Обобщенные линейные модели с бинарным откликом

Линейные модели...

Вадим Хайтов, Марина Варфоломеева

Кафедра Зоологии беспозвоночных, Биологический факультет, СПбГУ

Бинарные переменные вокруг нас

Числа и События

До сих пор в качестве переменной отклика мы рассматривали числовые данные.

- Содержание сухого вещества в икре
- Вес младенцев
- Объем легких
- Число посещений цветков опылителями.

А как быть, если мы хотим проанализировать связь появления того или иного **события** (произошло или не произошло) с некоторыми предикторами?

События и предикторы

В зависимости от предикторов события могут происходить чаще или реже – логика, совпадающая с логикой связи количественной переменной отклика с набором предикторов.

Например, по мере роста температуры воздуха летом чаще будут встречаться люди в шортах: событие "встретился человек в шортах" положительно связано с температурой воздуха.

Событие "покупка автомобиля" явно связана с предиктором "количество денег на счете", однако эта связь может быть совсем непростой.

Бинарные данные вокруг нас

Бинарные данные – очень распространенный тип зависимых переменных

- Кто-то в результате лечебных процедур выжил или умер
- Обследованное животное заражено паразитами или здорово
- Футбольная команда выиграла или проиграла
- Блюдо вкусное или невкусное

Все эти события могут быть связаны с самыми разными предикторами и эту связь можно описать с помощью регрессионных моделей.

Обобщенные линейные модели позволяют моделировать в том числе и бинарные данные.

Пример – морские звезды и мидии

Различают ли морские звезды два вида мидий?

Атлантические мидии (*Mytilus edulis*) коренной для Белого моря вид, но недавно туда вселились мидии другого вида – тихоокеанские мидии (*M.trossulus*).

Вселенец имеет меньшую промысловую значимость и потенциально может влиять на структуру экосистемы. Важно понять, что регулирует их численность. Наиболее значимый фактор – это морские звезды, питающиеся мидиями.

- Различают ли морские звезды два вида мидий?
- Различают ли хищники мидий разных размеров?

Данные: Khaitov et al, 2018

Тонкости дизайна эксперимента

Морских звезд вместе с мидиями двух видов сажали в контейнеры. Через четыре дня совместного существования с хищником регистрировали состояние мидий.

Зависимая переменная:
- `Outcome` – состояние мидий ("eaten" – съедена, "not_eaten" – живая)

Предикторы в фокусе исследования:
- `Sp` – вид мидий ("Ed" – коренной вид, "Tr" – вселенец),
- `L` – размер мидий (мм).

Чего не хватает?

Как быть с контейнерами?

В этом эксперименте, помимо интересующих нас дискретного фактора `Sp` (вид мидии) и непрерывного предиктора `L` (размер), есть еще один фактор `Box`.

Этот фактор нас не интересует, но его нельзя не учитывать.

Мы должны включить в модель переменную `Box` в качестве дискретного фактора с 4 уровнями.

В лекциях, посвященных **смешанным линейным моделям**, мы научим вас, как включать в модель подобные факторы более правильным способом.

Читаем данные

```
astr <- read.csv('data/aster_mussel.csv', header = TRUE)
head(astr)
```

```
#   Box    L Sp   Outcome
# 1   1 33.1 Tr not_eaten
# 2   1 24.8 Ed not_eaten
# 3   1 33.0 Ed not_eaten
# 4   1 18.8 Ed not_eaten
# 5   1 34.0 Ed not_eaten
# 6   1 22.6 Ed not_eaten
```

Номер экспериментального контейнера закодирован числами, поэтому превращаем его в фактор.

```
astr$Box <- factor(astr$Box)
```

Знакомимся с данными

Нет ли пропущенных значений?

```
colSums(is.na(astr))
```

```
#     Box       L      Sp Outcome
#       0       0       0       0
```

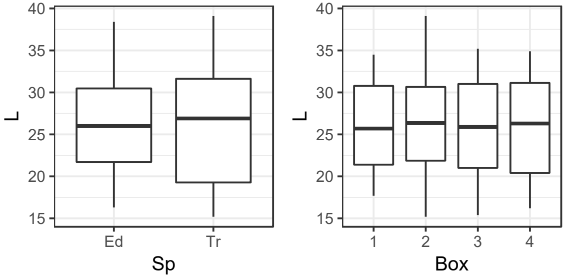
Каковы объемы выборок?

```
table(astr$Box)
```

```
#
#  1  2  3  4
# 66 68 74 78
```

