H27

Date . . No.

流体力学　2回目

[1] (1) $V_\theta = r\Omega \cdot (-\sin\theta) i + r\Omega \cdot \cos\theta j$

$= \boxed{r\Omega(-i\sin\theta + j\cos\theta)}$

$\sin\theta = y/r, \quad \cos\theta = x/r$ より,

$V_\theta = -i\Omega y + j\Omega x$

$$\omega = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Omega y & i\Omega x & 0 \end{vmatrix} = +\Omega k + \Omega k = \boxed{+2\Omega k}$$

(2) $\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta})$

速度成分は V_θ のみより, $V_r = 0$

また, ポテンシャル流より, 渦なしであるので, $\omega_z = 0$

よって,

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) = 0 \rightarrow rV_\theta = C, \quad V_\theta = \frac{C}{r}$

$r=a$ で V は連続より, 流速 ; $V_\theta = r\Omega$ を用いると, $r=a$ のとき,

$V_\theta = \frac{C}{a} = a\Omega \rightarrow C = a^2\Omega$

$\therefore V_\theta = \boxed{\frac{a^2\Omega}{r}}$

[2] (1) $W(z) = m\{\log(z-h) - \log z\} = m\log\left|1-\frac{h}{z}\right|$

マクローリン展開を用いると,

$W(z) = \lim_{h\to 0} m\left\{-\frac{h}{z} - \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{z}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{h}{z}\right)^3 - \cdots\right\}$

$mh = \mu$ より,

$W(z) = \lim_{h\to 0}\left\{-\frac{mh}{z} - \frac{1}{2}\frac{mh}{z^2}\cdot h - \frac{1}{3}\frac{mh}{z^3}\cdot h^2 - \cdots\right\}$

$= \boxed{-\frac{\mu}{z}}$

(2) $W(z) = -\frac{\mu}{z} = -\frac{\mu}{x+iy} = -\frac{\mu}{x^2+y^2}(x-iy) = \phi + i\psi$

$\therefore \psi = \boxed{\frac{\mu y}{x^2+y^2}}$

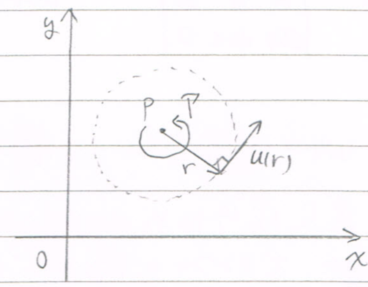
No. Date

(3) $\psi = \text{const}$ より,

$$\psi = \frac{\mu y}{x^2+y^2} = C$$

$$x^2+y^2 = \frac{\mu y}{C}$$

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{\mu}{2C}\right)^2 = \frac{\mu^2}{4C^2}}$$



[3] (1) 右図

$$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} u(r)\, dA = \int_0^{2\pi} u(r) \cdot r d\theta = \boxed{2\pi r u(r)}$$

(2) $\Gamma = \oint u \cdot ds$

ストークスの定理より,

$\Gamma = \oint u \cdot ds = \iint \omega \cdot d\sigma$ ~~$= 0$~~ $\Gamma = 0$. よって,

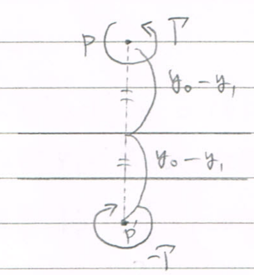
渦糸がある点以外では渦なしより, 循環の保存から,

$\Gamma = \Gamma_1$ は常に成り立つ.

(3) $\Gamma = 2\pi r u(r)$ より, 求める速度は,

$$u(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2(y_0 - y_1)} = \boxed{\frac{\Gamma}{4\pi(y_0 - y_1)}}$$

壁に沿ってx軸に正の向き



この運動は壁に沿って等速直線運動するので,

$y(t) = y_0$

$$x(t) = \frac{\Gamma t}{4\pi(y_0 - y_1)} + x_0$$

$$(x(t), y(t)) = \boxed{\left(\frac{\Gamma t}{4\pi(y_0 - y_1)} + x_0 ,\ y_0\right)}$$