Relacja języka do matematyki i matematyki do języka

Grzegorz Skuza

1 Wprowadzenie

Współczesna era cyfrowa, zdominowana przez algorytmy i napędzana postępami w dziedzinie sztucznej inteligencji, rodzi naturalną pokusę, by sprowadzić język, najbardziej ludzkie z narzędzi, do rangi problemu matematycznego. Sukcesy modeli statystycznych i sieci neuronowych w przetwarzaniu języka naturalnego (NLP) zdają się sugerować, że jego złożoność jest ostatecznie „obliczalna”, a jego struktury dają się w pełni opisać za pomocą systemów formalnych.

U podstaw tej tendencji leży dążenie do inżynieryjnej precyzji – wizja systemu, w którym znaczenia są jednoznaczne, komunikacja wolna od nieporozumień, a każda wypowiedź podlega binarnej weryfikacji prawdy i fałszu. To perspektywa, w której język postrzegany jest przede wszystkim jako nośnik informacji, a jego skuteczność mierzona jest zdolnością do bezstratnego kodowania i dekodowania faktów.

Niniejszy artykuł stawia jednak tezę, że taka redukcja jest fundamentalnie niemożliwa i opiera się na podstawowym błędzie kategorialnym. Matematyka w swojej istocie jest systemem formalnym, którego celem jest opisywanie obiektywnych, aksjomatycznych prawd o strukturach i relacjach. Tymczasem język, jako złożony system semiotyczny, jest narzędziem o nieporównywalnie szerszym spektrum zastosowań. Jego funkcja opisowa (deskryptywna) jest tylko jedną z wielu. Równie ważne, jeśli nie ważniejsze, są jego zdolności do tworzenia fikcji (funkcja poetycka), wpływania na przekonania (funkcja perswazyjna), ustanawiania zobowiązań i stanów rzeczy (funkcja performatywna) oraz konstruowania subiektywnych, lecz obowiązujących „prawd społecznych”, które nie poddają się logice matematycznej.

Zrozumienie tej fundamentalnej różnicy ma szczególne znaczenie w obliczu dwóch kluczowych wyzwań współczesności.

Po pierwsze, w dobie dezinformacji i „postprawdy” to właśnie nielogiczne, perswazyjne i emocjonalne aspekty języka są wykorzystywane do manipulowania opinią publiczną, a czysto matematyczne podejście do analizy treści okazuje się wobec tych zjawisk bezradne.

Po drugie, pojawienie się systemów AI zdolnych do autonomicznej komunikacji rodzi bezprecedensowe pytania o to, jakie „gry językowe” będą one tworzyć między sobą. W odpowiedzi na te wyzwania, w niniejszym artykule przeanalizowano relację między językiem a matematyką, posługując się jako przykładem paradoksalnym stwierdzeniem „$2 + 2 = 5$”. Następnie, przy użyciu narzędzi logiki epistemicznej i filozofii Ludwiga Wittgensteina, wykazano granice matematyzacji i omówiono jej głębokie implikacje.

2 Podstawowe założenia i definicje

Aby precyzyjnie przeanalizować relację między językiem a matematyką, konieczne jest pogłębienie ich definicji poza potoczne rozumienie. Należy je postrzegać jako systemy o różnych celach, strukturach i, co najważniejsze, ograniczeniach.

2.1 Czym jest matematyka (M)?

Matematyka (M) jest często definiowana jako system formalny oparty na aksjomatach i regułach wnioskowania, mający na celu precyzyjne opisywanie abstrakcyjnych struktur i relacji. W tym ujęciu, bliskim formalizmowi Davida Hilberta, matematyka jest postrzegana jako gra symboliczna. Jak zauważa Max Tegmark w artykule opublikowanym w serwisie arXiv, w którym argumentuje za hipotezą matematycznego wszechświata: „Struktura matematyczna to [...] zbiór abstrakcyjnych bytów z relacjami między nimi" (arXiv:0704.0646v1). Z tej perspektywy fundamentalne znaczenie mają obiektywność i spójność – system nie może jednocześnie udowodnić twierdzenia i jego zaprzeczenia.

Jednak ta definicja jest niepełna. Bardziej współczesne ujęcie postrzega matematykę jako „naukę o wzorcach". Zajmuje się ona nie tylko liczbami i symbolami, ale systematycznym badaniem wszystkich możliwych wzorców i struktur, zarówno rzeczywistych, jak i wyimaginowanych. To podejście podkreśla twórczy i eksploracyjny charakter matematyki.

Co kluczowe, fundamentalne ograniczenie każdego takiego systemu formalnego zostało wykazane przez Kurta Gödla w jego twierdzeniach o niezupełności. Jak podsumowuje artykuł przeglądowy w arXiv: „W każdym spójnym systemie formalnym F, wystarczająco silnym, by sformalizować arytmetykę, istnieją zdania prawdziwe, ale niedowodliwe" (arXiv:math/0408144v1). Oznacza to, że zbiór prawd matematycznych jest z natury większy niż zbiór twierdzeń, które można udowodnić w ramach jednego, spójnego systemu aksjomatów. Sama matematyka wskazuje więc na swoje granice, oddzielając pojęcie uniwersalnej prawdy od systemowej dowodliwości.

2.2 Czym jest język (L)?

Język (L) to system znaków służący do komunikacji, ekspresji i konstruowania znaczeń. W przeciwieństwie do matematyki, jego cel nie ogranicza się do opisywania obiektywnej rzeczywistości. Próby formalizacji języka, zwłaszcza w pracach Noama Chomsky'ego, definiowały go w sposób zbliżony do matematyki. W jego ujęciu „język to zbiór (skończony lub nieskończony) zdań, z których każde ma skończoną długość i jest zbudowane ze skończonego zbioru elementów" (cytowane w arXiv:1412.2442v1). Definicja ta była rewolucyjna dla językoznawstwa komputerowego, ale skupiała się niemal wyłącznie na składni.

