{D(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{A}{s} - \frac{N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{B}{s}$$

e (*Teorema do Valor Final*)

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{D(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{A}{s} - s \frac{N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{B}{s} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{AD(s)}{D(s) + K_c N(s)}}_{=P_{MF}(s)} - \underbrace{\frac{BN(s)}{D(s) + K_c N(s)}}_{=P_{MF}(s)} \right) \\
&= \underbrace{\frac{AD(0)}{D(0) + K_c N(0)}}_{=P_{MF}(0)} - \underbrace{\frac{BN(0)}{D(0) + K_c N(0)}}_{=P_{MF}(0)} = \boxed{\frac{A}{1 + K_c G(0)} - \frac{B G(0)}{1 + K_c G(0)}}
\end{aligned}$$

pois como $P_{MF}(0) = D(0) + K_c N(0) \neq 0$ ($F_{RY}(s)$ é estável) e $D(0) \neq 0$, não há divisão por zero no limite! Portanto, *desde que $F_{RY}(s)$ é estável*, temos

$$\boxed{\lim_{K_c \rightarrow \infty} e(\infty) = 0}.$$

Erro em Reg. Perm. para um Controlador Integral (I)

Suponha que $D_c(s) = s\bar{D}_c(s)$, ou seja, $C(s)$ tem um pólo em $s = 0$ (integrador). Temos que

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{s\bar{D}_c(s)D(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \frac{A}{s} - \frac{s\bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \frac{B}{s} \\
&= \frac{A \bar{D}_c(s)D(s) - B \bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}
\end{aligned}$$

e (*Teorema do Valor Final*)

$$\begin{aligned}
e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \underbrace{\frac{A \bar{D}_c(s)D(s) - B \bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}}_{=P_{MF}(s)} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{0 \cdot [A \bar{D}_c(0)D(0) - B \bar{D}_c(0)N(0)]}{D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0)}}_{=P_{MF}(0)} = \boxed{0}, \quad (4.1)
\end{aligned}$$

pois como $P_{MF}(0) = D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0) \neq 0$ ($F_{RY}(s)$ é estável), não há divisão por zero! Desse modo, $e(\infty) = 0$ independente das magnitudes A e B de $r(t)$ e $w(t)$, respectivamente.

Portanto, *desde que $F_{RY}(s)$ é estável*, temos que, *em regime permanente*, a saída $y(t)$ rastreia a referência $r(t)$ com *rejeição da perturbação $w(t)$* .

Observe que o princípio utilizado foi: *o pólo do controlador cancela o pólo da referência e da perturbação*.

Função de Transferência $F_{RY}(s)$

- $F_{RY}(s)$ de primeira ordem

$$F_{RY}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde $\tau > 0$ (pólo estável em $s = -1/\tau$). Para referências $r(t)$ do tipo degrau, não há sobressinal (nem oscilação) em $y(t)$ e

$$t_s(5\%) = 3\tau, \quad e(\infty) = 0$$

- $F_{RY}(s)$ de segunda ordem

$$F_{RY}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde $0 < \xi < 1$ e $\omega_n > 0$ (pólos estáveis em $s = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}$). Para referências $r(t)$ do tipo degrau, temos que

$$M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}, \quad t_s(5\%) \leq \frac{3}{\xi\omega_n}, \quad e(\infty) = 0$$

Exemplo

Considere um sistema *modelado* por

$$G(s) = \frac{0.5}{10s + 1}$$

- Primeiramente, analisaremos o erro de rastreamento

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

em regime permanente ($t \rightarrow \infty$) para referências e perturbações do tipo degrau, considerando um controlador proporcional, ou seja, $C(s) = K_c > 0$. Assumindo que $w = 0$ (*sem perturbação*), temos que a função de transferência em malha-fechada é

$$F_{RY}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{0.5K_c}{10s + 1}}{1 + \frac{0.5K_c}{10s + 1}} = \underbrace{\frac{0.5K_c}{10s + (1 + 0.5K_c)}}_{= P_{MF}(s)} \quad (w = 0)$$

Desse modo, a equação característica de malha-fechada é

$$P_{MF}(s) = 10s + (1 + 0.5K_c) = 0$$

Note que a raiz de $P_{MF}(s) = 10s + (1 + 0.5K_c) = 0$ coincide com o pólo de $F_{RY}(s)$. É fácil ver que tal raiz é dada por

$$s = -\frac{1 + 0.5K_c}{10} \in \text{SPE}$$

Assim, $F_{RY}(s)$ é (BIBO) estável para qualquer valor de $K_c > 0$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - [C(s)G(s)E(s) + G(s)W(s)] \\
 \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1+C(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}W(s) \\
 \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1+K_c\frac{0.5}{10s+1}}R(s) - \frac{\frac{0.5}{10s+1}}{1+K_c\frac{0.5}{10s+1}}W(s) \\
 \Rightarrow E(s) &= \boxed{\underbrace{\frac{10s+1}{10s+(1+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)}R(s) - \underbrace{\frac{0.5}{10s+(1+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)}W(s)}
 \end{aligned}$$

Considere que $r(t)$ e $w(t)$ são do *tipo degrau* de magnitudes A e B, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
 R(s) &= A/s, \quad W(s) = B/s \\
 sE(s) &= s \left(\underbrace{\frac{10s+1}{10s+(1+0.5K_c)} \frac{A}{s}}_{=P_{MF}(s)} - \underbrace{\frac{0.5}{10s+(1+0.5K_c)} \frac{B}{s}}_{=P_{MF}(s)} \right) \\
 sE(s) &= A \underbrace{\frac{10s+1}{10s+(1+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)} - B \underbrace{\frac{0.5}{10s+(1+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)}
 \end{aligned}$$

Note que, como $F_{RY}(s)$ é estável para qualquer $K_c > 0$, concluímos que o pólo de $sE(s)$ está no SPE para todo $K_c > 0$. Portanto, *Teorema do Valor Final* pode ser aplicado em $E(s)$ para se analisar o erro em regime permanente $e(\infty)$. Temos que (TVF)

$$\begin{aligned}
 e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(A \underbrace{\frac{10s+1}{10s+(1+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)} - B \underbrace{\frac{0.5}{10s+(1+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)} \right) \\
 &= \frac{A(10 \cdot 0 + 1)}{P_{MF}(0)} - \frac{0.5B}{P_{MF}(0)} = \boxed{\frac{A}{1+0.5K_c} - \frac{0.5B}{1+0.5K_c}}
 \end{aligned}$$

pois não há divisão por zero já que $P_{MF}(0) = 1 + 0.5K_c \neq 0$. De fato, se $P_{MF}(0) = 0$, então $F_{RY}(s)$ teria um pólo em $s = 0$ (instável). Em particular,

$$\boxed{\lim_{K_c \rightarrow \infty} e(\infty) = 0}$$

- Agora, vamos projetar um controlador $C(s)$ de modo que as seguintes especificações sejam atendidas em malha-fechada:

