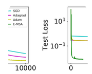
【HFT】HJB方程与最优执行问题

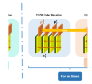
段易通
清华大学 交叉信息院博士在读

最优控制算法在很多领域都有着广泛的应用，其主要分为两大类，第一类是变分法与庞特里亚金原理（Pontryagin's maximum principle，PMP），而第二类则是动态规划和Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程。本篇文章将介绍第二类的HJB方程，以及该方法在金融领域的最优执行问题中的应用，而对于第一类PMP方法这里就不做介绍了，可以参看其它资料，我之前也介绍过两篇PMP应用于神经网络训练的论文，对这方面感兴趣的同学也可以看看。

段易通：替代梯度下降——基于极大值原理的深度学习训练算法
100 赞同 · 7 评论 文章



段易通：加速对抗训练——YOPO算法浅析
35 赞同 · 4 评论 文章



最优控制问题

首先，我们通过一个简单的例子来理解最优控制问题中的设定

一辆汽车在地面上行驶，在时刻t，其位置为$s(t)$、速度为$v(t)$、加速度为$a(t)$，我们可以通过转方向盘、踩油门/刹车的方式来实现对于汽车的控制。而我们的目标是：通过控制方向盘、油门和刹车，我们需要使得汽车在最终的T时刻离目的地尽可能近，同时还要令耗油量较小。

从这个例子可以看出，最优控制问题中的变量分为两种：

1. **状态变量**：即反映物体当前状态的变量（例如汽车的位置、速度和加速度），这种变量是关于时间的变量，因此可以将其记为 $x(t)$
2. **控制变量**：即可以人为控制的变量（例如转方向盘、踩油门/刹车），这种变量也是关于时间的变量，因此可以将其记为 $u(t)$

我们知道**控制变量可以引起状态变量的变化**，我们称为dynamic，其一般形式为：

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t, x(t), u(t))$$

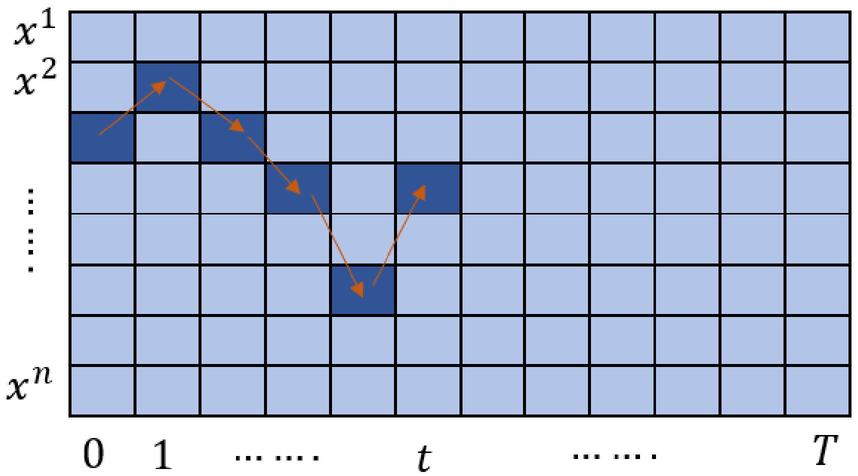
而最优控制问题的目标就是要最大化奖励，或者说最小化损失，损失可以分为两部分，一部分是**过程损失**（例如行驶过程中的耗油量），另一部分是**终态损失**（例如最终与目的地之间的距离），我们可以将两者分别记为 $f(t,x(t),u(t))$ 和 $h(x(T))$ ，那么最优控制问题就可以表示为：

$$\min_u \int_0^T f(t,x(t),u(t))dt + h\left(x\left(T\right)\right)$$

动态规划求解

HJB方程采用的是动态规划的思想，因此在正式引入HJB方程之前，我们先简要地介绍一下如何利用经典动态规划来求解这个最优控制的问题。

动规的原理想必大家都很熟悉了，这里不再赘述。考虑到问题中的变量都是连续的，为了能够求解，首先将 $x(t)$ 和 $u(t)$ 对于时间t离散化，得到序列 x_t 和 u_t ，然后再将 x_t 和 u_t的取值离散化（比如分别为 $x^1,...,x^n$ 和 $u^1,...,u^m$ ），如下图所示。而 x_t 和 u_t的关系就变为 $x_{t+1}=x_t+a(t,x_t,u_t)$ 。