Нет ли коллинеарности

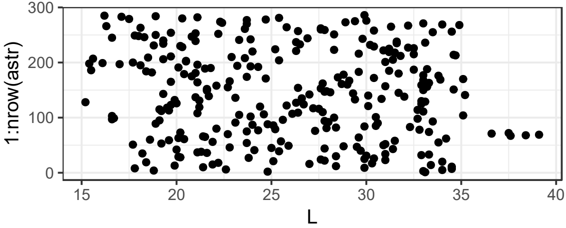
```
library(ggplot2); theme_set(theme_bw()); library(cowplot)

Pl_Sp <- ggplot(astr, aes(x = Sp, y = L)) + geom_boxplot()
Pl_Box <- ggplot(astr, aes(x = Box, y = L)) + geom_boxplot()
plot_grid(Pl_Sp, Pl_Box, ncol = 2)
```



Размер распределен более-менее равномерно. Коллинеарности нет.

Есть ли выбросы?

```
ggplot(astr, aes(y = 1:nrow(astr))) + geom_point(aes(x = L) )
```



Выбросов нет.

Кодирование бинарной переменной

До сих пор зависимая переменная была числом,
а в данном случае `Outcome` – это текстовая переменная.

Бинарную переменную надо перекодировать в виде нулей и единиц:

- 1 – мидию съели,
- 0 – мидию не съели.

```
astr$Out <- ifelse(test = astr$Outcome == 'eaten', yes = 1,  no = 0)
```

Простой линейной регрессией не обойтись

Что мы хотим построить?

Наша задача – построить модель, описывающую связь между переменной-откликом (съедена мидия или нет) и тремя предикторами: `Sp`, `L` и `Box`

Если бы мы строили GLM с нормальным распределением отклика, то она имела бы следующий вид:

$Out_i \sim N(\mu_i, \sigma)$

$E(Out_i) = \mu_i$

$\mu_i = \eta_i$ – функция связи "идентичность"

$\eta_i = b_0 + b_1 Sp_{Tr\,i} + b_2 L_i + b_3 Box_{2\,i} + b_3 Box_{3\,i} + Interactions$,

где $Interactions$ — это все взаимодействия.

Лобовая атака?

Строим модель по накатанной дороге.

Мы не знаем, взаимодействуют ли дискретные факторы `Box`, `Sp` и непрерывный предиктор `L`.

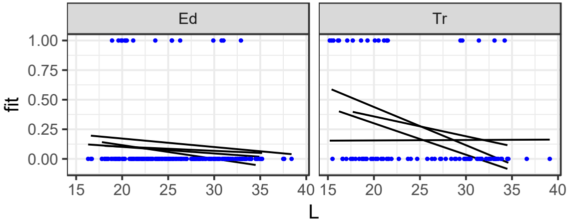
В полной модели мы должны учесть как влияние самих предикторов, так и влияние их взаимодействия.

```
mod_norm <- glm(Out ~ Sp * L * Box, data = astr)
```

Все посчиталось…

Посмотрим что получилось

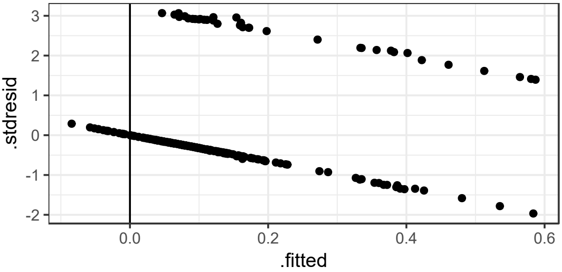
```
library(dplyr)
new_data <- astr %>% group_by(Sp, Box)%>%
  do(data.frame(L = seq(min(.$L), max(.$L), length.out = 100)))
new_data$fit <- predict(mod_norm, newdata = new_data) # Предсказанные значения
ggplot(new_data, aes(x = L, y = fit)) +
  geom_line(aes(group = Box)) + facet_wrap(~ Sp, ncol = 2) +
  geom_point(data = astr, aes(x = L, y = Out), size = 0.5, color = 'blue')
```



Во-первых, непонятно, что за величина отложена по оси OY.

Диагностика модели

```
mod_norm_diag <- fortify(mod_norm)
ggplot(mod_norm_diag, aes(x = .fitted, y = .stdresid)) +
  geom_point() + geom_vline(xintercept = 0)
```



Во-вторых, модель предсказывает отрицательные значения.

Простая линейная модель **категорически не годится**!

Логистическая кривая

Бинарные данные можно представлять и иначе

Бинарные данные очень неудобны для работы. Вместо того, чтобы моделировать наличие нулей и единиц, мы будем моделировать вероятности получения единиц.

