期权定价模型系列（一）——从原始有限阶二叉树模型到无限阶二叉树模型——Black-Scholes（BS）模型


数学达人上官正申
信息技术行业 从业人员

关注他

11 人赞同了该文章

本篇文章相当重磅！为本人废寝忘食，耗时多个小时整理。输入公式极其复杂，看不懂也可以感受数学公式的极致美，另外，对期权的解释相当深刻，大家可以点赞收藏，便于日后学习金融知识。

本篇文章继续发扬简洁、严谨、出神入化之风讨论权定价的原始二叉树模型。本篇文章着重讨论以下内容：

严谨解释为什么使用无风险收益率进行定价，

严格解释期权在何种情况下不会被提前行权，

严格推导价格上升比例与下降比例，

并严格解释为何上升下降比例的指数仅取一阶并不影响无限阶二叉树的结果，

从而推得无限阶二叉树模型即Black-Scholes（BS）模型。

在下一篇文章中我们会讨论另外一种经过作者本人修正并觉得更加合理的二叉树模型，同样也能推导出价格上长升比例与下降比例，进一步也能推导出Black-Scholes（BS）模型的结论。参见

期权定价模型系列（二）——从经过作者本人修正的有限阶二叉树模型到无限阶二...
16 赞同 · 3 评论 文章

感兴趣的读者可以关注我的知乎账号与知乎专栏“数学妙谈”、“金融科学之数学原理”。无限阶二叉树取极限时会用到中心权限定理，中心极限定理的证明参见

（全网独家发布）傅里叶级数（三）——若干种变量变换如加法（对应卷积）、数...
27 赞同 · 3 评论 文章

本文中仅以看涨期权为例来推导期权定价公式，看跌期权也是同理，我们会将结论给出。

金融衍生品的定价使用无风险收益率 在讨论之前我们先来澄清一个问题：有很多人疑惑为什么期货、期权的定价用的均是无风险收益率？其实这个问题很好解释，我可以告诉你不仅仅是期货和期权，**只要金融市场有效，任何金融衍生品的定价必须用无风险收益率。**

原因很简单，以期货为例，如果定价不使用无风险收益率，由于人们预测某种商品会涨价导致某种商品的期货比现货价格高很多，明显高出无风险收益率。那市场上就会有人买入现货（做多现货），再卖出期货（做空期货），等到期货到期交割之时将手中的现货交割给期货的买方多方，这样便实现了**无风险套利**。由于无风险套利的存在，大家纷纷买入现货，卖出期货，会导致现货价格上涨，期货价格下跌，最终导致我们不能通过套利获得比无风险收益率更高的收益率。

再举一个股票期权的例子，如果一只股票的看涨期权的定价使用了明显低于无风险收益率的收益率进行定价，那市场上就是有人卖出看涨期权（做空看涨期权）和一张债券（做空债券），用卖出去的钱买入相应股票（做多股票）以及看跌期权（做多看跌期权，假定看跌期权是用无风险收益率定价的）。由于债券与看涨期权的复合等价于股票与看跌期权的复合，因此通过差价也实现了无风险套利。**但是现实中金融市场不会绝对有效，因此金融衍生品价格在一定程度上偏离价值也是很正常的。**

提前行权问题 如果标的资产没有附加收益，在有效市场里期权不会被提前行权。因为提前行权获得的仅仅是**内在价值**，以看涨期权为例，提前行权获得的仅仅市场价高于行权价的差值，而由于标的资产有一定的概率上涨得更高，有一定的概率下降得更低，甚至是行权价以下，但是期望是当前价格加上无风险收益部分，而下降到行权价以下持有者并不亏钱，所以这部分概率导致期权还产生了**时间价值**。而在二级市场上出售不仅仅获得内在价值，同时也获得时间价值。**当然如果标的资产存在附加收益，可能会导致相应期权被提前行权，例如美式股票期权如果股票有分红可能会导致很多人提前行权。这是因为在分红前后价格会有断崖式下跌，而股票价格的断崖式下跌直接导致期权价格的断崖式下跌。有人可能会问，既然知道要分红，为什么期权价格不会提前下跌，而是要分红之后才下跌？这是因为美式期权可以提前行权，如果期权价格提前下跌，会导致很多人疯狂买入期权之后立即行权进行无风险套利。因此套利会导致期权价格不会提前下跌。但是很多人又不想承受股票价格断崖式下跌给期权价格造成的断崖式下跌带来的损失，因此势必有一部分人选择提前行权。**

