

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Grzegorz Szpak**

Nr albumu: 319400

# **Systemy rekomendacji bazujące na metodzie wspólnej filtracji**

**Praca licencjacka  
na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**prof. Andrzeja Skowrona / dr. Marcina Szczuki**  
Instytut Matematyki / Instytut Informatyki

Lipiec 2016

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

W pracy przedstawiono analizę systemów rekomendacyjnych opartych na metodzie wspólnej filtracji. Zaprezentowane zostały dwa podstawowe typy wspólnej filtracji - filtracja oparta o użytkowników oraz filtracja oparta o przedmioty. Autor skupia się na implementacji tej metody opartej na algorytmie k - najbliższych sąsiadów. Przedstawione zostają różne warianty poszczególnych składowych algorytmu (wybór funkcji podobieństwa, rozmiar sąsiedztwa, sposób ustalania oceny na podstawie ocen sąsiadów) i ich wpływ na jakość systemu.

## **Słowa kluczowe**

eksploracja danych, systemy rekomendacyjne, wspólna filtracja, algorytm k - najbliższych sąsiadów

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

68T05 Learning and adaptive systems

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Recommender systems based on collaborative filtering



# Spis treści

<b>1. Wprowadzenie</b>	5
1.1. Systemy rekomendacyjne i ich znaczenie	5
1.2. Fenomen "długiego ogona"	5
1.3. Typy systemów rekomendacyjnych	5
1.4. The Netflix Prize	6
<b>2. Formalizacja problemu rekomendacji</b>	9
2.1. Podstawowe pojęcia	9
2.2. Oznaczenia	9
2.3. Formalna definicja problemu	9
<b>3. Wspólna filtracja</b>	13
3.1. Filtracja w oparciu o użytkowników	13
3.1.1. Wyznaczanie podobieństwa między użytkownikami	14
3.2. Filtracja w oparciu o przedmioty	17
3.2.1. Wyznaczanie podobieństwa między przedmiotami	17
<b>4. Wpływ miary podobieństwa na jakość predykcji</b>	19
<b>5. Optymalizacja algorytmu opartego na sąsiedztwie</b>	21
<b>6. Podsumowanie</b>	23
6.1. Perspektywy wykorzystania w przemyśle	23
<b>Bibliografia</b>	25



# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1. Systemy rekomendacyjne i ich znaczenie

Każdego dnia stawiani jesteśmy przed szeregiem wyborów. Którą książkę przeczytać? Jaki film obejrzeć? Którą stronę internetową odwiedzić? Jako że ilość informacji w otaczającym nas świecie rośnie dużo szybciej niż nasze możliwości poznawcze, konieczne stało się stworzenie technologii, która będzie w stanie wybrać informacje najbardziej dla nas użyteczne. Taką rolę we współczesnych aplikacjach internetowych pełnią systemy rekomendacyjne. Bazując na dotychczasowej aktywności użytkownika, systemy rekomendacyjne starają się przewidzieć jego ocenę wobec danego przedmiotu. Terminy "ocena" i "przedmiot" są oczywiście ogólne i w zależności od zastosowania mogą reprezentować różne zjawiska - od wystawienia rzeczywistej oceny filmowi, przez kupno przedmiotu w sklepie internetowym, po fakt dołączenia do grupy na portalu społecznościowym.

Przydatność systemów rekomendacyjnych obrazuje najlepiej tak zwany "fenomen długiego ogona" (ang. *long tail phenomenon*). + ile w google netflix

### 1.2. Fenomen "długiego ogona"

### 1.3. Typy systemów rekomendacyjnych

W zależności od zastosowanych metod, systemy rekomendacyjne dzieli się na 4 kategorie:

#### 1. Systemy bazujące na wspólnej filtracji (ang. *collaborative filtering, CF*)

Podejście wspólnej filtracji polega na wyznaczaniu preferencji danego użytkownika bazując na preferencjach użytkowników o podobnym guście. Podobieństwo to jest wyznaczane na podstawie wcześniejszych zachowań użytkownika. Ze względu na prostotę implementacji i wysoką wydajność, wspólne filtrowanie jest najbardziej popularną i najczęściej stosowaną technikę rekomendacji. Dodatkową zaletą tej metody jest jej elastyczność i możliwość stosowania w wielu dziedzinach - system oparty na wspólnej filtracji jest w stanie udzielać dokładnych rekomendacji bez potrzeby "zrozumienia" samego przedmiotu.

