8.1.11 Álgebra de funciones

El álgebra de las funciones son las propiedades de las operaciones que se pueden realizar con cualquier tipo de función: Suma, resta, multiplicación y división con f(x) y g(x).

Suma y resta de funciones:

La suma y resta de funciones permite obtener una nueva función que depende de x:

$f(x) \pm g(x) = h(x)$

$f(x) = \ln(x)$

$g(x) = \sqrt{x}$

$\ln(x) \pm \sqrt{x} = h(x)$

Multiplicación de funciones:

Al igual que la suma, el resultado del producto es otra función que depende de x:

$$f(x) \,.\, g(x) = \ln(x) \,.\, \sqrt{x} = h_1(x)$$

División de funciones:

$$h_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Composición de funciones: La composición es una operación entre funciones que consiste evaluar una función a partir de la expresión de otra dada.

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = \ln(\sqrt{x})$$

Esta operación, no es conmutativa, es decir, si importa el orden en el que se indica la composición.

Lo correcto sería:

$$g \circ f = g\big(f(x)\big) = \sqrt{\ln(x)}$$

Puede notarse, que las funciones obtenidas al momento de realizar la composición son totalmente diferentes. La nueva función h(x) tiene dominio y rango que puede ser diferente a las funciones originales f(x) y g(x).

8.1.12 Función inversa

Se llama **función inversa o reciproca** $f(x)$ a otra función $f^{-1}(x)$ que cumple que:

Si $f(a) = b$, entonces

Ejemplo a partir de la función

$$\boldsymbol{f(x) = x + 4}$$

- El dominio de $f^{-1}(x)$ es el recorrido de $f(x)$
- El recorrido de $f^{-1}(x)$es el dominio de $f(x)$

Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el **dominio de su función inversa**

Hay que distinguir entre la función inversa, $f^{-1}(x)$ y la inversa de una función $\frac{\mathbf{1}}{f(\mathrm{x})}$

La inversa de la función $f(x) = x + 4$ es

$$\frac{1}{x+4}$$

La función inversa de $f(x) = x + 4$ es $f^{-1}(x) = x - 4$

Funciones es la función identidad

$$g.f = g[f(5)] = g(x+4) = x + 4 - 4 = x$$

Cálculo de la función inversa

Para construir o calcular la función inversa de una función cualquiera, se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1: se escribe la función con x e y

Paso 2: se despeja la variable x en función de la variable y

Paso 3: se intercambian las variables

Ejemplos

1. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Cambiamos $f(x)$ por y

$$y = \frac{2x+3}{x-1}$$

Quitamos denominadores

$$y(x-1) = 2x + 3$$

Resolvemos el paréntesis

$$xy - y = 2x + 3$$

Pasamos al primer miembro las x

$$xy - 2x = 3 + y$$

Extraemos despejamos la x

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

Cambiamos x por $f^{-1}(x)$ y obtendremos la función inversa

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

Vamos a comprobar el resultado para $x = 2$

$$f(2) = \frac{7}{1} = 7$$

$$f^{-1}(7) = \frac{10}{5} = 2$$

Como $f(2)$ nos resulta 7 y $f^{-1}(7)$ nos resulta 2, eso significa que la función inversa es correcta.

2. $f(x) = \sqrt[x]{x-1}$

Cambiamos $f(x)$ por y

Elevamos al cubo en los dos miembros

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = x^3 + 1$$

8.1.13 Función a trozos

Las funciones definidas a trozos (o función a trozos o función por partes) son aquellas que tienen distintas expresiones o fórmulas dependiendo del intervalo (o trozo) en el que se encuentra la variable independiente (x).

