

随机微分方程（SDE）形如

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

其积分形式为

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(t, X_t)dt + \int_0^t \sigma(t, X_t)dB_t$$

此方程的解 X_t 称为伊藤过程，或扩散过程（diffusion process）。在一定的条件下，随机微分方程的解是存在唯一的。

令

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{ij}^x + \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_i^x$$

由伊藤公式可得到 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^N), \left(f(X_t) - \int_0^t Lf(X_u)du, F_t, \mathbb{P}\right)$ 是鞅。这建立了扩散过程（ X_t ）与二阶微分算子 L 之间的联系。更进一步，可以给出了抛物型方程的随机表示。^[1]

(二)动态优化--汉密尔顿函数（最优控制）和HJB方程（动态规划)



追风少年

我只是知识的搬运工

关注他

▲ 你关注的 Edward.Fu 赞同

0.引言

动态优化解决的问题是传统的拉格朗日函数方法（静态等式约束问题）以及Kuhn-tucker方法（静态不等式约束问题）无法解决的动态问题，在宏观经济学中主要是涉及离散和连续的涉及时间的变化的问题，我们主要关注后者，如产出 Y_t 与时间密切相关，其中主要的方法是**变分法，最优控制和动态规划**三种方法。

变分法相比另外两种方法，比较少用与解决宏观经济学模型中，一是因为其本身较为复杂，更多的是用于证明最优控制以及动态规划的所需要的必要条件，而非应用到动态的宏观经济学中；二是因为绝大多数变分法能解决的问题，用最优控制的方法也可以完美的解决，同时有些问题变分法不能解决，但是最优控制方法还是可以解决。而动态规划由Richard Bellman提出的，一个主要的思想是**最优性原理：全局最优必定是局部最优，如果此全局最优解可以取到的话。**

建立此专栏的目的只是普及高宏，因此在最优控制以及动态规划的必要条件的充分性、必要性的证明在此文章中不再涉及，我们直接上结论，告诉你们在宏观模型中，如何应用，如何求解。如果读者有兴趣的话，我可以在我想写的东西写完后，再增加一篇文章，把此文章中用到的结论全都证明一遍。

在高宏中，大多数模型都是连续无限时间的，因此在求解模型时，用传统的方法解决的话，计算过程是十分庞大的，而且也让经济学的含义消失了转而成了解纯数学计算的过程，这样的方法是没有意义的。而最优控制方法在解决无穷自治问题时有着天然的优势，不仅计算过程十分漂亮，而且引入的参数是有着丰富的经济学含义的，例如在汉密尔顿函数中引入的参数 $\lambda(t)$ 代表**状态变量在时刻**



t的边际价值。所以这篇文章的知识是学习后续比索洛模型更复杂的模型必备的知识储备，以后在求解复杂模型时，可以常回来翻看翻看。

1.最优控制

1.1.1有限时间基本模型

在最优控制中，变量分为两类，一类是**状态变量：即有微分方程约束的变量**，意如其字，状态变量的变化一定是连续的变化，本期的值会影响到下一期的值，在时间上呈现连续的变化。另一类是**控制变量**，即没有微分方程约束的变量，可以连续变化，也可以跳跃变化。

面对诸如以下问题时，可以用最优控制理论的方法解决：

$$\begin{aligned} \max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \\ s.t : x'(t) = u(t), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

其中 t_0 代表初始时刻， t_1 代表终点时刻； x_0 代表状态变量在初始时刻的值， $x(t_1) = x_1$ 代表状态变量在终点时刻的值。在这里， $x(t)$ 是状态变量， $u(t)$ 是控制变量。

解法：

建立哈密顿函数： $H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) g(t, x(t), u(t))$

最优条件方程： $\frac{\partial H}{\partial u} = 0: f_u + \lambda g_u = 0$

乘子方程： $\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda' : f_x + \lambda g_x = -\lambda' ; \lambda(t_1) = 0$

状态方程： $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' : g = x'$

在高宏中涉及的问题类型都是**自由终点问题**，即 $x(t_1)$ 的值自由，这样的话**横截性条件**就是： $\lambda(t_1) = 0$ ，再结合关于状态变量的值的已知条件即可求解这个问题。其中引入的参数 $\lambda(t)$ 有着丰富的经济学含义：**状态变量在时刻t的边际价值**。

1.1.2例子

$$\min \int_0^T [c_1 u(t)^2 + c_2 x(t)] dt$$

$$s.t : x'(t) = u(t), x(0) = 0, x(T) = B$$

Bis. free. and. Tis. fixed

解：定义哈密顿函数 $H = c_1 u(t)^2 + c_2 x(t) + \lambda(t)g(t, x, u)$

必要条件：

$$\text{最优条件方程 } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 : 2c_1 u + \lambda = 0$$

$$\text{乘子方程 } \frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda' : c_2 = -\lambda'; \lambda(T=0) \text{ 自由终点的横截性条件}$$

$$\text{状态方程 } \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' : x' = u; x(0) = 0$$