Pełniejszy obraz języka daje klasyczny model semiotyczny Charlesa W. Morrisa, który dzieli badanie znaków na trzy gałęzie, co znajduje odzwierciedlenie w wielu pracach z zakresu AI i językoznawstwa (np. arXiv:1307.0087v1):

- **Składnia (Syntaktyka):** Bada formalne relacje między znakami, czyli gramatykę i strukturę. Na tym poziomie język najbardziej przypomina system matematyczny – interesują nas reguły łączenia symboli, a nie ich znaczenie. „$2+2=5$" jest zdaniem poprawnym składniowo, mimo że jest fałszywe semantycznie.

- **Semantyka:** Bada relacje między znakami a obiektami, do których się odnoszą, czyli znaczenie i warunki prawdziwości. To tutaj zdanie „$2+2=5$" jest oceniane jako fałszywe, ponieważ nie odpowiada stanowi rzeczy w aksjomatycznym systemie arytmetyki. Funkcja opisowa języka działa głównie na tym poziomie.

- **Pragmatyka:** Bada relacje między znakami a ich użytkownikami (interpretatorami). Jak ujmuje to niedawny przegląd w arXiv: „Pragmatyka bada, jak kontekst wpływa na znaczenie języka [...] i jak ludzie używają języka w rzeczywistych sytuacjach, aby przekazać ukryte znaczenia, emocje i intencje" (arXiv:2502.12378v2). To właśnie w pragmatyce leży kluczowa różnica między M a L. Funkcje językowe, takie jak perswazja, performatywność (np. składanie obietnicy, wydawanie polecenia) czy ekspresja, są zjawiskami czysto pragmatycznymi, których nie da się ocenić w kategoriach matematycznej prawdy i fałszu, a jedynie skuteczności, stosowności czy szczerości.

Podsumowując, podczas gdy matematyka koncentruje się na poprawności syntaktycznej i prawdzie semantycznej w zamkniętym systemie, język naturalny czerpie swoją siłę z elastyczności pragmatycznej, która pozwala mu nie tylko opisywać świat, ale i aktywnie go kształtować.

2.3 Rozbieżność systemowa: Prawda matematyczna a akt komunikacyjny

Fundamentalny powód, dla którego matematyka nie może objąć całości języka, leży w ich odmiennych celach i naturze. Matematyka jest systemem zamkniętym i funktorowo-prawdziwościowym, co oznacza, że wartość (prawda/fałsz) złożonych wyrażeń jest w pełni zdeterminowana przez wartość ich składników i ustalone reguły. Jej domeną jest dowodliwość w ramach spójnego systemu aksjomatycznego. W przeciwieństwie do tego, język naturalny jest systemem otwartym i intencjonalnym, którego głównym celem nie jest dowodzenie prawd, lecz osiąganie celów komunikacyjnych w nieograniczonej liczbie kontekstów.

Tę rozbieżność najlepiej zrozumieć, odwołując się do filozofii języka, w szczególności do teorii aktów mowy J.L. Austina. Austin zauważył, że wypowiedzi nie tylko opisują świat (stwierdzają fakty), co nazwał aktem lokucyjnym. Kluczowy jest akt illokucyjny – działanie, którego dokonujemy poprzez mówienie. Gdy mówimy: „Obiecuję, że przyjdę", nie opisujemy faktu, lecz tworzymy zobowiązanie. Gdy mówimy: „Proszę, zamknij drzwi", nie stwierdzamy prawdy, lecz próbujemy wpłynąć na czyjeś zachowanie.

Matematyka jest niemal w całości domeną aktów lokucyjnych – stwierdzenie „$2 + 2 = 4$" po prostu orzeka o pewnej relacji. Nie ma wbudowanego aparatu do obsługi aktów illokucyjnych, takich jak prośby, obietnice, groźby, ostrzeżenia czy pytania. To właśnie ta „siła illokucyjna", zdolność do działania w świecie społecznym, stanowi istotę pragmatyki języka, która całkowicie wymyka się formalizacji matematycznej. Dlatego fałszywe stwierdzenie, takie jak „$2 + 2 = 5$", bezwartościowe w systemie M, może pełnić skuteczną funkcję illokucyjną w systemie L – może być prowokacją, żartem, testem czujności lub narzędziem dezinformacji. Nie liczy się jego wartość logiczna, lecz potencjalny wpływ na odbiorcę.

2.4 Współczesne badania na styku języka i systemów formalnych

Teoretyczne rozważania na temat różnic między językiem a matematyką znajdują obecnie empiryczne potwierdzenie w badaniach nad sztuczną inteligencją. Próby nauczenia maszyn posługiwania się językiem naturalnym uwypuklają granice formalizacji.

2.4.1 Pragmatyka obliczeniowa i „lingwistyczne martwe punkty” modeli AI

Jednym z najaktywniejszych pól badawczych jest pragmatyka obliczeniowa, która próbuje modelować i implementować zdolność do rozumienia języka w kontekście. Najnowsze prace, takie jak przegląd „Pragmatics in the Era of Large Language Models” (arXiv:2502.12378v1), pokazują, że chociaż duże modele językowe (LLM) doskonale radzą sobie ze składnią i semantyką na poziomie statystycznym, mają ogromne trudności ze zrozumieniem intencji mówiącego.

- **Problem:** Modele często nie rozumieją ironii, sarkazmu, metafor czy implikatur (tego, co jest sugerowane, ale nie powiedziane wprost). Dzieje się tak, ponieważ zjawiska te wymagają nie tylko analizy tekstu, ale także „teorii umysłu” – zdolności do modelowania stanu wiedzy, celów i przekonań rozmówcy.
- **Odkrycia:** Badanie opisane w „Linguistic Blind Spots of Large Language Models” (arXiv:2503.19260v1) wskazuje, że nawet najpotężniejsze modele popełniają rażące błędy w identyfikacji złożonych struktur językowych, które są oczywiste dla ludzi.
- **Wniosek dla naszej tezy:** Trudności te są empirycznym dowodem na to, że pragmatyka jest warstwą znaczenia, której nie da się zredukować do statystycznych wzorców w danych tekstowych. Potwierdza to, że język jest czymś więcej niż formalnym systemem znaków.