1. erro nulo em regime permanente para $r(t)$ e $w(t)$ do tipo degrau (regime permanente)

2. $t_s^{MF}(5\%) = t_s^{MA}(5\%)/2$ (regime transitório)
3. a saída $y(t)$ não apresenta sobressinal para referências do tipo degrau (regime transitório)

Para que a especificação 3 seja atendida, $F_{RY}(s)$ deve ser de primeira ordem. Como a realimentação é unitária, temos que a ordem de $F_{RY}(s)$ é igual à ordem de $C(s)G(s)$. Escolhendo-se um controlador PI da forma

$$C(s) = \frac{K_c(10s + 1)}{s}$$

resulta em

$$C(s)G(s) = \frac{K_c(10s + 1)}{s} \frac{0.5}{(10s + 1)} = \frac{0.5K_c}{s} \quad (\text{primeira ordem}).$$

Note que o zero do controlador cancela o pólo de $G(s)$.

Mostraremos na sequência que o pólo em $s = 0$ (integrador) de $C(s)$ garante que a especificação 1 seja atendida. Em seguida, determinaremos o valor do ganho $K_c > 0$ de modo que a especificação 2 seja satisfeita.

A função de transferência em malha-fechada é

$$F_{RY}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{0.5K_c}{s}}{1 + \frac{0.5K_c}{s}} = \underbrace{\frac{0.5K_c}{s + 0.5K_c}}_{=P_{MF}(s)} \quad (w = 0)$$

Desse modo, a equação característica de malha-fechada é

$$P_{MF}(s) = s + 0.5K_c = 0$$

Relembre que a raiz de $P_{MF}(s) = s + 0.5K_c = 0$ coincide com o pólo de $F_{RY}(s)$. É fácil ver que tal raiz é dada por

$$s = -0.5K_c \in \text{SPE}$$

Assim, $F_{RY}(s)$ é (BIBO) estável para qualquer valor de $K_c > 0$.

Temos que

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - [C(s)G(s)E(s) + G(s)W(s)] \\ \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}W(s) \\ \Rightarrow E(s) &= \frac{1}{1 + \frac{0.5K_c}{s}}R(s) - \frac{\frac{0.5}{10s + 1}}{1 + \frac{0.5K_c}{s}}W(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(s) = \underbrace{\frac{s}{s+0.5K_c}}_{=P_{MF}(s)} R(s) - \underbrace{\frac{0.5s}{(10s+1)(s+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)} W(s)$$

Considere que $r(t)$ e $w(t)$ são do *tipo degrau* de magnitudes A e B, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} R(s) &= A/s, \quad W(s) = B/s \\ E(s) &= \underbrace{\frac{s}{s+0.5K_c}}_{=P_{MF}(s)} \frac{A}{s} - \underbrace{\frac{0.5s}{(10s+1)(s+0.5K_c)}}_{=P_{MF}(s)} \frac{B}{s} \\ E(s) &= \frac{(10s+1)A - 0.5B}{(10s+1)(s+0.5K_c)} \end{aligned}$$

Observe que o pólo do controlador cancelou o pólo da referência e da perturbação. Note ainda que, como $F_{RY}(s)$ é estável para qualquer $K_c > 0$, concluímos que os dois pólos de $sE(s)$ estão no SPE para todo $K_c > 0$. Portanto, *Teorema do Valor Final* pode ser aplicado em $E(s)$ para se analisar o erro em regime permanente $e(\infty)$. Temos que (TVF)

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s[(10s+1)A - 0.5B]}{(10s+1)(s+0.5K_c)} \\ &= \frac{0[(10 \cdot 0 + 1)A - 0.5B]}{(10 \cdot 0 + 1)(0 + 0.5K_c)} = \boxed{0} \end{aligned}$$

pois não há divisão por zero já que $P_{MF}(0) = 0.5K_c \neq 0$. De fato, se $P_{MF}(0) = 0$, então $F_{RY}(s)$ teria um pólo em $s = 0$ (instável). Portanto, como $F_{RY}(s)$ é estável para todo $K_c > 0$, temos que, em regime permanente, a saída $y(t)$ rastreia a referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$.

Ressaltamos que o princípio utilizado foi: o pólo do controlador cancela o pólo da referência e da perturbação.

Resta-nos agora encontrar o valor de $K_c > 0$ de modo que a especificação 2 seja atendida. Para isto, observe que

$$\tau_{MA} = 10 \therefore t_s^{MA}(5\%) = 3\tau_{MA} = 30$$

Portanto,

$$t_s^{MF}(5\%) = t_s^{MA}(5\%)/2 = 15 \therefore \tau_{MF} = t_s^{MF}(5\%)/3 = 5$$

Logo,

$$F_{RY}(s) = \frac{0.5K_c}{s+0.5K_c} = \frac{1}{\frac{1}{0.5K_c}s+1} = \frac{1}{\tau_{MF}s+1} = \frac{1}{5s+1}$$

