数　学

【１】以下の問いに答えよ．

（1）図１で示されている関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ を単位ステップ関数 $u(t)$ を用いて示せ．なお，$u(t)$ は次式で定義される．

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

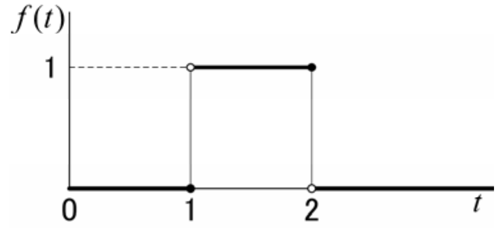

図１

（2）関数 $g(t)$ のラプラス変換を $G(s)$ （s：ラプラス演算子）とする．

$g(t-a)\cdot u(t-a)$ $\qquad (a \geq 0)$

をラプラス変換せよ．

（3）関数 $x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ とする．$x(t)$ についての微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = f(t)$$

を初期条件 $x(0)=1$ のもとにラプラス変換し，$X(s)$ を求めよ．

$f(t)$ は，図１で示された関数である．

（4）上で求めた $X(s)$ をラプラス逆変換して，上の微分方程式の解 $x(t)$ を求めよ．

【２】以下の問いに答えよ．

（1）次の漸化式を証明せよ．

$$\int \sin^n x dx = \frac{1}{n}\left[-\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx\right] \qquad (n \geq 2)$$

（2）$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1-\cos t) \quad (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ で表されるサイクロイド曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

【3】

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ a \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a\text{ は定数})$$

とする.

(1)　行列 A を階段行列に変形し，行列 A のランク（階数）$\mathrm{rank}\ A$ を求めよ.

(2)　連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ.

(3)　連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつように定数 a の値を定めよ．また，そのときの方程式の解を求めよ.

【4】

(1)　方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ の一般解を求めよ.

(2)　時刻 $t = 0$ に xy 平面上の点 $\mathrm{P}(1, 1)$ を出発し，方程式 $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - y^2,\quad \dfrac{dy}{dt} = 2xy$ に従って運動する点の，その後（$t \geq 0$）の運動の軌跡を描け.