Terminology

로봇팔 세미나 - 김혜윤 -

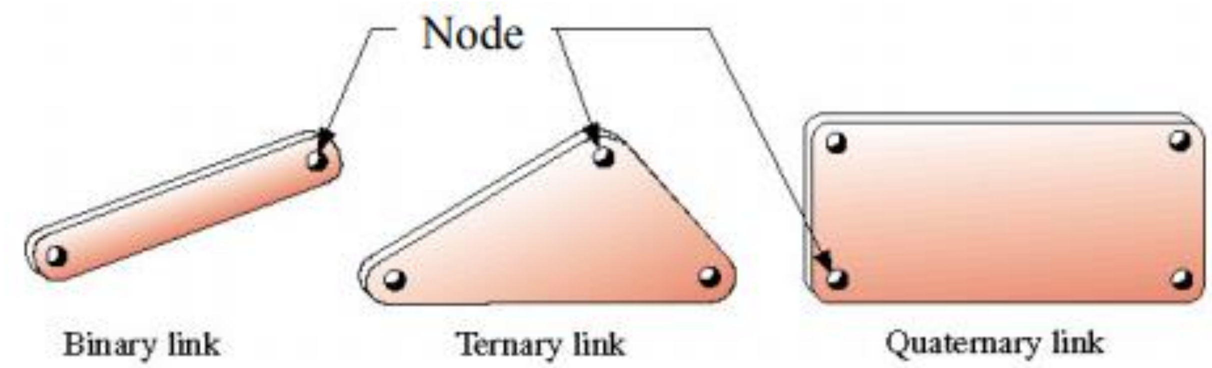
Contents

Introduction

Link & Joint

- **Link:** Joint 연결하는 강체
- **Joint:** Link의 상대 운동이 발생하는 연결 부위

Link 종류



Joint 종류

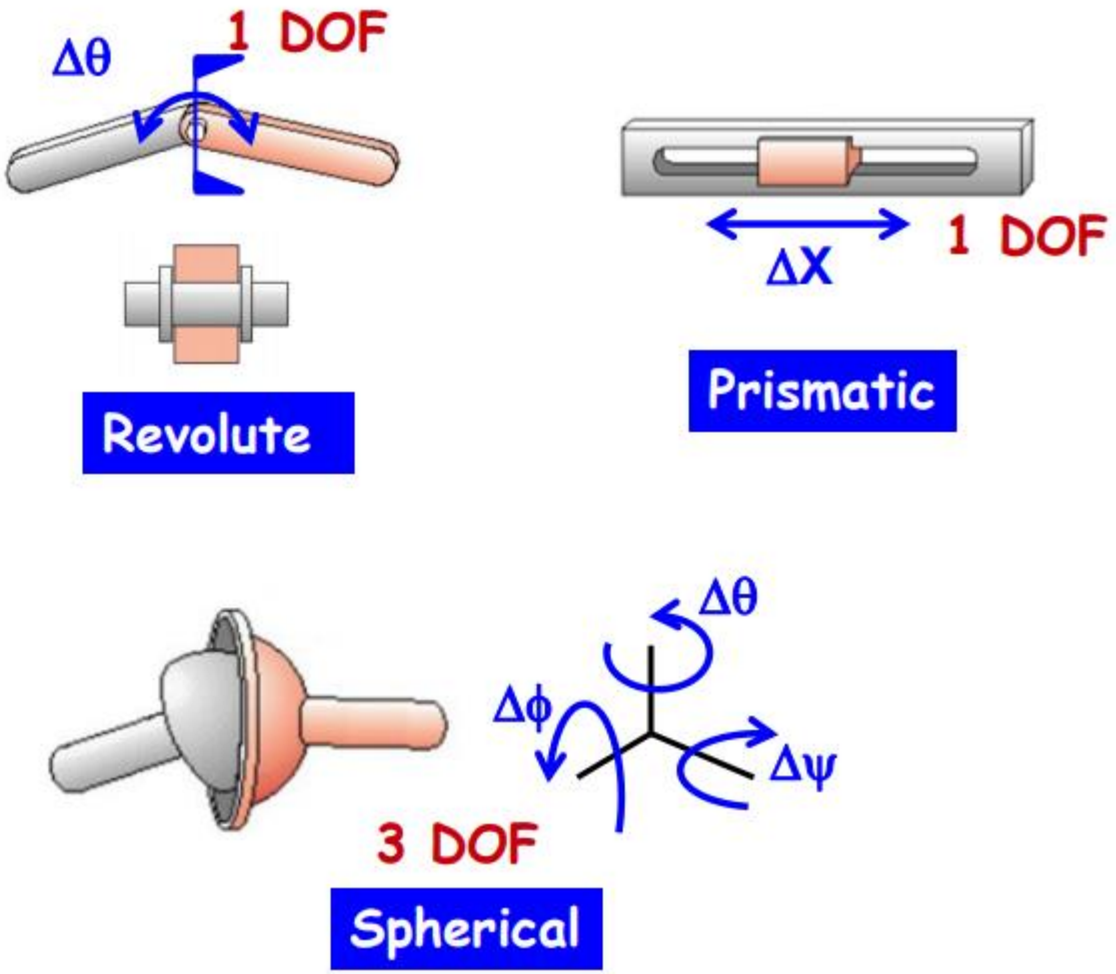


