8. DESARROLLO DEL CONTENIDO

8.1 Funciones y sus gráficas

8.1.1 Desigualdades e intervalos

Desigualdades.
En matemáticas, una desigualdad es una relación que se da entre dos términos cuando estos son distintos (en caso de ser iguales, lo que se tiene es una igualdad).

Una desigualdad es una expresión matemática que contiene un signo de desigualdad. Si los valores en cuestión son elementos de un conjunto ordenado, como los enteros o los reales, entonces pueden ser comparados.

La expresión a ≠ b significa que " a " no es igual a " b ".

Según los valores particulares de a y de b, puede tenerse $a > b$, que se lee "a mayor que b", cuando la diferencia a – b es positiva y $a < b$ que se lee "a menor que b", cuando la diferencia a – b es negativa.

La notación $a \geq b$, que se lee "a es mayor o igual que b", significa que $a > b$ o que $a = b$ pero no ambos. Por su parte, la notación $a \leq b$ que se lee "a es menor o igual que b", significa que $a < b$ o que $a = b$, pero no ambos.

Una desigualdad se obtiene al escribir dos expresiones numéricas o algebraicas relacionadas con alguno de los símbolos $>, <, \geq$ o $\leq$

De la definición de desigualdad, se deduce que:

1. Todo número positivo es mayor que cero
2. Todo número negativo es menor que cero
3. Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto
4. Si a > b entonces b < a.

Existen dos clases de desigualdades: las absolutas y las condicionales.

1) Desigualdad absoluta es aquella que se verifica para cualquier valor que se atribuya a las literales que figuran en ella.

Por ejemplo: x +1 > x 2

2) Desigualdad condicional es aquella que sólo se verifica para ciertos valores de las literales.

Por ejemplo: 3x –15 > 0 que solamente satisface para x > 5. En este caso se dice que 5 es el límite de x. Las desigualdades condicionales se llaman *inecuaciones*.

Las desigualdades poseen ciertas propiedades que comparten con las propiedades de igualdad, sin embargo, en algunos casos se comportan de manera especial, como se visualiza a continuación:

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

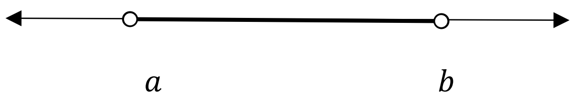
		Ejemplo
Si a cada miembro de una desigualdad se le suma o se le resta un m1lismo número, entonces la desigualdad se mantiene	$a < b \overset{+c}{\Longrightarrow} a + c < b + c$	$2 < 5 \;\Longrightarrow\; 2 + 3 < 5 + 3$
	$a < b \overset{+c}{\Longrightarrow} a - c < b - c$	$3 < 7 \;\Longrightarrow\; 3 + 5 < 5 + 7$
Si cada miembro de una desigualdad se multiplica o se divide por un mismo número POSITIVO, la desigualdad se mantiene.	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c\ positivo \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$	$4 < 8 \Longrightarrow 4 \cdot 3 < 8 \cdot 3$
	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c\ positivo \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	$2 < 5 \Longrightarrow \frac{2}{3} < \frac{5}{3}$
Si cada miembro de una desigualdad se multiplica o se divide por un mismo número NEGATIVO, la desigualdad cambia de sentido.	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c\ negativo \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \cdot c > b \cdot c$	$2 < 5 \Longrightarrow 2(-1) > 5(-1)$ $-2 > -5$
	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c\ negativo \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	$2 < 5 \Longrightarrow \frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$ $-\frac{2}{3} > -\frac{5}{3}$
Si dos desigualdades en el mismo sentido se SUMAN miembro a miembro, entonces la desigualdad se mantiene.	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a + c < b + d$	$\left.\begin{matrix} 2 < 5 \\ -3 < 7 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow 2 + (-3) < 5 + 7$
Si ambos miembros de una desigualdad son no negativos, y se eleva ambos miembros al cuadrado, entonces la desigualdad se mantiene	$0 \le a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$	$2 < 5 \Longrightarrow 2^2 < 5^2$
Inversos multiplicativos de números positivos	$0 > a > b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{a}{b}$	$2 < 5 \Longrightarrow \frac{1}{2} > \frac{a}{5}$

Intervalos.

