

Projeto 2- Relatório

Simulação de ondas escalares utilizando o algoritmo FDTD

1º Gabriel Soares Gama

Departamento de Engenharia Elétrica
e de Computação (SEL)

Escola de Engenharia de São
Carlos (EESC)

São Carlos, SP, Brasil

Nº USP - 10716511

gabriel_gama@usp.br

2º Marcos Antonio Victor Arce

Departamento de Engenharia Elétrica
e de Computação (SEL)

Escola de Engenharia de São
Carlos (EESC)

São Carlos, SP, Brasil

Nº USP - 10684621

marcosarce@usp.br

3º Vinícius Ribeiro da Silva

Departamento de Engenharia Elétrica
e de Computação (SEL)

Escola de Engenharia de São
Carlos (EESC)

São Carlos, SP, Brasil

Nº USP - 10828141

vinicius.r@usp.br

Resumo—Este documento é um relatório feito em \LaTeX para o trabalho 2 da disciplina Ondas Eletromagnéticas (SEL0612). Consiste na análise da equação de uma onda escalar por meio da resolução de oito exercícios do livro *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference TimeDomain Method*.

Index Terms—ondas, eletromagnetismo, algoritmo, método FDTD

I. INTRODUÇÃO

Este documento é um relatório do segundo projeto da disciplina de Ondas Eletromagnéticas (SEL0612), ministrada pelo professor Leonardo André Ambrósio, do curso de Engenharia de Computação da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP). A implementação do código está em <https://github.com/GSoaresgama/Ondas-2>. Neste projeto, iremos analisar a equação de onda escalar para uma função $u = (x, t)$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \quad (1)$$

Essa análise será feita a partir da resolução de exercícios baseado em uma extensa base teórica. Diversos conceitos serão desenvolvidos para podermos relacionar a solução do método FDTD da equação (1) com a realidade.

II. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO

Considerando (1), iremos supor a possível solução genérica:

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (2)$$

sendo F e G funções arbitrárias. Diferenciando parcialmente duas vezes em relação a "t" e "x", temos:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{dF(x + ct)}{d(x + ct)} \cdot \frac{\delta(x + ct)}{\delta t} + \frac{dG(x - ct)}{d(x - ct)} \cdot \frac{\delta(x - ct)}{\delta t}$$
$$\frac{\delta u}{\delta t} = cF'(x + ct) - cG'(x - ct) \quad (3)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct) \quad (4)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{dF(x + ct)}{d(x + ct)} \cdot \frac{\delta(x + ct)}{\delta x} + \frac{dG(x - ct)}{d(x - ct)} \cdot \frac{\delta(x - ct)}{\delta x}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = F'(x + ct) + G'(x - ct) \quad (5)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = F''(x + ct) + G''(x - ct) \quad (6)$$

substituindo (4) e (6) em (1), temos:

$$c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct) = c^2 [F''(x + ct) + G''(x - ct)] \quad (7)$$

Essa solução é uma solução identidade, independentemente da escolha de F e G. Essas funções são conhecidas como soluções de onda propagante.

III. DISPERSÃO

Nessa seção iremos introduzir o conceito de dispersão. A dispersão é definida como a variação do comprimento de onda (λ) com a frequência (f). Para facilitar os cálculos iremos representar a dispersão como a variação do número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, com frequência angular $w = 2\pi f$. Considerando uma onda senoidal na forma fasorial como solução de (1), temos:

$$u(x, t) = e^{j(wt - kx)} \quad (8)$$

Substituindo em (1), temos:

$$(jw)^2 e^{j(wt - kx)} = c^2 (-jk)^2 e^{j(wt - kx)} \quad (9)$$

$$w^2 = c^2 k^2 \quad (10)$$

$$k = \pm \frac{w}{c} \quad (11)$$

A equação (11) é a relação de dispersão para equação de onda escalar de uma dimensão. A partir dela, concluímos que o número da onda é linearmente proporcional em relação à frequência da onda, sendo que o sinal + indica no sentido de propagação e - no sentido contra propagante em x.

A partir de (11), obtemos a velocidade de fase, definida como:

$$v_p = \frac{w}{k} = \pm c \quad (12)$$

Percebemos que a velocidade de fase independe da frequência. Assim, podemos afirmar que ondas propagantes que possuem a relação de dispersão vista em (11), possuem

uma velocidade de fase constante. Essas ondas são classificadas como sem dispersão.

Ao considerar que a frequência angular varia de acordo com o número de onda ($w = w(k)$), diferenciamos (10) por k para obter a velocidade de grupo.

$$2w \frac{dw}{dk} = 2kc^2 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} v_G &= \frac{dw}{dk} = \frac{2kc^2}{2w} \\ v_G &= \frac{c^2}{w} \cdot \pm \frac{w}{c} \\ v_G &= \pm c \end{aligned} \quad (14)$$

Dessa forma, a velocidade do grupo também é independente da frequência.