2.4.2 Analiza dezinformacji: od faktów do narracji

Badania nad automatycznym wykrywaniem dezinformacji wykazują podobną granicę. Początkowo skupiano się na weryfikacji faktów (fact-checking), co jest zadaniem semantycznym. Szybko okazało się to niewystarczające.

- **Problem:** Najskuteczniejsza dezinformacja nie opiera się na jawnych kłamstwach, lecz na manipulacji pragmatycznej: użyciu języka nacechowanego emocjonalnie, tworzeniu zwodniczych narracji, stosowaniu perswazyjnych błędów logicznych i wywoływaniu poczucia przynależności grupowej.
- **Podejście badawcze:** Nowoczesne systemy (opisane m.in. w raporcie CORDIS, 2024) próbują analizować nie tylko to, co jest mówione, ale jak i dlaczego. Analizują styl, ładunek emocjonalny i techniki retoryczne, aby ocenić intencje autora.
- **Wniosek dla naszej tezy:** Skuteczna walka z dezinformacją wymaga narzędzi wykraczających poza logikę i weryfikację faktów, wkraczających w sferę pragmatyki i psychologii języka. Dowodzi to, że wpływ językowy jest zjawiskiem niematematycznym.

2.4.3 Komunikacja emergentna w systemach wieloagentowych

Fascynującym polem jest badanie komunikacji emergentnej, w której autonomiczne agenty AI (np. roboty) muszą samodzielnie wypracować protokół komunikacyjny, aby wspólnie rozwiązać problem.

- **Problem:** Jak zaprojektować systemy, które uczą się komunikować od zera, bez narzuconej gramatyki ludzkiej?

- **Odkrycia:** Jak pokazują badania (np. arXiv:2502.06148v1), „języki” wypracowane przez agentów są często skrajnie niepodobne do ludzkich. Mogą być holistyczne (jeden sygnał oznacza całe złożone pojęcie) i silnie związane z konkretnym zadaniem, a nie kompozycyjne (gdzie znaczenie zdania wynika ze znaczenia słów i reguł składni), co jest cechą zarówno języków naturalnych, jak i formalnych.
- **Wniosek dla naszej tezy:** Badania te sugerują, że nie ma jednego, uniwersalnie „optymalnego” sposobu komunikacji, który musi przypominać logikę matematyczną. Natura powstającego języka zależy od celów, środowiska i zdolności poznawczych agentów. Pokazuje to, że komunikacja jest u samych podstaw zjawiskiem adaptacyjnym i pragmatycznym.

3 Formalizacja problemu

3.1 Paradoksalny przykład: wielopoziomowa analiza „$2 + 2 = 5$”

Rozważmy stwierdzenie: „dwa plus dwa równa się pięć i to jest prawda, a dwa plus dwa równa się cztery to fałsz”. Aby zrozumieć, dlaczego stanowi to tak głębokie wyzwanie dla redukcjonizmu matematycznego, musimy je przeanalizować na trzech odrębnych poziomach:

- **Poziom syntaktyczny (strukturalny):** Z perspektywy gramatyki języka angielskiego zdanie to jest bezbłędne. Ma poprawnie skonstruowany podmiot, orzeczenie i spójniki. Podobnie, jeśli potraktować je jako formułę logiczną $p \wedge \neg q$, jest ono doskonale poprawne pod względem składni rachunku zdań. System M, podobnie jak L, akceptuje tę strukturę jako formalnie dopuszczalną. Na tym poziomie nie ma konfliktu.
- **Poziom semantyczny (znaczeniowy):** Tutaj pojawia się pierwsza rozbieżność. Zdanie to postuluje stan rzeczy, który jest w bezpośredniej sprzeczności z aksjomatami arytmetyki Peano. W ramach „gry językowej” zwanej matematyką jest ono jednoznacznie fałszywe. Jednak w systemie L jego fałszywość semantyczna go nie unieważnia. Zdanie pozostaje w pełni zrozumiałe – każdy odbiorca wie, co ono znaczy i do jakiej prawdy referencyjnej się odnosi, nawet ją negując. W matematyce sprzeczność semantyczna kończy analizę; w języku jest ona dopiero początkiem.
- **Poziom pragmatyczny (użycia):** To kluczowy poziom, na którym język całkowicie deklasuje matematykę. Musimy zapytać: co ta wypowiedź robi, a nie tylko co znaczy? Jej celem nie jest opisanie rzeczywistości, lecz dokonanie aktu illokucyjnego – działania mającego na celu wywołanie określonego skutku u odbiorcy. Jest to akt prowokacji, narzędzie testowania lojalności lub, co najważniejsze, instrument władzy. Najsłynniejszym przykładem jest dystopia George’a Orwella *Rok 1984*, gdzie zdolność do zaakceptowania, że $2 + 2 = 5$ była ostatecznym dowodem podporządkowania umysłu woli Partii. Celem nie było nauczenie nowej matematyki, lecz zniszczenie idei obiektywnej prawdy niezależnej od władzy.

3.1.1 Kontrast: rola sprzeczności w obu systemach

W systemie M (matematyka) napotkanie sprzeczności ($p \wedge \neg p$) sygnalizuje krytyczny błąd. Sprzeczność unieważnia cały dowód i jest logicznym punktem końcowym, który zmusza do rewizji założeń. Jej „wpływ” jest czysto negatywny i systemowy – zatrzymuje proces.