그림 출처: http://contents.kocw.or.kr/KOCW/document/2014/Chungbuk/shineungsoo1/2.pdf

자유도 (Degree of Freedom)

* 기구의 위치를 표현하는데 필요한 독립 변수의 수 (= input의 수)

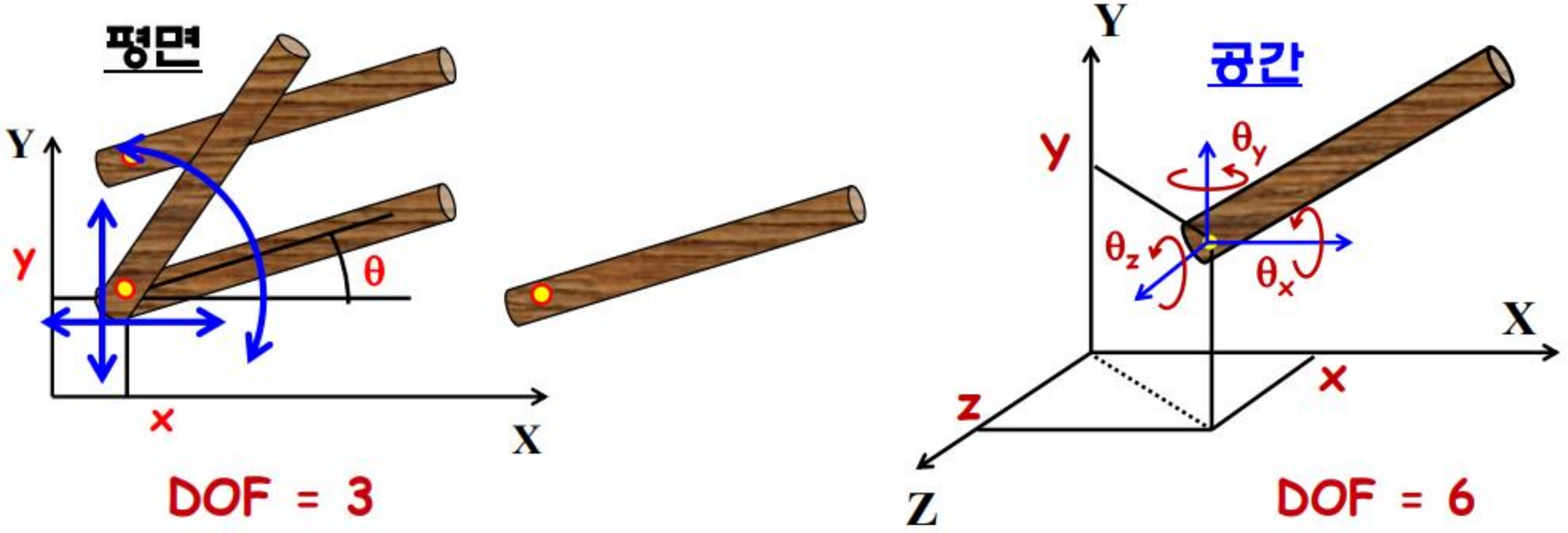


그림 출처: http://contents.kocw.or.kr/KOCW/document/2014/Chungbuk/shineungsoo1/2.pdf

3DOF 로봇팔 (Manipulator)