IV. FDTD

Nessa seção, aplicaremos a expansão de Taylor em $u(x, t_n)$ para possibilitar o uso do método FDTD. Considerando que a expansão de Taylor para $u(x, t_n)$ no ponto x_i do espaço para o ponto $x_i + \Delta x$ e mantendo o tempo fixo em t_n , temos:

$$\begin{aligned} u(x_i + \Delta x)|_{t_n} &= u|_{x_i, t_n} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} + \\ &\quad \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\xi_1, t_n} \end{aligned} \quad (15)$$

Sendo que o último termo da equação representa o erro resultante da fórmula de Taylor. De maneira similar, consideramos a expansão de Taylor para o ponto $x_i - \Delta x$ e mantendo o tempo fixo em t_n .

$$\begin{aligned} u(x_i - \Delta x)|_{t_n} &= u|_{x_i, t_n} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} - \\ &\quad \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\xi_2, t_n} \end{aligned} \quad (16)$$

Novamente, o último termo é a fórmula para o erro. Somando (15) e (16), temos:

$$\begin{aligned} u(x_i + \Delta x)|_{t_n} + u(x_i - \Delta x)|_{t_n} &= 2u|_{x_i, t_n} + \\ &\quad (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\xi_3, t_n} \end{aligned} \quad (17)$$

Organizando (17), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} &= \left[\frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right]_{t_n} + \\ &\quad O[(\Delta x)^2] \end{aligned} \quad (18)$$

Sendo que o termo $O[(\Delta x)^2]$ é o termo do erro.

Adotaremos a notação de índices para indicar o tempo e o espaço no método FDTD, i será o índice para a posição no espaço e n para o tempo, ou seja $x_i = i\Delta x$ e $t^n = n\Delta t$. Assim, reescrevemos (18):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (19)$$

Como os dois lados da equação são semelhantes, obtemos por analogia a equação a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_i, t_n} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] \quad (20)$$

Substituindo (19) e (20) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] = \\ &c^2 \left\{ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

A equação (21) é a aproximação escalar da equação da onda. Desconsiderando o resto da série de Taylor e isolando o termo u_i^{n+1} :

$$u_i^{n+1} \cong (c\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad (22)$$

A partir de (22), podemos calcular o estado futuro em um intervalo Δt de cada ponto do espaço separado por um valor Δx , formando uma malha de valores que descrevem a onda.

Analisando os valores para Δx e Δt , encontramos uma particularidade quando a igualdade $c\Delta t = \Delta x$ é atendida, resultando em propriedades relevantes para a expressão. Essa escolha de intervalo é chamada de intervalo de tempo mágico. Considerando $c\Delta t = \Delta x$, obtemos:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + 2u_i^n - u_i^{n-1} \\ &= u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1} \end{aligned} \quad (23)$$

Nesse caso em específico, a equação para a aproximação de u^{n+1} se torna uma igualdade, apesar da aproximação de Taylor. Provaremos isso ao expandir (23) para a solução geral considerada em (2). Assumindo intervalo de tempo e de espaço, $c\Delta t = \Delta x$, temos:

$$\begin{aligned} &[F(x_i + ct_{n+1}) + G(x_i - ct_{n+1})] = \\ &[F(x_{i+1} + ct_n) + G(x_{i+1} - ct_n)] + \\ &[F(x_{i-1} + ct_n) + G(x_{i-1} - ct_n)] - \\ &[F(x_i + ct_{n-1}) + G(x_i - ct_{n-1})] \end{aligned} \quad (24)$$

Em que $x_i = i\Delta x$ e $t_n = n\Delta t$. Expandindo os termos, substituindo $c\Delta t$ por Δx e isolando o lado direito da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} RHS &= \{F[(i+1)\Delta x + n\Delta x] + G[(i+1)\Delta x - n\Delta x]\} + \\ &\quad \{F[(i-1)\Delta x + n\Delta x] + G[(i-1)\Delta x - n\Delta x]\} - \\ &\quad \{F[i\Delta x + (n-1)\Delta x] + G[i\Delta x - (n-1)\Delta x]\} \\ &= \{F[(i+1+n)\Delta x] + G[(i+1-n)\Delta x]\} + \\ &\quad \{F[(i-1+n)\Delta x] + G[(i-1-n)\Delta x]\} - \\ &\quad \{F[(i+n-1)\Delta x] + G[(i-n+1)\Delta x]\} \end{aligned} \quad (25)$$

Percebemos que podemos cancelar o termo G da primeira chave com o da terceira e o mesmo vale para F da segunda chave com o da terceira. Simplificando a equação para:

$$RHS = F[(i+1+n)\Delta x] + G[(i-1-n)\Delta x] \quad (26)$$

Voltando para a solução de (1), notamos que esses dois termos representam a onda inicial com um deslocamento na posição de $\Delta x = c\Delta t$, ou seja, representa uma solução exata.

V. RELAÇÃO DE DISPERSÃO NUMÉRICA

A partir da relação obtida na análise de dispersão, podemos calcular a relação de dispersão numérica da aproximação pelo algoritmo FDTD da onda escalar de uma dimensão (22). Considerando a possibilidade de k ser imaginário ($\bar{k} = \bar{k}_{real} + j\bar{k}_{imag}$), e utilizando a solução de (1) como uma onda senoidal na forma fasorial, encontramos a seguinte equação de uma onda numérica:

$$\begin{aligned} u_i^n &= e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k} i \Delta x)} = e^{j[\omega n \Delta t - (\bar{k}_{real} + j\bar{k}_{imag}) i \Delta x]} \\ u_i^n &= e^{\bar{k}_{imag} i \Delta x} e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}_{real} i \Delta x)} \end{aligned} \quad (27)$$

O valor de \bar{k} costuma ser diferente do de k , que corresponde a onda física. Essa diferença se chama dispersão numérica. Nota-se que em (27), o valor de \bar{k}_{imag} determina se temos uma amplitude constante ($\bar{k}_{imag} = 0$), decrescente ($\bar{k}_{imag} < 0$) ou crescente ($\bar{k}_{imag} > 0$) com a posição.