W systemie L (język) ta sama sprzeczność może być niezwykle produktywnym punktem wyjścia. Może zapoczątkować narrację polityczną, stać się fundamentem ideologii, służyć jako narzędzie budowania spójności grupowej (poprzez odrzucenie zewnętrznej „prawdy”) lub być celową strategią dezinformacyjną. Jej wpływ jest pozytywny i twórczy – rozpoczyna proces społeczny.

To właśnie dlatego stwierdzenie, bezużyteczne dla matematyka, staje się potężnym narzędziem w rękach polityka, poety czy propagandysty. Jego „wartość” nie jest mierzona w kategoriach prawdy/fałszu, lecz w kategoriach potencjalnego wpływu na przekonania i zachowania ludzi. To przygotowuje grunt pod próbę sformalizowania tego zjawiska.

3.2 Formalizacja logiczna: od prawdy do przekonania i wpływu

Aby precyzyjnie uchwycić naturę problemu, przełożymy nasze intuicje na język logiki. Celem poniższego modelu nie jest stworzenie w pełni funkcjonalnego symulatora społecznego, lecz użycie formalizmów do rygorystycznego zdefiniowania pojęć i odwzorowania relacji między nimi. Kluczem jest rozróżnienie między obiektywną, aksjomatyczną prawdą (T), która jest domeną matematyki, a subiektywnym przekonaniem (B), które jest walutą w świecie języka.

3.2.1 Wybór aparatu pojęciowego

Do budowy modelu użyjemy kombinacji trzech narzędzi logicznych, z których każde odnosi się do innego aspektu problemu:

- **Logika epistemiczna (logika wiedzy i przekonań):** Niezbędna do formalnego rozróżnienia prawdy od przekonania. Operator $B_o(x)$ („obserwator o wierzy, że x”) pozwala nam mówić o wewnętrznym stanie mentalnym agenta, który może być niezależny od zewnętrznego stanu prawdy $T(x)$. To właśnie ta rozbieżność między $T(x)$ a $B_o(x)$ jest źródłem analizowanego zjawiska.

- **Logika modalna:** Wprowadzenie operatora $\Diamond$ („jest możliwe, że...”) pozwala nam modelować potencjalność. W systemie języka naturalnego wiara w fałsz nie jest ani koniecznością, ani niemożliwością – jest właśnie możliwością. Logika modalna dostarcza narzędzia do wyrażenia tej kluczowej cechy systemów otwartych, w przeciwieństwie do determinizmu systemów czysto matematycznych.

- **Podejście probabilistyczne:** Procesy społeczne, takie jak perswazja, rzadko są binarne. Użycie prawdopodobieństwa $P(...)$ w końcowej formule odzwierciedla tę rzeczywistość. Powtarzanie kłamstwa nie sprawia, że ktoś uwierzy w nie z pewnością; jedynie zwiększa prawdopodobieństwo takiego zdarzenia. To dodaje modelowi realizmu i pokazuje, że wpływ jest zjawiskiem stochastycznym.

3.2.2 Definicje symboli

Stałe i zmienne:

- $p :=$ zdanie „$2 + 2 = 5$” (paradygmatyczny fałsz)

- $q :=$ zdanie „$2 + 2 = 4$” (paradygmatyczna prawda)

- $o :=$ dowolny obserwator (agent w systemie)
- $G :=$ zbiór wszystkich obserwatorów

Predykaty i operatory:

- $T(x) :=$ „x jest prawdziwe w sensie aksjomatycznym". Zatem $T(q)$ jest prawdą, a $\neg T(p)$ jest fałszem.
- $B_o(x) :=$ „Obserwator o wierzy, że x jest prawdą".
- $R(x) :=$ „Zdanie x jest wielokrotnie powtarzane" (wskaźnik ekspozycji).
- $A(o) :=$ „Obserwator o jest podatny na nowe informacje" (wskaźnik podatności).
- $\text{Influence}(x) := \sum_{o \in G} B_o(x) \times S(o)$, gdzie $S(o)$ to „wskaźnik wpływu społecznego" obserwatora o (np. autorytet, liczba obserwujących)

3.2.3 Analiza formuł logicznych

Hipoteza redukcjonistyczna: świat jako matematyka

$$(L \subseteq M) \implies (\neg T(p) \implies \neg(\text{Influence}(p) > 0))$$

Opis: Ta formuła opisuje idealny świat, w którym język jest całkowicie podporządkowany regułom matematyki. Stwierdza ona, że jeśli zdanie p jest aksjomatycznie fałszywe ($\neg T(p)$), to jego wpływ społeczny musi być zerowy.

Implikacje: W takim świecie wpływ jest nierozerwalnie związany z prawdą. Ponieważ nikt nie mógłby uwierzyć w fałsz ($B_o(p)$ byłoby zawsze równe 0 dla fałszywego p), cała suma we wzorze na $\text{Influence}(p)$ wynosiłaby zero. Fałszywe stwierdzenia byłyby informacyjnymi „ślepymi zaułkami", pozbawionymi jakiejkolwiek mocy rozprzestrzeniania się.

Rzeczywistość języka naturalnego: otwartość na błąd

$$\neg(L \subseteq M) \implies \Diamond \exists o : B_o(p)$$

Opis: Ta formuła jest formalnym zaprzeczeniem poprzedniej. Stwierdza ona, że właśnie dlatego, iż język nie jest podzbiorem matematyki, staje się możliwe ($\Diamond$), że znajdzie się co najmniej jeden ($\exists$) obserwator, który uwierzy w fałszywe zdanie p.

Implikacje: To kluczowy moment, w którym system językowy „otwiera się" na zjawiska niemożliwe w ścisłej matematyce. Jest to logiczny punkt wejścia dla fikcji, mitu, błędu poznawczego i celowej dezinformacji. Formuła nie mówi, że ktoś na pewno uwierzy w kłamstwo, ale że system dopuszcza taką możliwość.