无风险收益率 r (risk-free yield rate) 在讲解二叉树模型之前，我们先介绍一下无风险收益率。但是注意我们使用的无风险收益率并非真正的无风险收益率，而是无穷小时间内的收益率相加所得的名义收益率。显然它与真实的无风险收益率 r_f 的关系为

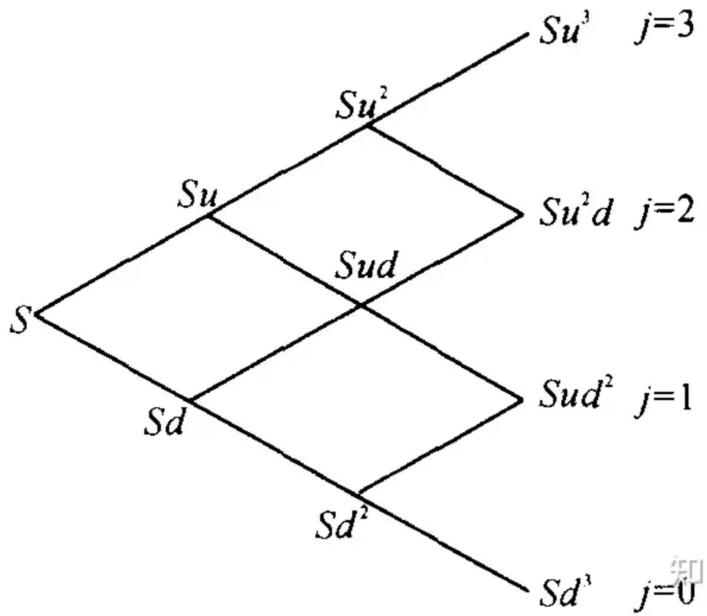
$$1+r_f=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n=\mathrm{e}^r \Longleftrightarrow r_f=\mathrm{e}^r-1 \Longleftrightarrow r=\ln(1+r_f)$$

则 P 元钱以无风险收益率存入银行经过时间 t 以后变为

$$P\mathrm{e}^{rt}=P(1+r_f)^t$$

其实我们用哪一个收益率都可以，因为二者是可以相互转化的，但因为在数学上用连续收益率更简单，因此我们直接使用连续收益率。

有限阶二叉树模型的假设 假定看涨期权的行权价格为 K，期权标的资产（股票期权的标的资产即为股票，商品期权的标的资产即为商品）价格为 S，为了便于区分，当前价格记为 S_0，无风险收益率为 r，标的资产价格波动率在无限短时间内的标准差为 σ，期权的剩余到期时间为 T，二叉树的层数为 n. 如下图所示



知乎 @上官正申

期权的二叉树定价模型

我们假定标的资产在每一向前一步有两种结果：一种是变为原来的 u （up）倍，相应的概率为 p；另一种是变为原来的 d （down）倍，相应的概率为 $1-p$ 。我们假定二者互为倒数，即相同的上升次数与下降次数以后标的资产的价格不变，即

$$ud=1$$

不妨假设

$$u=\mathrm{e}^{x},\quad d=\mathrm{e}^{-x}$$

前面已经说过，我们给金融衍生品定价假定未来价格只与无风险收益率有关，因此我们有

$$pe^{x}+(1-p)e^{-x}=e^{\frac{rT}{n}}$$

可得

$$p=\frac{e^{\frac{rT}{n}}-e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}},\quad 1-p=\frac{e^{x}-e^{\frac{rT}{n}}}{e^{x}-e^{-x}}$$