Por igualdade polinomial, obtemos que

$$\frac{1}{0.5K_c} = 5 \therefore K_c = 0.4$$

Por fim, o controlador PI projetado foi

$$C(s) = \frac{0.4(10s + 1)}{s}$$

4.13.4 Simulações

1. Considere o modelo do exemplo anterior, ou seja,

$$G(s) = \frac{0.5}{10s + 1}.$$

- a) Simule $G(s)$ em malha-aberta para $x(t) = 1$ do tipo degrau. Conforme o esperado, observe que $t_s(5\%) = 30$ e $y(\infty) = G(0) = 0.5$. Agora, aplique uma perturbação $w(t) = 0.25$ do tipo degrau em $t = 100$. Note que a perturbação não é rejeitada.
- b) Utilize um Controlador Proporcional $C(s) = K_c$ e $r(t) = 1$ do tipo degrau. Analise a dinâmica da saída $y(t)$ para os valores de ganho $K_c = 2$, $K_c = 6$, $K_c = 100$, $K_c = 1000$. O que acontece com a dinâmica de $y(t)$ e com o erro em regime permanente $e(\infty)$ à medida que aumentamos o valor do ganho K_c ? Tal resultado era esperado? Justifique sua resposta. Podemos então sempre escolher $K_c = \infty$ para que $e(\infty) = 0$? Justifique sua resposta. Dica: visualize $y(t)$ e o sinal de controle $x(t)$.
- c) Projete $C(s)$ de modo que se tenha: (i) erro nulo em regime permanente para $r(t)$ e $w(t)$ do tipo degrau; (ii) $t_s^{MF}(5\%) = t_s^{MA}(5\%)/2$; e que (iii) a saída $y(t)$ não apresente sobressinal para referências do tipo degrau. Dica: utilize $C(s) = K_c(10s + 1)/s$ (PI) com cancelamento pólo-zero.
- d) Simule o sistema em malha-fechada para $r(t) = 1$ e $w(t) = 0.25$ do tipo degrau, aplicando $w(t)$ em $t = 100$. Verifique se os requisitos de desempenho foram realmente atendidos e visualize o sinal de controle $x(t)$. Note que $x(\infty) = 1/G(0) - 0.25 = 1.75$. Isto era esperado? Justifique.
- e) Mantendo o mesmo controlador $C(s)$, repita o item anterior para $G(s) = 0.45/(9.9s + 1)$. Explique o motivo pelo qual ainda temos que $e(\infty) = 0$.

2. Considere

$$G(s) = \frac{1.2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1.2}{(s+1)(s+3)}.$$

- a) Simule $G(s)$ em malha-aberta para $x(t) = 3$ do tipo degrau e analise os resultados. Note que a saída $y(t)$ não apresenta sobressinal. Isto era esperado? Justifique.
- b) Considere o controlador integral $C(s) = K_c/s$ e $r(t) = 3$ do tipo degrau. Analise a dinâmica de $y(t)$ em malha-fechada para os valores de ganho $K_c = 0.5, K_c = 1.5, K_c = 5, K_c = 10, K_c = 20$. O que acontece com a saída $y(t)$ à medida que aumentamos o valor do ganho K_c ? Note que, quando $e(\infty) = 0$, temos que $x(\infty) = 3/G(0)$. Isto era esperado? Justifique. Explique o motivo pelo qual não temos $e(\infty) = 0$ para $K_c = 20$. Assim, dado um sistema $G(s)$, basta colocarmos um controlador integral em série para que se tenha $e(\infty) = 0$ em malha-fechada? Justifique sua resposta.

4.14 DIAGRAMAS DE BODE

Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $\text{grau}(P(s)) \leq \text{grau}(Q(s))$, $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem raízes em comum, e $H(s)$ é (*BIBO*) estável, ou seja, todos os pólos estão no SPE.

Relembre que, se aplicarmos uma entrada senoidal *causal*

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)u(t)$$

então a *resposta em regime permanente* é dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = \underbrace{A|H(j\omega)|}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \theta + \underbrace{\angle H(j\omega)}_{\substack{\text{def. de fase} \\ \text{fase (em rad)}}})$$

Relembre também que: $H(j\omega)$ é a *resposta em frequência* de $H(s)$, o gráfico $\omega \times |H(j\omega)|$ é a *resposta de amplitude*, e o gráfico $\omega \times \angle H(j\omega)$ é a *resposta de fase*, com $\omega \in [0, \infty)$.

Agora, suponha que $H(s)$ possui todos os pólos no SPE, com exceção de um único pôlo em $s = 0$. Se repetirmos o raciocínio utilizado na Seção 7.9, encontramos que a *resposta em regime permanente* para a entrada senoidal *causal*

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)u(t), \quad \omega \neq 0$$

é dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = K(\omega) + \underbrace{A|H(j\omega)|}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \underbrace{\theta + \angle H(j\omega)}_{\substack{\text{def. de fase} \\ \text{fase (em rad)}}})$$

onde $K(\omega)$ é uma constante real (*componente CC*) que depende da frequência $\omega \neq 0$ da entrada $x(t)$. Do mesmo modo, denominamos $H(j\omega)$ de *resposta em frequência* de $H(s)$, o gráfico $\omega \times |H(j\omega)|$ é a *resposta de amplitude*, e o gráfico $\omega \times \angle H(j\omega)$ é a *resposta de fase*, com $\omega \in (0, \infty)$.

Exemplo Para o sistema *integrador ideal*

$$\dot{y}(t) = x(t)$$

temos que $H(s) = 1/s$, e a resposta em frequência é $H(j\omega) = 1/(j\omega) = -j/\omega$.

Obs Dada uma função de transferência $H(s)$ qualquer (estável ou não), sempre podemos obter os gráficos $\omega \times |H(j\omega)|$ e $\omega \times \angle H(j\omega)$. No entanto, a *resposta em frequência* $H(j\omega)$, a qual determina a *resposta em regime permanente* $y_{ss}(t)$, só é definida quando: (i) $H(s)$ é *estável*; ou (ii) todos os pólos de $H(s)$ estão no SPE, com exceção de único pôlo em $s = 0$. Quando $H(s)$ não se enquadra nestas duas situações, $H(j\omega)$ não possui significado físico e, por isso, a *resposta em frequência* não é definida!

Relembre que uma função de transferência $H(s)$ é de *fase não-mínima* quando há pólos ou zeros no SPD. Quando todos os pólos e zeros estão no SPE, dizemos que $H(s)$ é de *fase mínima*.

Veremos agora como esboçar os gráficos $\omega \times |H(j\omega)|$ e $\omega \times \angle H(j\omega)$ de uma função de transferência $H(s)$ qualquer (estável, instável, fase-mínima, fase não-mínima). Para facilitar o esboço, utilizaremos *escalas logarítmicas* para a amplitude e para ω . Neste caso, tais gráficos são denominados de *diagramas de Bode*.