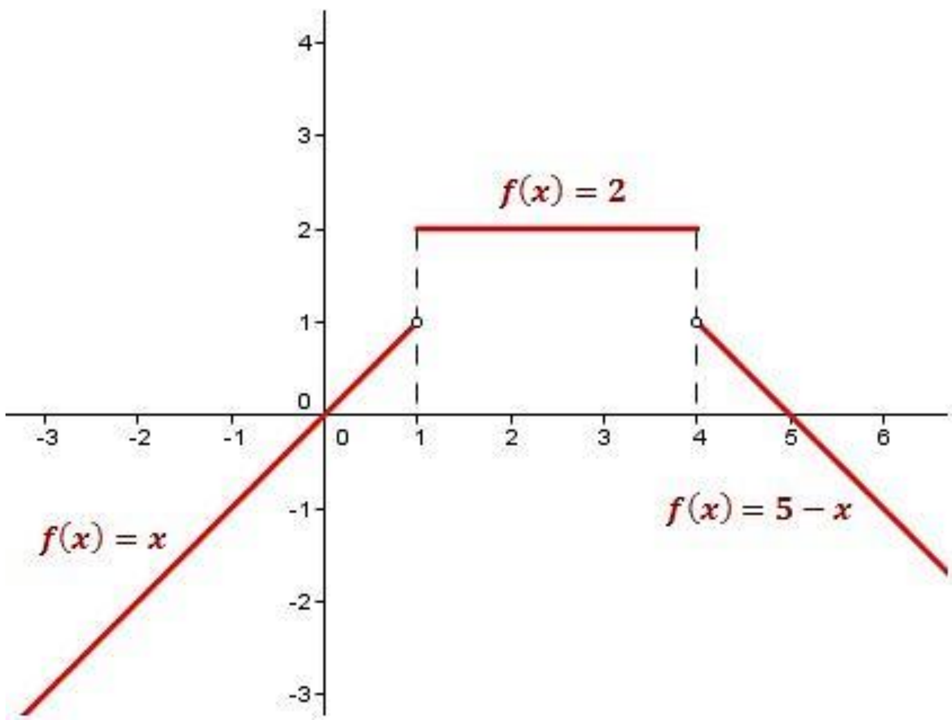
Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & si -\infty < x < 1 \\ 2 & si\ 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - x & si\ 4 < x < \infty \end{cases}$$

Escrita la función de otra forma:

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in (-\infty, 1) \\ 2 & si\ x \in [\,1\,,4\,] \\ 5 & si\, x \in (\,4, +\infty\,) \end{cases}$$

Su grafica sería:



Ejemplo 2:

Haga la gráfica de las siguientes funciones seccionadas (a trazos o por pedazos) . Además determine dominio y rango.

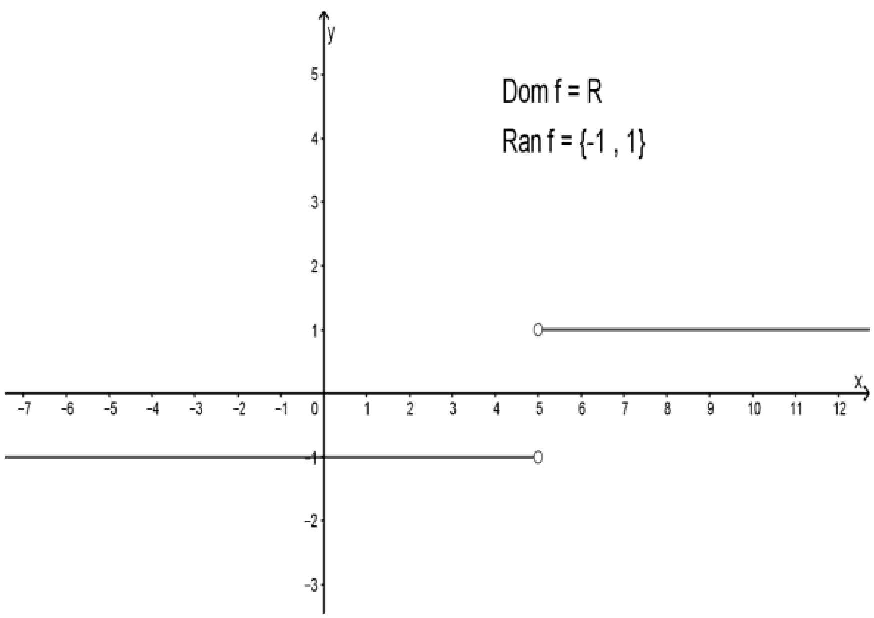
Esta función es una seccionada, en primer lugar hay que desarrollar el valor absoluto y luego dividirlo entre x – 5 :

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{si } 5 \leq x \\ -(x - 5) & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Si dividimos este valor absoluto entre x – 5 obtenemos 1 y -1 , así : f(x) = { 1 si 5 < x -1 si x < 5
Se excluye 5 porque el denominador no puede ser cero.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 5 < x \\ -1 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

Su grafica queda de esta manera



8.1.14 Función exponencial y logarítmica.

Las funciones exponenciales $y = a^x$ funciones logarítmicas $\log_a y = x$ se le denominan funciones transcendentales, ya que son funciones que transcienden el álgebra en el sentido que ninguna puede ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas de suma, resta y extracciones de raíces.