其实这个结果很简单，无非就是**杠杆原理。**显然，在 n 步二叉树模型的第 m 步中，上涨次数 j 满足二项分布，最终的标的价格为 $S_0u^jd^{m-j}$，相应的概率为 $C_m^jp^j(1-p)^{m-j}$，显然概率之和为 1，期望为 $S_0e^{\frac{mrT}{n}}$，我们不妨来验证一下：概率和为

$$\sum_{j=0}^{n}C_m^jp^j(1-p)^{m-j}=[p+(1-p)]^m=1$$

期望为

$$E(S_m)=\sum_{j=0}^{m}C_m^jp^j(1-p)^{m-j}S_0u^jd^{m-j}=\sum_{j=0}^{n}C_m^j(pu)^j[(1-p)d]^{m-j}S_0$$
$$=S_0[pu+(1-p)d]^m=S_0(e^{\frac{rT}{n}})^m=S_0e^{\frac{mrT}{n}}$$

有限阶二叉树模型的方差 在 n 步二叉树的第 m 步中，价格的方差

$$V(S_m)=E(S_m^2)-E^2(S_m)=\sum_{j=1}^{m}C_m^jp^j(1-p)^{m-j}(S_0u^jd^{m-j})^2-S_0^2e^{\frac{2mrT}{n}}$$
$$=S_0^2[pu^2+(1-p)d^2]^m-S_0^2e^{\frac{2mrT}{n}}=S_0^2(\frac{e^{\frac{rT}{n}}-e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}e^{2x}+\frac{e^{x}-e^{\frac{rT}{n}}}{e^{x}-e^{-x}}e^{-2x})^m-S_0^2e^{\frac{2mrT}{n}}$$
$$=S_0^2[e^{\frac{rT}{n}}(e^{x}+e^{-x})-1]^m-S_0^2e^{\frac{2mrT}{n}}$$

向上倍数 u 与向下倍数 d 的导出 因为我们已经推导了方差表达式，并且我们已经假定了无限短时间内的价格波动率标准差为 σ，因此当 $n\to\infty$ 时有（如果为了推导更加简单，我们还可以直接令 $m=1$）

$$\lim_{n\to\infty}\{[e^{\frac{rT}{n}}(e^{x}+e^{-x})-1]^m-e^{\frac{2mrT}{n}}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{m\sigma^2T}{n}$$

我们对上式进行泰勒展开分别取到 $\frac{T}{n}$ 的 1 阶与 x 的 2 阶进行比较可得

$$\lim_{n\to\infty}\{[(1+\frac{rT}{n})(2+x^2)-1]^m-1-\frac{2mrT}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{m\sigma^2T}{n}\}$$
$$\iff \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{2rT}{n}+x^2)^m-1-\frac{2mrT}{n}]=\lim_{n\to\infty}\frac{m\sigma^2T}{n}$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} mx^2=\lim_{n\to\infty}\frac{m\sigma^2T}{n}\iff \lim_{n\to\infty}x=\lim_{n\to\infty}\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$$

因此有

$$u=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}},\quad d=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

补充说明 这里的 x 是近似结果，如果要精确结果，是 $\sqrt{\frac{T}{n}}$ 的级数形式，需要包含高阶项，而不仅仅是一阶，不过这种近似对我们要求的最终结果并无影响，读者可以注意，以下的推导均没有用到 $\sqrt{\frac{T}{n}}$ 的高阶项，所以**取一阶不会影响无限阶二叉树的最终极限结果。当然，对于有限阶二叉树，取一阶是不够准确的。**

期权价值的导出 下面我们来推导一下期权的价值。我们站在当时时间点来看，期权到期时有各种可能，有可能标的价格 S_n 高于行权价 K ，此时期权的期末价值为 S_n-K ; 也有可能标的价格 S_n 不高于行权价 K , 则期权的期末价值为 0 . 由于我们采用的是 n 步二叉树模型，因此在基末标的价格有 $n+1$ 种可能。前面我们已经说过，期权上涨次数为 j 下跌次数为 $n-j$ 的情况标的资产的价格为 $S_0u^jd^{n-j}$, 概率为 $C_n^jp^j(1-p)^{n-j}$, 则在当前时间期权的价值为

$$V_0=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\max[C_n^jp^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j}-K),0]$$