对变量离散化

在这样一番离散化处理之后，我们就可以很容易地运用动态规划来求解出最优的控制序列，直接上常规操作，定义**价值函数** $V(t,x_t)=\min_u[\sum_t^T f(t,x_t,u_t)+h(x_T)]$ ，其含义是从指定的时间和状态出发，最小损失为多少。而按照动态规划的思想，我们知道t和t+1时刻的价值函数V满足关系

$$V(t,x_t)=\min_{u_t}[f(t,x_t,u_t)+V(t+1,x_t+a(t,x_T,u_t))]$$

而在末时刻T我们有 $V(T, x_T) = h(x_T)$ ，因此只要按照 $T-1, T-2, \ldots, 0$ 的顺序，依次求出 x_t 所有取值下的 $V(t, x_t)$ ，就可以计算出最小的损失，而沿着最小损失路径的 $\{u_t^*\}_{t=0,\ldots,T-1}$ 就是最优控制序列，这样我们就通过经典的动态规划方法求出了离散化后的最优控制问题。

HJB方程

前面我们介绍了如何用动规来求解最优控制问题的离散化版本，可是我们知道现实中的状态和控制变量大多是很复杂的，这就使得如果想要比较精确地求解的话，其离散化取值的数量需要很大，这就大大增加了复杂度，那么有没有办法直接对原始的连续问题进行求解呢？接下来介绍的Hamilton-Jacobi-Bellman方程就解决了这个问题。

现在让我们回到连续版本的最优控制问题当中，状态和控制变量变为函数 $x(t)$ 和 $u(t)$ 。我们的求解思路还是动态规划，因此仍然可以定义价值函数：

$$V(t, x(t)) = \min_u \left[\int_t^T f(s, x(s), u(s)) ds + h(x(T)) \right]$$

则根据价值函数的定义，我们有：

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &= \min_u \left[\int_t^{t+dt} f(s, (x(s), u(s)) ds + V(t+dt, x(t+dt)) \right] \\ &\leq \int_t^{t+dt} f(s, (x(s), u(s)) ds + V(t+dt, x(t+dt)) \end{aligned}$$

该不等式对于任意的函数 u 都成立，现在我们对 $V(t+dt, x(t+dt))$ 作泰勒展开，有

$$V(t+dt, x(t+dt)) = V(t, x(t)) + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} dt + o(dt)$$

将它代入，再在不等式两边同时除以 dt ，有

$$0 \leq \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{dt} \int_t^{t+dt} f(s, x(s), u(s)) ds + \frac{o(dt)}{dt}$$

令 dt 趋于0，有 $\lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \int_t^{t+dt} f(s, (x(s), u(s)) ds = f(t, x(t), u(t))$ ，则不等式可以写做

$0 \leq \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + f(t, x(t), u(t))$

因为不等式对于任意 u 都成立，因此我们有

$$0 \leq \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \min_u \left[\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + f(t,x(t),u(t))\right]$$

另一方面，一定存在一个 u_ϵ （例如最优的 u^* ），对于任意 $\epsilon > 0$ 满足：

$$V(t,x(t)) + \epsilon dt \geq \int_t^{t+dt} f(s,(x(s),u_\epsilon(s))ds + V(t+dt,x(t+dt))$$

那么对该式做同样的一系列操作后，可以得到

$$\epsilon \geq \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + f(t,x(t),u_\epsilon(t))$$

计算不等式右侧的最小值，并令 $\epsilon \to 0$ ，可以得到

$$0 \geq \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \min_u \left[\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + f(t,x(t),u(t))\right]$$

两个不等式都需要满足，因此下面的等式一定成立

$$0 = \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \min_u \left[\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + f(t,x(t),u(t))\right]$$

将dynamic公式 $\frac{dx(t)}{dt} = a(t,x(t),u(t))$ 代入，可以得到**最终的HJB方程**

$$\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \min_u[\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}a(t,x(t),u(t)) + f(t,x(t),u(t))] = 0$$