Exemplo Considere a função de transferência sem pólos ou zeros no SPD

$$H(s) = \frac{K(s + a_1)(s + a_2)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2s + b_3)} = \frac{Ka_1 a_2}{b_1 b_3} \frac{\left(\frac{s}{a_1} + 1\right)\left(\frac{s}{a_2} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{b_1} + 1\right) \left(\frac{s^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}s + 1\right)}$$

onde as raízes de $s^2 + b_2 s + b_3$ são complexas conjugadas. Assim,

$$H(j\omega) = \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \frac{\left(\frac{j\omega}{a_1} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{a_2} + 1\right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1\right) \left(\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} j\omega + 1\right)}$$

Pela propriedade do ângulo do produto de números complexos, obtemos que

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle \left(\frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \right) + \angle \left(\frac{j\omega}{a_1} + 1 \right) + \angle \left(\frac{j\omega}{a_2} + 1 \right) \\ &\quad - \angle(j\omega) - \angle \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1 \right) - \angle \left(\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} j\omega + 1 \right) \end{aligned}$$

Agora, definimos ($\text{dB} = \text{decibel}$)

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

Por exemplo:

$$0 \text{ dB} \leftrightarrow 1, \quad -3.01 \text{ dB} \leftrightarrow 0.7071 \cong \sqrt{2}/2, \quad -\infty \text{ dB} \leftrightarrow 0$$

Como $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ e $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$, temos que

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= \left| \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \right|_{\text{dB}} + \left| \frac{j\omega}{a_1} + 1 \right|_{\text{dB}} + \left| \frac{j\omega}{a_2} + 1 \right|_{\text{dB}} \\ &\quad - |j\omega|_{\text{dB}} - \left| \frac{j\omega}{b_1} + 1 \right|_{\text{dB}} - \left| \frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} j\omega + 1 \right|_{\text{dB}} \end{aligned}$$

Concluímos então que os diagramas de Bode $\omega \times \angle H(\omega)$ (*fase*) e $\omega \times |H(\omega)|_{\text{dB}}$ (*amplitude*) de toda função de transferência $H(s)$ sem pólos ou zeros no SPD podem sempre ser obtidos a partir da *soma* dos diagramas de Bode de 4 tipos de *termos básicos*: um termo constante C , pólos ou zeros na origem $j\omega$, pólos ou zeros de primeira ordem $(j\omega/a + 1)$, e pólos ou zeros complexos conjugados de segunda ordem $((j\omega/\omega_n)^2 + 2j\xi\omega/\omega_n + 1)$. Na sequência, analisaremos cada um dos 4 *termos básicos* separadamente.

- *Constante C*: $\angle C = 0^\circ$ se $C > 0$ e $\angle C = -180^\circ$ se $C < 0$; $|C|_{\text{dB}} = 20 \log |C|$
 - Pólo (linha cheia) ou zero (linha tracejada) na *origem* ($j\omega$)
 - Pólo (linha cheia) ou zero (linha tracejada) de *primeira ordem* em $s = -a < 0$ ($j\omega/a + 1, a > 0$ é a *frequência de corte*)
- Existem 2 *assintotas de amplitude*: uma é delas é uma linha horizontal que passa por 0 dB e termina em $\omega = a$, e a outra começa

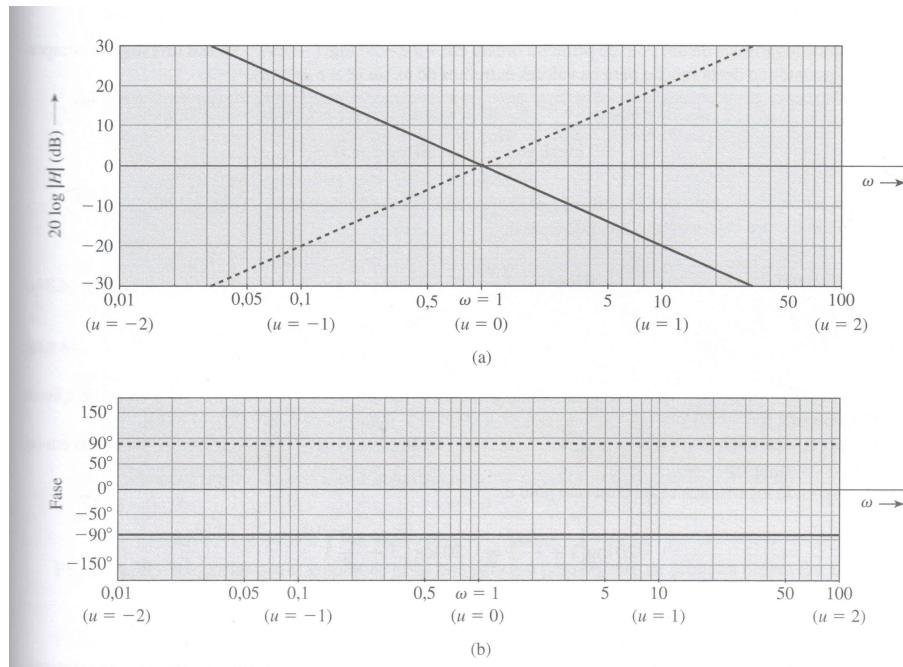


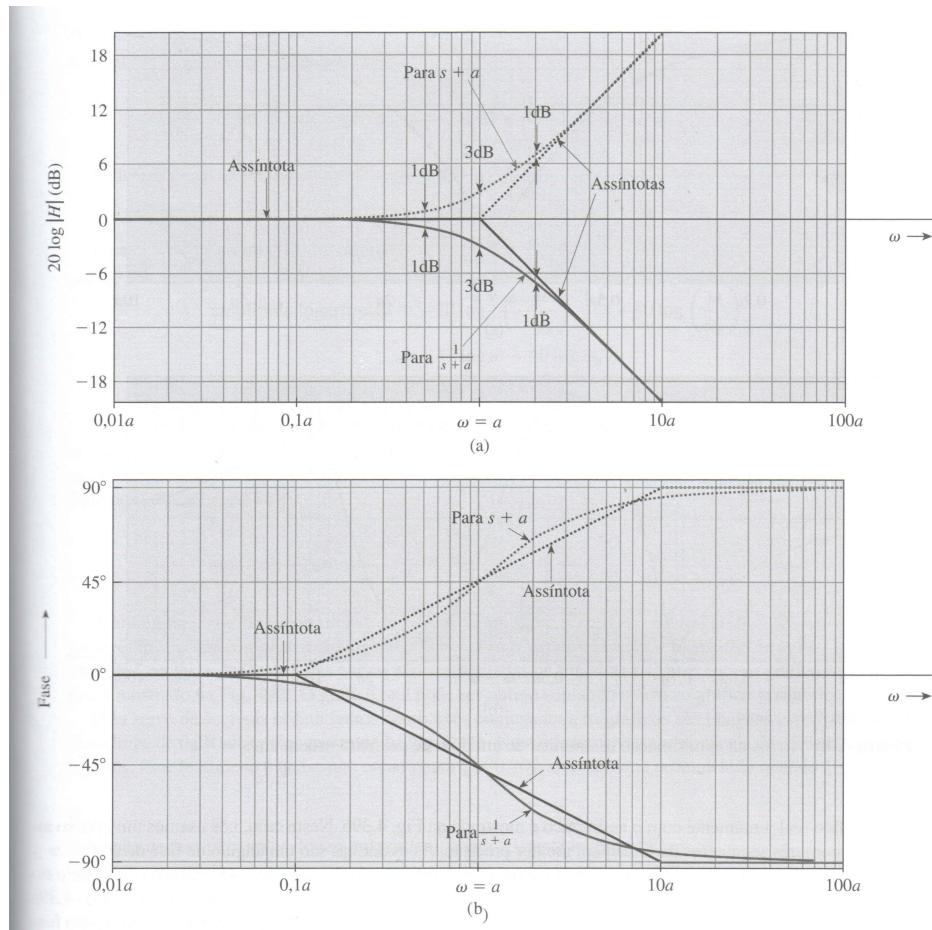
Figura 4.24: Diagrama de Bode de (a) amplitude e (b) fase. Note que o diagrama de amplitude é uma reta passando por 0 dB em $\omega = 1$ (pois $\omega = 1 \Rightarrow |\pm j\omega|_{dB} = 20 \log 1 = 0$ dB), e com inclinação de -20 dB/década para um pólo e de $+20$ dB/década para um zero. Para a fase, temos que $\angle \pm j\omega = \pm 90^\circ$.