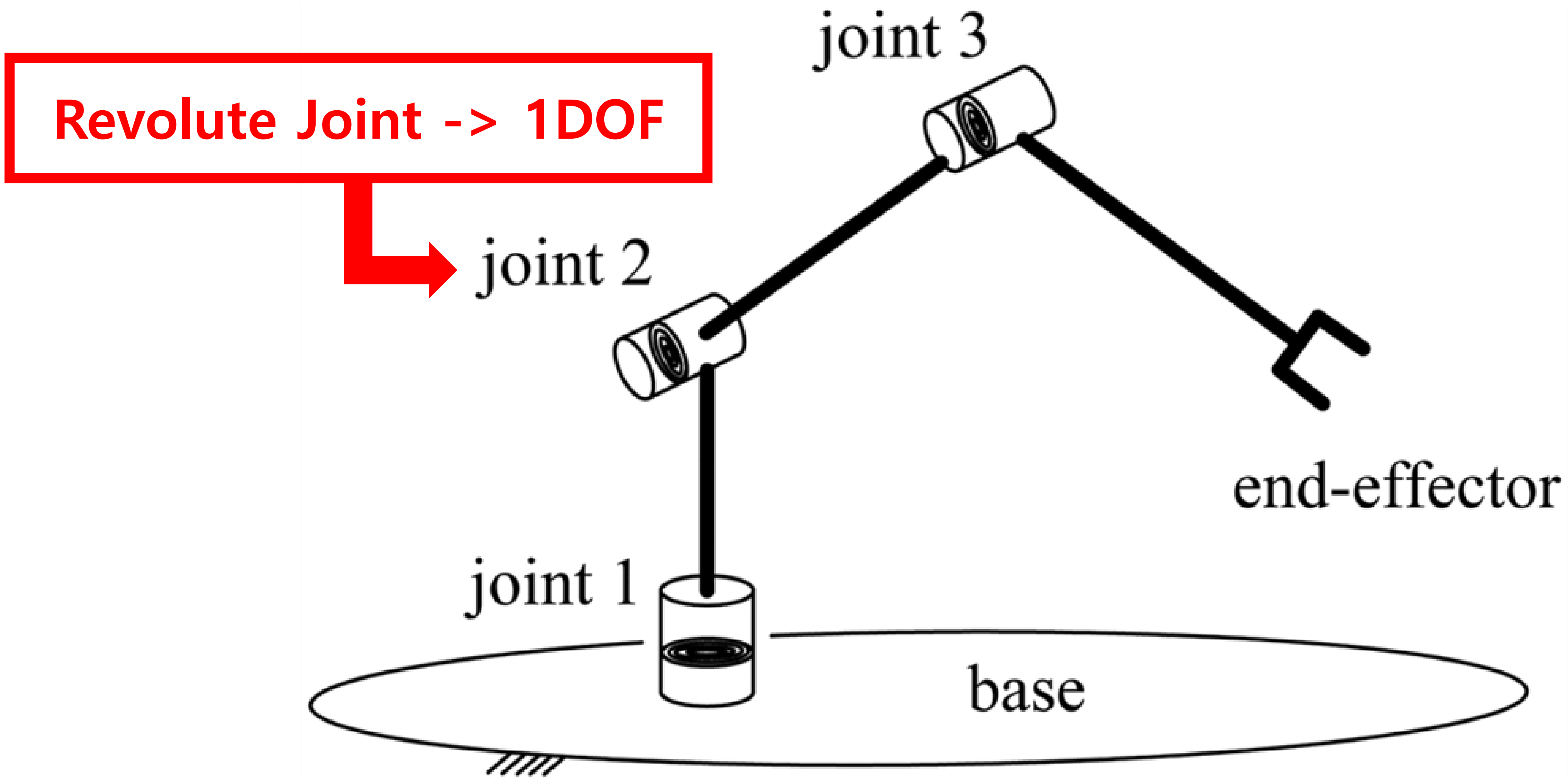


그림 출처:
https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=jaydee88&logNo=221320747169&categoryNo=15&proxyReferer=https:%2F%2Fwww.google.com%2F

정기구학 (Forward Kinematics)