Появляется новое обозначение:

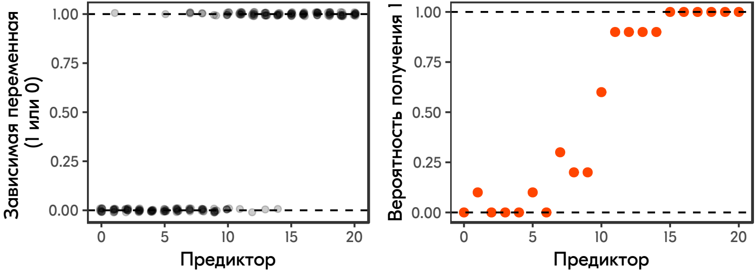
- π_i – вероятность события $y_i = 1$ при данных условиях,
- $1 - \pi_i$ – вероятность альтернативного события $y_i = 0$.

π_i – непрерывная величина, варьирующая от 0 до 1.

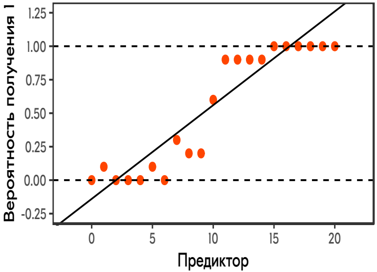
Симулированный пример: От дискретных значений к оценкам вероятностей

От 1 и 0 (слева) можно перейти к π_i – оценкам вероятности положительных исходов (справа).

Мы можем проиллюстрировать этот переход, изобразив доли в общем количестве исходов **при данном значении предиктора** $p_{y=1|x_i}$ (красные точки). И π, и $p_{y=1|x_i}$ варьируют от 0 до 1.



Симулированный пример:
Можно ли подобрать простую линейную регрессию?

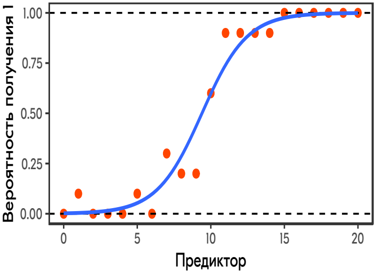


Связь зависимой переменной с предиктором можно было бы описать прямой:

$$\pi_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

Но! Вероятность события, может принимать значения только от 0 до 1. А прямая линия ничем не ограничена и может выходить за пределы интервала [0, 1].

Симулированный пример: Логистическая кривая

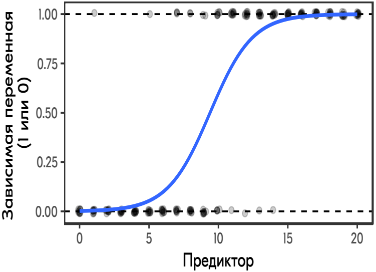


Связь вероятности положительного исхода и значений предиктора можно описать логистической кривой:

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}$$

Логистическая кривая удобна для описания вероятностей, т.к. ее значения лежат в пределах от 0 до 1.

Симулированный пример: Логистическая кривая



В реальной жизни нам не потребуется даже рассчитывать доли положительных исходов от общего количества.

Благодаря GLM мы сможем оценить вероятности непосредственно по исходным данным.

Шансы и логиты

Шансы – еще один способ выразить бинарную переменную отклика

В обыденной речи мы часто используем фразы подобные такой:

“Шансы на победу 1 к 3”: в одном случае выигрыш в трех проигрыш

Шансы – это тоже оценка вероятности события. Шансы показывают сколько в данной системе положительных исходов и сколько отрицательных.

Отношение шансов

Шансы (odds) часто представляют в виде отношения шансов (odds ratio): $odds = \frac{n_+}{n_-}$

Если отношение шансов > 1, то вероятность наступления события выше, чем вероятность того, что оно не произойдет. Если отношение шансов < 1, то наоборот.

Если можно оценить вероятность положительного события, то отношение шансов выглядит так : $odds = \frac{\pi}{1-\pi}$

Отношение шансов варьирует от 0 до $+\infty$.

Отношение шансов

Если отношение шансов = 1, то вероятность того, что событие произойдет равно вероятности того, что событие не произойдет.

Асимметрия: отношение шансов от 1 до $+\infty$ говорит о том, что вероятность того, что событие произойдет, выше, чем вероятность того, что оно не произойдет, но если наоборот, то отношение шансов “зажато” между 0 и 1.

Логиты

Отношение шансов можно преобразовать в *Логиты* (logit):

$$ln(odds) = ln(\frac{\pi}{1 - \pi})$$

Значения логитов – это трансформированные оценки вероятности события.

Логиты варьируют от $-\infty$ до $+\infty$.

Логиты симметричны относительно 0, т.е. $ln(1)$.

