8.1.5 Definición de función, dominio y rango

Función es una relación en la que por cada elemento del conjunto de partida se tiene asociado uno, y sólo un, elemento del conjunto de llegada.

Dominio es el conjunto de valores **x**, pertenecientes al conjunto de partida, que tiene imágenes en el conjunto de llegada.

Escrito en notación de conjunto:

$$\textbf{Dom}\,\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \ / \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y},\ \ \mathbf{y} \in \mathbf{B}\}$$

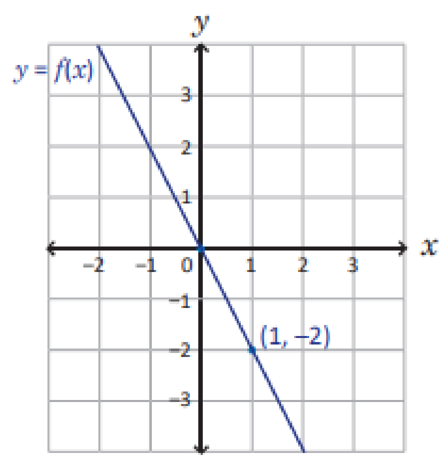
Se lee: Dominio de **f** es el conjunto de todos los **x** pertenecientes al conjunto **A**, tal que la **imagen de f**, es igual a **y** perteneciente al conjunto **B**.

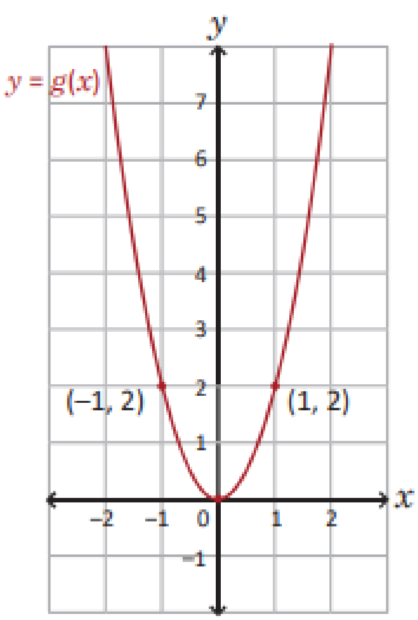
Rango es una relación que existe entre los elementos de dos conjuntos, es decir, cuando dos variables están relacionadas, se estable que el valor de una de ellas queda determinado si se les asigna un valor a la otra.

8.1.6 Gráfica de una función

Dadas las funciones $f(x) = -2\,x$ y $g(x) = 2x^2$

Solución: La función **f** es una función lineal y su grafica es una línea recta que pasa por el origen. A partir de este, si **x** aumenta una unidad (es decir, x=1) entonces f(x) disminuye 2. La grafica de f(x)=-2x se presenta a la derecha.





La grafica de la función g es una parábola con vértice en el origen. Para graficarla se buscan otros dos puntos a la izquierda y derecha del vértice: si x=-1 entonces g(-1) = 2(-1)2 = 2 y el punto (-1,2) pertenece a la parábola de g; de igual forma si x=1 entonces g(1)= 2(1)2 = 2 y el punto (1,2) pertenece a la parábola. La grafica de g(x)=2x2 se presenta a la izquierda.

8.1.7 Tipos de funciones

Algunos de los principales tipos de funciones matemáticas son clasificadas en diferentes grupos según el tipo de relación que se establece entre las variables X e Y.

Funciones explícitas

La relación se puede obtener de forma directa, simplemente sustituyendo el dominio x por el valor que corresponda como, por ejemplo:

$$f(x) = 5x - 2$$

Funciones implícitas

Si no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es necesario efectuar operaciones, como en este ejemplo:

$$5x - y - 2 = 0$$

Funciones polinómicas

- Son las funciones que vienen definidas por un polinomio.
- $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x + \cdots + a_nx^n$
- Su dominio es $\mathbb{R}$, es decir, cualquier número real tiene imagen.

Funciones constantes

- El criterio viene dado por un número real.
- $f(x) = k$
- La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.

Funciones polinómicas de primer grado

1. $f(x) = mx + n$
   - Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función.
   - Son función de este tipo: *Función afín:* $y = mx + n$
     Su gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas.

2. $f(x) = mx$

a) Función lineal: $y = mx$
   Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

3. $f(x) = x$

b) Función identidad: Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

4. $f(x) = ax + bx + c$

- Funciones cuadráticas.
- Son funciones polinómicas de segundo grado.
- La gráfica de una función polinómica es una parábola.