Link와 Joint의 각도와 길이로 End-Effector의 위치와 각도 조절

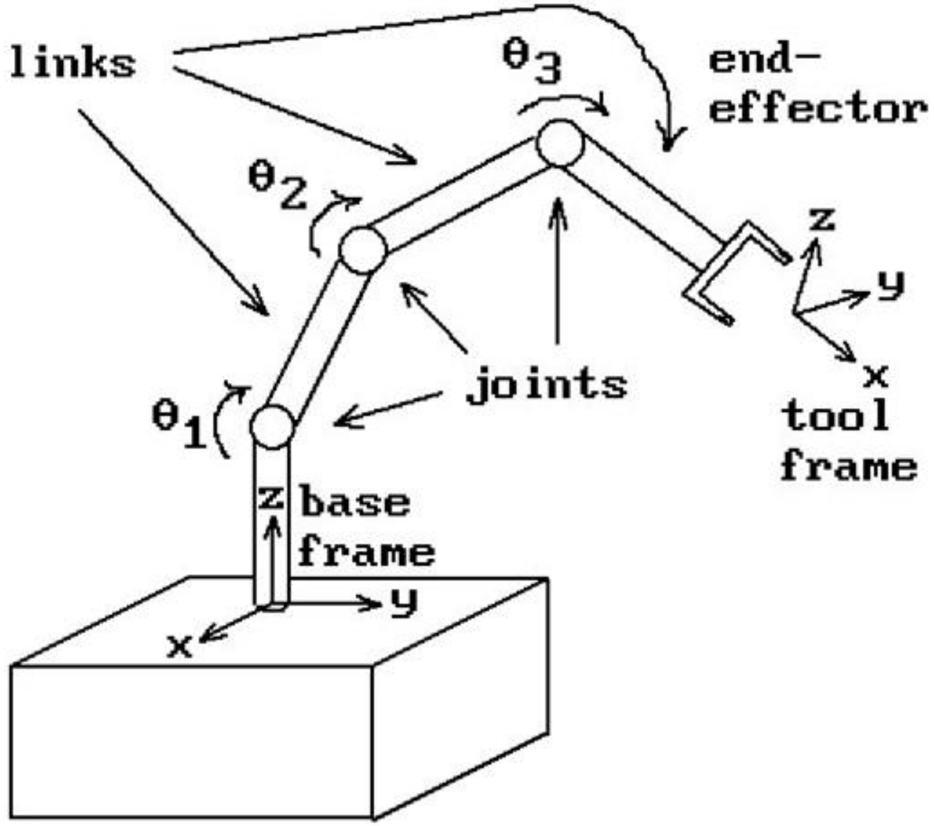
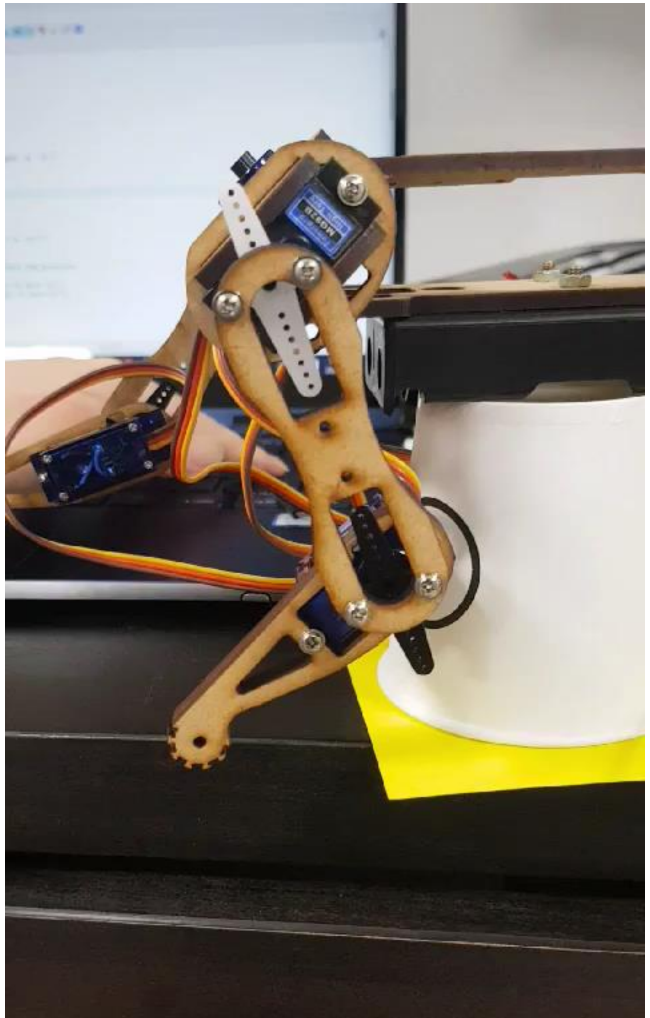


그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/26

역기구학 (Inverse Kinematics)