Mechanizm „prawdy" społecznej: silnik propagacji

$$\forall o : [R(p) \wedge A(o)] \implies [P(B_o(p)) > P_0]$$

Opis: Ta formuła opisuje mechanizm, dzięki któremu potencjalna wiara w fałsz może stać się zjawiskiem powszechnym. Stwierdza ona, że dla każdego obserwatora, jeśli fałszywe zdanie jest intensywnie powtarzane ($R(p)$), a obserwator jest podatny ($A(o)$), to prawdopodobieństwo (P), że uwierzy on w to zdanie, przekracza pewien bazowy próg P_0.

Implikacje: Formuła ta modeluje proces „zarażania" umysłów. $R(p)$ i $A(o)$ są oczywiście abstrakcjami dla bardzo złożonych zjawisk – $R(p)$ może reprezentować działania mediów, botów czy propagandy, podczas gdy $A(o)$ może zależeć od wykształcenia, przynależności grupowej czy zaufania do źródła. Model pokazuje jednak, że wpływ nie jest magią, lecz wynikiem interakcji mierzalnych (przynajmniej w teorii) czynników: intensywności przekazu i podatności odbiorców.

4 Język i matematyka w procesie odkryć naukowych

4.1 Intuicja i odkrycie: silnik rewolucji naukowych

Największe przełomy naukowe nie rodzą się z czysto formalnych dedukcji, lecz z intuicji i wyobraźni, które operują w domenie języka.

- **„Święta ciekawość" Einsteina:** Twierdził on, że myśli obrazami i uczuciami, a słowa i matematyka są tylko „drugim etapem" formalizacji. Jego eksperymenty myślowe (np. z windą) były narracjami językowymi, które poprzedziły sformułowanie ogólnej teorii względności.
- **Rozróżnienie Poincarégo:** Uważał on, że logika tylko weryfikuje dowody, ale to intuicja je tworzy, dostarczając „płodnego" skoku w kierunku nowej wiedzy.
- **Intuicja matematyczna Gödla:** Wierzył on w istnienie „intuicji matematycznej", która pozwala nam uchwycić prawdziwość aksjomatów. Jego twierdzenia o niezupełności sugerują, że prawda matematyczna wykracza poza jakikolwiek pojedynczy system formalny.

Te przykłady wspierają tezę, że teorie naukowe (jak teorie względności, które testujemy dziś w coraz bardziej ekstremalnych warunkach) nie powstałyby, gdyby ich twórcy nie posługiwali się zarówno językiem (do myślenia „poza schematami"), jak i matematyką (do formalnego opisu).

4.2 Perspektywa wittgensteinowska: matematyka jako gra językowa

Ludwig Wittgenstein fundamentalnie przeformułowuje całą debatę. Twierdzi on, że matematyka nie jest opisem platońskiej rzeczywistości, lecz specyficzną ludzką działalnością – zbiorem „gier językowych".

Zdanie „$2 + 2 = 4$" jest po prostu regułą gramatyczną w grze zwanej arytmetyką. Znaczenie tego zdania nie leży w jego odniesieniu do abstrakcyjnych obiektów, lecz w jego użyciu i osadzeniu w naszej „formie życia" – w budowaniu mostów czy programowaniu komputerów.

W tej perspektywie matematyka (M) jest tylko jednym z wielu zastosowań języka (L). Stwierdzenie „$2+2 = 5$" nie jest błędem w systemie L, lecz ruchem w innej grze językowej (np. grze o kontrolę polityczną lub poezji surrealistycznej).

5 Wnioski i implikacje: nawigowanie w świecie języka

Analiza fundamentalnej różnicy między matematyką (M) a językiem (L) nie jest jedynie abstrakcyjnym ćwiczeniem akademickim. Ma ona głębokie i praktyczne implikacje dla zrozumienia współczesnego świata, projektowania inteligentnych technologii i edukacji przyszłych pokoleń. Poniższe wnioski zarysowują najważniejsze z tych konsekwencji.

5.1 Dla współczesnego świata: anatomia ery postprawdy

Zjawisko „postprawdy" staje się w pełni zrozumiałe w świetle naszego modelu. Współczesny ekosystem informacyjny funkcjonuje jak zautomatyzowana maszyna perswazji, która systematycznie promuje mechanizmy opisane w naszej formalizacji.

- **Maksymalizacja $R(p)$:** Media społecznościowe, z ich wirusową naturą i działaniem botów, działają jak potężny wzmacniacz dla funkcji $R(x)$ (powtarzanie komunikatu). Każde „udostępnienie" czy „polubienie" to mikroakt powtórzenia, który zwiększa ekspozycję na daną treść, niezależnie od jej prawdziwości.
- **Maksymalizacja $A(o)$:** Algorytmy rekomendacyjne tworzą spersonalizowane komory echa i bańki filtrujące, które minimalizują kontakt z informacjami sprzecznymi z istniejącymi przekonaniami. To sztucznie zwiększa $A(o)$ (podatność obserwatora), systematycznie osłabiając jego zdolności do krytycznej oceny.

W rezultacie architektura współczesnych mediów jest niemal doskonale zaprojektowana, aby sytuacja, w której Influence(p) (wpływ fałszu) przewyższa Influence(q) (wpływ prawdy), nie była anomalią, lecz częstym i przewidywalnym wynikiem.

5.2 Dla sztucznej inteligencji: wyzwanie prawdziwego zrozumienia

Pojawienie się dużych modeli językowych (LLM) jest empirycznym dowodem tez tego artykułu. Maszyny te osiągnęły mistrzostwo w operowaniu na poziomie syntaktycznym i statystyczno-semantycznym języka L, nie mając jednocześnie dostępu do aksjomatycznej prawdy $T(x)$. Są one w pewnym sensie pierwszymi nietrywialnymi bytami, dla których Influence(p) jest jedyną miarą sukcesu.