其中 e^{-rT} 是将期末预期价值用连续无风险收益率折现到当下。上式求和各个项当且仅当

$$S_0u^jd^{n-j}>K\iff(\frac{u}{d})^jd^n>\frac{K}{S_0}\iff(\frac{u}{d})^j>\frac{K}{S_0d^n}\iff j>\frac{\ln\frac{K}{S_0}-n\ln d}{\ln\frac{u}{d}}$$

时才不为 0 . 将 u,d 的表达式代入上式可得

$$j>\frac{\ln\frac{K}{S_0}+n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{nT}}{2\sigma T}\ln\frac{K}{S_0}$$

令

$$\alpha=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{nT}}{2\sigma T}\ln\frac{K}{S_0}$$

则

$$\begin{aligned}
V_0&=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^jp^j(1-p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j}-K)\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j>\alpha}^{n}(C_n^jp^j(1-p)^{n-j}S_0u^jd^{n-j}-C_n^jp^j(1-p)^{n-j}K)\\
&=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j(pu)^j[(1-p)d]^{n-j}S_0-\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^jp^j(1-p)^{n-j}K
\end{aligned}$$

利用无限阶二叉树导出Black-Scholes（BS）模型 我们已经导出在 n 步二叉树模型下期权价值 V_0 的表达式，现在我们继续研究当步数 $n\to\infty$ 时 V_0 的最终极限

$$\lim_{n\to\infty}V_0=\mathrm{e}^{-rT}\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j(pu)^j[(1-p)d]^{n-j}S_0-\mathrm{e}^{-rT}\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^jp^j(1-p)^{n-j}K$$

我们令

$$\begin{aligned}
C_1&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j(pu)^j[(1-p)d]^{n-j}\\
C_2&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^jp^j(1-p)^{n-j}
\end{aligned}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} V_0 = \mathrm{e}^{-rT} C_1 S_0 - \mathrm{e}^{-rT} C_2 K$$

下面我们来求 C_1 与 C_2 . 我们容易算得，出现 1 的概率为 p , 出现 0 的概率为 $1-p$ 的伯努力实验的期望和方差分别为 $p, p(1-p)$, 而二项分布为 n 次相互独立的伯努力实验的数值之和，因此期望和方差分别为 $np, np(1-p)$. 所以由中心极限定理，我们立即知道当 $n \to \infty$ 时，二项分布趋于期望为 np , 方差为 $np(1-p)$ 的下态分布，即

$$\lim_{n\to\infty} B(n,p) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} N(np, \sqrt{np(1-p)}) \, .$$

我们用 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的累积概率函数，则

$$C_2 = -\Phi(\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \frac{np-\alpha}{\sqrt{np(1-p)}})$$
$$= \Phi(\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(p-\frac{1}{2})}{\sqrt{p(1-p)}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{T}\ln\frac{S_0}{K}}{2\sigma T\sqrt{p(1-p)}})$$

其中

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{p(1-p)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} \frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - \mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(p-\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\frac{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} - \frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{rT}{n} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{n}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - \frac{1}{2})$$
$$= \frac{r\sqrt{T}}{2\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{4}$$

代入 C_2 的表达式可得

$$C_2 = \Phi(\frac{\sqrt{T}\ln\frac{S_0}{K}}{\sigma T} + \frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma})$$

下面我们再来推导 C_1

$$C_1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j(pu)^j[(1-p)d]^{n-j}=[pu+(1-p)d]^n\lim_{n\to\infty}$$

$$\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j\left(\frac{pu}{pu+(1-p)d}\right)^j\left(\frac{(1-p)d}{pu+(1-p)d}\right)^{n-j}$$

$$=\mathrm{e}^{rT}\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j\left(\frac{pu}{pu+(1-p)d}\right)^j\left(\frac{(1-p)d}{pu+(1-p)d}\right)^{n-j}=\mathrm{e}^{rT}\lim_{n\to\infty}\sum_{j>\alpha}^{n}C_n^j\left(\frac{pu}{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}\right)^j\left(\frac{(1-p)d}{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}\right)^{n-j}$$