Для построения моделей в качестве зависимой переменной удобнее брать логиты.

Немного алгебры: Логиты в качестве зависимой переменной

Докажем, что логит преобразование линеаризует логистическую кривую

Когда предиктор один, логистическая модель принимает такую форму:

$$\pi = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$$

Обозначим для краткости $\beta_0 + \beta_1 x \equiv z$

Давайте докажем, что логит преобразование $logit(\pi) = ln\left(\frac{\pi}{1 - \pi}\right)$ сделает логистическую функцию линейной, т.е. что

$$ln\left(\frac{\pi}{1 - \pi}\right) = z$$

Подставим выражение для π в формулу логита

$$ln(\frac{\pi}{1-\pi}) = ln(\frac{\frac{e^z}{1+e^z}}{1-\frac{e^z}{1+e^z}})$$

Логарифм отношения равен разности логарифмов, тогда:

$$ln(\frac{e^z}{1+e^z}) - ln(1 - \frac{e^z}{1+e^z})$$

Вторую дробь можно упростить:

Подставим выражение для π в формулу логита

$$ln(\frac{\pi}{1-\pi}) = ln(\frac{\frac{e^z}{1+e^z}}{1-\frac{e^z}{1+e^z}})$$

Логарифм отношения равен разности логарифмов, тогда:

$$ln(\frac{e^z}{1+e^z}) - ln(1 - \frac{e^z}{1+e^z})$$

Вторую дробь можно упростить:

$$ln(\frac{e^z}{1+e^z}) - ln(\frac{1+e^z-e^z}{1+e^z}) = ln(\frac{e^z}{1+e^z}) - ln(\frac{1}{1+e^z})$$

Продолжаем преобразования

$$ln(\frac{e^z}{1+e^z}) - ln(\frac{1}{1+e^z}) = ln(e^z) - ln(1+e^z) - (ln(1) - ln(1+e^z))$$

Продолжаем преобразования

$ln(\frac{e^z}{1+e^z}) - ln(\frac{1}{1+e^z}) = ln(e^z) - ln(1+e^z) - (ln(1) - ln(1+e^z))$

$ln(e^z) - ln(1+e^z) - 0 + ln(1+e^z) = ln(e^z) = z$

$ln(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}) = z = \beta_0 + \beta_1 x$

Т.е. после логит-преобразования логистическая кривая становится прямой.

Связывающая функция (link function)

Мы уже знаем: Для линеаризации связи между предикторами и зависимой переменной применяется связывающая функция.

Функция логит-преобразования $g(E(y)) = ln(\frac{\pi}{1-\pi})$ это одна из возможных связывающих функций, применяемых для анализа бинарных переменных отклика.

Другие связывающие функции: probit, cloglog.

Логика математических преобразований

1. От дискретной оценки событий (1 или 0) переходим к оценке вероятностей.
2. Связь вероятностей с предиктором описывается логистической кривой.
3. Если при помощи функции связи перейти от вероятностей к логитам, то связь с предиктором будет описываться прямой линией.
4. Параметры линейной модели для такой прямой можно оценить при помощи линейной модели.

Теперь мы готовы сформулировать модель в математическом виде.

GLM с биномиальным распределением отклика

$y_i \sim Binomial(n = 1, \pi_i)$

$$E(y_i) = \pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{p-1} \ x_{p-1}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{p-1} \ x_{p-1}}}$$

$ln(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}) = \eta_i$ — функция связи логит, переводит вероятности в логиты.

$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1\,i} + \ldots + \beta_{p-1\,i} \ x_{p-1\,i}$

Чтобы перейти обратно от логитов к вероятностям, применяется логистическое преобразование (это функция, обратная функции связи):

$$\pi_i = \frac{e^{\eta_i}}{1 + e^{\eta_i}}$$

Вернемся к морским звездам и мидиям

GLM с биномиальным распределением отклика

$Out_i \sim Binomial(n = 1, \pi_i)$

$E(Out_i) = \pi_i$

$ln(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}) = \eta_i$

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$

Полная модель в изучаемой системе включает много членов:

- Главные предикторы: Sp, L, Box
- Взаимодействия первого порядка: Sp:L, Sp:Box, L:Box
- Взаимодействия второго порядка: Sp:L:Box

```
mod <- glm(Out ~ Sp*L*Box, family = binomial(link = 'logit'), data = astr)
```