W pozostałej części pracy autor skupi się na różnych wariantach *collaborative filtering* i spróbuje w oparciu o tę technikę zbudować jak najbardziej wydajny system rekomendacji.

#### 2. Systemy oparte na zawartości (ang. *content - based*))

To podejście koncentruje się na charakterystyce samych przedmiotów. Przedmiot reprezentowany jest przez zbiór cech. Cechami filmu mogą być na przykład: gatunek, rok produkcji, obsada aktorska, reżyser. Na podstawie wartości atrybutów wyznaczane jest podobieństwo między przedmiotami, następnie użytkownikowi prezentowane są przedmioty podobne do dotychczas polubionych. Przykładowo, jeśli użytkownik często oglądał filmy sensacyjne wyreżyserowane przez Martina Scorsese, system będzie rekomendował inne filmy tego reżysera.

Metoda bazująca na zawartości także jest szeroko stosowana. Do jej zalet zaliczyć można:

- niski poziom skomplikowania
- w przeciwieństwie do wspólnej filtracji, rekomendacja dla danego użytkownika nie zależy od ocen innych użytkowników
- transparentność - rekomendacje mogą być w łatwy sposób wytłumaczone na podstawie modelu (które cechy przedmiotu zadecydowały o jego wyborze)
- możliwość rekomendacji przedmiotów nieocenionych jeszcze przez żadnego użytkownika.

Tego typu podejście wymaga jednak często wiedzy eksperckiej przy tworzeniu atrybutów przedmiotów. Z racji swojej natury, słabo sprawdza się też przy rekomendacji przedmiotów o innej charakterystyce niż dotychczas ocenione przez użytkownika.

### 3. Systemy bazujące na osobowości

To stosunkowo nowe podejście, zostało zaproponowane przez Ricardo Buettnera w [3]. Polega na stworzeniu profilu osobowościowego użytkownika na podstawie jego zachowań w sieciach społecznościowych i prezentowaniu treści dopasowanych do tego profilu.

### 4. Systemy hybrydowe

Polegają na łączeniu wyżej opisanych technik. Systemy hybrydowe mogą być implementowane w wielu wersjach: przez wykorzystanie wspólnej filtracji oraz rekomendacji opartej na zawartości osobno, a następnie połączeniu wyników, przez wykorzystanie dodatkowej wiedzy o użytkownikach czy przedmiotach w metodzie collaborative filtering czy przez zunifikowanie różnych podejść w jeden model. Łączenie różnych podejść może często wyraźnie podnieść jakość rekomendacji. Wadą tego typu systemów jest zwykle wysoki poziom skomplikowania.

## 1.4. The Netflix Prize

Do znacznego rozwoju badań nad systemami rekomendacyjnymi przyczynił się konkurs The Netflix Prize, zorganizowany przez internetową wypożyczalnię filmów Netflix<sup>1</sup> w 2006 roku. Konkurs polegał na przewidywaniu ocen, jakie użytkownicy wystawiliby filmom, na podstawie historycznych danych. Opublikowany zbiór treningowy zawierał 100,480,507 ocen wystawionych przez 480,189 użytkowników 17,770 filmom. Aby otrzymać główną nagrodę - \$1,000,000 - należało poprawić wynik algorytmu firmy Netflix (o nazwie Cinematch) o co najmniej 10%. Zawody zostały rozstrzygnięte dopiero w roku 2009, kiedy algorytm zespołu BellKor's Pragmatic Chaos poprawił wynik algorytmu Cinematch o 10.6%. Zwycięski algorytm był

---

<sup>1</sup><https://www.netflix.com>



algorytmem hybrydowym opartym między innymi na wspólnej filtracji, rozkładzie macierzy według wartości osobliwych oraz wzmacnianych drzewach decyzyjnych (ang. *gradient boosted decision trees*).