我们将 $\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}$ 分别记为 $\nabla_t V$ 和 $\nabla_x V$ ，并设哈密顿量 $H(t,x(t),u(t)) = \nabla_x V(t,x(x)) \cdot a(t,x(t),u(t)) + f(t,x(t),u(t))$，则HJB方程可以写做：

$$\nabla_t V(t,x(t) + \min_u[H(t,x(t),u(t))] = 0$$

可以看出该方程其实就是一个**偏微分方程**，加上边界条件 $V(T,x(T)) = h(x(T))$ 后，求解该方程，就可得到价值函数 $V(t,x(t))$ 的表达式，进而求出最优控制函数 u^* 的表达式，这样我们就通过HJB方程得到了该最优控制解的解析形式。

对于比较简单的最优控制问题，例如dynamic和损失函数分别是线性和二次函数的情况（一般称作Linear-Quadratic Regulator），该偏微分方程可以得到解析解，但是如果函数形式比较复杂的

话，可能就无法求出解析解了，这样就只能靠数值方法来求解方程，也就又回到了之前的离散化情况之中。

随机版本的HJB方程

我们前面讨论的都是确定（deterministic）情况下的最优控制问题，即dynamic的形式为 $dx(t)=a(t,x(t),u(t))dt$，然而在很多时候dynamic并不是确定的（如金融问题），因此我们接下来推导一下随机（stochastic）版本的HJB方程。

在随机情况下，假定dynamic是一个**伊藤漂移扩散过程**（Itō drift-diffusion process），其形式为：

$$\begin{cases} dx(t)=\mu(t,x(t),u(t))dt+\sigma(t,x(t),u(t))dB_t, t\in[s,T] \\ x(s)=y \end{cases}$$

其中 $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}$，$B_t$ 是**布朗运动**（Brownian motion）。

为了讨论方便，我们定义 $J(s,y;u(\cdot))=\int_s^T f(t,x(t),u(t))dt+h\left(x\left(T\right)\right)$，其中 $u(\cdot)$ 代表在 $[0,T]$ 范围内的一个控制函数，由于引入了随机性，则价值函数可以写做：

$$V(s,y)=\min_u \mathbb{E}\left[J(s,y,u(\cdot))\right]$$

那么我们有等式：

$$V(s,y)=\min_u\{\mathbb{E}\left[\int_s^{s+ds} f(t,x(t),u(t))dt\right]+V(s+ds,x(s+ds))\}$$

令 u^* 是满足上面最小式的函数，即有 $V(s,y)=\mathbb{E}[J(s,y;u^*)]$，而由于价值函数的最优性，$u^*$ 同样也满足

$$\begin{aligned} V(s+ds,x(s+ds)) &= \min_u \mathbb{E}\left[J(s+ds,x(s+ds),u(\cdot))\right] \\ &= \mathbb{E}[J(s+ds,x(s+ds);u^*)] \end{aligned}$$

该式可以用反证法证明：如果u^* 对于 $V(s+ds,x(s+ds))$ 不是最优的，则存在 u'，有

$$\mathbb{E}[J(s+ds,x(s+ds);u')]<\mathbb{E}[J(s+ds,x(s+ds);u^*)]$$

那么我们可以构造一个函数 $u''(t)=\begin{cases} u^*(t) & \text{if } t<s+ds \\ u'(t) & \text{if } t\geq s+ds \end{cases}$，这样就有

$$\mathbb{E}[J(s,y;u'')] < \mathbb{E}[J(s,y;u^*)]$$

这就与 u^* 最优相矛盾，命题得证。

这样之前等式就可以写为：

$$\begin{aligned}
V(s,y) &= \mathbb{E}\left[\int_s^{s+ds} f(t,(x(t),u^*(t))dt + V(s+ds,x(s+ds))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^{s+ds} f(t,(x(t),u^*(t))dt + J(s+ds,x(s+ds);u^*)\right]
\end{aligned}$$

类似地，现在需要展开 $J(s+ds,x(s+ds);u^*)$ 项，不过考虑到 $x(t)$ 是一个随机过程，这里不能直接做一阶泰勒展开，而是需要使用**伊藤引理**（Itō's lemma），对它不了解的同学可以看相关资料，我这里推荐[3]和[4]。通过伊藤引理可知：

$$\begin{aligned}
J\left(s+ds,x(s+ds);u^*\right) &= J\left(s,y;u^*\right) + \frac{\partial J}{\partial t}ds + \frac{\partial J}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}(dx)^2 \\
&= J\left(t,y,u^*\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\sigma^2\right)ds + \frac{\partial J}{\partial x}\sigma dB
\end{aligned}$$