Анализ девиансы для полной модели

```r
library(car)
Anova(mod)
```

```
# Analysis of Deviance Table (Type II tests)
#
# Response: Out
#           LR Chisq Df Pr(>Chisq)
# Sp            7.28  1    0.00696 **
# L            12.35  1    0.00044 ***
# Box           1.06  3    0.78597
# Sp:L          0.05  1    0.82686
# Sp:Box        2.57  3    0.46335
# L:Box         2.06  3    0.56055
# Sp:L:Box      4.86  3    0.18203
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Эту модель можно упростить!

Упрощение модели: Шаг 1

```
drop1(mod, test = 'Chi')
```

```
# Single term deletions
#
# Model:
# Out ~ Sp * L * Box
#          Df Deviance AIC  LRT Pr(>Chi)
# <none>           180 212
# Sp:L:Box  3      185 211 4.86     0.18
```

```
mod2 <- update(mod, . ~ . - Sp:L:Box)
```

Упрощение модели: Шаг 2

```
drop1(mod2, test = 'Chi')
```

```
# Single term deletions
#
# Model:
# Out ~ Sp + L + Box + Sp:L + Sp:Box + L:Box
#        Df Deviance AIC   LRT Pr(>Chi)
# <none>          185 211
# Sp:L    1       185 209 0.048     0.83
# Sp:Box  3       187 207 2.567     0.46
# L:Box   3       187 207 2.058     0.56
```

```
mod3 <- update(mod2, . ~ . - Sp:L)
```

Упрощение модели: Шаг 3

```
drop1(mod3, test = 'Chi')
```

```
# Single term deletions
#
# Model:
# Out ~ Sp + L + Box + Sp:Box + L:Box
#        Df Deviance AIC  LRT Pr(>Chi)
# <none>         185 209
# Sp:Box  3      188 206 2.65     0.45
# L:Box   3      187 205 2.27     0.52
```

```
mod4 <- update(mod3, . ~ . - L:Box)
```

Упрощение модели: Шаг 4

```
drop1(mod4, test = 'Chi')
```

```
# Single term deletions
#
# Model:
# Out ~ Sp + L + Box + Sp:Box
#         Df Deviance AIC   LRT Pr(>Chi)
# <none>          187 205
# L        1      200 216 12.35  0.00044 ***
# Sp:Box   3      190 202  3.01  0.39031
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
mod5 <- update(mod4, . ~ . - Sp:Box)
```

Упрощение модели: Шаг 5

```
drop1(mod5, test = 'Chi')
```

```
# Single term deletions
#
# Model:
# Out ~ Sp + L + Box
#        Df Deviance AIC   LRT Pr(>Chi)
# <none>         190 202
# Sp      1      198 208  7.48  0.00625 **
# L       1      202 212 11.81  0.00059 ***
# Box     3      191 197  1.12  0.77165
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
mod6 <- update(mod5, . ~ . - Box)
```

Упрощение модели: Шаг 6

```
drop1(mod6, test = 'Chi')
```

```
# Single term deletions
#
# Model:
# Out ~ Sp + L
#        Df Deviance AIC   LRT Pr(>Chi)
# <none>         191 197
# Sp      1      199 203  7.89  0.00496 **
# L       1      203 207 11.75  0.00061 ***
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Больше никаких предикторов исключать нельзя: `mod6` – финальная модель.

AIC для финальной модели

```r
AIC(mod, mod2, mod3, mod4, mod5, mod6)
```

```
#      df AIC
# mod  16 212
# mod2 13 211
# mod3 12 209
# mod4  9 205
# mod5  6 202
# mod6  3 197
```

Информационный критерий Акайке показывает, что по мере удаления предикторов модель становится лучше.

Финальная модель (`mod6`) лучше, чем полная модель, с которой мы начинали.