Funciones racionales

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

- El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.
- El criterio viene dado por un cociente entre polinomios diferentes de cero.

Funciones irracionales o radicales

- El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical.
- El dominio de una función irracional de índice impar es R.
- El dominio de una función irracional de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea positivo y mayor o igual que cero.

Funciones algebraicas a trozos

Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren.

- Funciones en valor absoluto.
- Función parte entera de x.
- Función mantisa.
- Función signo.

Funciones trascendentes

La variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

Funciones exponenciales

$$f(x) = a^x$$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a con exponente x.

Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a:

$$f(x) = \log_a x \quad \Leftarrow \quad a > 0, a \neq 1$$

Funciones trigonométricas

- Función seno
  $f(x) = \sin x$
- Función tangente
  $f(x) = \tan x$
- Función secante
  $f(x) = \sec x$
- Función coseno
  $f(x) = \cos x$
- Función cosecante
  $f(x) = \csc x$
- Función cotangente
  $f(x) = \cot x$

8.1.8 Determinación del valor de una función en forma gráfica y analítica

De la gráfica a la expresión analítica (rectas y parábolas)

En un estudio de funciones, lo habitual es que nos den una función en su forma analítica para que obtengamos su representación gráfica. El enunciado será la representación gráfica y nosotros tendremos que obtener la expresión analítica de la función.

Nos centraremos en los casos de funciones lineales y cuadráticas.

FUNCIONES LINEALES

Como hemos visto, la ecuación explícita para una función lineal es $y = mx + n$

Donde **m** es la pendiente de la recta y **n** la ordenada del punto de corte de la recta con el eje y

Encontrar **m** y **n** tomando dos puntos cualquiera de la recta $P_1(x_1, y_1)\ \ y\ \ P_2(x_2, y_2)$ y calcular la pendiente m de la recta mediante la siguiente fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una vez calculada la pendiente **m**, sólo nos queda reemplazar ese resultado en la primera ecuación explícita, y hallar n. Para ello, deberemos usar uno de los puntos que nos dieron como dato, reemplazando la **x** y la **y** del punto en la **x** y la **y** de la primera expresión (ecuación punto-pendiente), despejando **n** nos queda

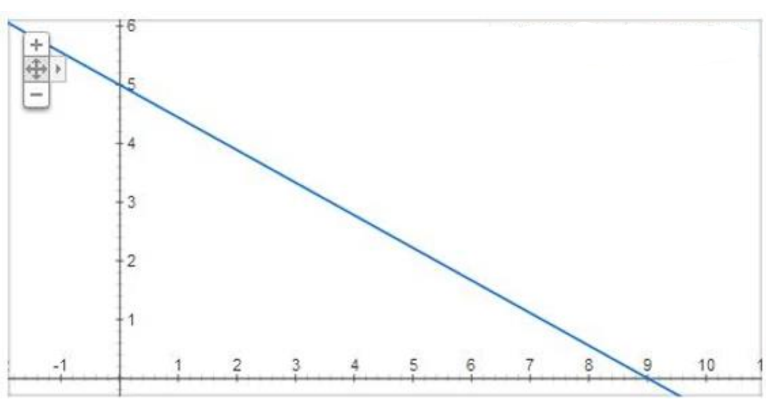
$$n = y_1 - mx_1$$

$$n = y_2 - mx_2$$

Según elijamos P_1 o P_2 para hallar n.

Ejemplo:

1. Halla la expresión de la función lineal que se corresponde a la siguiente gráfica:



Solución

Tomando P1(9,0) y P2(0,5)

$X_1=9$ $y_1=0$

$X_2=0$ $y_2=5$

así, la pendiente

$$m = \frac{5-0}{0-9} = -\frac{5}{9}$$

Finalmente

$$n = 5 - \left(-\frac{5}{9}\right)0 = 5$$

Por lo que la función tendrá como expresión

$$y = -\frac{5}{9}x + 5$$

8.1.9 Funciones cuadráticas

En ese caso, como dato nos darán la gráfica que representa a la función. Nuestra tarea es hallar la expresión analítica.