Substituindo em (22), fatorando a exponencial $j(\omega n \Delta t - \bar{k} i \Delta x)$ e agrupando a exponencial dependente do tempo e a do espaço, temos:

$$\frac{e^{j\omega \Delta t} + e^{-j\omega \Delta t}}{2} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{e^{j\bar{k}\Delta x} + e^{-j\bar{k}\Delta x}}{2} - 1\right) + 1 \quad (28)$$

Aplicando a identidade de Euler, obtemos:

$$\cos(\omega \Delta t) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1 \quad (29)$$

isolando o \bar{k} :

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right)^2 [\cos(\omega \Delta t) - 1] \right\} \quad (30)$$

A partir dessa equação, consideraremos três casos diferentes em relação aos intervalos Δt e Δx .

A. $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$

Com essas condições, podemos assumir que $\omega \Delta t \rightarrow 0$, então aplicamos a aproximação de dois termos de Taylor:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right)^2 \left[1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2} - 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\Delta x)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} (k\Delta x)^2 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

Como $k\Delta x \rightarrow 0$, podemos aplicar a aproximação de dois termos de Taylor no \cos^{-1} , resultando em:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} (k\Delta x) = k \quad (32)$$

Logo, podemos concluir que ao reduzirmos o intervalo de amostragem ao limite de $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$, a onda não possui dispersão e que no limite a solução numérica é exata.

B. $c\Delta t = \Delta x$ (Intervalo de tempo mágico)

Substituindo em (30):

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{c\Delta t} \cos^{-1} [1 + \cos(\omega \Delta t) - 1] \\ &= \frac{1}{c\Delta t} \cos^{-1} [\cos(\omega \Delta t)] = \frac{\omega \Delta t}{c\Delta t} = k \end{aligned} \quad (33)$$

Concluimos, como no caso A, que a onda não possui dispersão e a solução numérica é exata, independentemente da escolha dos intervalos, contanto que a relação $\Delta x = c\Delta t$ seja respeitada.

C. Solução geral (com dispersão)

Para uma solução geral, iremos definir duas variáveis:

Fator de estabilidade de Courant:

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (34)$$

Resolução amostral da malha:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta x} \quad (35)$$

Sendo λ_0 o comprimento da onda no espaço.

Assim, reescrevemos (30) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{S}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\zeta) \right] \\ \text{em que } \zeta &= 1 + \left(\frac{1}{S}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

É importante notar que podemos escolher valores de C e S para que \bar{k} seja complexo. O valor de $\cos^{-1}(C)$ torna-se imaginário quando $C < -1$ ou $C > 1$. Nesse caso só é possível quando $C < -1$, pois:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{S^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1 \right] &> 1 \\ \frac{1}{S^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1 \right] &> 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) &> 1 \end{aligned}$$

Como $\cos(x) > 1$ é impossível para x , $x \in \mathbb{R}$, esse limite não é ultrapassado.

Já para $C < -1$:

$$1 + \frac{1}{S^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1 \right] < -1$$

$$\frac{1}{S^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] < -2$$

$$\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) < -2S^2 + 1$$

sendo possível para $S < 1$.

Isolando N_λ nessa fórmula, encontramos o valor de $N_\lambda|_{transition}$ que representa o momento em que \bar{k} possui um componente imaginário.

$$N_\lambda|_{transition} = \frac{2\pi S}{\cos^{-1}(1 - 2S^2)} \quad (37)$$

Para $N_\lambda > N_\lambda|_{transition}$, \bar{k} é real e a onda não sofre nenhuma atenuação. Para $N_\lambda < N_\lambda|_{transition}$, \bar{k} é complexo e a amplitude da onda decresce. Analisaremos como o \bar{k} e a velocidade de fase \bar{v} se comportam em relação ao N_λ .

1) $N_\lambda > N_\lambda|_{transition}$:

$$\bar{k}_{real} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{S} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\} \quad (38)$$

$$\bar{k}_{imag} = 0$$

Velocidade de fase:

$$\bar{v}_p = \frac{\omega}{\bar{k}_{real}} = \frac{2\pi f \Delta x}{\cos^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{S^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\}} \quad (39)$$

Mas como

$$2\pi f \Delta x = 2\pi f \frac{\lambda_0}{N_\lambda} = \frac{2\pi}{N_\lambda} c \quad (40)$$

Temos:

$$\bar{v}_p = \frac{2\pi c}{N_\lambda \cos^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{S^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\}} \quad (41)$$

Como $\bar{k}_{imag} = 0$, temos uma amplitude constante de acordo com a equação (27).

2) $N_\lambda < N_\lambda|_{transition}$: Com isso, $C < -1$ então $\bar{k}_{imag} \neq 0$. Utilizaremos a relação para valores complexos do arccos.