Sean a y b dos números reales, tal que $a < b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, son llamados intervalos:

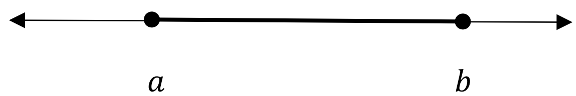
$\boldsymbol{Intervalo\ cerrado}: \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$

Notación: $]a, b[$



$\boldsymbol{Intervalo\ cerrado}: \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

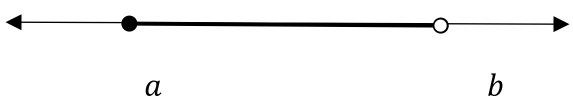
Notación: $[a, b]$



$\boldsymbol{Intervalos\ semiabiertos}$

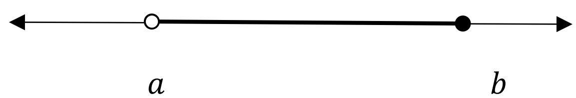
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$

Notación: $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$



$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

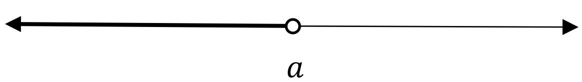
Notación: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$



$\boldsymbol{Intervalos\ infinitos}$

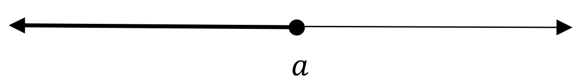
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}\}$

Notación: $]-\propto, \boldsymbol{b}[$



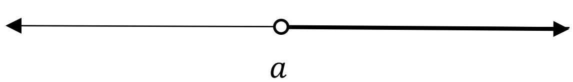
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$

Notación: $]-\propto, \boldsymbol{a}]$



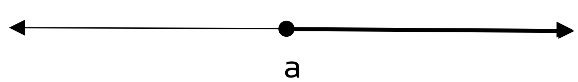
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$

Notación: $]\boldsymbol{a}, +\propto[$



$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$

Notación: $[\boldsymbol{a}, +\propto[$



8.1.2 Inecuaciones lineales

Son desigualdades en las que interviene una o más incógnitas, números y uno de los signos de desigualdad (">", "<", "≥", "≤"), las cuales se verifican para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplos:

3) La solución de la inecuación lineal $x + 1 > 0$ es $x = -1$
4) Para obtener la solución de la inecuación $-2x < 4$ se divide la inecuación por el número negativo -2, obteniendo x > -2.

Procedimiento: $\frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \quad \Longrightarrow \quad x > -2$

1. Para resolver la inecuación $-3x + 5 > 5x - 3$ se aíslan los monomios con parte literal a uno de los lados del signo: $-3x - 5x > -3 - 5$ para sumar los monomios: $-8x > -8$, restando solo multiplicar por -1 toda la expresión y obtener el intervalo: x < 1.

Procedimiento: $-3x + 5 \;\; > \;\; 5x - 3$

$$-3x - 5x \; > -3 - 5$$

$$(-1)(-8x) > (-1)(-8)$$

$$x \; > 1$$

2. Para el caso de la inecuación $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$, lo primero será desarrollar las operaciones que incluyen los paréntesis, y luego asociar los términos semejantes:

Procedimiento: $-2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 20$

$$-2x - 4 - 6 + 12x \; \leq 20$$

$$-2x + 12x \; \leq 20 + 4 + 6$$

$$10x \; \leq 30$$

$$x \; \leq \frac{30}{10}$$

$$x \; \leq 3$$

8.1.3 Inecuaciones cuadráticas

Son desigualdades similares a las inecuaciones lineales, con la salvedad de que se encuentra dentro de sus términos uno con grado 2, es decir, la solución consistirá en un intervalo finito o semiabierto.

El método de resolución consiste en: 1) desarrollar las potencias presentes en los términos, de manera que solo tengamos términos individuales, luego 2) desigualar la inecuación al valor cero, 3) calcular las raíces del polinomio, 4) representar los ceros en la recta real, 5) calcular el signo del valor del polinomio en cada intervalo que determinan los ceros, finalmente 5) resolver la inecuación.