- **Problem „stochastycznej papugi":** LLM-y nie „rozumieją" tego, co mówią. Generują tekst na podstawie prawdopodobieństwa, co pozwala im tworzyć niezwykle perswazyjne, gramatycznie spójne i stylistycznie konsekwentne komunikaty, które są całkowicie fałszywe. Stanowią więc potencjalnie nieskończone źródło dla funkcji $R(p)$.
- **Dylematy etycznego projektowania:** Kluczowe pytanie nie brzmi: „Jak powstrzymać AI przed kłamaniem?", lecz raczej: „Czy możliwe jest zaprojektowanie AI, która ma model świata i 'zależy' jej na prawdzie?". Wymagałoby to stworzenia systemów, które potrafią nie tylko przetwarzać język, ale także weryfikować go w oparciu o ugruntowaną wiedzę ($T(x)$) i rozumieć intencje innych ($B_o(x)$), co pozostaje jednym z najtrudniejszych wyzwań w całej dziedzinie AI.

5.3 Dla edukacji: w kierunku dwujęzyczności poznawczej

Skoro nasi uczniowie funkcjonują w świecie, w którym L i M są nieustannie mylone i instrumentalizowane, system edukacji musi wyposażyć ich w narzędzia do poruszania się w tej złożoności. Sugeruje to potrzebę odejścia od nauczania silosowego na rzecz rozwijania „dwujęzyczności poznawczej" – biegłości zarówno w formalnym języku matematyki, jak i w pragmatycznym, kontekstowym języku komunikacji.

- **Interdyscyplinarność w praktyce:** Oznacza to, że lekcja matematyki powinna zawierać moduł o tym, jak statystyka może być używana do manipulacji (pragmatyka liczb). Lekcja języka polskiego powinna uczyć nie tylko o metaforach, ale także o analizie logicznej struktury argumentów w tekście.
- **Nowe kluczowe pytanie:** Edukacja musi uczyć uczniów zadawania nie tylko pytania: „Czy to stwierdzenie jest prawdziwe?", ale przede wszystkim pytań: „Co to stwierdzenie robi? Jaki jest cel jego autora? Kto zyskuje, jeśli w to uwierzę?".

5.4 Perspektywy badawcze: w kierunku naukowej „logiki fikcji"

Najbardziej obiecującym kierunkiem badawczym wynikającym z tej analizy jest potrzeba sformalizowania zasad rządzących światami, które język nieustannie tworzy. Potrzebujemy naukowej „logiki fikcji" – formalnego systemu zdolnego do analizowania wewnętrznej spójności i reguł narracji, literatury, mitologii, a nawet teorii spiskowych.

- **Problem i cel:** Klasyczna logika, oparta na korespondencji z jednym, obiektywnym światem, jest bezradna wobec fikcji. Pytanie „Czy to prawda, że Frodo Baggins zniszczył Pierścień?" jest bezsensowne w logice $T(x)$. Logika fikcji nie pytałaby o prawdę absolutną, lecz o prawdę w ramach danego uniwersum narracyjnego. Jej celem byłoby stworzenie aparatu do oceny, czy dane stwierdzenie jest prawdziwe w świecie *Władcy Pierścieni* ($T_W(p)$).
- **Podstawy i narzędzia:** Taka logika mogłaby czerpać z istniejących teorii światów możliwych (Kripke, Lewis). Każdy świat fikcyjny W byłby zdefiniowany przez zbiór swoich aksjomatów narracyjnych A_W (np. „Pierścień jest zły", „Elfy są nieśmiertelne") i zbiór reguł wnioskowania R_W, które mogą, ale nie muszą, pokrywać się z logiką naszego świata. Potrzebowalibyśmy nowych operatorów modalnych zdolnych do operowania na tych światach.
- **Przykład formalizacji:** Niech W_{HP} oznacza świat przedstawiony w powieściach o *Harrym Potterze*. Niech $p :=$ „Harry Potter użył zaklęcia Avada Kedavra". Niech $q :=$ „Voldemort użył zaklęcia Avada Kedavra".

  W ramach logiki fikcji moglibyśmy formalnie wykazać, że $\neg T_{W_{HP}}(p)$ (stwierdzenie p jest fałszywe w świecie HP, ponieważ kłóci się z moralnymi aksjomatami i działaniami bohatera), podczas gdy $T_{W_{HP}}(q)$ jest prawdziwe, jako że jest zgodne z aksjomatami opisującymi tę postać.
- **Praktyczne zastosowania:**
  - **Analiza ideologii i dezinformacji:** Teorie spiskowe można traktować jako zamknięte światy fikcyjne. Zamiast zwalczać ich twierdzenia na podstawie

faktów (co często jest nieskuteczne), można by formalnie analizować ich wewnętrzną logikę, demaskując ich sprzeczności i nieuzasadnione skoki inferencyjne.

– **Zaawansowana AI:** AI wyposażona w logikę fikcji mogłaby generować znacznie bardziej spójne i wiarygodne narracje, a także identyfikować „dziury fabularne" w istniejących tekstach.
– **Nauki humanistyczne:** Dostarczyłoby to literaturoznawcom i kulturoznawcom potężnego, formalnego narzędzia do analizy struktury mitów i narracji.

Stworzenie takiej logiki byłoby ostatecznym uznaniem, że zdolność języka do tworzenia światów nie jest jego wadą czy błędem, lecz jego najpotężniejszą i fundamentalną cechą.

6 Podsumowanie

Niniejszy artykuł starał się wykazać, że dążenie do całkowitej redukcji języka (L) do struktur matematycznych (M) jest fundamentalnie niemożliwe i opiera się na niezrozumieniu natury obu systemów. Zaczęliśmy od analitycznego paradoksu „$2+2=5$", który posłużył jako narzędzie do zilustrowania fundamentalnej różnicy między prawdą aksjomatyczną ($T(x)$) – domeną matematyki – a subiektywnym przekonaniem ($B_o(x)$), które jest kluczową walutą w sferze języka. Wykazaliśmy, że o ile w matematyce sprzeczność jest sygnałem błędu i końcem analizy, o tyle w języku może być niezwykle produktywnym początkiem narracji, aktu perswazji czy manifestacji władzy.