## Rozdział 2

# Formalizacja problemu rekomendacji

### 2.1. Podstawowe pojęcia

Dwoma głównymi pojęciami wykorzystywanymi w systemach rekomendacyjnych są *Użytkownik* oraz *przedmiot*. Użytkownicy mają preferencje wobec niektórych przedmiotów, nazywane *oceną*. Preferencje są często reprezentowane jako zbiór trójek (*użytkownik*, *przedmiot*, *ocena*). Jak wspomniano wcześniej, to, czym dokładnie jest *ocena*, zależy od charakteru serwisu. Ocena może być liczbą całkowitą pochodzącą z określonego przedziału (przykładowo: pięciopunktowa skala ocen w serwisie Netflix) lub mieć postać binarną (używane w serwisach społecznościowych "lubię" / "nie lubię"). Unarne oceny, jak na przykład informacja, czy użytkownik kupił dany przedmiot, są z kolei zwykle wykorzystywane w sklepach internetowych.

**Definicja 2.1.1** Zbiór wszystkich trójek (*Użytkownik*, *przedmiot*, *ocena*) tworzy macierz, którą nazwiemy **macierzą użyteczności** lub **macierzą ocen**.

Przykład macierzy użyteczności prezentuje tabela 1 TODO

### 2.2. Oznaczenia

Niech  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  oznacza zbiór użytkowników,  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  - zbiór przedmiotów, a  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  - zbiór ocen. Do każdego użytkownika  $u$  przypisany jest zbiór  $I_u \subseteq I$  ocenionych przez niego przedmiotów. Analogicznie,  $U_i \subseteq U$  oznaczać będzie zbiór użytkowników, którzy ocenili przedmiot  $i$ . Niech dalej  $M$  reprezentuje macierz użyteczności, gdzie  $r_{ui}$  jest oceną udzieloną przedmiotowi  $i$  przez użytkownika  $u$ . Niech  $r_u$  oznacza  $|I|$  - wymiarowy wektor ocen użytkownika  $u$  (brak oceny reprezentowany jest przez 0), a  $\bar{r}_u$  - średnią z ocen wystawionych przez tego użytkownika, tj.  $\bar{r}_u = \frac{\sum_{i \in I_u} r_{ui}}{|I_u|}$ . Podobnie  $c_i$  reprezentować będzie  $|U|$  - wymiarowy wektor ocen wystawionych przedmiotowi  $i$ , zaś  $\bar{c}_i$  - jego średnią notę.

### 2.3. Formalna definicja problemu

Przy ocenie jakości systemu rekomendacyjnego definiuje się zwykle ([1], [2] TODO) dwa problemy:

1. Zadanie rekomendacji: mając danego użytkownika  $u$ , wyznaczyć  $n$  przedmiotów najbardziej pasujących do gustu tego użytkownika.
2. Zadanie regresji - niech  $S_{train} \subseteq U \times I \times R$  będzie zbiorem ocen dostępnych w systemie, a  $S_{test} \subseteq U \times I$  - zbiorem par (*użytkownik, przedmiot*), dla których preferencje chcemy określić. Celem jest nauczenie funkcji  $f : U \times I \rightarrow R$ , która będzie minimalizować pewną funkcję błędu  $e : (U \times I \rightarrow R) \times (U \times I) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dwie najczęściej używane funkcje straty to średni bezwzględny błąd (ang. *Mean Absolute Error*, MAE):

$$MAE(f, S_{test}) = \frac{1}{|S_{test}|} \sum_{(u,i) \in S_{test}} |f(u,i) - r_{ui}| \quad (2.1)$$

oraz pierwiastek błędu średniokwadratowego (ang. *Root Mean Squared Error*, RMSE):

$$RMSE(f, S_{test}) = \sqrt{\frac{1}{|S_{test}|} \sum_{(u,i) \in S_{test}} (f(u,i) - r_{ui})^2} \quad (2.2)$$

TODO normalized mean squared error

Zaletą obydwu funkcji jest zachowanie skali, z której pochodzą oceny - przykładowo w pięciopunktowej skali, reprezentowanej przez liczby całkowite z przedziału  $[1, 5]$ , MAE o wartości 0.7 oznacza, że algorytm średnio mylił się o 0.7 punktu.