先看最后一项，则考虑到随机变量 $\frac{\partial J}{\partial x}\sigma$ 和 dB 相互独立，则期望

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial J}{\partial x}\sigma dB\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial J}{\partial x}\sigma\right]\mathbb{E}\left[dB\right] = 0$$

而对于 $\frac{\partial J}{\partial t}ds$ 项，有：

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial J}{\partial t}ds\right] = \frac{\partial \mathbb{E}[J]}{\partial t}ds = \frac{\partial V}{\partial t}ds$$

其它微分项也类似，因此有

$$\mathbb{E}[J\left(s+ds,x(s+ds);u^*\right)] = V\left(s,y\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right)ds$$

将其代入上面的等式，有

$$\begin{aligned}
V(s,y) =& \mathbb{E}\left[\int_s^{s+ds} f(t,(x(t),u^*(t))dt\right] \\
&+ V\left(s,y\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right)ds
\end{aligned}$$

根据 u^* 最优的性质可知，对于任意函数 u ，有

$$V(s,y) \leq \mathbb{E}\left[\int_s^{s+ds} f(t,(x(t),u(t))dt\right] + V(s,y) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right)ds$$

类似于上一节的操作，不等式两边都消去 $V(s,y)$ ，并都除以 ds ，且令 $ds \to 0$ ，则有

$$0 \leq \frac{\partial V}{\partial t} + \left[f(s,y,u(s)) + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right]$$

该不等式对于任意 u 都成立，则有

$$0 \leq \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u\left[f(s,y,u(s)) + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right]$$

另一方面，由于存在函数 u^* ，满足等式：

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[f(s,y,u^*(s)) + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right]$$

那么就有

$$0 \geq \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u\left[f(s,y,u(s)) + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right]$$

两个不等式都成立，那么唯一的可能就是取等号，则有：

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u\left[f(s,y,u(s)) + \frac{\partial V}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma^2\right]$$

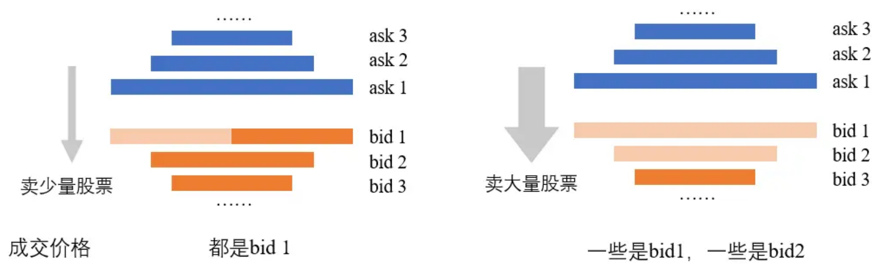
将省略掉的自变量加上，重新整理一下，则有：

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \min_u\left[f(t,x,u(t)) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\mu(t,x,u(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}\sigma^2(t,x,u(t))\right] = 0$$

加上边界条件 $V(T,x(T)) = h(x(T))$ ，这就是随机控制问题的HJB方程。

最优执行问题

最优执行（optimal execution）问题是金融领域中一个重要的实际问题，我们知道，金融产品的价格是通过**市场交易**得到的。以股票为例，如果有一个股票持有者想要卖出一定数量的股票，而同时有另一方愿意以p元的价格购买，那么这笔交易就达成了，这支股票的当前价格就为p，然而这里面却存在一个问题——**没有考虑股票的交易数量**，如果卖方想要卖出股票的量很大，那么可能一个单独的买方并没有办法全部“吃”下，这时就需要其他的买方也参与进来了，如果这些买方的意愿价格小于p，那么这部分成交的股票价格就会小于p（如下图所示），从而导致了这样一种现象：**如果想要短时间卖出大量股票，其成交价格并不一定都是当前价格，会有部分股票的价格更低**，而类似地，大量买入股票也会有价格更高的情况。可以看到，这种现象使得**大规模股票交易的成本更高**，因此为了降低成本，我们需要**将大规模的交易单拆分成若干个小规模的订单**，在一定时间内根据市场情况合理地分批下单，这就是最优执行问题。