em $\omega = a$ e tem inclinação de -20 dB/década para um pólo e de $+20$ dB/década para um zero. A diferença máxima entre o valor exato e o valor das assíntotas ocorre em $\omega = a$ e é de aproximadamente ∓ 3 dB. Observe que $\omega = a \Rightarrow |j\omega/a + 1|_{db} = 20 \log \sqrt{2} \cong 3$ dB.

Há 3 *assíntotas de fase*: a primeira é uma linha horizontal que passa por 0° e termina em $\omega = a/10$; a segunda começa em $\omega = a/10$ com 0° (uma década abaixo de $\omega = a$) e termina em $\omega = 10a$ com $\mp 90^\circ$ (uma década acima de $\omega = a$), e tem inclinação de -45° /década para um pólo e de $+45^\circ$ /década para um zero; a terceira é uma linha horizontal que passa por $\mp 90^\circ$ e começa em $\omega = 10a$. O valor exato e o valor da assíntota são iguais a $\pm 45^\circ$ em $\omega = a$, e a fase *nunca ultrapassa* $\mp 90^\circ$. Observe que $\omega = a \Rightarrow \angle(j\omega/a + 1) = 45^\circ$.

- Pólos complexos conjugados de segunda ordem (subamortecido) $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ($(j\omega/\omega_n)^2 + 2j\xi\omega + 1$, $0 < \xi \leq 1$, ω_n é a *frequência de corte*)

Existem 2 *assíntotas de amplitude*: uma é delas é uma linha horizontal que passa por 0 dB e termina em $\omega = \omega_n$, e a outra começa em $\omega = \omega_n$ e tem inclinação de -40 dB/década. As

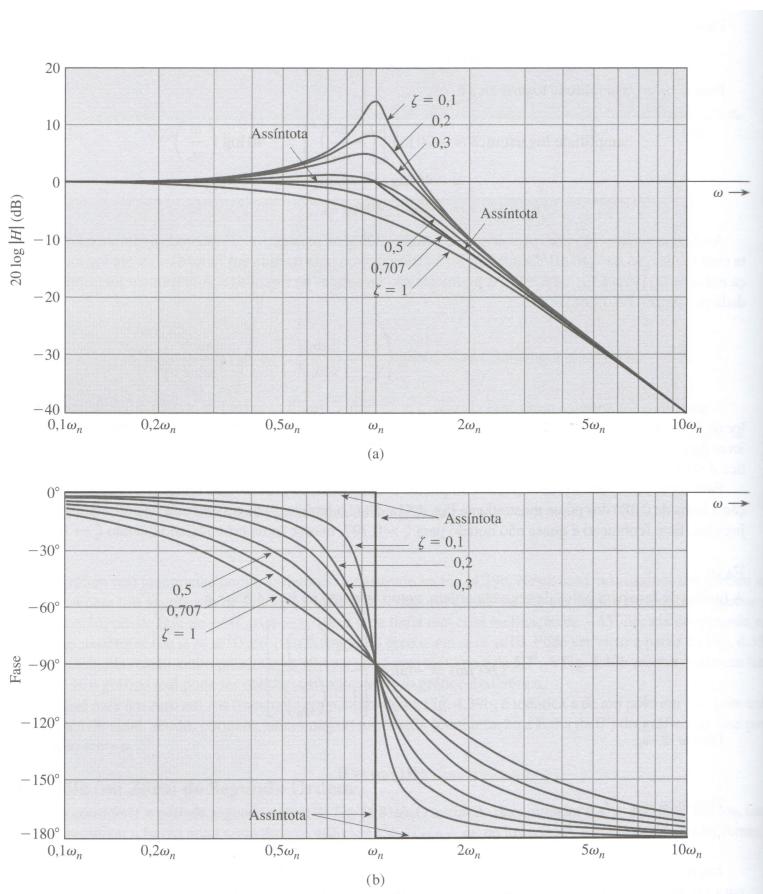


diferenças entre os valores exatos e os valores das assíntotas dependem do amortecimento ξ , e pode haver *ressonância*.

Há 2 *assíntotas de fase horizontais*: uma passando por 0° antes de $\omega = \omega_n$, e outra passando por -180° após $\omega = \omega_n$. O valor exato é igual à -90° em $\omega = \omega_n$. As diferenças entre os valores exatos e os valores das assíntotas dependem do amortecimento ξ . Observe que a fase *nunca ultrapassa* -180° .

Se $\xi \geq 1$, teremos 2 *pólos reais*. Neste caso, seguimos o esboço dos diagramas de Bode para pólos de primeira ordem.

Para se obter os diagramas de Bode para zeros complexos conjugados de segunda ordem com $0 < \xi < 1$, basta *refletir* os diagramas de Bode de pólos complexos conjugados em relação ao *eixo horizontal*.



