H31 数学 解答 (途中あり)

[1] (1) $\int_a^x (x-t)f(t)\,dt$

$(与式)' = \left(x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt\right)' = \int_a^x f(t)\,dt + x(F(x) \cancel{- F(a)})' - (xF(x) \cancel{- aF(a)})' + (G(x) - G(a))'$

$= \int_a^x f(t)\,dt$

(2) $(x+1)e^{-x} + b$

$$\{(x+1)e^{-x}+b\}' = \{xe^{-x} + e^{-x} + b\}'$$
$$= e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x}$$
$$= -xe^{-x}$$

(3) $\int_a^x (x-t)f(t)\,dt = (x+1)e^{-x} + b$ を満たす $f(x)$, a, b.

(1),(2)より

$$\int_a^x f(t)\,dt = -xe^{-x}$$
$$(-xe^{-x})' = -e^{-x} + xe^{-x}$$
$$= (x-1)e^{-x} = f(x)$$

また

$$\int_a^x (t-1)e^{-t}\,dt = \int_a^x te^{-t}\,dt - \int_a^x e^{-t}\,dt$$
$$= -[te^{-t}]_a^x + \int_a^x e^{-t}\,dt - \int_a^x e^{-t}\,dt$$
$$= -xe^{-x} - ae^{-a}$$

ここで 解は $-xe^{-x}$ であるため

$$-ae^{-a} = 0$$
$$\therefore a = 0$$

次に

$$\int_0^x (x-t)(t-1)e^{-t}\,dt = x\int_0^x te^{-t}\,dt - x\int_0^x e^{-t}\,dt - \int_0^x t^2e^{-t}\,dt + \int_0^x te^{-t}\,dt$$
$$= x\left([-te^{-t}]_0^x + \cancel{\int_0^x e^{-t}\,dt}\right) - \cancel{x\int_0^x e^{-t}\,dt} - \left([-t^2e^{-t}\,dt]_0^x + 2\int_0^a te^{-t}\,dt\right) + \int_0^x te^{-t}\,dt$$
$$= -x^2e^{-x} + x^2e^{-x} - \int_0^x te^{-t}\,dt$$
$$= -\left([-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt\right)$$
$$= xe^{-x} + [e^{-t}]_0^x$$
$$= xe^{-x} + e^{-x} - 1$$
$$= (x+1)e^{-x} - 1$$

よって $b = -1$

したがって

$$f(x) = (x-1)e^{-x}$$
$$a = 0$$
$$b = -1$$

No.

Date . .

[2] $\left(x-\frac{2y}{x}\right)dx+\left(\frac{e^{2y}}{x}-2\right)dy=0 \quad (x>0)$

(1) $P(x,y)=x-\frac{2y}{x}$, $Q(x,y)=\frac{e^{2y}}{x}-2$ とする

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2}{x} , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{e^{2y}}{x^2}$$

よって $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ なので 完全微分方程式 でない

(2) 積分因子 は

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{\frac{e^{2y}}{x}-2}\left(-\frac{2}{x}+\frac{e^{2y}}{x^2}\right)=\frac{1}{e^{2y}-2x}\left(\frac{e^{2y}}{x}-2\right)$$

$$=\frac{1}{x}\equiv\lambda(x)$$

よって 積分因子 を $\mu(x)$ とおくと

$$\mu(x)=e^{\int\lambda(x)dx}=e^{\log x}=x$$

よって $\underline{x}$ //

(3) (2) の 積分因子 を それぞれ P, Q に かける

$$\mu(x)P(x,y)=x^2-2y , \quad \mu(x)Q(x,y)=e^{2y}-2x$$

$$\frac{\mu(x)P}{\partial y}=-2 , \quad \frac{\mu(x)Q}{\partial x}=-2$$

よって 完全微分方程式 である

したがって

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{x_0}^{x}\mu(x)P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}\mu(x_0)Q(x_0,y)\,dy \\
&= \int_{x_0}^{x}(x^2-2y)\,dx+\int_{y_0}^{y}(e^{2y}-2x_0)\,dy \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3-2xy\right]_{x_0}^{x}+\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2x_0y\right]_{y_0}^{y} \\
&= \frac{1}{3}x^3-2xy-\frac{1}{3}x_0^3+2x_0y+\frac{1}{2}e^{2y}-2x_0y-\frac{1}{2}e^{2y_0}+2x_0y_0=C_0 \\
&\quad \frac{1}{3}x^3-2xy+\frac{1}{2}e^{2y}=C_1
\end{aligned}$$