抛售大量的股票会产生额外的成本

上面介绍的是最优执行问题的背景和基本思想，现在具体来看这个问题，假设我们在初始的 0 时刻持有的股票数量为 $q(0)$ ，我们的目标是想要在 T 时刻之前将所持有的的股票全部卖出，而卖出股票的方式有两种：**市价单**（market order）和**限价单**（limit order），对它们不了解的同学可以看一些limit order book的相关参考资料，这里就不过多介绍了，简单地说，市价单是不在乎价格，要求立即成交的交易订单，而限价单则要在满足特定价格的情况下才可以成交，因此在交易过程中，**市价单只需要指定买入或卖出股票的数量，而限价单除了数量还需要指定交易价格。**

可以看出，其实最优执行问题可以看做一个最优控制问题，我们可以把**当前股票价格、当前持有的股票数量、已得到的现金量等**看做是状态变量，将**关于市场单以及限价单的操作**看做是控制变量，而最终的目标就是**尽量在T时刻前清空股票、同时最大化现金收益。**

接下来我们就利用HJB方程来解决该问题，这部分内容主要来自于论文Optimal Portfolio Liquidation with Limit Orders。

这里先说一下整体的思路，我们把实际问题化简一下，**只考虑限价单的操作**：在某一个时刻 t ，我们会根据目前状态挂出一笔限价卖单，该单的数量足够多（比如说把当前持有的股票都挂上）以尽量保证我们可以“吃”掉所有满足要求的买单；而到了下一时刻 $t+\Delta t$ ，我们先将未执行的限价单撤回，重复之前的步骤继续挂单，直到卖完所有股票或者到达最终的T时刻为止。这样只要还有股票没有卖完，我们在每一时刻都会重复地挂单和撤单，从而不断地更新限价单价格。

有了整体思路之后，就可以对问题进行建模，具体如下：

- 股票价格 $S(t)$：看做是**带漂移的布朗运动**$dS(t)=\mu dt+\sigma dB_t$，那么限价卖单价格（ask price）可以表示为 $S^a(t)=S(t)+\delta(t)$，其中**价差**$\delta(t)\geq 0$
- 当前持有量 $q(t)$： $q(t)=q(0)-N(t)$，其中 $N(t)$ 是到目前t时刻为止卖出的股票数量，它是一个**跳过程**（jump process），比如说可以是泊松过程，其**强度**为 λ，即单位时间内卖出股票的平均数量为 λ，显然 λ 应该与价差 δ 有关，这里我们认为 λ 满足$\lambda(\delta)=Ae^{-k\delta}$
- 现金数量 $X(t)$：即截止到目前卖出股票得到的现金数，可以知道其dynamic为 $dX(t)=(S(t)+\delta(t))dN(t)$
- 效用函数：我们目标是**在T时刻卖光股票的同时还要获得尽量多的现金**，因此效用函数为 $\mathbb{E}\left[-e^{-\gamma X(T)+q(T)(S(T)-b)}\right]$，其中$\gamma$ 是权衡系数， b 是一个常数，代表处理剩余股票的成本。可以看出这个效用函数其实就是一个**奖励函数**，当最终的T时刻现金 $X(T)$)越大或者剩余股票数 $q(T)$ 越小时，该函数的值越大。

现在我们将这些变量对应到控制问题当中

- 控制变量：根据设定，我们在每一时刻都要撤回已有的限价单，并挂出新的限价单，单子的数量等于当前持有的股票数量，因此我们**唯一的控制变量的就是价差**$\delta(t)$，不需要再额外考虑下单撤单时间、下单撤单量等变量。
- 状态变量：已持有的现金 $X(t)$、剩余的股票数量 $q(t)$ 以及当前的股票价格 $S(t)$
- 优化目标：最大化效用函数，为了与上文最小化损失函数相一致，我们写成 $\min_\delta \mathbb{E}\left[e^{\gamma X(T)+q(T)(S(T)-b)}\right]$，注意到该问题中**只有末态损失**，并没有过程损失。

完成对应之后，我们就可以用上面的HJB方程来解决这个问题，不过还不能直接套用，因为之前推导时我们**只考虑了状态变量的dynamic是伊藤漂移扩散过程的情况，而这里却还有一个额外的跳过程** $q(t)$，因此我们需要再做一点小的改动。