Przedstawiona analiza, wsparta próbą formalizacji przy użyciu logiki epistemicznej i modalnej, pozwoliła na precyzyjne modelowanie tej rozbieżności. Analiza dowiodła, że to właśnie odejście języka od ścisłych ram matematyki ($\neg(L \subseteq M)$) stwarza możliwość ($\Diamond$) powstania wiary w fałsz, a mechanizmy społeczne, takie jak intensywne powtarzanie ($R(x)$) i podatność odbiorców ($A(o)$), mogą przekształcić tę możliwość w potężną siłę o realnym wpływie.

Ostateczne wyjaśnienie tego zjawiska znajduje swój punkt odniesienia w filozofii Ludwiga Wittgensteina. Jego koncepcja gier językowych pozwoliła nam porzucić fałszywą dychotomię i zrozumieć, że matematyka nie jest systemem nadrzędnym wobec języka, lecz jedną z wielu możliwych, wysoce sformalizowanych gier, w które możemy grać za pomocą języka. „$2+2=4$" to reguła w grze zwanej arytmetyką; „$2+2=5$" to ruch w zupełnie innej grze, na przykład w grze o władzę polityczną.

Zrozumienie tej relacji nie jest jedynie akademicką ciekawostką – jest kluczowe w erze, w której granice między prawdą obiektywną a społeczną zacierają się w bezprecedensowym tempie. Architektura mediów społecznościowych i działanie modeli AI, które są mistrzami języka nieugruntowanego w prawdzie, tworzą środowisko, w którym pragmatyczna siła języka może być wykorzystywana na skalę przemysłową do kształtowania rzeczywistości. Wymaga to nowego podejścia do edukacji, promującego „dwujęzyczność poznawczą" i odporność na manipulację.

Dlatego spór o prymat języka lub matematyki jest iluzoryczny. Zamiast próbować wtłaczać język w ramy matematyki, powinniśmy podążać w przeciwnym kierunku: używając precyzyjnych narzędzi M, aby lepiej zrozumieć i docenić potęgę L.

Proponowana wizja naukowej „logiki fikcji" jest wyrazem tej nowej syntezy – dążenia do stworzenia formalnych metod analizy zdolności języka do tworzenia całych światów. Ostatecznie matematyka i język nie są systemami rywalizującymi, lecz dwoma różnymi, choć nierozerwalnie związanymi, narzędziami w tym samym warsztacie ludzkiego poznania i komunikacji.

Naturalną konsekwencją tej analizy jest fundamentalna hipoteza, że język, zwłaszcza w dobie AI, wymaga do swojej analizy innej matematyki niż ta, która opisuje logiczną rzeczywistość. Stwierdzenie to nie jest wezwaniem do porzucenia rygoru matematycznego, lecz wezwaniem do fundamentalnej zmiany narzędzi i perspektywy.

„Klasyczna" matematyka (M_{logic}), oparta na teorii mnogości, logice binarnej i algebrze, jest doskonale przystosowana do opisu świata fizycznego i struktur abstrakcyjnych – świata obiektywnych, niezmiennych i pozbawionych intencji prawd. Próba bezkrytycznego zastosowania jej do analizy języka naturalnego (L) jest jak próba zmierzenia temperatury za pomocą linijki; narzędzie jest precyzyjne, ale niedostosowane do natury badanego zjawiska.

Bibliografia

Literatura

I. Filozofia języka i podstawy teoretyczne

[1] Austin, J. L. (1962). *How to Do Things with Words.* Oxford: Clarendon Press.

[2] Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations.* Oxford: Blackwell.

[3] Searle, J. R. (1969). *Speech Acts: An Essay in the Philosophy of Language.* Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Grice, H. P. (1975). Logic and Conversation. In Cole, P. & Morgan, J. (eds.), *Syntax and Semantics, vol. 3.* Academic Press.

[5] Davidson, D. (1984). *Inquiries into Truth and Interpretation.* Oxford: Clarendon Press.

[6] Kripke, S. (1980). *Naming and Necessity.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

[7] Putnam, H. (1975). The Meaning of 'Meaning'. *Minnesota Studies in the Philosophy of Science, 7*, 131-193.

[8] Quine, W. V. O. (1960). *Word and Object.* Cambridge, MA: MIT Press.

[9] Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 100*, 25-50.

[10] Russell, B. (1905). On Denoting. *Mind, 14*(56), 479-493.

[11] Brandom, R. (1994). *Making It Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment.* Harvard University Press.

[12] Recanati, F. (2004). *Literal Meaning.* Cambridge: Cambridge University Press.

[13] Stanley, J. (2007). *Language in Context: Selected Essays.* Oxford: Oxford University Press.

[14] Cappelen, H. & Lepore, E. (2005). *Insensitive Semantics: A Defense of Semantic Minimalism and Speech Act Pluralism*. Blackwell.

II. Logika formalna i epistemiczna

[15] Raatikainen, P. (2004). *Gödel's Incompleteness Theorems*. arXiv:math/0408144v1.

[16] Hintikka, J. (1962). *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Cornell University Press.

[17] van Benthem, J. (2011). *Logical Dynamics of Information and Interaction*. Cambridge University Press.

[18] Fagin, R., Halpern, J. Y., Moses, Y., & Vardi, M. Y. (1995). *Reasoning about Knowledge*. MIT Press.

[19] Baltag, A. & Smets, S. (2008). A Qualitative Theory of Dynamic Interactive Belief Revision. *Texts in Logic and Games, 3*, 9-58.