Métodos:

a) Tenemos como dato 3 puntos cualesquiera de la parábola. Hallamos la expresión analítica resolviendo un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

b) Tenemos como dato el vértice de la parábola y otro punto cualquiera. Consideraremos el desplazamiento del vértice respecto del origen para "llevar" la parábola al origen y calcular el valor de **a** usando también las coordenadas del otro punto que nos dan como dato. Para ello, usaremos

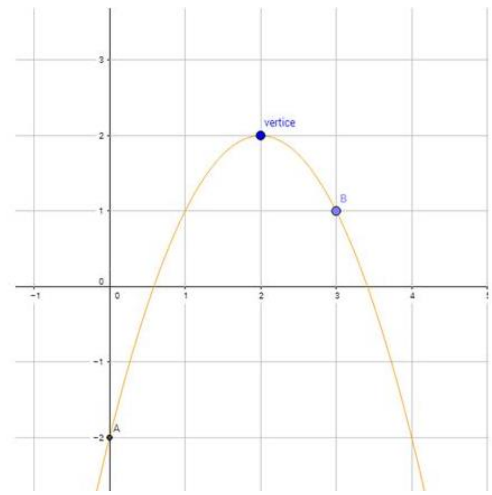
$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

Donde x_v e y_v son las coordenadas del vertice de la parábola

MÉTODO 1: obtener la expresión de la función conociendo 3 puntos cualesquiera de la parábola.

Ejemplo:

Encontrar la expresión de la función cuya gráfica es:



Solución

Analizando la gráfica de la función podemos identificar sin problemas los siguientes puntos

P(2,2)

Q(0,2)

R(3,1)

La expresión a la que debemos llegar tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Reemplazamos en (1) las coordenadas de los puntos que tenemos como dato, por lo que nos queda el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$= \begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 0a + 0b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación veamos que

$$c = -2$$

Tenemos ahora un sistema de dos ecuaciones con incógnitas:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 9a + 3b = 3 \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$a = -1$$
$$b = 4$$

Por lo que llegamos a

$$f(x) = -x^2 + 4x - 2$$

Método 2: conocidos el vértice y otro punto de la parábola. Consideramos el desplazamiento respecto del origen

Cuando en la función cuadrática los valores de b y c son nulos el vértice de la parábola que representa gráficamente a la función tiene su vértice en el origen. Entonces, cada vez que nos den la gráfica desplazada y las coordenadas del vértice, podemos llevar la parábola al origen mediante

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

Donde $\boldsymbol{x_v\ e\ y_v\ son\ las\ coordenadas\ del\ vértice\ de\ la\ parábola}$

Luego usamos esta expresión y reemplazamos la **x** y la **y**, por las coordenadas del otro punto que nos dieron, lo que nos permitirá calcular **a**.

Una vez que tenemos a, volvemos a usar la misma expresión, que incluya el valor recién hallado de **a**, pero dejamos las **x** y la **y** originales. Posteriormente operamos, despejamos la **y**, y nos quedará la expresión buscada.

$$\boldsymbol{y - y_v = a(x - x_v)^2 \quad (2)}$$

y contamos con el vértice y otro punto de la parábola

$$V(2,2); P(3,1)$$

Reemplazamos las coordenadas de los puntos en (2) y nos queda que

$$1 - 2 = a(3 - 2)^2$$

De donde $a = -1$

Reescribimos la primera ecuación, pero considerando el valor de a y el de las coordenadas del vértice.

$$y - 2 = -(x - 2)^2$$

Operando

$$y - 2 = -x^2 + 4x - 4$$

Finalmente

$$y = -x^2 + 4x - 2$$

8.1.10 Dominio y rango de una función en forma gráfica y analítica

Para encontrar el dominio y el rango de una función si tenemos su fórmula debemos recordar sus definiciones. En palabras sencillas, el dominio es el conjunto de todos los valores que se pueden entrar en la función y el rango es el conjunto de todos los valores que pueden salir de la misma.

DOMINIO

- Despejar la variable **dependiente**. (Variable "y")
- Analizar si al despejar la variable **dependiente**, en la variable **independiente**, (Variable "x") ocurre uno de los siguientes casos:

CASO 1: Si la variable "x" queda en un **denominador**:

Hallamos los puntos donde el **denominador se hace cero** (puntos críticos), para esto hacemos el denominador igual a cero y despejamos la variable "x", si es el caso podemos factorizar y después igualar a cero, estos puntos implican la existencia de asíntotas verticales).

CASO 2: Si la variable "x" queda dentro de una **raíz par**:

Cuando esto ocurra, establecemos la desigualdad para que la raíz pertenezca a los R; Hacemos el radicando mayor o igual a cero, ¡resolvemos esta desigualdad y encontramos e! intervalo solución que corresponde al dominio de la función (nos indica entre que valores del eje x existe gráfica).