Las funciones exponenciales y logarítmicas con base son inversas una de otra. Por lo tanto cuando en una expresión $y = a^x$ nos dan "a" y "x" para calcular "y", estamos en presencia de una función exponencial, pero cuando nos dan "a" e "y" para calcular x, estamos en presencia de una función logarítmica.

Funciones exponenciales

Toda función f:R→R₊ tal que $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ y $a > 0$, se le denomina función exponencial.

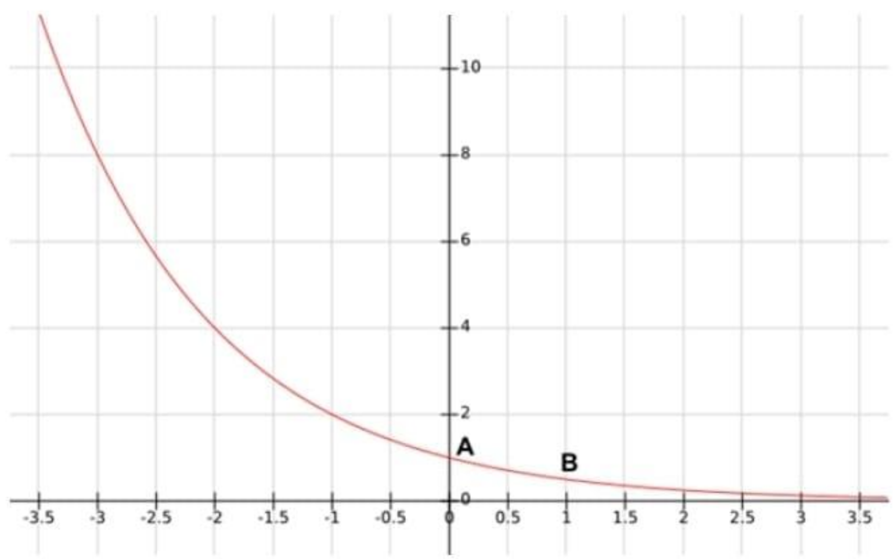
El valor de y en la función $f(x) = a^x$ para cualquier número del conjunto R siempre es un numero positivo y nunca puede valor cero, ya que no hay ningún numero x que sustituido en la expresión de la función de como resultado cero. Por ello la curva siempre esta "por encima" del eje x (no lo corta).

I. Cuando $a > 1$ la curva es estrictamente creciente
II. Cuando $a < 1$ la curva es estrictamente descreciente

Ejemplo: sea f: R→R₊ tal que $f(x) = (^1/_2)^x$. Realizar la representación gráfica de la misma.

Haciendo la representación gráfica para el intervalo. $-3 \leq x \leq 3$ se tiene:

x	y
-3	**8**
-2	**4**
-1	**2**
0	**1**
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Veamos que:

1. La curva para por el punto A(0.1)
2. La curva pasa por el punto B(11/2)
3. La curva esta "por encima" del eje x y no lo corta
4. La función es estrictamente decreciente ya que a<1, con a=$\frac{1}{2}$

Funciones logarítmicas

Toda función f: R→R₊ tal que $\log_a f(x) = a^x$con $a \neq 1$ y $a > 0$, se le denomina **función logarítmica.** Esta función es la inversa de la función de la exponencial en base a, dado que:

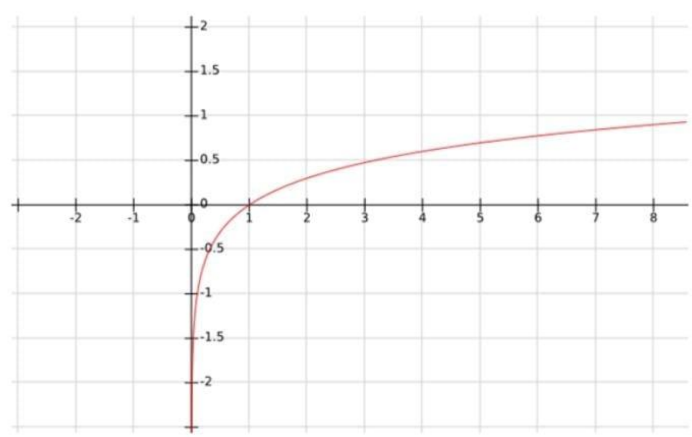
$\log_a f(y) = x \leftrightarrow a^x = y$

I. La función logarítmica sólo existe para $x > 0$ (sin incluir el cero). Por tanto, su dominio es el intervalo $(0, +\infty)$.
II. Cuando $x = 1$, la función logarítmica se anula, ya que $\log_a f(1) = 0$, en cualquier base.
III. La función logarítmica de la base es siempre igual a 1.
IV. La curva es continua, y es creciente para $a > 1$ y decreciente para $a < 1$.

Ejemplo: sea f: R→R₊ tal que $y = \log(X)$, realizar la representación gráfica de la misma.

Haciendo la representación gráfica para el intervalo $-\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ se tiene:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-0.30	0	0.30	0.48	0.90



Veamos que:

- La curva esta "a la derecha" del eje "y" y no lo corta
- La función es creciente ya que $a > 1$ con $a = 10$

8.1.15 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las ecuaciones que no se reducen a la ecuación algebraica mediante transformaciones algebraicas, se llaman ecuaciones trascendentes. Por transformaciones algebraicas de la ecuación f(x) = 0, se entiende las transformaciones siguientes:

1. La adición a ambos miembros de la ecuación de una misma expresión algebraica.
2. La multiplicación de ambos miembros de la ecuación por una misma expresión algebraica.
3. La elevación de ambos miembros de la ecuación a una potencia racional.

Las ecuaciones trascendentes que trataremos ahora son, las exponenciales y las logarítmicas.

Se conoce como ecuación exponencial a una ecuación donde la incógnita forma parte sólo de los exponentes de potencias para ciertas bases constantes.

Una de las ecuaciones exponenciales más simples, cuya solución se reduce a la de una ecuación algebraica, es la ecuación del tipo $a^{f(x)} = b$, pero también hay ecuaciones exponenciales del tipo

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

Ejemplos

- $2^x(2+5) = 28$

  $7 \cdot 2^x = 28$

  $2^x = \frac{28}{7}$

  $2^x = 4$

  $2^x = 2^2$

  $x = 2$

- $9 \cdot 27^x = 27$

  $3^2 \cdot (3^3)^x = 3^3$

  $3^{3x+2} = 3^3$

  $3x + 2 = 3$

  $3x = 1$

  $x = \frac{1}{3}$

- $9 \cdot \sqrt[3x-1]{9} = 9^x$

  $\sqrt[3x-1]{9} = \frac{9x}{9}$

  $\sqrt[3x-1]{3^2} = \frac{(3^2)^x}{3^2}$

  $\frac{2}{3^{3x-1}} = \frac{3^{2x}}{3^2}$

  $\frac{2}{3^{3x-1}} = 3^{2x-2}$

  $\frac{2}{3x-1} = 2x - 2$

Solución de las Ecuaciones Exponenciales.

Existen dos métodos fundamentales de resolución de las ecuaciones exponenciales.

a) Método de reducción a una base común. Si ambos miembros de una ecuación se pueden representar como potencias de base común, donde la base es un número positivo, distinto de 1. Usando la propiedad:

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)} \leftrightarrow f(x) = g(x)}$$

En otras palabras, los exponentes se igualan y resulta un tipo de ecuación en el cual se aplican las transformaciones algebraicas explicadas anteriormente.

b) Método de logaritmación de una ecuación exponencial. Se aplica logaritmos a conveniencia en ambos lados de la ecuación y se procede con las transformaciones algebraicas y las leyes de logaritmos conocidas.