回忆上一节的证明过程，价值函数为：

$$V(t,x,q,s)=\min_\delta E\left[e^{-\gamma X(T)+q(T)(S(T)-b)}\right]$$

还是同样的操作，对于最优的 δ^*，考虑到过程损失为0，我们有

$$V(t,x,q,s)=E\left[J\left(t+dt,x(t+dt),q(t+dt),s(t+dt);\delta^*\right)\right]$$

对J做展开：

$$\begin{aligned}&J\left(t+dt,x(t+dt),q(t+dt),s(t+dt);\delta^*\right)\\=&J\left(t,x(t),q(t),s(t);\delta^*\right)+\frac{\partial J}{\partial t}dt+\frac{\partial J}{\partial s}ds+\frac{\partial^2 J}{\partial s^2}ds+\frac{\partial J}{\partial x}dx+\frac{\partial J}{\partial q}dq\end{aligned}$$

前四项和之前是一样的，我们重点来分析**后两项** $\frac{\partial J}{\partial x}dx+\frac{\partial J}{\partial q}dq$，根据模型设定，我们有 $dx=(S(t)+\delta(t))dN$ 和 $dq=-dN$，那么

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial x}dx+\frac{\partial J}{\partial q}dt &= \frac{\partial J}{\partial x}(s+\delta)dN-\frac{\partial J}{\partial q}dN \\
&= \left[\frac{\partial J}{\partial x}(s+\delta)-\frac{\partial J}{\partial q}\right]dN
\end{aligned}
$$

根据多元微分学的知识，我们知道 $\left[\frac{\partial J}{\partial x}(S+\delta)-\frac{\partial J}{\partial q}\right]$ 其实就是一个**方向导数**，我们可以将它写做

$$
\frac{\partial J}{\partial x}(s+\delta)-\frac{\partial J}{\partial q}=\frac{J\left(t,x+\Delta\left(s+\delta^*\right),q-\Delta,s;\delta^*\right)-J\left(t,x,q,s;\delta^*\right)}{\Delta}
$$

考虑到我们**持有的股票数量是离散的**，只能一股一股地卖，因此 Δ 只能是正整数，这里取1，则原式可以写为

$$
\frac{\partial J}{\partial x}dx+\frac{\partial J}{\partial q}dt=\left[J\left(t,x+s+\delta^*,q-1,s;\delta^*\right)-J\left(t,x,q,s;\delta^*\right)\right]dN
$$

现在求期望，注意到随机变量 $J\left(t,x+s+\delta^*,q-1,s;\delta^*\right)-J\left(t,x,q,s;\delta^*\right)$ 和 dN 是相互独立的，再由跳过程 $N(t)$ 的定义有 $E[dN]=\lambda\left(\delta^*\right)dt=Ae^{-k\delta^*}dt$ ，则

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial J}{\partial x}dx+\frac{\partial J}{\partial q}dt\right] &= E\left[\left(J\left(t,x+s+\delta^*,q-1,s;\delta^*\right)-J\left(t,x,q,s;\delta^*\right)\right)dN\right] \\
&= E\left[J\left(t,x+s+\delta^*,q-1,s;\delta^*\right)-J\left(t,x,q,s;\delta^*\right)\right]E[dN] \\
&= \left[V\left(t,x+s+\delta^*,q-1,s\right)-V(t,x,q,s)\right]Ae^{-k\delta^*}dt
\end{aligned}
$$

将这两项的期望带回到原先的展开式，有

$$
\begin{aligned}
V(t,x,q,s)= & V(t,x,q,s)+\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)dt \\
& +\left(\left[V\left(t,x+s+\delta^*,q-1,s\right)-V(t,x,q,s)\right]Ae^{-k\delta^*}\right)dt
\end{aligned}
$$

接下来的操作就和之前一样了，通过分别构造大于等于0和小于等于0的两个不等式，我们可以得到该问题下的HJB方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t}+\mu\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\min_{\delta}\left\{Ae^{-k\delta}\left[V\left(t,x+s+\delta,q-1,s\right)-V(t,x,q,s)\right]\right\} \\
=0
\end{aligned}
$$