Por ejemplo, resolvamos la inecuación $(x+2)^2 \leq x+8$

Procedimiento

$$x^2+4x+4 \leq x+8$$

$$x^2+4x-x \leq 8-4$$

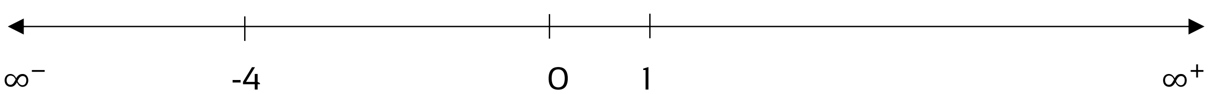
$$x^2+3x \leq 4$$

$$x^2+3x-4 \leq 0$$

$$(x+4)(x-1) \leq 0$$

Llegando a las raíces de la inecuación como = $\begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

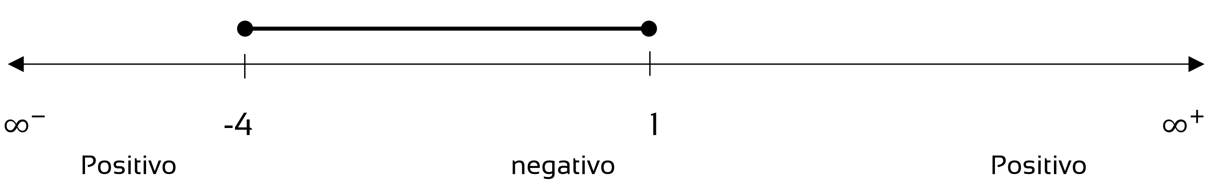
Representando los ceros en la recta real:



Las raíces han dividido la recta en tres intervalos: $]-\infty, \mathbf{-4}[$, $]\mathbf{-4}, \mathbf{1}[$ y $]\mathbf{1}, +\infty[$

Estudiemos el signo de cada valor del polinomio $f(x) = x^2+3x-4$, en cada intervalo:

- Primer intervalo $f(5) = (5)^2 + 3 * (5) - 4 \quad \Longrightarrow \quad 6 > 0$
- Segundo intervalo $f(0) = (0)^2 + 3 * (0) - 4 \quad \Longrightarrow \quad -4 < 0$
- Tercer intervalo $f(2) = (2)^2 + 3 * (2) - 4 \quad \Longrightarrow \quad 6 > 0$
- $x = -4$ y $x = 1$ son solución de la inecuación ya que es la raíz del polinomio, entonces:



La solución es el intervalo $[\![-4,1]\!]$, es decir, $-4 \leq x \leq 1$

8.1.4 Inecuaciones racionales con variable en el denominador

Definición:

Una inecuación racional es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que tienen una sola incógnita, la cual APARECE en el DENOMINADOR. El numerador puede ser una inecuación lineal o cuadrática, y en el denominador también, Ejemplos:

$$\frac{x^2+8x+7}{x} \geq 0 \qquad \frac{2x^2+7x+6}{x+1} \geq 0 \qquad \frac{x^2+7x+6}{x^2-1} \geq 0 \qquad \frac{(x+3)(x+2)}{x-1} \geq 0$$

Resolver una inecuación racional en una variable significa encontrar el conjunto de números reales (Intervalo) que satisface la desigualdad. Para ello, recurrimos a las propiedades básicas de las desigualdades.

Pasos:

Algunas recomendaciones que debes tener en cuenta al resolver inecuaciones cuadráticas son:

1. Hacer uno de los miembros de la inecuación igual a cero.
2. Eliminar signos de agrupación (si los hay), en algunos casos aplicar operaciones con fracciones y reducimos términos semejantes.
3. Verificar el grado de la inecuación en el numerador y en el denominador, si es de segundo grado factorizamos aplicando los diferentes casos, si es lineal sumamos términos semejantes si es posible.
4. Analizar cada factor, para ello, igualamos cada paréntesis a cero y establezcamos el punto crítico de cada uno de ellos en el numerador y denominador.
5. utilizar el método del cementerio para hallar los intervalos solución, aplicando la ley de los signos.
6. Expresar la solución en notación de intervalos y de inecuación.