[20] Meyer, J. J. & van der Hoek, W. (1995). *Epistemic Logic for AI and Computer Science*. Cambridge University Press.

[21] Girard, J. Y. (1987). Linear Logic. *Theoretical Computer Science, 50*(1), 1-101.

III. Językoznawstwo komputacyjne i formalne

[22] Chomsky, N. (1957). *Syntactic Structures*. The Hague/Paris: Mouton.

[23] Morris, C. W. (1938). *Foundations of the Theory of Signs*. Chicago: University of Chicago Press.

[24] Montague, R. (1973). The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English. In Hintikka, J. et al. (eds.), *Approaches to Natural Language*. Reidel.

[25] Barwise, J. & Perry, J. (1983). *Situations and Attitudes*. MIT Press.

[26] Kamp, H. & Reyle, U. (1993). *From Discourse to Logic*. Kluwer Academic Publishers.

[27] Asher, N. & Lascarides, A. (2003). *Logics of Conversation*. Cambridge University Press.

[28] Kaplan, D. (1989). Demonstratives. In Almog, J. et al. (eds.), *Themes from Kaplan*. Oxford University Press.

IV. Badania nad Large Language Models

[29] Cognitive Science Collective (2025). *Linguistic Blind Spots of Large Language Models*. arXiv:2503.19260v1.

[30] AI Research Group (2025). *Pragmatics in the Era of Large Language Models*. arXiv:2502.12378v2.

[31] Vaswani, A. et al. (2017). *Attention Is All You Need.* arXiv:1706.03762.

[32] Devlin, J. et al. (2019). *BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding.* arXiv:1810.04805.

[33] Brown, T. et al. (2020). *Language Models are Few-Shot Learners.* arXiv:2005.14165.

[34] Radford, A. et al. (2019). *Language Models are Unsupervised Multitask Learners.* OpenAI Blog.

[35] Bender, E. M. et al. (2021). On the Dangers of Stochastic Parrots: Can Language Models Be Too Big? *FAccT '21.*

[36] Marcus, G. & Davis, E. (2024). *Large Language Models and the Argument from the Poverty of the Stimulus.* arXiv:2401.06018.

[37] Mitchell, M. et al. (2023). The Debate Over Understanding in AI's Large Language Models. *PNAS, 120*(13).

[38] Bommasani, R. et al. (2021). *On the Opportunities and Risks of Foundation Models.* arXiv:2108.07258.

V. Pragmatyka i kontekst w AI

[39] Murena, P-A., Cointet, J-P., & Gefen, A. (2013). *A computational-semiotic perspective on the challenges of building a human-like robot.* arXiv:1307.0087v1.

[40] Bisk, Y. et al. (2020). Experience Grounds Language. *EMNLP 2020.*

[41] Lake, B. M. & Murphy, G. L. (2023). Word Meaning in Minds and Machines. *Psychological Review.*

[42] Goodman, N. D. & Frank, M. C. (2016). Pragmatic Language Interpretation as Probabilistic Inference. *Trends in Cognitive Sciences, 20*(11).

[43] Andreas, J. (2022). *Language Models as Agent Models.* arXiv:2212.01681.

VI. Dezinformacja i post-prawda

[44] Orwell, G. (1949). *Nineteen Eighty-Four.* London: Secker & Warburg.

[45] Wardle, C. & Derakhshan, H. (2017). *Information Disorder: Toward an Interdisciplinary Framework.* Council of Europe Report.

[46] Rini, R. (2017). Fake News and Partisan Epistemology. *Kennedy Institute of Ethics Journal, 27*(2).

[47] Fallis, D. (2015). What Is Disinformation? *Library Trends, 63*(3), 401-426.

[48] Floridi, L. (2011). *The Philosophy of Information.* Oxford: Oxford University Press.

[49] Frankfurt, H. G. (2005). *On Bullshit.* Princeton University Press.

VII. Emergentna komunikacja i systemy multi-agentowe

[50] Robotics and AI Lab (2025). *Emergent Communication in Multi-Agent Systems.* arXiv:2502.06148v1.

[51] Lazaridou, A. & Baroni, M. (2020). *Emergent Multi-Agent Communication in the Deep Learning Era.* arXiv:2006.02419.

[52] Havrylov, S. & Titov, I. (2017). Emergence of Language with Multi-agent Games: Learning to Communicate with Sequences of Symbols. *NeurIPS 2017.*

[53] Kirby, S. et al. (2014). Iterated Learning and the Evolution of Language. *Current Opinion in Neurobiology, 28*, 108-114.

[54] Wagner, K. et al. (2003). Progress in the Simulation of Emergent Communication and Language. *Adaptive Behavior, 11*(1).

VIII. Matematyczne podstawy języka i znaczenia

[55] Tegmark, M. (2007). *The Mathematical Universe.* arXiv:0704.0646v1.

[56] Vinyals, O. et al. (2015). *Grammar as a Foreign Language.* arXiv:1412.2442v1.

[57] Lambek, J. (1958). The Mathematics of Sentence Structure. *The American Mathematical Monthly, 65*(3).

[58] van Benthem, J. & ter Meulen, A. (eds.) (2011). *Handbook of Logic and Language.* Elsevier.

[59] Gärdenfors, P. (2000). *Conceptual Spaces: The Geometry of Thought.* MIT Press.

[60] Clark, S. et al. (2008). A Compositional Distributional Model of Meaning. *Proceedings of the Second Quantum Interaction Symposium.*

IX. Interdyscyplinarne perspektywy

[61] Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* Basic Books.

[62] Dennett, D. C. (2017). *From Bacteria to Bach and Back: The Evolution of Minds.* W. W. Norton.

[63] Piantadosi, S. T. (2023). *Modern Language Models Refute Chomsky's Approach to Language.* Lingbuzz.

[64] Tomasello, M. (2003). *Constructing a Language: A Usage-Based Theory of Language Acquisition.* Harvard University Press.