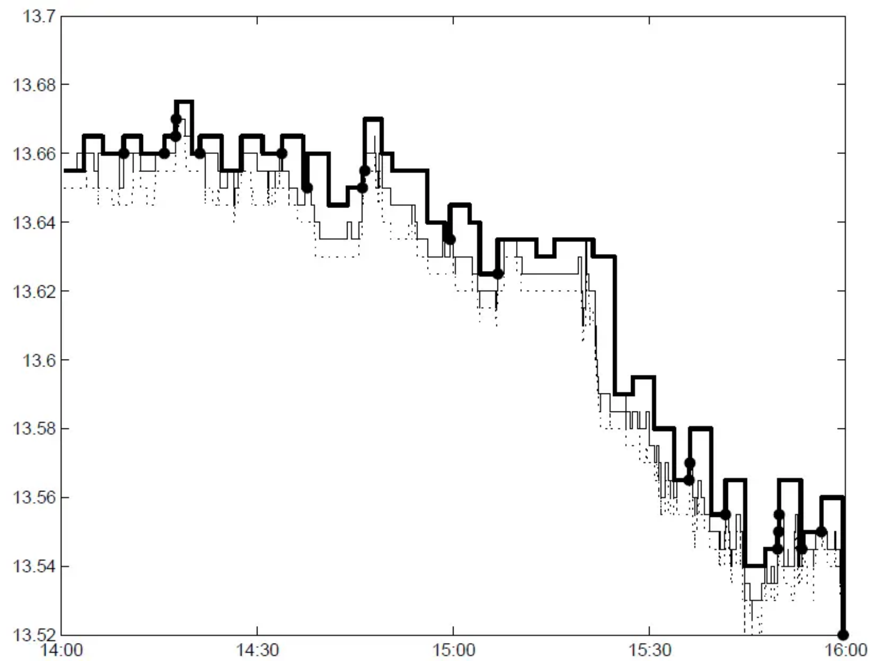
边界条件为：

$$\begin{cases} V(T,x,q,s) = e^{-\gamma x + q(s-b)} \\ V(t,x,0,s) = e^{-\gamma x} \end{cases}$$

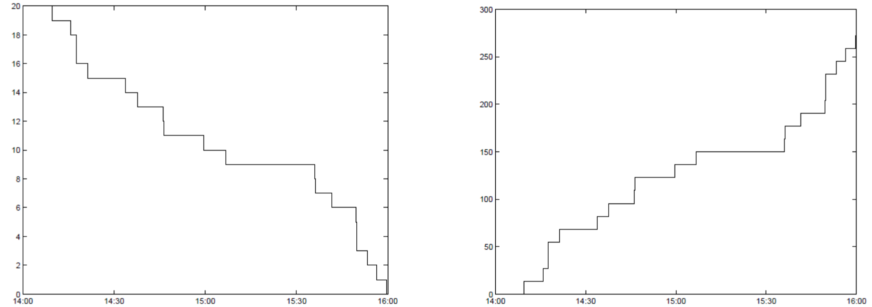
对这个偏微分方程进行求解，就可以得到价值函数 $V(t,x,q,s)$ ，进而得到当前的最优价差 $\delta^*(t)$ ，由于求解过程以及最优解的形式都比较复杂，这里就不具体写了，想看的同学可以看论文原文。

最后简单说一下实验，我们知道，实际市场中的交易价格是离散的，因此在我们报的价格实际上是**离理论最优价格最近的tick价格**；另外，考虑到订单的优先级，频繁地挂单和撤单会降低成交的概率，因此更新限价单的时间间隔 Δt 不能太小，当一笔限价单挂出之后，**只有当发生交易或订单停留时间超过 Δt 之后**，我们才会更新订单。

首先我们根据历史的交易数据**估计**出模型中 $\mu, \sigma, A, k,$ 等参数，然后通过该HJB方程的解析解求出最优报价，最后按照模型给出的报价来**模拟**整个执行过程，下图是一个例子，模拟的是模型于2010年11月8日14:00-16:00，在法国安盛（AXA）股票上的交易过程。



模型的执行过程，其中粗线是模型报价，实线是市场的最佳卖价（best ask quotes），虚线是市场的最佳买价（best bid quotes）



左图是持有的股票数量，右图是现金量

总结

这篇文章主要介绍了HJB方程以及它在金融领域的最优执行问题上的一个应用，总的来说，HJB方程用到的还是动态规划的思想，只不过由于变量的连续性，我们需要用偏微分方程来求解；而在面对随机控制问题时，我们需要考虑到不同随机过程的特点，从而得到相应的HJB方程，例如上文的最优执行问题，由于状态变量中多了跳过程，因此HJB方程也要做出相应的改动；如果我们考虑更加复杂的模型，比如考虑市价单、交易数量、交易速率，交易费用等实际情况，只要正确地建立HJB方程，该问题也是可解的。而除了最优执行问题，只要是可以用这个框架来描述的问题，也都是可以用HJB方程来解决的。