## Rozdział 3

# Wspólna filtracja

Główna idea, na której bazuje metoda *collaborative filtering*, polega na tym, że ocena użytkownika  $u$  dla przedmiotu  $i$  będzie podobna do oceny innego użytkownika  $v$ , którego dotychczasowy schemat oceniania był zbliżony do ocen  $u$ . Analogicznie, preferencje użytkownika  $u$  wobec przedmiotów  $i$  oraz  $j$  będą podobne, jeśli pozostali użytkownicy oceniali oba przedmioty w analogiczny sposób.

Algorytmy wspólnej filtracji można podzielić na dwa typy:

- wspólna filtracja oparta na modelu - systemy oparte na tym podejściu wykorzystują dostępne oceny w celu wyuczenia modelu, który następnie będzie przewidywał nieznane wartości  $r_{ui}$ . W tego typu metodzie używa się na przykład rozkładu macierzy użyteczności według wartości osobliwych, maszyn wektorów wspierających, sieci Bayesowskie (TODO: bibliografia) oraz algorytm Expectation - Maximisation.
- wspólna filtracja oparta na sąsiedztwie - w tej metodzie ustala się funkcję podobieństwa, a następnie używa się jej do wyznaczenia zbioru *sąsiadów* - użytkowników bądź przedmiotów charakteryzujących się podobnym schematem oceniania. Ostateczna ocena wyznaczana jest tylko na podstawie ocen sąsiadów.

Szczegółową analizę filtracji opartej na modelu można znaleźć w TODO. W dalszej części pracy autor skupi się na podejściu bazującym na sąsiedztwie.

### 3.1. Filtracja w oparciu o użytkowników

Podejście bazujące na użytkownikach było pierwszą zautomatyzowaną metodą wspólnej filtracji. Zostało wprowadzone pierwszy raz w ramach *GroupLens Research Project*<sup>1</sup> [TODO bibliografia].

Założmy, że dana jest funkcja podobieństwa  $s_{users} : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Schemat wyznaczania oceny użytkownika  $u$  dla przedmiotu  $i$  jest następujący (TODO rys 1.):

```
1 foreach  $u' \in U \setminus \{u\}$  do  
2   | Oblicz  $s_{users}(u, u')$ ;  
3 end  
4 Wyznacz  $N_i(u)$  - zbiór sąsiadów, którzy ocenili  $i$ ;  
5 Wyznacz  $r_{ui}$  na podstawie  $\{r_{vi} \mid v \in N_i(u)\}1$ ;
```

---

<sup>1</sup>Projekt badawczy prowadzony na Uniwersytecie Minnesota

Najczęściej spotykaną metodą wyznaczania zbioru sąsiadów  $N_i(u)$  (linia 4) jest wybranie  $k$  użytkowników o największej wartości funkcji podobieństwa, gdzie  $k$  jest parametrem algorytmu. Podstawową metodą wyznaczania oceny (linia 5) jest z kolei wzięcie średniej oceny ze zbioru sąsiadów:

$$r_{ui} = \frac{1}{|N_i(u)|} \sum_{v \in N_i(u)} r_{vi} \quad (3.1)$$

### 3.1.1. Wyznaczanie podobieństwa między użytkownikami

Wybór odpowiedniej funkcji podobieństwa  $s_{users}$  jest najważniejszą częścią algorytmu wspólnej filtracji. Odgrywa ona podwójną rolę:

- umożliwia wyznaczenie odpowiedniego zbioru  $N_i(u)$
- w niektórych podejściach wartości funkcji  $s_{users}$  pozwalają na dokładniejsze wyznaczenie ostatecznego wyniku (więcej w rozdziale 5)

Poniżej znajduje się przegląd funkcji podobieństwa najczęściej opisywanych w literaturze.

## Miary podobieństwa bazujące na korelacji

### Inne miary podobieństwa

- **Współczynnik korelacji liniowej Pearsona**

Współczynnik Pearsona określa poziom zależności liniowej między zmiennymi losowymi. Estymator współczynnika korelacji liniowej dla wektorów prób losowych  $x, y \in \mathbb{R}^n$  jest zdefiniowany następująco:

$$pearson_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\bar{x}, \bar{y}$  oznaczają wartości średnie z tych prób, tj  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ ,  $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ . Współczynnik korelacji pearsona przyjmuje wartości z przedziału  $[-1, 1]$ . Wartości bliskie 1 oznaczają silną zależność liniową między  $x$  a  $y$ , wartości bliskie zera - brak liniowej zależności, natomiast wartości bliskie  $-1$  - ujemną liniową zależność.