Смысл коэффициентов в моделях с бинарной переменной отклика

Что за модель мы построили?

```r
summary(mod6)
```

```
#
# Call:
# glm(formula = Out ~ Sp + L, family = binomial(link = "logit"),
#     data = astr)
#
# Deviance Residuals:
#    Min       1Q   Median       3Q      Max
# -1.058  -0.510  -0.410  -0.289   2.593
#
# Coefficients:
#             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
# (Intercept)    0.399      0.875    0.46   0.6483
# SpTr           1.070      0.379    2.82   0.0047 **
# L             -0.113      0.035   -3.24   0.0012 **
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
#
#     Null deviance: 212.58  on 285  degrees of freedom
# Residual deviance: 191.24  on 283  degrees of freedom
# AIC: 197.2
#
# Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

$$Out_i \sim Binomial(n = 1, \pi)$$

$$E(Out_i) = \pi_i$$

$$ln(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}) = \eta_i$$

$$\eta_i = 0.399 + 1.07Sp_{Tr\,i} - 0.113L_i$$

Что означают коэффициенты модели?

$Out_i \sim Binomial(n = 1, \pi)$

$E(Out_i) = \pi_i$

$ln(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}) = \eta_i$

$\eta_i = 0.399 + 1.07Sp_{Tr\,i} - 0.113L_i$

- b_0 – интерсепт, логарифм отношения шансов для базового уровня дискретного фактора.
- b_1 – **на сколько единиц изменяется логарифм отношения шансов** (logit) для данного уровня (Tr) дискретного фактора Sp по сравнению с базовым уровнем (Ed).
- b_2 – **на сколько единиц изменяется логарифм отношения шансов** (logit), если значение предиктора (L) изменяется на единицу.

Немного алгебры для понимания сути коэффициентов

Предположим, что у нас в модели есть только один непрерывный предиктор x.

Посмотрим, как изменится предсказанные моделью значения, если значение непрерывного предиктора изменится на 1.

Мы знаем, что в терминах логитов модель выглядит вот так:

$$\eta = ln(\frac{\pi}{1-\pi}) = ln(odds)$$

Тогда разница между значениями η для $x + 1$ и x – это логарифм соотношения шансов при этих значениях предиктора:

$$\eta_{x+1} - \eta_x = ln(odds_{x+1}) - ln(odds_x) = ln(\frac{odds_{x+1}}{odds_x})$$

Продолжим преобразования

$$ln(\frac{odds_{x+1}}{odds_x}) = b_0 + b_1(x+1) - b_0 - b_1 x = b_1$$

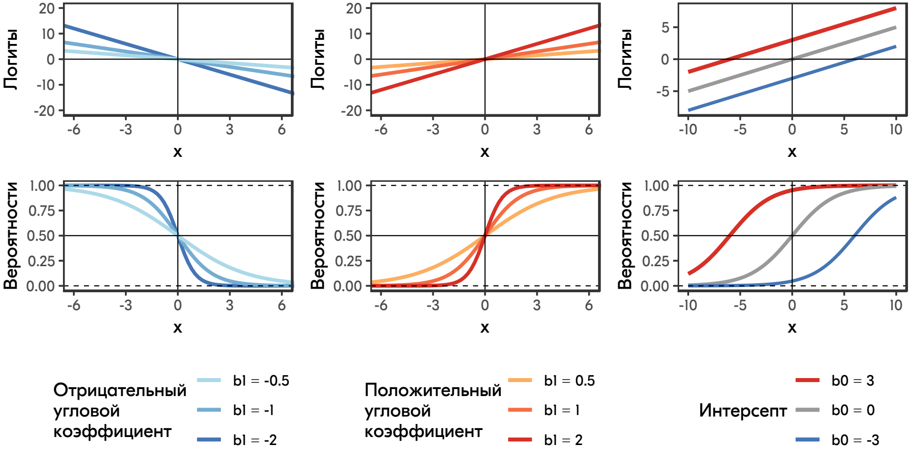
$$ln(\frac{odds_{x+1}}{odds_x}) = b_1$$

$$\frac{odds_{x+1}}{odds_x} = e^{b_1}$$

Полученная величина e^{b_1} показывает, **во сколько раз изменится отношение шансов** при увеличении предиктора на единицу.

Для дискретных факторов e^{b_1} покажет, во сколько раз различается отношение шансов для данного уровня по сравнению с базовым.

Геометрическая интерпретация коэффициентов



Смысл интерсепта b_0

Величина e^{b_0} показывает отношение шансов для события, когда все предикторы равны нулю.

Когда предикторы физически не могут принимать нулевые значения, у этой величины нет смысла.

Но если произведена стандартизация предикторов, то смысл появится. У стандартизованных величин среднее значение равно нулю. Поэтому e^{b_0} покажет соотношение шансов для события при средних значениях предикторов.

Трактуем коэффициенты модели

$$\eta_i = 0.399 + 1.07 I_{Tr,i} - 0.113 L_i$$

- При увеличении длины тела мидии на 1 мм отношения шансов быть съеденной увеличатся в $e^{-0.113}$ = 0.893 раза. То есть мидия, имеющая больший размер, имеет меньше шансов быть съеденной (больше шансов на выживание)
- Отношение шансов быть съеденной у мидии, относящиеся к группе `Tr` дискретного фактора `Sp`, в $e^{1.07}$ = 2.915 раза выше, чем у мидии относящейся к базовому уровню (`Ed`). То есть вероятность выжить у мидии из группы `Tr` меньше, чем у мидии из группы `Ed`.

Диагностика модели с бинарным откликом

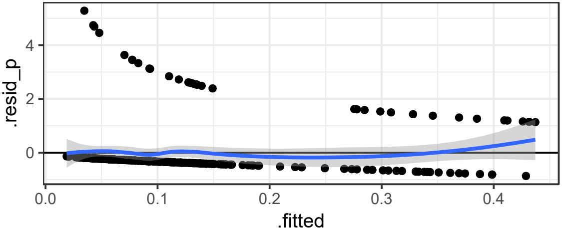
Условия применимости GLM с бинарной переменной-откликом

- Случайность и независимость наблюдений.
- Линейность связи переменной отклика с предиктором (с учетом связывающей функции).
- Отсутствие сверхдисперсии (форма связи среднего с дисперсией должна быть как у величины с биномиальным распределением).
- Отсутствие коллинеарности предикторов.

Линейность связи

Мы должны выяснить, нет ли криволинейного паттерна в остатках. Самый простой способ – это построить график остатков от предсказанных значений и наложить на него сглаживающую функцию, подобранную методом loess.