CASO 3: Si la variable "x" **no** queda en un **denominador**, ni tampoco queda en una **raíz**:

Si al despejar la variable dependiente, observamos que **no** se cumple ninguno de los casos anteriores, entonces nos indica que esta variable puede tomar cualquier valor real, por tanto, $\text{Dom} = (-\infty, +\infty)$

Para hallar las asíntotas verticales despejamos la variable y. Si al hacer esto obtenemos una fracción, entonces buscamos todos los valores de x para los cuales se anula el denominador, pero no el numerador. Si uno de esos valores es x = a, entonces la recta vertical que pasa por el punto (a,0) será una asíntota vertical

RANGO

- Despejar la variable **independiente**. (Variable "X")
- Analizar si al despejar la variable **independiente**, en la variable **dependiente**, (variable "x") ocurre uno de los siguientes casos:

CASO 1: Si la variable "Y" queda en un **denominador**:

Hallamos los puntos donde el **denominador se hace cero** (puntos críticos), para esto hacemos el denominador igual a cero y despejamos la variable "Y", si es el caso podemos factorizar y después igualar a cero, estos puntos implican la existencia de (asíntotas horizontales).

CASO 2: Si la variable "Y" queda dentro de una **raíz par**:

Cuando esto ocurra, establecemos la desigualdad para que la raíz pertenezca a los R; Hacemos el radicando mayor o igual a cero, ¡resolvemos esta desigualdad y encontramos e! intervalo solución que corresponde al dominio de la función (nos indica entre que valores del eje Y existe gráfica).

CASO 3: Si la variable "Y" **no** queda en un **denominador**: ni tampoco queda en una **raíz**.

Si al despejar la variable independiente, observamos que **no** se cumple ninguno de los casos anteriores, entonces nos indica que esta variale puede tomar cualquier valor Real, por tanto, Rango = $(-\infty, +\infty)$

Para hallar las asíntotas horizontales, despejamos la variable x. Si obtenemos una fracción, buscamos todos los valores de y para los cuates se anula el denominador, pero **no** el numerador. Si une de los valores es y = b entonces la recta horizontal que pasa por el punto (0, b) será una asíntota horizontal.

EJEMPLO

1. Hallar analíticamente el dominio, el rango y las ecuaciones de las asíntotas (si las tiene) de:

$$xy - 2y - y = 1$$

Paso 1: ***Dominio***: Despejamos la variante dependiente (Y)

$xy - x - y = 1$ → $xy - y = 1 + 2x$ → $y(x-1)$=2x+1 → $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Caso 1: Si la variable "x" queda en denominador, igualamos el denominador a cero y despejamos la "x".

$x - 1 = 0$ → $\underline{x - 1}$ asíntota vertical → **Dominio**: $D_f = R_e - \{1\}$

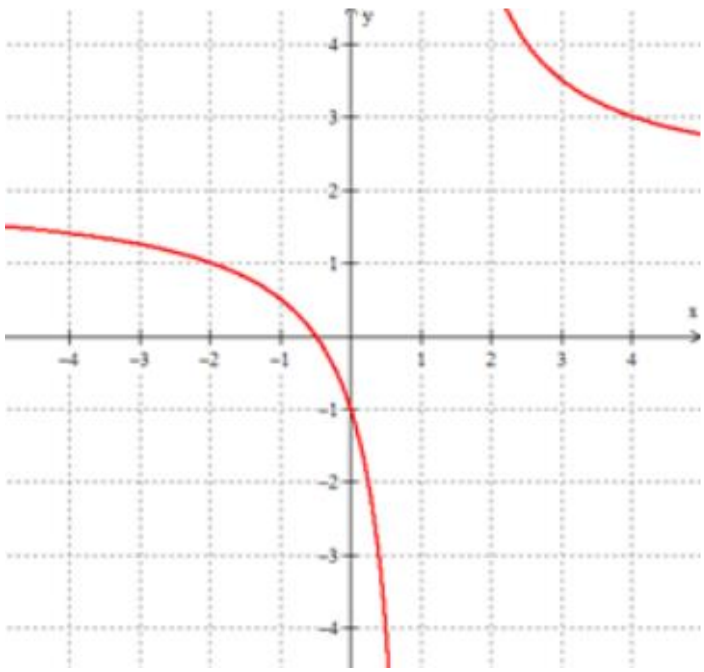
Paso 2: ***Rango:*** Despejamos la variable independiente (X)

$xy - 2x - y = 1$ → $xy - 2x = 1 + y$ → $x(y-2) = y + 1$ → $x = \frac{y+1}{y-2}$

Caso 1: Si la variable "y" queda en un denominador, lo igualamos a cero y despejamos la "y".

$y - 2 = 0$ → $\underline{y = 2}$ asíntota horizontal → **Rango**: $R_f = R_e - \{1\}$

GRAFICA



xy - 2x - y = 1