W kontekście systemów rekomendacyjnych, współczynnik korelacji określa się jak poniżej:

$$pearson\_corr(u, v) = \frac{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{ui} - \bar{r}_u)(r_{vi} - \bar{r}_v)}{\sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{ui} - \bar{r}_u)^2} \sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{vi} - \bar{r}_v)^2}} \quad (3.3)$$

Jest to najbardziej popularna funkcja do określania podobieństwa między użytkownikami. Wadą korelacji Pearsona jest zwracanie wysokiego podobieństwa dla par użytkowników, którzy ocenili niewielką liczbę takich samych przedmiotów. Jednym z możliwych sposobów obejścia tego problemu jest ustalenie progu  $T$  i przeskalowanie wyniku, przykładowo przez pomnożenie go przez  $\min(\frac{|I_u \cap I_v|}{T}, 1)$ .

- **Zmodyfikowana korelacja Pearsona**

Niektóre systemy interpretują medianę ze skali ocen  $r_m$  jako neutralne nastawienie użytkownika wobec przedmiotu. Ekstrand i in. zaproponowali w [3] (TODO bibliografia)

modyfikację współczynnika korelacji Pearsona, w której wektor ocen jest normalizowany przy użyciu owej mediany zamiast średniej:

$$\text{median\_centered\_corr}(u, v) = \frac{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{ui} - r_m)(r_{vi} - r_m)}{\sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{ui} - r_m)^2} \sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{vi} - r_m)^2}} \quad (3.4)$$

- **Współczynnik korelacji rang Spearmana**

Podczas gdy współczynnik Pearsona wykorzystuje bezpośrednie wartości ocen  $r_{ui}$  do wyznaczenia korelacji, metoda Spearmana polega na przyznaniu tym ocenom rang. Wektor ocen  $r_u$  jest przekształcany w wektor rang w następujący sposób: najwyższej oceniony przedmiot otrzymuje rangę 1, kolejne przedmioty otrzymują wyższe rangi. Przedmiotom z tą samą oceną przyznaje się średnią rangę dla ich pozycji. Oznaczając przez  $k_{ui}$  rangę przyznaną przedmiotowi  $i$  w kontekście użytkownika  $u$ , otrzymujemy wzór:

$$\text{spearman\_corr}(u, v) = \frac{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (k_{ui} - \bar{k}_u)(k_{vi} - \bar{k}_v)}{\sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (k_{ui} - \bar{k}_u)^2} \sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (k_{vi} - \bar{k}_v)^2}} \quad (3.5)$$

Główną zaletą współczynnika Spearmana jest uniknięcie problemu normalizacji ocen (więcej o normalizacji w rozdziale 5). Obliczanie rang wymaga jednak dodatkowego kosztu.

- **Podobieństwo cosinusowe**

Cosinus kąta między wektorami  $x, y$  w przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  wyraża się przez:

$$\cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad (3.6)$$

Dla wektorów z przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  ze standardowym iloczynem skalarnym, im większa wartość bezwzględna cosinusa, tym mniejszy kąt między nimi, co z kolei odpowiada intuicyjnie większemu "podobieństwu" między wektorami.

Ta intuicja leży u podstaw wykorzystania miary cosinusowej jako funkcji podobieństwa, definiując ją jak poniżej:

$$\text{cosine}(u, v) = \frac{r_u \cdot r_v}{\|r_u\|_2 \|r_v\|_2} \quad (3.7)$$

Wadą wydawać się może reprezentowanie nieznanymi ocen przez 0, co często upodabnia brak oceny do oceny negatywnej. Co więcej, używanie tej funkcji podobieństwa nie bierze pod uwagę statystycznych różnic między ocenami użytkowników (różnych średnich czy wariancji ocen). Mimo wymienionych wad, podobieństwo cosinusowe daje zaskakująco dobre wyniki w praktyce, co pokażą kolejne rozdziały.