\cos^{-1} para $C < -1$:

$$\cos^{-1}(C) = \frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (42)$$

Substituindo em (36):

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \right] \quad (43)$$

Fatorando j para fora da raiz:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + j\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] \quad (44)$$

Substituindo $j = e^{j\pi/2}$, temos:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \ln \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{j\pi/2} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \ln \left[\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-j\pi/2} \right] \right\} \quad (45)$$

Tirando o termo exponencial do ln:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \left[\ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) - j \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\pi + j \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] \quad (46)$$

Então, temos \bar{k}

$$\bar{k}_{real} = \frac{\pi}{\Delta x}; \quad \bar{k}_{imag} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (47)$$

Calculando a velocidade de fase:

$$\bar{v}_p = \frac{\omega}{\bar{k}_{real}} = \frac{\omega}{\pi/\Delta x} = \frac{2\pi f \Delta x}{\pi}$$

$$= \frac{2f\lambda_0}{N_\lambda} = \frac{2}{N_\lambda} c \quad (48)$$

Atenuação por cada intervalo percorrido pela onda:

$$e^{\bar{k}_{imag} \Delta x} = e^{-\alpha \Delta x} = e^{\ln(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (49)$$

Considerando a possibilidade de \bar{v}_p ultrapassar c , a teoria de Nyquist afirma que qualquer processo numérico ou físico que obtém amostras de uma forma de onda a cada Δt segundos pode reproduzir a forma original da onda (sem 'aliasing') para um espectro de $f_{max} = \frac{1}{2\Delta t}$. Neste caso, o correspondente mínimo do comprimento de onda no vácuo que pode ser coletado sem aliasing é:

$$\lambda_{0,min} = \frac{c}{f_{max}} = 2c\Delta t \quad (50)$$

Para uma escolha particular de Δx , o correspondente mínimo da amostra espacial é

$$N_{\lambda,min} = \frac{\lambda_{0,min}}{\Delta x} = \frac{2c\Delta t}{\Delta x} = 2S \quad (51)$$

Então, de (48), \bar{v}_p máximo é dado por:

$$\bar{v}_{p,max} = \frac{2}{N_{\lambda,min}} c = \frac{2}{2S} c = \frac{1}{S} c \geq c \quad (52)$$

Então, para uma solução geral, percebemos que a velocidade de fase da onda numérica pode ultrapassar o valor de c .

VI. FREQUÊNCIA COMPLEXA

Consideraremos, novamente, a solução apresentada em (8) de onda senoidal sendo propagada. Contudo, nessa solução, também iremos considerar a possibilidade de uma frequência numérica complexa. Então:

$$u_i^n = e^{j(\bar{\omega} n \Delta t - \bar{k} i \Delta x)} = e^{j[\bar{\omega}_{real} + j\bar{\omega}_{imag} n \Delta t - \bar{k} i \Delta x]}$$

$$= e^{-\bar{\omega}_{imag} n \Delta t} e^{j(\bar{\omega}_{real} n \Delta t - \bar{k} i \Delta x)} \quad (53)$$

A partir de (53), percebemos que a amplitude pode ser constante, crescente e decrescente no tempo, de acordo com o valor de $\bar{\omega}_{imag}$

Utilizando-se da relação (29):

$$\cos(\bar{\omega} \Delta t) = \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 [\cos(\bar{k} \Delta x) - 1] + 1 \quad (54)$$

Resolvendo para $\bar{\omega}$

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1} \{ S^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1 \} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1}(\xi) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\xi) \right] \\ \text{em que } \xi &= S^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1\end{aligned}\quad (55)$$

Observamos que, para \bar{k} real, temos que $1 - 2S^2 \leq C \leq 1$. Esse intervalo pode ser dividido em $-1 \leq C \leq 1$ e $1 - 2S^2 \leq C \leq -1$. No segundo caso, é necessário que $S > 1$, sendo que o menor valor possível é obtido quando $\cos(\bar{k}\Delta x) = -1$ ($\bar{k}\Delta x = \pi$), esse será o limite inferior.

$$\xi_{lower\ bound} = 1 - 2S^2 \quad (56)$$

Repetindo um processo muito semelhante ao utilizado no cálculo da equação (47), encontramos:

$$\bar{\omega}_{real} = \frac{\pi}{\Delta t}; \quad \bar{\omega}_{imag} = \frac{1}{\Delta t} \ln(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (57)$$

Substituindo em (53), temos:

$$\begin{aligned}u_i^n &= e^{[-n \ln(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})]} e^{j[\frac{\pi}{\Delta t}(n\Delta t) - \bar{k}i\Delta x]} \\ &= \left(\frac{1}{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} \right)^n e^{j[\frac{\pi}{\Delta t}(n\Delta t) - \bar{k}i\Delta x]}\end{aligned}\quad (58)$$

Com isso, percebemos que o termo multiplicador da exponencial determina o comportamento da amplitude, sendo que seu efeito aumenta a cada intervalo de tempo passado. Definimos um fator multiplicativo para o mesmo:

$$q_{growth} \equiv \frac{1}{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} = -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (59)$$

Assim, percebemos que se $C < -1$, $q > 1$, logo teremos uma onda aumentado exponencialmente no espaço. A partir de (59), percebemos que o maior crescimento ocorre quando ξ se torna o mais negativo o possível, ou seja, $\xi = \xi_{lowerbound}$. Como visto em (56), isso ocorre quando $\cos(\bar{k}\Delta x) = -1$ ($\bar{k}\Delta x = \pi$). Substituindo os valores temos:

$$\begin{aligned}q_{growth} &= -(1 - 2S^2) + \sqrt{(1 - S^2)^2 - 1} \\ &= 2S^2 + 2S\sqrt{S^2 - 1} - 1 \\ &= (S + \sqrt{S^2 - 1})^2\end{aligned}\quad (60)$$

Então observamos que por mais que o S seja pequeno, caso $S > 1$, os valores da onda eventualmente irão estourar.