参考资料

[1] 知乎文章：强化学习第4期：H-J-B方程

[2] Stochastic Control, HJB Equations in Finance

[3] 知乎文章：布朗运动、伊藤引理、BS 公式（前篇）

[4] 知乎文章：布朗运动、伊藤引理、BS 公式（后篇）

[5] Optimal Portfolio Liquidation with Limit Orders

编辑于 2020-07-27 11:01

最优控制　金融　动态规划

欢迎参与讨论

48 条评论

默认 最新

齐兰堂
天呐 写的真的太好了 学到很多很多东西
2020-07-28 回复 2

与苏
想问一下大神PMP和HJB equation 有什么区别和联系吗?
2020-08-08 回复 2

段易通 作者
PMP：利用了物理中的哈密顿原理，通过建立常微分方程（哈密顿方程），可以一次性解出控制函数，但是不能保证是最优的，只是最优解的充分条件。
HJB：采用了动态规划的思想，把最优控制问题递归地分解为最优子问题，从而建立一个偏微分方程，可以保证解出最优解。
只是个人浅见，具体还是建议看一下控制理论的相关教材。
2020-08-08 回复 7

与苏 ‣ **段易通**
感谢感谢～
2020-08-08 回复 喜欢

摸摸56摩托隔离栏
太感谢
2020-12-24 回复 2

洛神英
老哥知道HJB方程金融文章可以投哪些期刊不，偏理论
2020-10-15 回复 2

minuxVirtual
EJOR
2020-10-29 回复 喜欢

我不是果皮
金融数学期刊都可以的，或者做控制的
2020-11-07 回复 喜欢

展开其他 1 条回复 〉

XXaa
想问下大神关于最后代入参数对执行过程进行模拟求解的图像有没有相关代码可以参考？感谢
2020-08-12 回复 2

TonightMC ‣ **XXaa**
😂😂😂

2021-01-05 回复 喜欢

XXaa ‣ TonightMC
没有呀 我卡住了😅
2021-01-03 回复 喜欢

展开其他 2 条回复 ›

hutch
有个max在那里，Bellman方程也难解。这里只能猜
01-13 回复 喜欢

天下武功 唯快不破
想问一下作者，最优执行那部分中，对J展开，是如何做的？方法是什么？求教
2023-09-12 回复 喜欢

VIC
大佬，我想请教一个问题。在对控制u求一阶导的时候，为什么不需要管X的那一项。按理说dx/dt是带有u的，那理论上x的表达式应该带有u。为什么不对x关于u求导
2023-07-09 回复 喜欢

Nsbsk
想问一下，随机版本的HJB可以将T改为+无穷吗？结果是一样的。谢谢
2023-07-08 回复 喜欢

妖刀可加米
谢谢博主大大详尽的模型说明，刚从随机演化博弈的伊藤方程零解矩稳定性证明中缓过来，就掉到新坑里了。😳😳
2023-04-29 回复 喜欢

点击查看全部评论 ›

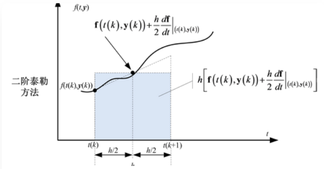
欢迎参与讨论

人工智能与量化投资
一起量化吧！

Optimizers' Garden
优化&机器学习理论拾遗

清华大学量化投资协会
搭建量化交流平台、储备专业人才、服务行业发展

推荐阅读

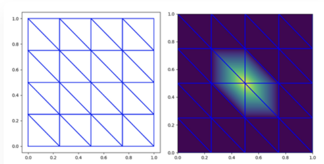


常微分方程的二阶泰勒数值解法及Matlab程序

Matla... 发表于Matla...

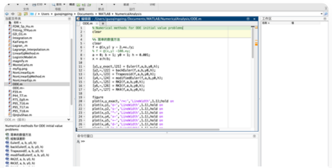
研0纪实：DG方法解一维方程组(青春版)

吟雪千夏 发表于研0纪实



基元巧合（下篇）：用有限元方法求解二维Poisson方程

狗带妖怪 发表于运筹的黎明



第9章 常微分方程初值问题数值解法(MATLAB)

清清清平 发表于数值分析