Całka Riemanna

Niech dana będzie funkcja ograniczona $f\colon [a,b] \to R$. Sumą częściową (Riemanna) nazywa się liczbę

$$\mathbf{R}_{f,P(q_1,\ldots q_n)} = \sum_{i=1}^{n} f(q_i) \cdot \Delta p_i.$$

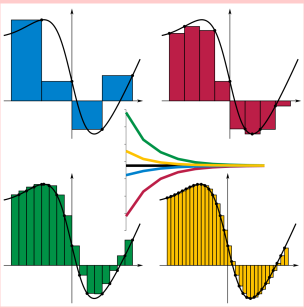
Funkcję f nazywa się całkowalną w sensie Riemanna lub krótko R-całkowalną, jeśli dla dowolnego ciągu normalnego (P^k) podziałów przedziału $[a,b]$, istnieje (niezależna od wyboru punktów pośrednich) granica

$$\mathbf{R}_f = \lim_{k\to\infty} \mathbf{R}_{f,P^k(q_1^k,\ldots,q_{n_k}^k)}$$

nazywana wtedy całką Riemanna tej funkcji. Równoważnie: jeżeli istnieje taka liczba $\mathbf{R}_f$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista $\delta > 0$, że dla dowolnego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ o średnicy **diam** $P(q_1,\ldots,q_n) < \delta$; bądź też w języku rozdrobnień: że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział $S(t_1,\ldots,t_m)$ przedziału $[a,b]$, że dla każdego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ rozdrabniającego $S(t_1,\ldots,t_m)$ zachodzi

$$\left| R_{f,P(q_1,\ldots,q_n)} - R_f \right| < \varepsilon.$$

Funkcję f nazywa się wtedy całkowalną w sensie *Riemanna* (R-*całkowalną*), a liczbę R_f jej **całką Riemanna**.



Przykład sum Riemanna przy wyborze punktu pośredniego w prawym końcu podprzedziału (niebieski), w wartości minimalnej (czerwony) i maksymalnej (zielony) funkcji w podprzedziale i lewego końca podprzedziału (żółty). Wartość wszystkich czterech przypadków zbliża się do 3,76 przy powiększaniu liczby podprzedziałów od 2 do 10 (w domyśle, również nieograniczenie).