Ejemplo de solución de ecuaciones exponenciales

Ejercicio 1: $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

$$(2^2)^{x+1} + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

$$2^{2x+2} + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

$$2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

$$4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 320 = 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 + 8 \cdot 2^x - 320 = 0 \ \Longleftarrow \ transformación\ de\ 2^x = t \ \therefore \ 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$$

$$4t^2 + 8t - 320 = 0$$

$$t^2 + 2t - 80 = 0$$

$$(t+10)(t-8) = 0 \ \begin{cases} t_1 \longrightarrow \ 8 = 2^x \\ t_2 \longrightarrow -10 = 2^x \end{cases}$$

$$\begin{matrix} Log_2\, x = 8 \\ Log_2\, x = -10 \end{matrix} \ \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \nexists \end{cases}$$

Existe una única solución real $x = 3$

Ejercicio 2: $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$

$$2^{2x} + 2^{2} \cdot 2^{-1} + 2^{2} \cdot 2^{-2} + 2^{2x} \cdot 2^{-3} + 2^{2x} \cdot 2^{-4} = 1984$$

$$2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} + \frac{2^{2x}}{2^2} + \frac{2^{2x}}{2^3} + \frac{2^{2x}}{2^4} = 1984$$

$$2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} + \frac{2^{2x}}{4} + \frac{2^{2x}}{8} + \frac{2^{2x}}{16} = 1984$$

$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \frac{t}{16} = 1984$ Realizamos el cambio de $2^{2x} = t$

$$\frac{16t + 8t + 4t + 2t + t}{16} = 1984$$

$$31t = 1984 \cdot 16$$

$$t = \frac{1984 \cdot 16}{31}$$

$$t = 64 \cdot 16$$

$$t = 2^6 \cdot 2^4$$

$$t = 2^{10}$$

$2^{2x} = 2^{10}$ $\Leftarrow$ *Realizamos el cambio de variable* $t = 2^{2x}$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Ecuaciones logarítmicas

Con el uso de los logaritmos, los procesos de multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces entre números reales pueden simplificarse notoriamente.

Definición: Sea a un real positivo fijo, a≠1 y sea x cualquier número real positivo, entonces:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x, \quad a > 0; a \neq 1$$

La función que hace corresponder a cada número real positivo su logaritmo en base ***a≠1***, denotada por $\log_a x$, se llama: función logarítmica de base a, y, el número $\log_a x$ se llama logaritmo de x en la base a. La definición anterior, muchas veces, se expresa diciendo que: el logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

Propiedades de los logaritmos

a) El logaritmo de la base es 1.

$$\log_a a = 1$$

b) El logaritmo de 1 es 0, cualquiera que sea la base.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pues } a^0 = 1$$

c) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

d) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador

$$\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

e) El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia

$$\log_a (P^n) = n \log_a P$$

f) El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice.

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_b P}{\log_b a}$$

g) Cambio de base: El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base

$$\mathbf{\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}}$$

Cuando $a > 1$, si $0 < x < y$, entonces, $\log_a x < \log_a y$. Es decir, la función logarítmica de base $a > 1$ es estrictamente creciente en su dominio. Cuando $0 < a < 1, si\ 0 < x < y$, entonces, $\log_a x\ > \log_a y$.

Esto es la función logarítmica de base entre 0 y 1; es estrictamente decreciente en su dominio.

Ejemplos:

a. $\log_2 512 = -3x + 9$

$512 = 2^{(-3+9)}$

$2^9 = 2^{(-3x+9)}$

$9 = -3x + 9$

$3x = 0$

$x = 0$

b. $\log_4(5x + 6) = 4$

$5x + 6 = 4^4$

$5x + 6 = 256$

$5x = 250$

$x = 50$

c. $2\log_a 5 + \log_a 4 - \log_a 10 =$

$\log_a 5^2 + \log_a 4 - \log_a 10 =$

$\log_a(25 \cdot 4) - \log_a 10 =$

$\log_a\left(\frac{100}{10}\right) = \log_a 10$

d. $\log_a 12 - \left(\frac{1}{2}\right)\log_a 9 + \frac{1}{3}\log_a 8 =$

$\log_a 12 - \left(\log_a \sqrt{9}\right) + \log_a \sqrt[3]{8 =}$

$\log_a 12 - \log_a(3 \cdot 2) =$

$\log_a 12 - \log_a 6 =$

$\log_a\left(\frac{12}{6}\right) = \log_a 2$