由乘子方程可得 $\lambda(t)$ 的通解： $\lambda(t) = -c_2 t + k_0$ ，再结合横截性条件，有 $\lambda(t) = -c_2 t + c_2 T$ 。

把此结果带入最优条件方程中得： $u(t) = \frac{c_2}{2c_1}(t - T)$ 。

再把此结果带入状态方程中得： $x(t) = \frac{c_2}{4c_1}t^2 - \frac{c_2 T}{2c_1}t + k_1$ ，由初始条件 $x(0) = 0$ 的 $k_1 = 0$ ，所以

$$x^*(t) = \frac{c_2}{4c_1}t^2 - \frac{c_2 T}{2c_1}t, t \in [0, T], \text{ 同时 } B = -\frac{c_2 T^2}{4c_1}$$

1.2.1 无穷时间基本模型

如果面对的问题是无穷时间时，即 $t_1 = \infty$ 时，此时有另一种与此差不多的方法，但是专门是为了结局此类问题的，此类基本的问题如下：

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} f(t, x, u) dt$$

$$s.t : x'(t) = u(t), x(0) = x_0$$

解法：

建立当期值哈密顿函数： $\psi \equiv e^{rt} H = f(t, x, u) + m(t)g(t, x, u)$ ，其中 $m(t) \equiv e^{rt} \lambda(t)$ 称为当期值哈密顿乘子

$$\text{最优条件方程：} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0: f_u + m g_u = 0$$

当期乘子方程: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = rm - m' : f_x + mg_x = rm - m'$

状态方程: $\frac{\partial \psi}{\partial m} = u : g = u$

在高级宏观中, **横截性条件**为**状态变量的值趋近于稳态(均衡解)**,当时间 t 趋于无穷时, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

再结合关于状态变量的已知条件, 即可解此模型。

1.2.2例子

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} [ax(t) - \frac{1}{2}x^2(t) - cu^2(t)] dt$$

$$s.t : x'(t) = u(t) - bx(t), x(0) = x_0 > 0, u(t) \geq 0$$

解:

$$\text{建立当期值汉密尔顿函数: } \psi = ax(t) - \frac{1}{2}x^2(t) - cu^2(t) + m(t)[u(t) - bx(t)]$$

其中 $m(t)$ 是当期值汉密尔顿乘子, 且 $t \in [0, \infty)$,必要条件为:

$$\text{最优条件方程: } \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0 : -2cu(t) + m(t) = 0 \quad (1)$$

$$\text{当期乘子方程: } \frac{\partial \psi}{\partial x} = rm - m' : a - x(t) - bm(t) = rm(t) - m'(t) \quad (2)$$

$$\text{状态方程: } \frac{\partial \psi}{\partial m} = x'(t) : u(t) - bx(t) = x'(t); x(0) = x_0 > 0 \quad (3)$$

以及**横截性条件**: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ 。

对(1)(3)都求导可得:

$$m'(t) = 2cu'(t)$$

$$x''(t) = u'(t) - bx'(t)$$

再结合(1)(2)(3)式消去 u 和 m 得关于 x 的二阶非齐次微分方程:

$$x''(t) - rx'(t) - [\frac{1}{2c} + (r+b)b]x(t) = -\frac{1}{2c}$$

它的特征方程为:

$$\lambda^2 - r\lambda - [\frac{1}{2c} + (r+b)b] = 0$$

由求根公式可得此二次方程得根:

$$\lambda_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4[\frac{1}{2c} + (r+b)b]}}{2} > 0$$
$$\lambda_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4[\frac{1}{2c} + (r+b)b]}}{2} < 0$$

令 $x(t) = k$ (常数) 带入上述微分方程中, 解得方程的特解: $\frac{a}{1+2bc(r+b)}$, 所以微分方程的通解为:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{a}{1+2bc(r+b)},$$

根据横截性条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$, 要想保证极限存在, 那么 c_1 必须等于0 (因为当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由于 $\lambda_2 < 0$ 所以 $e^{\lambda_2 t} = 0$, 这个时候只有满足 $c_1 e^{\lambda_1 t} = 0$ 才能保证极限存在, 由于 $e^{\lambda_1 t} \neq 0$ 所以必须有 $c_1 = 0$), 那么进一步可知稳态 $x^* = \frac{a}{1+2bc(r+b)}$ 。

再由初始条件 $x(0) = x_0$, 解得 $c_2 = x_0 - \frac{a}{1+2bc(r+b)}$, 所以,

$$x(t) = [x_0 - \frac{a}{1+2bc(r+b)}] e^{\lambda_2 t} + \frac{a}{1+2bc(r+b)}, t \in [0, \infty)$$

所以对 $x(t)$ 求导, 可得:

$$u(t) = (B + \lambda_2) [x_0 - \frac{a}{1+2bc(r+b)}] e^{\lambda_2 t} + \frac{ab}{1+2bc(r+b)}, t \in [0, \infty)$$

2. 动态规划

2.1 基本模型

动态规划的方法是动态优化中第三个方法, 最早由Richard Bellman提出的, 此方法的一个中心思想就是**最优性原理**: **全局最优必定是局部最优, 如果此全局最优解可以取到的话。**