VII. CÓDIGO

A. Escolha da Linguagem

O código foi escrito em MATLAB. Escolhemos utilizar essa linguagem, devido à sua eficiência e a facilidade em implementar funções básicas como exibir gráficos e operações de matrizes.

B. Descrição do Código

O código foi dividido de acordo com os exercícios. Os arquivos foram enumerados de acordo com o número do

exercício, sendo que o 24 representa o 2.4, o 25 representa o 2.5 e assim por diante, e retirados diretamente do cap 3 da Ref [1]. Utilizamos funções próprias do MATLAB para facilitar o cálculo da função Gaussiana e para exibir os pontos no gráfico, junto com as respectivas legendas, escalas e os eixos.

VIII. EXERCÍCIOS

2.4) Develop graphical results similar to those of Fig. 2.1, but for a Courant stability factor $S = 1/\sqrt{2}$.

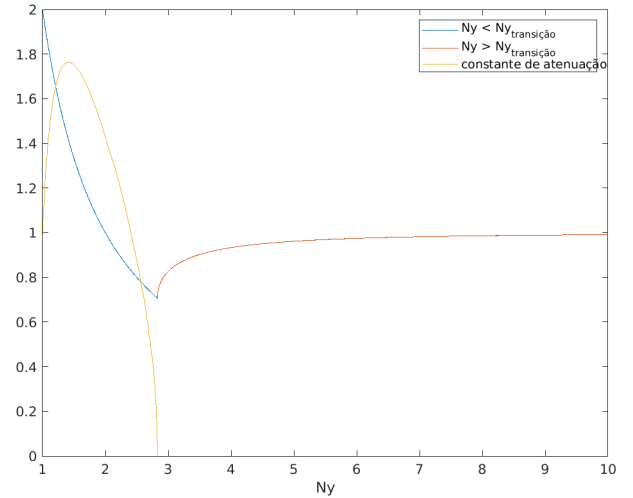


Figura 1. Exercício 2.4

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ N_{\lambda}|_{transition} = 2\sqrt{2}$$

Nesse gráfico temos a velocidade de fase normalizada em função do N_{λ} , junto com a atenuação causada quando k é imaginário.

Em relação às velocidades de fase podemos perceber o comportamento não físico quando $N_{\lambda} < N_{\lambda}|_{transition}$. Nessa faixa de valores de N_{λ} , a velocidade da onda numérica chegou a ser 2 vezes a velocidade da luz e depois decresceu de acordo com a atenuação. Para $N_{\lambda} > N_{\lambda}|_{transition}$, observamos que a velocidade normalizada de fase se aproxima de 1 a medida que N_{λ} cresce, o que já era esperado, pois temos uma medição mais precisa com o crescimento de N_{λ} .

2.5) Replicate the graphical results of Fig. 2.2.

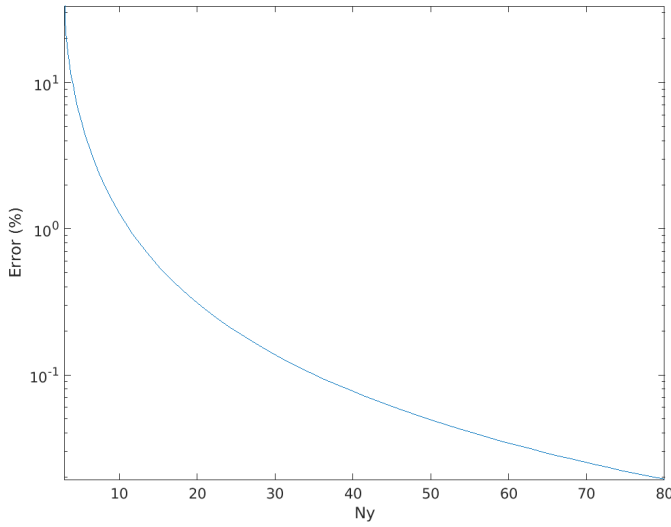


Figura 2. Gráfico referente ao exercício 2.5

$$S = 0.5$$

$$N_{\lambda}|_{transition} = 3$$

2.6) Develop graphical results similar to those of Fig. 2.2, but for a Courant stability factor $S = 1/\sqrt{2}$.