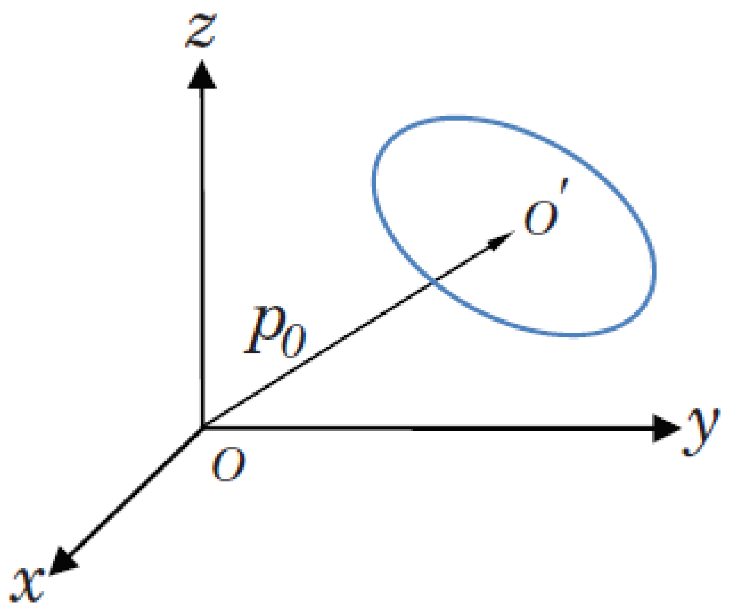
End-Effector의 위치(given)에서 각 Link와 Joint의 각도를 알아냄



회전 행렬
(Rotation Matrix)

강체(Rigid Body)의 표현

* 변형이 없는 강체(Rigid Body)로 가정



고정 좌표계 O-xyz

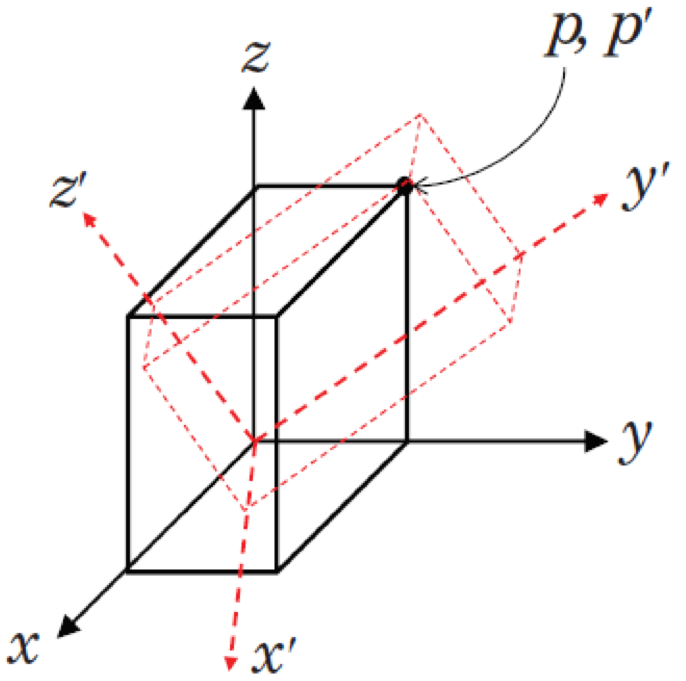
$$\boxed{p_0 = \begin{bmatrix} p_{0x} & p_{0y} & p_{0z} \end{bmatrix}^T}$$

고정 좌표계 O-xyz에 대한

강체의 위치(벡터 p_0) 표현

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

강체(Rigid Body)의 회전



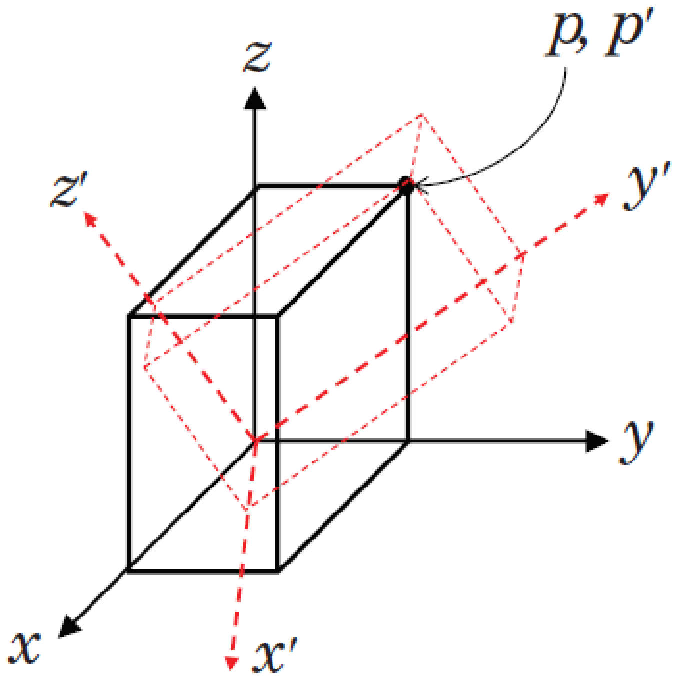
강체에 부착된 이동 좌표계 O'-x'y'z'