Exemplo Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{20s(s+100)}{(s+2)(s+10)}$$

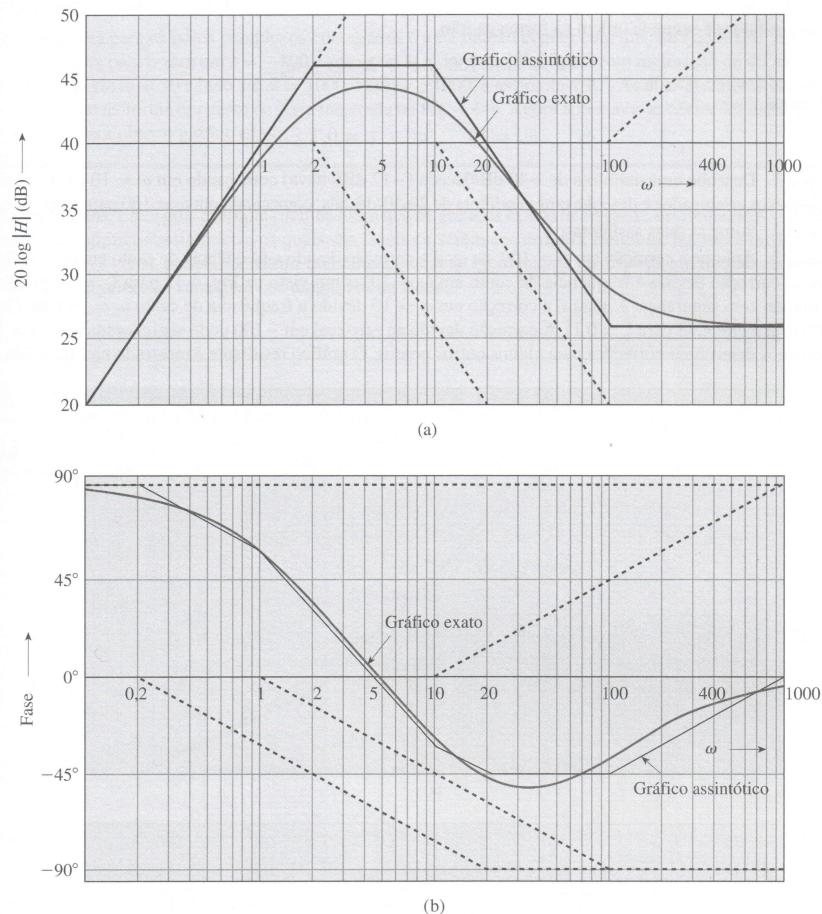
Temos zeros em $s = 0$ (origem) e $s = -100$, e pólos em $s = -2$ e $s = -10$. Logo, $s = -2$, $s = -10$ e $s = -100$ são as frequências de corte dos termos de primeira ordem. Rescrevendo $H(s)$ como

$$H(s) = \frac{20 \times 100}{2 \times 10} \frac{s \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)} = 100 \frac{s \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

obtemos que o termo constante é 100. Com estes dados, traçamos as assíntotas dos diagramas de Bode de amplitude e de fase. Por fim, obtemos um esboço. No Matlab, o comando é `bode(H)`.

Obs Como $H(s)$ é estável, os diagramas de Bode de $H(s)$ correspondem à resposta em frequência $H(j\omega)$!

Quando há pólos ou zeros de primeira ou segunda ordem no SPD (sistema de fase não-mínima), o *diagrama de amplitude* permanece igual



ao de pólos ou zeros no SPE, mas o *diagrama de fase* é refletido em relação ao eixo horizontal.

Obs 1 A resposta em frequência e a resposta em regime permanente só estão definidas quando $H(s)$ possui todos os pólos no SPE, exceto por um possível pôlo simples (sem multiplicidade) em $s = 0$. Se isto não for atendido, não há nenhum impedimento para que possamos esboçar os diagramas de Bode de $H(s)$. No entanto, não haverá nenhuma relação com a resposta em frequência!

Obs 2 Quando $H(s)$ é de *fase mínima*, existe uma *relação única* entre os diagramas de amplitude e de fase. Isto significa que o diagrama de fase pode ser obtido a partir do diagrama de amplitude, e vice-versa.

Obs 3 Suponha que temos um sistema físico cuja função de transferência $\tilde{H}(s)$ tem todos os pólos no SPE ou que, exceto por único pôlo em $s = 0$, os demais pólos estão no SPE. Neste caso, a resposta em

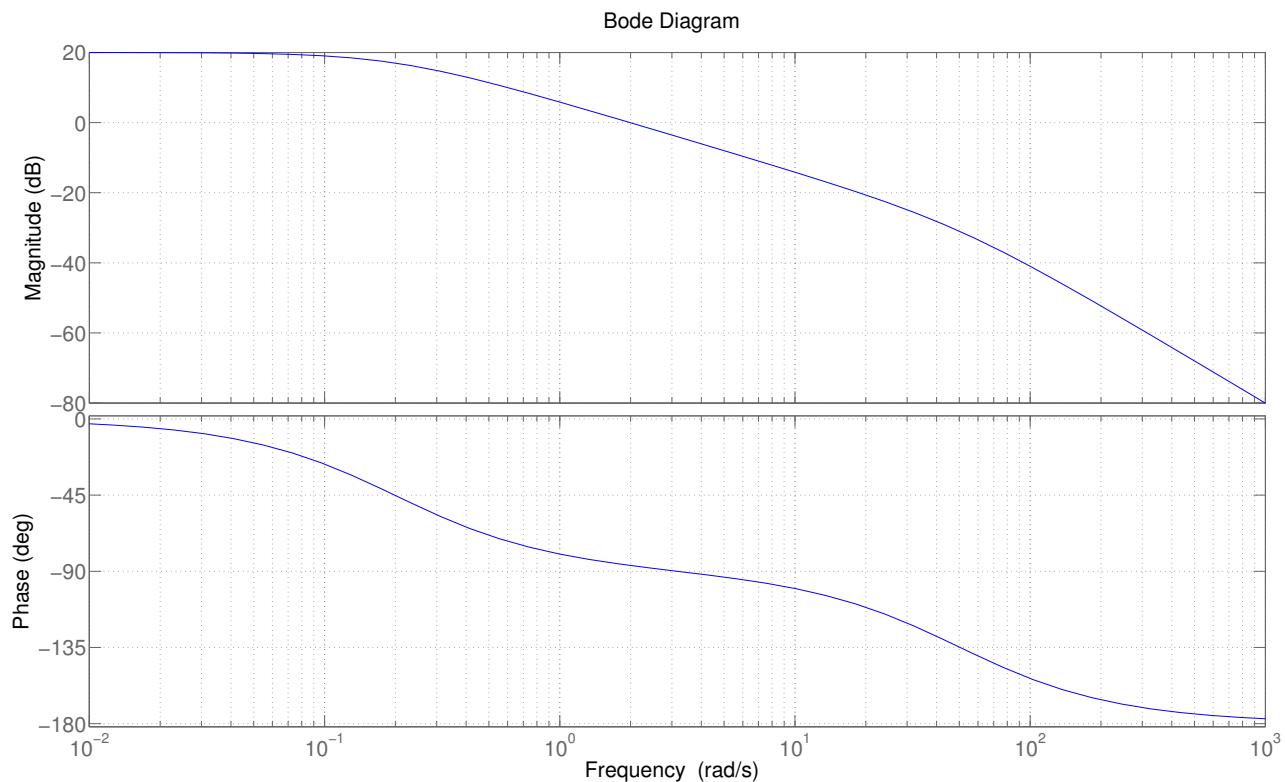
frequência está definida e podemos *identificar* $H(s)$ *experimentalmente*. Para isto, aplicamos diversas entradas senoidais causais da forma