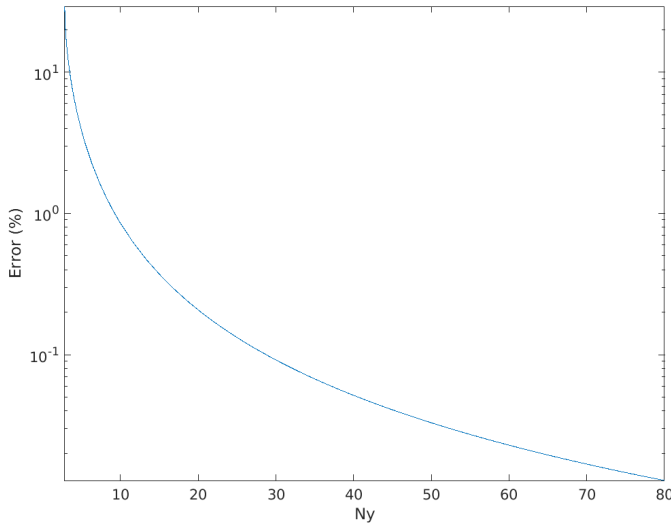


Figura 3. Gráfico referente ao exercício 2.6

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N_{\lambda}|_{transition} = 2\sqrt{2}$$

Nos exercícios 2.5 e 2.6, percebemos uma rápida queda no erro percentual da velocidade de fase. Isso condiz com o gráfico do exercício 2.4, pois a medida que o N_{λ} aumenta a velocidade de fase normalizada se aproxima de 1.

2.7) Write a computer program that implements the solution of the one-dimensional scalar wave equation discussed in this chapter. To source a wave, specify u_0^n at the left boundary of the grid. Test your program by replicating the graphical results of Figs. 2.3(a) and 2.3(b).

Nesse exercício, a entrada foi um pulso quadrado com amplitude máxima de 1 e duração de 40 intervalos de tempo.

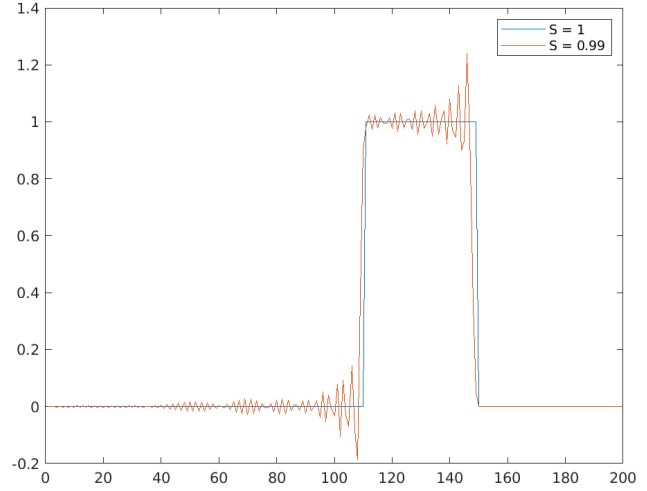


Figura 4. Gráfico referente ao resultado de 2.3(a)

Neste gráfico, percebemos que uma pequena variação no S pode causar uma grande propagação de ruído a partir da subida e descida da onda, sendo amortecido a cada iteração.

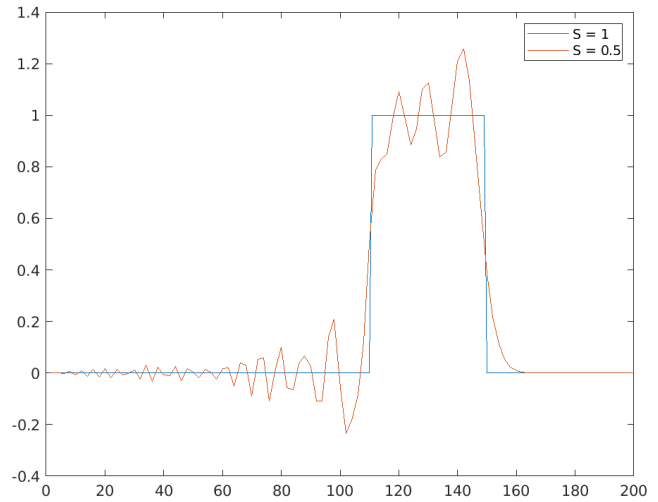


Figura 5. Gráfico referente ao resultado de 2.3(b)

Para este gráfico, o eixo x para a onda com $S = 0.5$ foi alterado, para permitir que ambas estivessem no mesmo local, sem alterar o formato da mesma, facilitando a análise.

No caso de $S = 0.5$, o ruído se torna mais evidente, sendo perceptível por meio dos picos com menor amortecimento e ao formato da onda, que deixou de ser semelhante a uma onda quadrada, já que possui bordas muito curvas.

O resultado de $S = 1$ já tinha sido previsto pela conclusão a partir de (26), onde a solução seria exata como vemos nas figuras acima. Já para $S = 0.99$ e $S = 0.5$, estamos utilizando apenas uma aproximação para calcular o próximo estado, então podemos notar o erro através da deformação da onda. A oscilação presente na onda após a subida e a descida do pulso é resultado de uma propagação com $\bar{v}_p < c$ e a propagação da onda com $\bar{v}_p > c$ pode ser observada na resposta a frente da onda, sendo mais perceptível quando $S = 0.5$.

2.8) Use the scalar-wave-equation computer program developed in Problem 2.7 to replicate the graphical results of Fig. 2.4(a) and 2.4(b).