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= p_x \boldsymbol{i} + p_y \boldsymbol{j} + p_z \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{p}' &= p_{x'} \boldsymbol{i}' + p_{y'} \boldsymbol{j}' + p_{z'} \boldsymbol{k}' \end{aligned}$$

위치 벡터 p와 p′를 고정 좌표계와
이동 좌표계의 단위 벡터로 표현

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

회전 행렬(Rotation Matrix) R



강체에 부착된 이동 좌표계 O'-x'y'z'

$$\boxed{p = Rp'}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \cdot i' & i \cdot j' & i \cdot k' \\ j \cdot i' & j \cdot j' & j \cdot k' \\ k \cdot i' & k \cdot j' & k \cdot k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ pz' \end{bmatrix}$$

p′의 성분을 O-xyz에 투영(내적)하여

회전 행렬 R 계산

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

회전 행렬(Rotation Matrix) R의 속성

$$p' = R'p$$

$$\begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i' \cdot i & i' \cdot j & i' \cdot k \\ j' \cdot i & j' \cdot j & j' \cdot k \\ k' \cdot i & k' \cdot j & k' \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}.$$

p의 성분을 O′-x′y′z′에 투영(내적)하여

회전 행렬 R′ 계산

$$R = \begin{bmatrix} i \cdot i' & i \cdot j' & i \cdot k' \\ j \cdot i' & j \cdot j' & j \cdot k' \\ k \cdot i' & k \cdot j' & k \cdot k' \end{bmatrix}$$

R의 속성

$$R' = R^T$$

$$R' = R^T = R^{-1}.$$

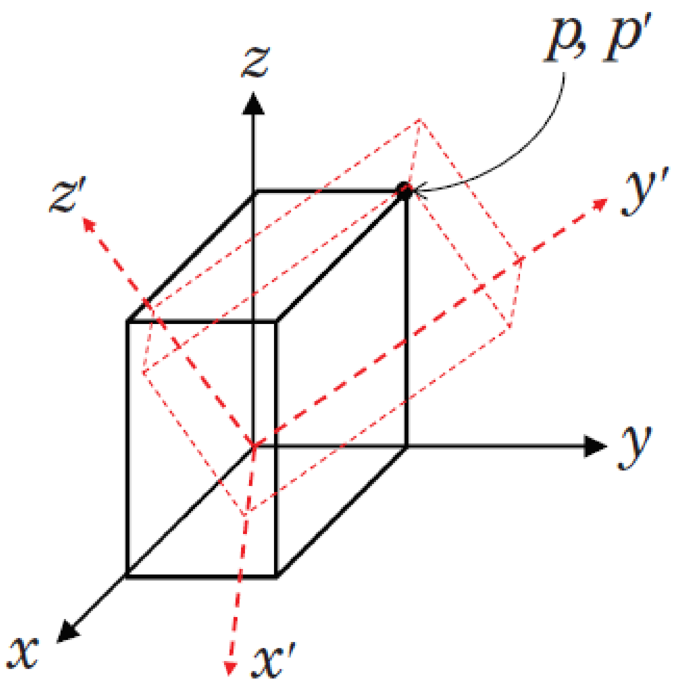
$$R_1 R_2 \neq R_2 R_1$$

- $R^T = R^{-1}$
- 순서가 중요하다

  (회전 순서 바꾸면 다른 위치)

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

회전 행렬(Rotation Matrix) R의 속성



강체에 부착된 이동 좌표계 O'-x'y'z'

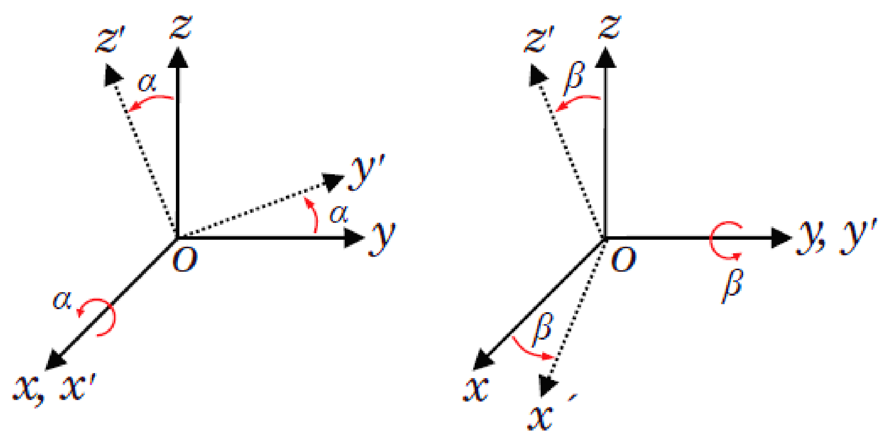
$$q_a = \mathbf{x}_{ab} x_b + \mathbf{y}_{ab} y_b + \mathbf{z}_{ab} z_b$$

$$\boxed{q_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ab} & \mathbf{y}_{ab} & \mathbf{z}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = R_{ab} q_b}$$