类比 C_2 推导过程同理可知

$$C_1=\mathrm{e}^{rT}\Phi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{npu}{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}-\alpha}{\sqrt{\frac{npu}{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}\left(1-\frac{pu}{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}\right)}}\right)=\mathrm{e}^{rT}\Phi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{npu-\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}\alpha}{\sqrt{npu(\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}-pu)}}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{rT}\Phi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\frac{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}-\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}-\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}-\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{nT}}{2\sigma T}\ln\frac{S_0}{K}\cdot\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}}{\sqrt{n\frac{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}-\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}-\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{rT}{n}}-\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}-\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)}}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{rT}\Phi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\frac{\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}+\frac{rT}{n}-\frac{\sigma^2T}{2n}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(1+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)-\left(1+\frac{rT}{n}\right)\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{nT}}{2\sigma T}\ln\frac{S_0}{K}\cdot\left(1+\frac{rT}{n}\right)}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}}}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{rT}\Phi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}-\frac{\sigma}{4}\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\left(1+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)-\left(1+\frac{rT}{n}\right)\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{nT}}{2\sigma T}\ln\frac{S_0}{K}\cdot\left(1+\frac{rT}{n}\right)}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{rT}\Phi\left(\frac{\sqrt{T}}{\sigma T}\ln\frac{S_0}{K}+\frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

综上所述看涨期权的价值

$$V_c=\lim_{n\to\infty}V_0=\mathrm{e}^{-rT}C_1S_0-\mathrm{e}^{-rT}C_2K=\Phi\left(\frac{\sqrt{T}}{\sigma T}\ln\frac{S_0}{K}+\frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}\right)S_0$$

$$-\mathrm{e}^{-rT}\Phi\left(\frac{\sqrt{T}\ln\frac{S_0}{K}}{\sigma T}+\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}\right)K$$

同理，看跌期权的价值

$$V_p = e^{-rT}\Phi(-\frac{\sqrt{T}\ln\frac{S_0}{K}}{\sigma T} - \frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma})K - \Phi(-\frac{\sqrt{T}}{\sigma T}\ln\frac{S_0}{K} - \frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma})S_0$$

这便是期权定价的**Black-Scholes（BS）模型。**

编辑于 2022-05-21 15:43

「真诚赞赏，手留余香」

赞赏

还没有人赞赏，快来当第一个赞赏的人吧！

数学　二叉树期权定价模型　无风险套利

发布一条带图评论吧

3 条评论　默认　最新

风祁歌
点赞收藏
2023-03-07　回复　喜欢

朝夕之思
简单直接了当，爱了，书上推理过程都略了
2022-07-10　回复　喜欢

数学达人上官正申 作者
🤝🤝🤝🙏🙏🙏
2022-07-10　回复　喜欢

文章被以下专栏收录

金融科学之数学原理

推荐阅读

简单推导期权定价模型

Ming 发表于Ming的...

图解期权1:定价原理与隐含波动率

引言期权模型的数学公式比较复杂、晦涩，但模型背后的思想其实比较简单。 本文尝试不借助复杂的数学，通过图解的方式，通俗易懂的解释期权模型的构建思想。 如有错漏，欢迎指出、探讨。 1....

hmin84

【Python搞量化】如何基于欧式期权BSM进行蒙特卡洛模...

王几行XI... 发表于Pytho...

BS期权定价公式及其他定价模型总结综述

BS期权定价公式及其他定价模型总结综述 于德浩 2021.4.22 期权定价是一个很现实的问题。比如，当前股价是S=3.5元，股价的月波动率是σ=6%，请问剩余期限T=30天的行权价K=3.5元的平值认购期...

于德浩 期... 发表于股票期权投...