Nos próximos exercícios, a entrada utilizada foi o pulso gaussiano. Os parâmetros foram calculados para manter uma distância de 40 intervalos de tempo entre os valores de amplitude de $1/e$ da função e com o máximo de 1 no ponto $n = 60$.

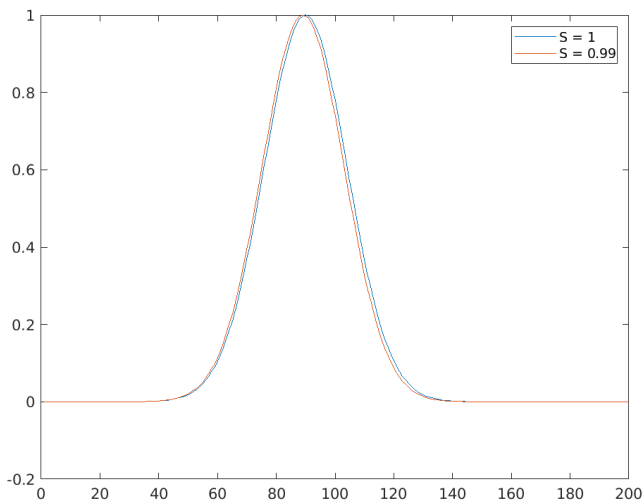


Figura 6. Gráfico referente ao resultado de 2.4(a)

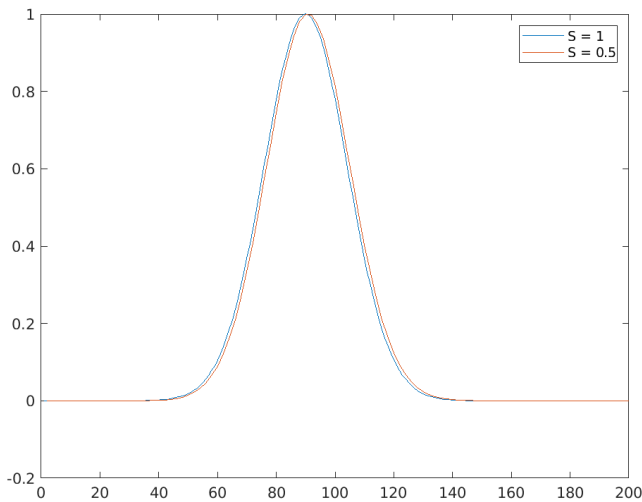


Figura 7. Gráfico referente ao resultado de 2.4(b)

No caso do $S = 0.5$, novamente, foi alterado o eixo x para que ambas as ondas estivessem no mesmo local.

Utilizando o pulso Gaussiano percebemos que para $S = 1$, $S = 0.99$, $S = 0.5$, a diferença entre eles é quase imperceptível em relação ao formato da onda. Isso ocorre pois a função gaussiana não possui uma mudança brusca de valores, comparado com o pulso que varia de 0 a 1 em apenas um intervalo de tempo. Devido a isso, o erro é reduzido pelo próprio processo de amostragem.

2.9) Use the scalar-wave-equation computer program developed in Problem 2.7 to replicate the graphical results of Fig. 2.5.

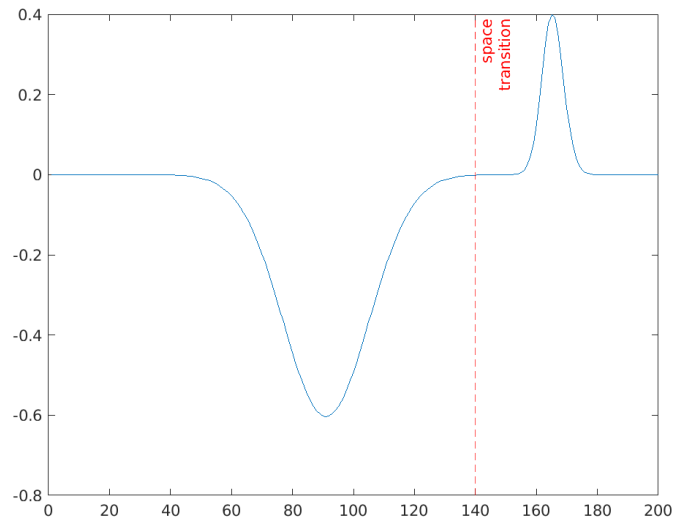


Figura 8. Gráfico referente ao resultado de 2.5

Na figura 8, observamos o fenômeno de reflexão causado pela propagação da onda do espaço livre para uma material sem perdas com velocidade de fase $\frac{1}{4}$ da luz. Esse fenômeno é simulado através da mudança de $S = 1$ para $S = 0.25$ no ponto 140 da malha.

2.10) Use the scalar-wave-equation computer program developed in Problem 2.7 to replicate the graphical results of Fig. 2.6(a) and 2.6(b).