$$x(t) = \cos(\omega t)u(t)$$

para vários valores de frequência $\omega \in (0, \infty)$ de modo a obtermos um esboço dos diagramas de Bode de amplitude e de fase. Quando os pólos e zeros de $H(s)$ estão relativamente distantes, podemos identificar os parâmetros de $H(s)$ através das propriedades gráficas vistas acima (caso os pólos e zeros estejam relativamente próximos, devemos utilizar algoritmos computacionais de identificação). Note que, pela Obs 2 acima, se o sistema for de fase mínima, então basta levantarmos o diagrama de amplitude experimentalmente.

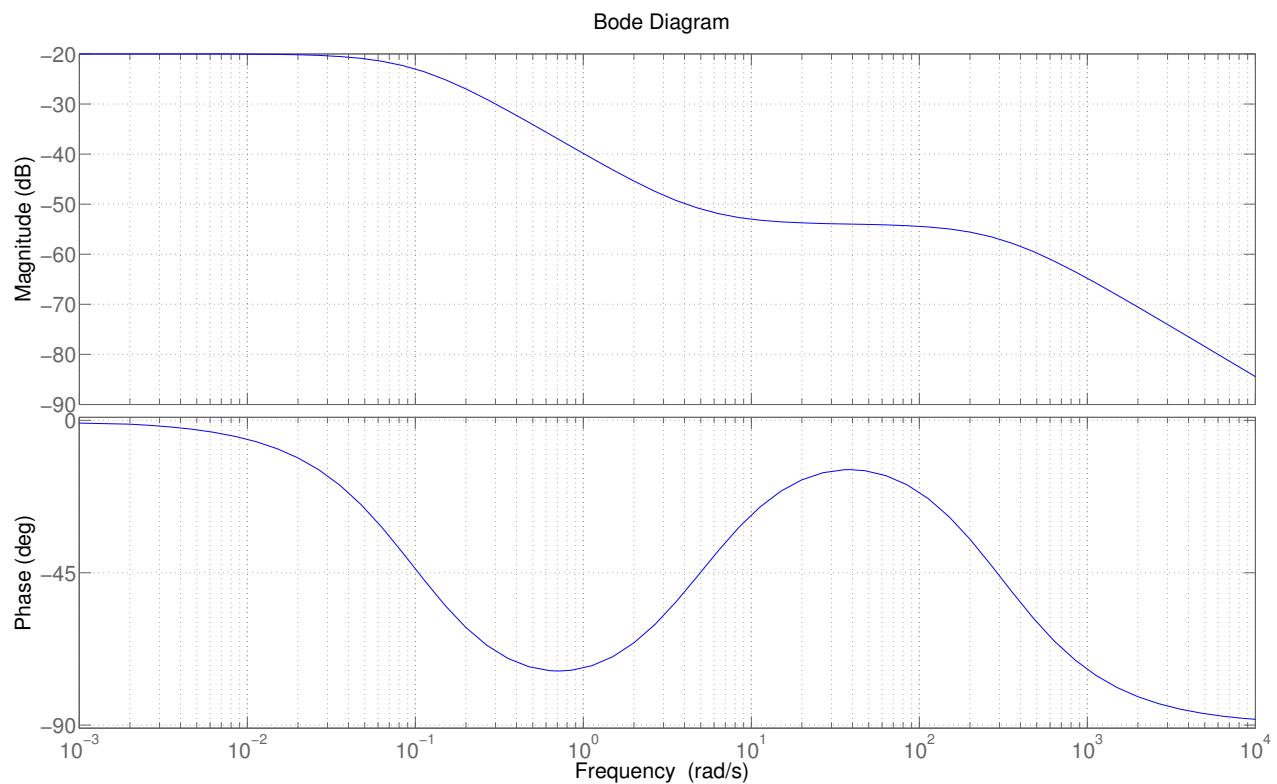
4.15 EXERCÍCIOS DE IDENTIFICAÇÃO (LISTA 4B)