## Inne miary podobieństwa

- **Podobieństwo Jaccarda**

Współczynnik podobieństwa Jaccarda (inaczej: *indeks Jaccarda*) mierzy podobieństwo między dwoma zbiorami i jest zdefiniowany jako iloraz mocy przecięcia zbiorów i mocy sum tych zbiorów. W kontekście systemów rekomendacji wylicza się go zatem następująco:

$$\text{jaccard}(u, v) = \frac{|I_u \cap I_v|}{|I_u \cup I_v|} \quad (3.8)$$



Jako że indeks Jaccarda ignoruje wartości ocen, jego oczywistą wadą jest fakt utraty informacji przy skalach ocen innych unarna.

- **Rozszerzone podobieństwo Jaccarda**

Jest to wersja podobieństwa Jaccarda dla wektorów z  $\mathbb{R}^n$ :

$$extended\_jaccard(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - x \cdot y}, \quad (3.9)$$

czyli używane jako miara podobieństwa użytkowników będzie miało postać:

$$extended\_jaccard(u, v) = \frac{r_u \cdot r_v}{\|r_u\|_2^2 + \|r_v\|_2^2 - r_u \cdot r_v}, \quad (3.10)$$

- **Podobieństwo euklidesowe**

Odległość euklidesowa między użytkownikami określona jest w naturalny sposób przez:

$$d_2(u, v) = \sqrt{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{ui} - r_{vi})^2}. \quad (3.11)$$

Są różne możliwości przekształcenia tej miary odległości w funkcję podobieństwa (idącą w  $[0, 1]$ , gdzie 1 oznacza największe podobieństwo). Do najczęściej używanych należą:

$$euclidean1(u, v) = \frac{1}{1 + d_2(u, v)} \quad (3.12)$$

oraz

$$euclidean2(u, v) = e^{-d_2(u, v)} \quad (3.13)$$

TODO: przewaga drugiej Te miary może być uogólniona poprzez użycie odległości Minkowskiego:

$$d_p(u, v) = \left( \sum_{i \in I_u \cap I_v} |r_{ui} - r_{vi}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.14)$$

- **Różnica średniokwadratowa (ang. *mean squared difference, MSD*)**

Podobną, bazującą na odległości między ocenami funkcją podobieństwa jest różnica średniokwadratowa. Definiuje się ją jako odwrotność średniego kwadratu różnicy między ocenami użytkowników  $u$  i  $v$ :

$$MSD(u, v) = \frac{|I_u \cap I_v|}{\sum_{i \in I_u \cap I_v} (r_{ui} - r_{vi})^2} \quad (3.15)$$

Różnica średniokwadratowa, podobnie jak podobieństwo euklidesowe, nie odzwierciedla ujemnej korelacji między użytkownikami. Posiadanie informacji o takiej korelacji może czasami zwiększyć jakość predykcji (TODO bibliografia).

## 3.2. Filtracja w oparciu o przedmioty

Obok wielu zalet, wspólna filtracja bazująca na użytkownikach ma jedną poważną wadę - brak skalowalności. Wyznaczanie zbioru  $N_i(u)$  jest operacją o złożoności  $\mathcal{O}(|U|)$  (lub gorszej - bezpośrednio wyliczanie wartości funkcji podobieństwa  $s$  wymaga czasu  $\mathcal{O}(|U||I|)$ ). W dobie serwisów mających setki milionów użytkowników potrzebne było bardziej skalowalne podejście.

Naturalnym pomysłem wydawało się zastosowanie tej samej metody, zmodyfikowanej przez zastąpienie użytkowników przedmiotami. Zamiast szukania podobieństw między zachowaniami użytkowników, do wyznaczania rekomendacji wykorzystywane są podobieństwa między schematami oceniania przedmiotów. Jeśli dwa przedmioty  $i$  i  $j$  cieszyły się podobną opinią wśród użytkowników, można uznać je za podobne i wykorzystać ocenę, jaką użytkownik  $u$  wystawił przedmiotowi  $i$  do predykcji oceny dla przedmiotu  $j$ . Warto zauważyć, że ta wersja metody *collaborative filtering* jest podobna do rekomendacji opartej na zawartości, z tą różnicą, że do wyznaczania podobieństwa używa się preferencji użytkowników zamiast cech przedmiotów.