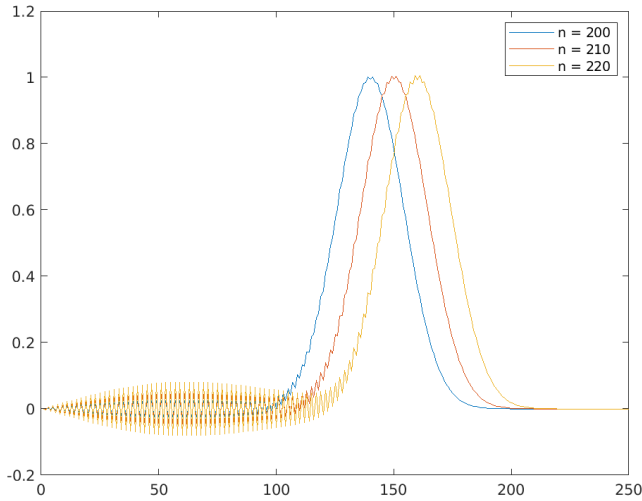


Figura 9. Gráfico referente ao resultado de 2.6(a)

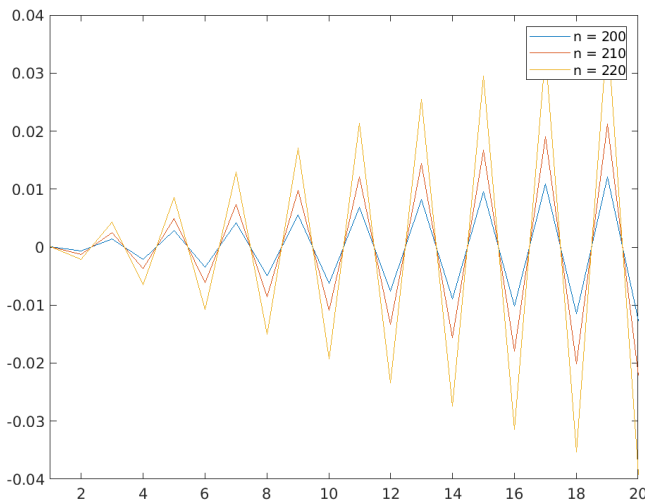


Figura 10. Gráfico referente ao resultado de 2.6(b)

Aqui temos o caso de quando $S > 1$. Como previmos em (60), mesmo com S apenas 0.05% maior que o valor ideal temos grande acréscimo no ruído à medida que aumentamos o número de intervalos de tempo passados.

2.11) Use the scalar-wave-equation computer program developed in Problem 2.7 to replicate the graphical results of Fig. 2.7(a) and 2.7(b).

Neste exercício em específico, foi utilizada uma separação de 10 intervalos de tempo entre os pontos $1/e$.

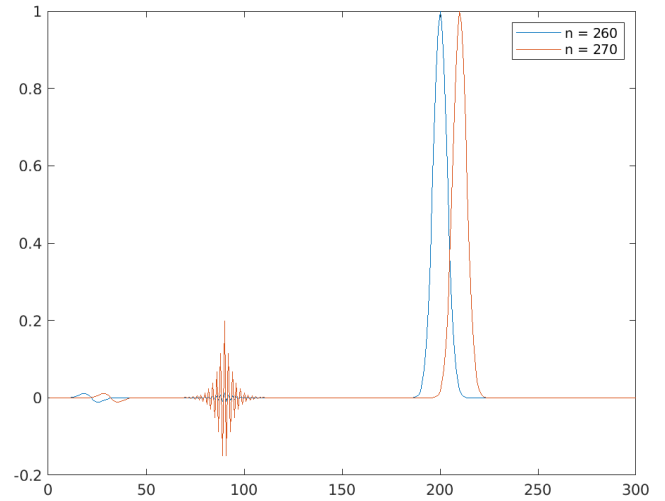


Figura 11. Gráfico referente ao resultado de 2.7(a)

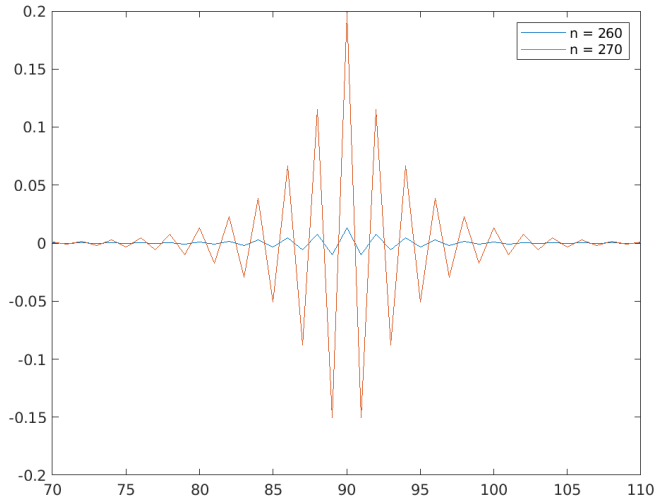


Figura 12. Gráfico referente ao resultado de 2.7(b)

Neste caso, analisamos o efeito de um erro pontual na malha. Esse erro foi introduzido ao atribuir $S = 1,075$ a $i = 90$ e $S = 1$ no resto. Com isso, a partir de (60), percebemos que os valores eventualmente irão estourar, causando diversos erros. Porém ao comparar com o exercício 2.10 percebemos que esse processo é muito mais lento.

IX. CONCLUSÃO

A partir dos exercícios resolvidos neste relatório, notamos a eficiência do algoritmo FDTD para o análise do comportamento de ondas. Através das implementações, foi possível visualizar o que tinha sido desenvolvido na base teórica.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Taflov e S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference TimeDomain Method. Norwood. 2000.