したがって

$$u(x,y)=2x^3-12xy+3e^{2y}=C_2$$

[3] $\begin{cases} x' + y' + y = 0 & \text{—①} \\ x' + 2x + 6\int_0^t y\,dt = -2u(t) & \text{—②} \end{cases}$

①より

$$sL\{x(t)\} - x(0) + sL\{y(t)\} - y(0) + L\{y(t)\} = 0$$

$$sL\{x(t)\} - (-5) + sL\{y(t)\} - 6 + L\{y(t)\} = 0$$

$$sL\{x(t)\} + (s+1)L\{y(t)\} = 1 \quad \text{—③}$$

②より

$$x' + 2x + 6\left([tY(t)]_0^t - \int_0^t Y(t)\,dt\right) = -2u(t)$$

$$\cancel{x'' + 2x' + 6(Y(t) + ty(t) - Y(t)) = 0}$$

$$x'' + 2x' + 6\,y(t) = 0$$

$$s^2L\{x(t)\} - x'(0) - sx(0) + 2[sL\{x(t)\} - x(0)] + 6L\{y(t)\} = 0$$

ここで $t = 0$ (②)

$$x'(0) + 2x(0) + 6\int_0^0 y\,dt = -2$$

$$x'(0) - 10 = -2$$

$$x'(0) = 8$$

戻ると

$$(s^2 + 2s)L\{x(t)\} - 8 + 5s + 10 + 6L\{y(t)\} = 0$$

$$s(s+2)L\{x(t)\} + 6L\{y(t)\} = -5s - 2 \quad \text{—④}$$

③ × 6 − ④ × (s+1)

$$\begin{cases} 6sL\{x(t)\} + 6(s+1)L\{y(t)\} = 6 \\ s(s+1)(s+2)L\{x(t)\} + 6(s+1)L\{y(t)\} = -(5s+2)(s+1) \end{cases}$$

$$\{6s - s(s+1)(s+2)\}\,L\{x(t)\} = 6 + 5s^2 + 7s + 2$$

$$-(s^3 + 3s^2 - 4s)\,L\{x(t)\} = 5s^2 + 7s + 8$$

$$L\{x(t)\} = -\frac{5s^2 + 7s + 8}{s^3 + 3s^2 - 4s}$$

$$= -\frac{5s^2 + 7s + 8}{s(s-1)(s+4)}$$

$$= -\left(-\frac{2}{s} + \frac{4}{s-1} + \frac{3}{s+4}\right)$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{4}{s-1} - \frac{3}{s+4}$$

したがって

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{4}{s-1} - \frac{3}{s+4}\right\}$$

$$= 2u(t) - 4e^{t} - 3e^{-4t}$$

No.

Date . .

[4]

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + (a+b+c)x_4 &= 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 + (a^2+b^2+c^2)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(i) $a \neq b \neq c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & b+c \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} & \frac{b+c}{b-a} \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{c-a}{b-a} & 1-\frac{b+c}{b-a} \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} & \frac{b+c}{b-a} \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) & (b^2+c^2)-(b+c)(b+a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{b-c}{b-a} & -\frac{a+c}{b-a} \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{b-a} & \frac{b+c}{b-a} \\ 0 & 0 & (c+b)(c+a) & c^2-(a+b)c-ab \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

よって rank $= 3$

自由度 $4 - 3 = 1$

(ii) $a = b = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって rank $= 2$

したがって 自由度 $4 - 2 = 2$

No.

Date . .

[5] $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < 1) \\ 0 & (1 \leq t < 4) \end{cases}$

$T = 4, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$
$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^1 dx$$
$$= \frac{1}{4}$$
$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

$$\left(f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\sin\frac{n\pi}{2}x\right\} \right)$$

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{n\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{n\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)^2 - 2\cos\frac{n\pi}{2} + 1}$$
$$= \frac{1}{n\pi}\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)}$$