Ejemplo 1.

$$\boldsymbol{x \geq \frac{8x-7}{x}}$$

Paso 1.

Hacer uno de los miembros de la inecuación igual a cero y sumar términos semejantes

$$\boldsymbol{x \geq \frac{8x-7}{x} \;\rightarrow\; x - \frac{8x-7}{x} \geq 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2-8x+7}{x} \geq 0}$$

Paso 2.

Factorizamos el numerador como un trinomio $x^2 + bx + c$

$$\frac{(x-7)(x-1)}{x} \geq 0$$

Paso 3.

Hallar valores críticos en el numerador y el denominador (igualando cada factor a cero).

Numerador

$x - 7 = 0 \rightarrow \ x = 7$

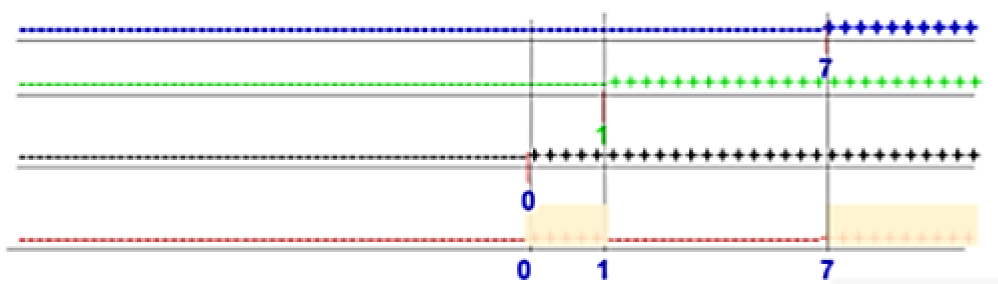
$x - 1 = 0 \rightarrow \ x = 1$

Denominador

$x = 0$

Paso 4.

Utilizar el método del cementerio para hallar los valores que satisfacen la inecuación



En este caso necesitamos los mayores que cero (positivos), quedando la solución de la siguiente manera: $(0,1] \cup [7, +\infty)$

Ejemplo 2:

$$\frac{x+1}{x-1} \leq -2x - 2$$

Paso 1.

Hacer uno de los miembros de la inecuación igual a cero y sumar términos semejantes

$$\frac{x+1}{x-1} + (2x+2) \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(x+1)+(2x+2)(x-1)}{(x-1)} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x^2+x-1}{(x-1)} \leq 0$$

Paso 2.

Factorizamos el numerador como un trinomio $ax^2 + bx + c$

$$\frac{(x+1)(2x-1)}{(x-1)} \leq 0$$

Paso 3.

Hallar valores críticos en el numerador y el denominador (igualando cada factor a cero)

Numerador

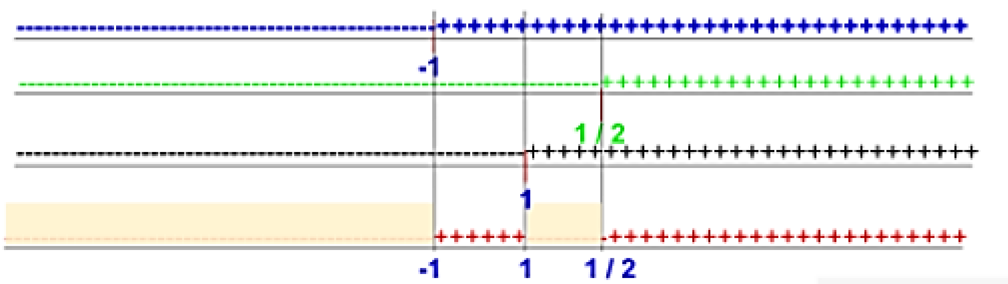
$x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$ $\qquad\qquad 2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

Denominador

$x - 1 = 0 \qquad\qquad x = 1$

Paso 4.

Utilizar el método del cementerio para hallar los valores que satisfacen la inecuación



Necesitamos los menores o iguales que cero (negativos) $\Longrightarrow$ $]-\infty, -1] \cup]1\,, 1/2]$