```
mod6_diag <- data.frame(.fitted = predict(mod6, type = 'response'),
                        .resid_p = resid(mod6, type = 'pearson'))
ggplot(mod6_diag, aes(y = .resid_p, x = .fitted)) + geom_point() +
  geom_hline(yintercept = 0) +  geom_smooth(method = 'loess')
```



Явного криволинейного паттерна нет.

Проверка на сверхдисперсию

Важное свойство биномиального распределения – это зависимость между матожиданием и дисперсией.

Мат.ожидание – $E(y_i) = \pi_i$
Дисперсия – $var(y_i) = \pi_i(1 - \pi_i)$

То есть в распределении остатков не должно наблюдаться сверхдисперсии (overdispersion).

Еще раз смотрим на результаты

```r
summary(mod6)
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    0.399      0.875    0.46   0.6483
SpTr           1.070      0.379    2.82   0.0047 **
L             -0.113      0.035   -3.24   0.0012 **
--
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 212.58  on 285  degrees of freedom
Residual deviance: 191.24  on 283  degrees of freedom
AIC: 197.2

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

Важная строчка

```
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
```

Проверка на сверхдисперсию

Используем предложенную Беном Болкером функцию проверки на сверхдисперсию, Ben Bolker's glmmFAQ http://bbolker.github.io/mixedmodels-misc/glmmFAQ.html

```
# Функция для проверки наличия сверхдисперсии в модели (автор Ben Bolker)
# http://bbolker.github.io/mixedmodels-misc/glmmFAQ.html
overdisp_fun <- function(model) {
    rdf <- df.residual(model)  # Число степеней свободы N - p
    rp <- residuals(model,type='pearson') # Пирсоновские остатки
    Pearson.chisq <- sum(rp^2) # Сумма квадратов остатков, подчиняется Хи-квадрат распределению
    prat <- Pearson.chisq/rdf  # Отношение суммы квадратов остатков к числу степеней свободы
    pval <- pchisq(Pearson.chisq, df=rdf, lower.tail=FALSE) # Уровень значимости
    c(chisq=Pearson.chisq,ratio=prat,rdf=rdf,p=pval)        # Вывод результатов
}

overdisp_fun(mod6)
```

```
#  chisq  ratio    rdf      p
# 294.25   1.04 283.00   0.31
```

Избыточной дисперсии не выявлено.

Визуализация модели

Данные для предсказаний

```
library(dplyr)
new_data <- astr %>% group_by(Sp)%>%
  do(data.frame(L = seq(min(.$L), max(.$L), length.out = 100)))
```

Давайте получим предсказания двумя способами:

- при помощи операций с матрицами,
  чтобы своими глазами увидеть работу функции связи,
- при помощи функции `predict()`.

```
?predict.glm
```

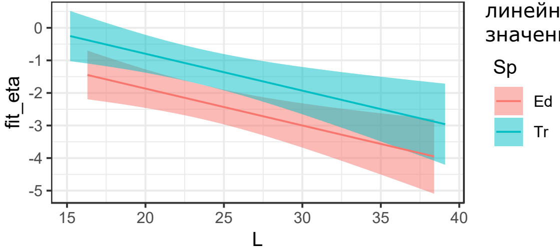
Предсказания модели при помощи операций с матрицами

```
# Модельная матрица и коэффициенты
X <- model.matrix(~ Sp + L, data =  new_data)
b <- coef(mod6)
# Предсказанные значения и стандартные ошибки...
# ...в масштабе функции связи (логит)

new_data$fit_eta <- X %*% b
new_data$se_eta <- sqrt(diag(X %*% vcov(mod6) %*% t(X)))

# ...в масштабе отклика (применяем функцию, обратную функции связи)

logit_back <- function(x) exp(x)/(1 + exp(x)) # обратная логит-трансформация

new_data$fit_pi <- logit_back(new_data$fit_eta)
new_data$lwr <- logit_back(new_data$fit_eta - 2 * new_data$se_eta)
new_data$upr <- logit_back(new_data$fit_eta - 2 * new_data$se_eta)

head(new_data, 2)
```

```
# # A tibble: 2 x 7
# # Groups:   Sp [1]
#   Sp        L fit_eta se_eta fit_pi    lwr    upr
#   <fct> <dbl>   <dbl>  <dbl>  <dbl>  <dbl>  <dbl>
# 1 Ed     16.3   -1.45  0.374  0.190 0.100  0.100
# 2 Ed     16.5   -1.47  0.368  0.187 0.0990 0.0990
```