Exercício de Identificação 1



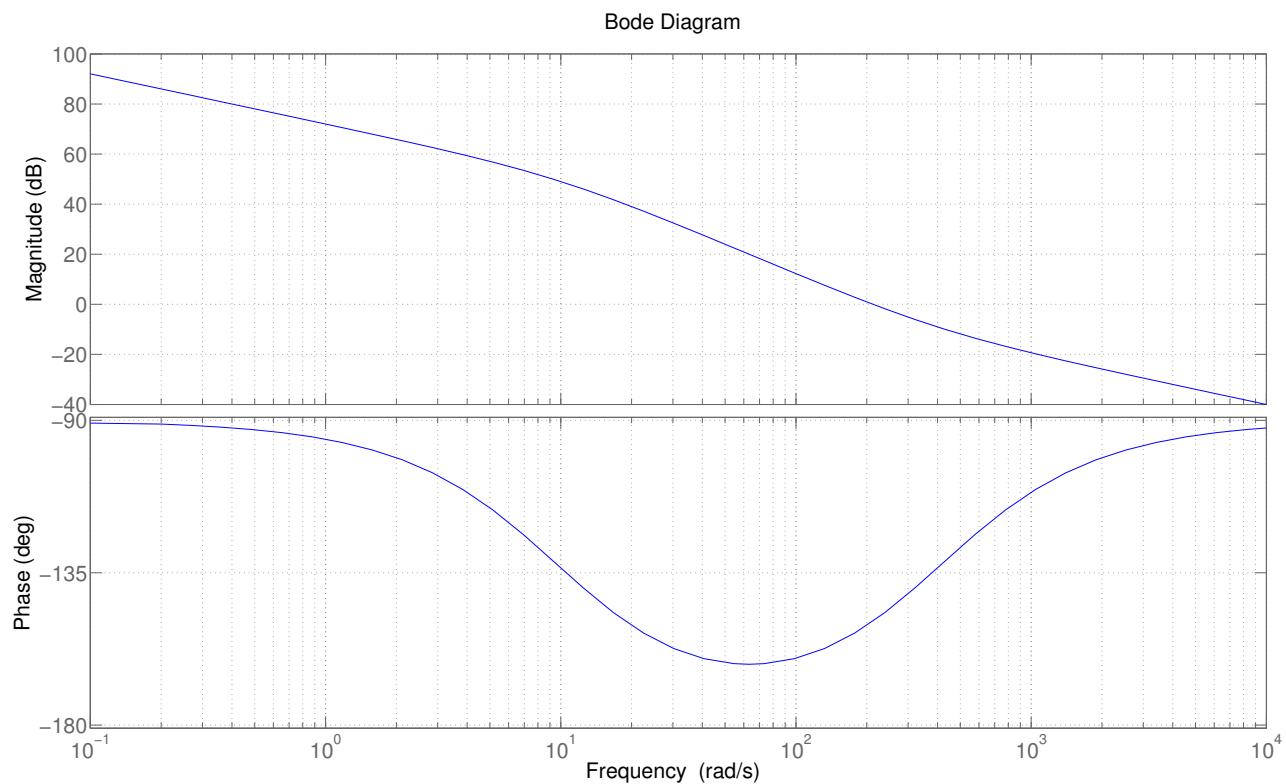
1. Há zeros ou pólos na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero em $H(s)$?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 3 \cos(100t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

Exercício de Identificação 2



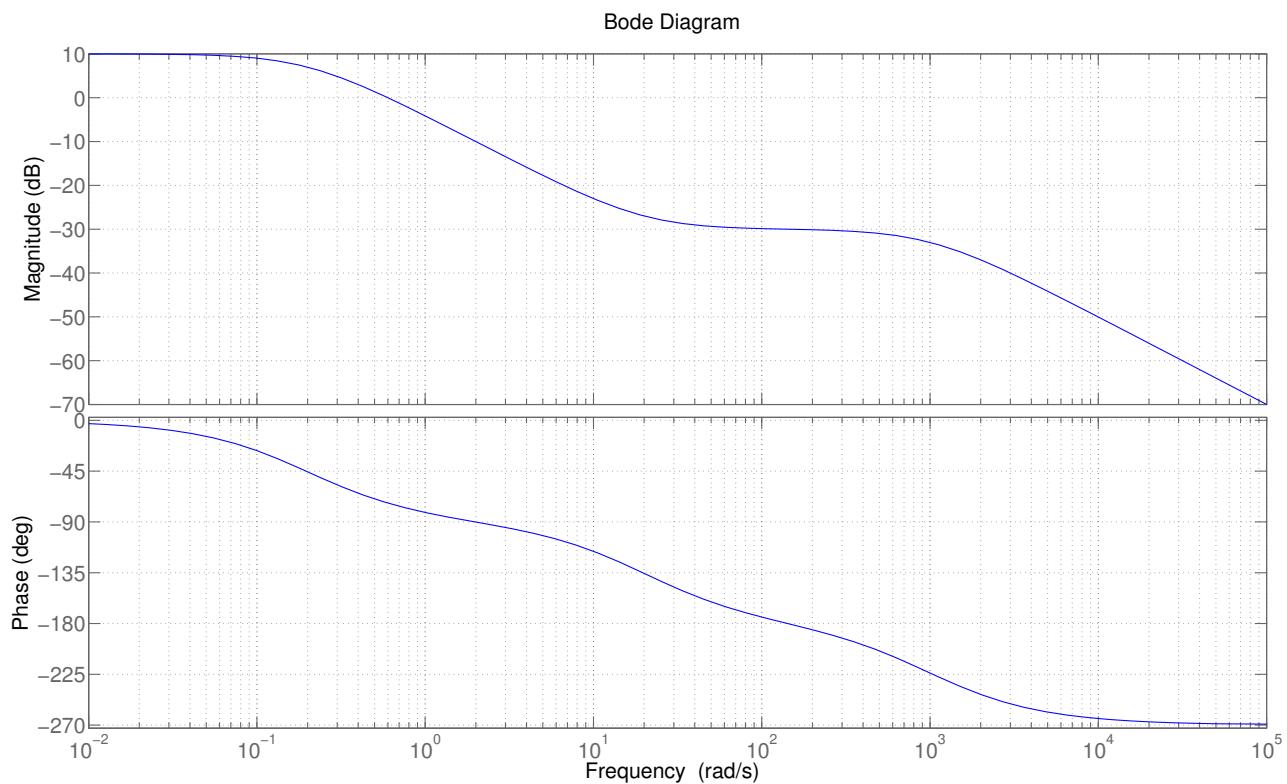
1. Há zeros ou pólos na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero em $H(s)$?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 100 \cos(0.03t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

Exercício de Identificação 3



1. Há zeros ou pólos na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero em $H(s)$?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 2 \cos(10t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

Exercício de Identificação 4



1. Há pólos ou zeros na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero de $H(s)$ com parte real negativa?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 10 \cos(1000t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

| |
|---|
| Respostas dos Exercícios de Identificação |
|---|

$$1. H(s) = \frac{100}{(s + 0.2)(s + 50)}$$

$$2. H(s) = \frac{0.6(s + 5)}{(s + 0.1)(s + 300)}$$

$$3. H(s) = \frac{100(s + 400)}{s(s + 10)}$$

$$4. H(s) = \frac{-31.62(s - 20)}{(s + 0.2)(s + 1000)} = \frac{31.62(-s + 20)}{(s + 0.2)(s + 1000)}$$

(note que $H(0) > 0$ (ganho estático)!)