Zamiast funkcji  $s_{users}$  mamy zatem funkcję  $s_{items} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ , na której podstawie wyznaczamy zbiór  $N_u(i)$  przedmiotów najbardziej podobnych do  $i$  ocenionych przez  $u$ . Porównanie złożoności czasowej i obliczeniowej obu sposobów wspólnej filtracji przedstawia tabela 3.1.

Tabela 3.1: Porównanie złożoności pamięciowej i obliczeniowej obu wersji wspólnej filtracji

	Pamięć	Czas uczenia	Czas zapytania
Użytkownicy	$\mathcal{O}( U ^2)$	$\mathcal{O}( U ^2 I )$	$\mathcal{O}( U )$
Przedmioty	$\mathcal{O}( I ^2)$	$\mathcal{O}( I ^2 U )$	$\mathcal{O}( I )$

Zakładając, że  $|U| \gg |I|$  (co jest prawdą w przypadku większości serwisów), łatwo zauważyć, że "przedmiotowe" podejście do wspólnej filtracji pozwala w znaczący sposób zmniejszyć złożoność zarówno czasową, jak i pamięciową algorytmu. Warto przy tym zaznaczyć, że macierz użyteczności jest często macierzą rzadką, co znacznie przyspiesza obliczanie wartości funkcji podobieństwa i co za tym idzie, czyni metodę wspólnej filtracji opartą na sąsiedztwie jeszcze bardziej skalowalną.

### 3.2.1. Wyznaczanie podobieństwa między przedmiotami

Nietrudno zauważyć, że wymienione w sekcji 3.1.1 funkcje podobieństwa mogą być z powodzeniem uogólnione i zastosowane przy wyznaczaniu podobieństwa między przedmiotami. Przykładowo, współczynnik korelacji liniowej Pearsona (równanie 3.3) dla przedmiotów można zdefiniować jako:

$$pearson\_corr(i, j) = \frac{\sum_{u \in U_i \cap U_j} (r_{ui} - \bar{c}_i)(r_{uj} - \bar{c}_j)}{\sqrt{\sum_{u \in U_i \cap U_j} (r_{ui} - \bar{c}_i)^2} \sqrt{\sum_{u \in U_i \cap U_j} (r_{uj} - \bar{c}_j)^2}} \quad (3.16)$$

Analogicznie zdefiniować można pozostałe miary.

Miarę podobieństwa przeznaczoną specjalnie dla przedmiotów zaproponowali Sarwar i in. w [4]. (TODO bibliografia) Bazuje ona na obserwacji, iż różnice w skalach ocen poszczególnych użytkowników często są znacznie wyraźniejsze niż w przypadku przedmiotów. Dlatego

przy obliczaniu podobieństwa między przedmiotami większy sens może mieć normalizacja oceny względem średniej oceny *użytkownika* zamiast *przedmiotu*. Formalnie ta miara, zwana **dopasowanym podobieństwem cosinusowym** (ang. *Adjusted Cosine Similarity*) określona jest jako:

$$adjusted\_cosine\_sim(i, j) = \frac{\sum_{u \in U_i \cap U_j} (r_{ui} - \bar{r}_u)(r_{uj} - \bar{r}_u)}{\sqrt{\sum_{u \in U_i \cap U_j} (r_{ui} - \bar{r}_u)^2} \sqrt{\sum_{u \in U_i \cap U_j} (r_{uj} - \bar{r}_u)^2}} \quad (3.17)$$

W niektórych przypadkach tak określona funkcja podobieństwa daje lepsze wyniki niż zwykle używane miary (TODO bibliografia).



## Rozdział 4

# Wpływ miary podobieństwa na jakość predykcji



## Rozdział 5

# Optymalizacja algorytmu opartego na sąsiedztwie





## Rozdział 6

# Podsumowanie

### 6.1. Perspektywy wykorzystania w przemyśle

Ze względu na znaczenie strategiczne wyników pracy ten punkt uległ utajnieniu.



# Bibliografia

- [Bea65] Juliusz Beaman, *Morbidity of the Jolly function*, *Mathematica Absurdica*, 117 (1965) 338–9.
- [Blar16] Elizjusz Blarbarucki, *O pewnych aspektach pewnych aspektów*, *Astrolog Polski*, Zeszyt 16, Warszawa 1916.