Визуализация в шкале логитов

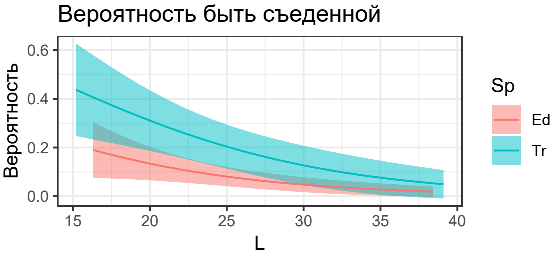
```
predicted <- predict(mod6, newdata = new_data, se.fit = TRUE)
new_data$fit_eta <- predicted$fit
new_data$se_eta <- predicted$se.fit

ggplot(new_data, aes(x = L, y = fit_eta, fill = Sp)) +
  geom_ribbon(aes(ymin = fit_eta - 2 * se_eta, ymax = fit_eta + 2 * se_eta), alph
  geom_line(aes(color = Sp))
```



Визуализация проведена для логитов, поэтому зависимость линейная, но по оси 0Y отложены значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Визуализация в шкале вероятностей интуитивно понятнее

```
predicted <- predict(mod6, newdata = new_data, se.fit = TRUE, type = 'response')
new_data$fit_pi <- predicted$fit
new_data$se_pi <- predicted$se.fit
ggplot(new_data, aes(x = L, y = fit_pi, fill = Sp)) +
  geom_ribbon(aes(ymin = fit_pi - 2 * se_pi, ymax = fit_pi + 2 * se_pi), alpha = 0.5) +
  geom_line(aes(color = Sp)) +
  labs(y='Вероятность', title = 'Вероятность быть съеденной')
```

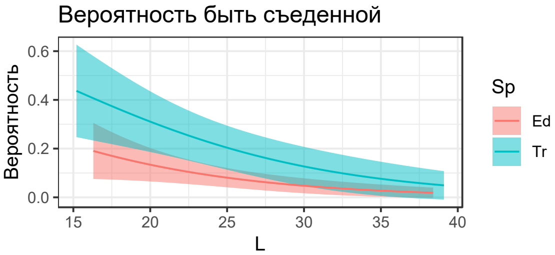


О чем говорит модель

Чем больше размер мидии, тем меньше вероятность быть съеденной.

Линия, соответствующая `Tr`, лежит выше линии `Ed`. Вероятность быть атакованной у `Tr` выше.

Значит звезды различают два вида мидий и размер жертвы для них имеет значение.



Take-home messages

Что мы знаем о бинарных переменных

- Бинарные переменные-отклики могут обозначаться как угодно (+ или -; Да или Нет).
- Удобно кодировать бинарные переменные числами: 1 (событие произошло) или 0 (событие не произошло).
- Вместо бинарных обозначений в анализе используются непрерывные оценки вероятности.
- Вероятности можно перевести в отношения шансов.
- Отношения шансов заменяются логитами.

Take-home messages

Что мы знаем о GLM с бинарной переменной-откликом

- GLM с бинарной переменной-откликом называют логистической регрессией.
- Параметры логистической регрессии подбираются методом максимального правдоподобия.
- Угловые коэффициенты логистической регрессии говорят о том, во сколько раз изменяется соотношение шансов для события при увеличении предиктора на единицу (или при переходе от базового уровня фактора к данному уровню).
- Оценить статистическую значимость модели можно с помощью анализа девиансы.
- Для визуализации результатов лучше проводить обратное логит-преобразование и изображать логистические кривые.

Что почитать

- Кабаков Р.И. R в действии. Анализ и визуализация данных на языке R. М.: ДМК Пресс, 2014.
- Quinn G.P., Keough M.J. (2002) Experimental design and data analysis for biologists, pp. 92-98, 111-130
- Zuur, A.F. et al. 2009. Mixed effects models and extensions in ecology with R. - Statistics for biology and health. Springer, New York, NY.