- Orthonormal
  (열 벡터 수직, 길이 1)
- R의 열 벡터는 O-xyz에 대한 O′-x′y′z′ 좌표계 성분의 단위 벡터

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

각 축에 대한 회전 행렬



(a) (b) (c)

$$R(x,\ \alpha) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}(y,\ \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}(z,\ \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

연속 회전 행렬

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(\alpha,\ \beta,\ \theta) &= \boldsymbol{R}(y,\ \beta)\boldsymbol{R}(z,\ \theta)\boldsymbol{R}(x,\ \alpha) \\
&= \begin{bmatrix} c\beta c\theta & s\beta s\alpha - c\beta s\theta c\alpha & c\beta s\theta + s\beta c\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\beta \\ -s\beta c\theta & s\beta s\theta c\alpha + c\beta s\alpha & c\beta c\alpha - s\beta s\theta s\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

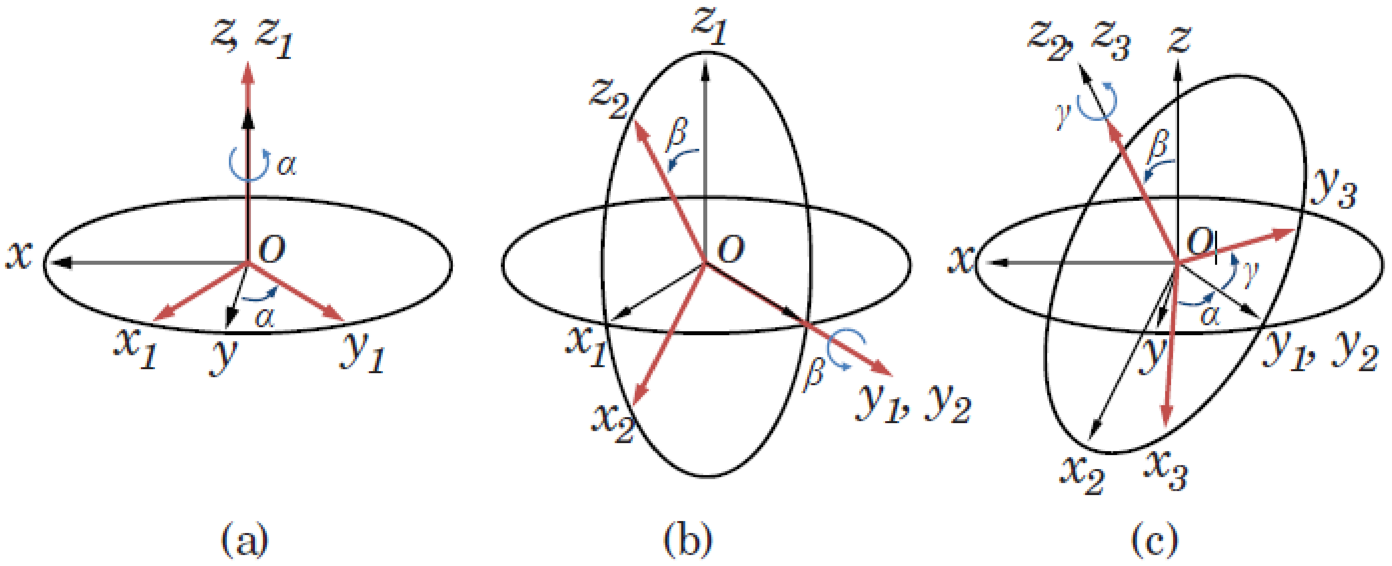
- 외울 필요 X (이해만)
- 연속 회전의 경우 각 회전행렬을 곱해서 구한다
- 순서: 뒤에서 앞으로 ($\alpha \rightarrow \theta \rightarrow \beta$)

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

오일러 각도
(Euler Angle)

오일러 각도 (Euler Angle)

회전 좌표계(강체에 부착)의 축에 대한 회전



회전 좌표계(현재 좌표계)에 대한 회전

오일러 각도

$$\boxed{\psi_E = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

$$R_{Euler}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

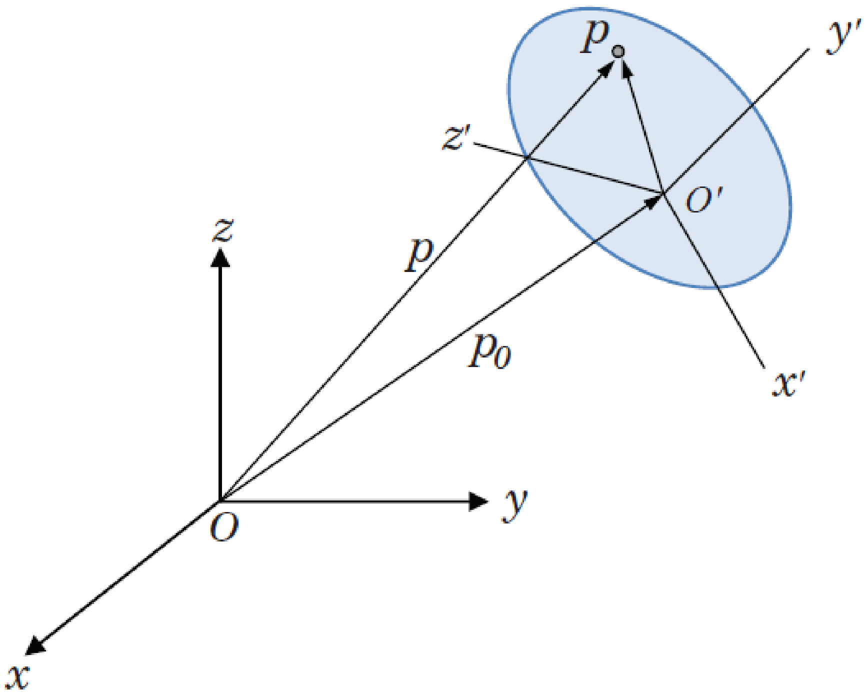
➡ **ZYZ Euler angle**

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

동차 변환
(Homogeneous Transformation)

Rigid Motion



강체에 부착된 p를 고정 좌표계 O-xyz에 대해 표현

고정 좌표계 O-xyz에 대한 p의 좌표

$$\boxed{p = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T.}$$

강체에 부착된 O′-x′y′z′에 대한 p의 좌표

$$\boxed{p' = [p_{x'} \quad p_{y'} \quad p_{z'}]^T.}$$

이동 변환 + 회전 변환으로 표현

$$\boxed{p = \boxed{p_0} + \boxed{Rp'}}$$

$$p' = -R^T p_0 + R^T p.$$

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

동차 변환 행렬

$$A = \left[\begin{array}{c:c} \text{회전} & \text{위치} \\ \text{행렬} & \text{벡터} \\ \hdashline \text{투시} & \text{크기} \\ \text{변환} & \text{조정} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{R} & p_0 \\ (3 \times 3) & (3 \times 1) \\ \hdashline \boldsymbol{t} & w \\ (1 \times 3) & (1 \times 1) \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

투시 변환 = 0 **크기 조정 상수 = 1 고정**

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

동차 변환 행렬 (회전 / 이동)

$$\boldsymbol{A}(x,\ \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이동 X

$$\boldsymbol{A}(y,\ \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(z,\ \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

회전 X

$$\boldsymbol{A}(p_{0x'},\ p_{0y'},\ p_{0z'}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_{0x} \\ 0 & 1 & 0 & p_{0y} \\ 0 & 0 & 1 & p_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25

동차 변환 행렬 (회전 / 이동)

$$ {}^{0}\underline{p}_N = {}^{0}\boldsymbol{A}_1 {}^{1}\boldsymbol{A}_2 {}^{2}\boldsymbol{A}_3 \cdots {}^{N-1}\boldsymbol{A}_N {}^{N}\underline{p}_N $$

- ${}^{i-1}A_i$: i-1 좌표계에 대한 I 좌표계의 동차 변환 행렬
- 각 동차 변환 행렬을 곱하여 순차적인 변환 행렬 구함
- 순서: 앞에서 뒤로

px, py, pz만큼 이동 -> z축 ψ 회전 -> y축 θ 회전 -> x축 Φ 회전

$$ \mathbf{A_L} = \mathbf{T}_x(p_x)\cdot\mathbf{T}_y(p_y)\cdot\mathbf{T}_z(p_z)\cdot\mathbf{R}_z(\psi)\cdot\mathbf{R}_y(\theta)\cdot\mathbf{R}_x(\phi) $$

$$ = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & p_x \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & p_y \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

그림 출처: https://ddangeun.tistory.com/25