基本问题模型为:

$$\max \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt$$
$$s.t: x'(t) = g(t, x, u), x(t_0) = x_0$$

定义一个新的函数, 称为**最优值函数**: $J(t, x) \equiv \max \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt$ (注意此时已经取到最优, 所以J与u无关, 只与t, x相关)

根据前人Hamilton-Jacobi-Bellman提出的结论有: (称为HJB方程)

$$-J_t(t, x) = \max_u [f(t, x, u) + J_x(t, x)g(t, x, u)]$$

此方程是关于控制变量u的函数，因此等式两侧关于u求导,得：

$$0 = f_u(t, x, u) + J_x g_u(t, x, u)$$

解此方程得出u的表达式，再将其带入HJB方程中，消除掉max符号。之后根据具体的题目猜 $J(t, x)$ 的解的结构(猜解是一件技巧性极强的事情，并且十分困难)，猜出解后再解HJB方程求出 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的表达式。

当 $T = \infty$ ，且函数 $f(x, u)$ 和 $g(x, u)$ 不直接和t相关，(前面的函数形式是 $f(t, x, u)$ 和 $g(t, x, u)$ 是直接和t相关的)，即当面对的问题变为：

$$\max \int_0^{\infty} e^{-rt} f(x(t), u(t)) dt$$

$$s.t : x'(t) = g(x, u), x(t_0) = x_0$$

有一个特殊形式的HJB方程，专门解决此类无穷自治问题。当然上述一般形式的HJB方程也可以解决此问题，但是计算过程比较繁琐。

同样的，最优值函数 $V(x) \equiv \max \int_0^{\infty} e^{-rt} f(x(t), u(t)) dt$ (只直接和x相关，不直接和t相关)

解时，列出特殊形式的HJB方程：

$$rV(x) = \max_u [f(x, u) + V'(x)g(x, u)] ,$$

之后求解步骤与上述的步骤一样。

2.2例子

$$\max \int_0^{\infty} e^{-rt} (ax^2 + bu^2) dt$$

$$s.t : x' = u, x(t_0) = x_0 > 0; a > 0, b > 0$$

此问题是无穷自治问题，按照上述基本模型中的方法，有两种解法，一般形式的HJB以及特殊形式的HJB。

(一) 一般形式的HJB方程来解：

列出HJB方程：

$$-J_t = \min_u [e^{-rt} (ax^2 + bu^2) + J_x u]$$

等式两侧关于 u 一阶求导:

$$2e^{-rt}bu + J_x = 0 \Rightarrow u = -\frac{J_x e^{rt}}{2b}$$

再将其带入HJB方程中消除掉 \min 符号:

$$-J_t = e^{-rt}\left(ax^2 + \frac{J_x^2 e^{2rt}}{4b}\right) - \frac{J_x^2 e^{rt}}{2b}$$

化简得:

$$ax^2 - \frac{J_x^2 e^{2rt}}{4b} + e^{rt} J_t = 0$$

根据目标问题中函数得结构来猜J的结构:

$$J(t, x) = e^{-rt} Ax^2$$

所以, $J_t = -re^{-rt} Ax^2, J_x = 2e^{-rt} Ax$, 带入上式中, 得:

$$\frac{A^2}{b} + rA - a = 0,$$

解得A的正根:

$$A = \left[-r + \left(r^2 + \frac{4a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]b,$$

所以,

$$u(t) = -\frac{Ax}{b} \text{ (反馈形式)}$$

那么可进一步解出来:

$$x(t) = x_0 e^{\frac{-At}{b}}$$

(二) 特殊形式的HJB方程来解:

列出特殊形式的HJB方程:

$$rV(x) = \min_u [ax^2 + bu^2 + V'(x)u]$$

两侧关于 u 一阶求导:

$$2bu + V' = 0 \Rightarrow u = -\frac{V'}{2b}$$

将此结果带入HJB中消除掉 \min 符号:

$$rV = ax^2 + \frac{V'^2}{4b} - \frac{V'^2}{2b}$$

化简得:

$$ax^2 - \frac{V'^2}{4b} - rV = 0$$

猜V(x)的结构: $V(x) = Ax^2$ 那么 $V' = 2Ax$,代入上式中, 得:

$$\frac{A^2}{b} + rA - a = 0,$$

解得A的正根:

$$A = [-r + (r^2 + \frac{4a}{b})^{\frac{1}{2}}]b,$$

所以,

$$u(t) = -\frac{Ax}{b} \text{ (反馈形式)}$$

那么可进一步解出来:

$$x(t) = x_0 e^{\frac{-At}{b}}.$$

总结, 从(一)(二)两种解法可以比较出, 在面对不同问题时选择合适的方法可以减少计算的过程, 更完美的解出结果。

注: 实际中动态优化的内容非常多, 而且非常复杂, 这篇文章只是小小的写了我认为对高宏比较有用的部分而已。教材推荐《动态优化》南茜 人大出版社。欢迎讨论指正。

编辑于 2018-02-10 21:35

「真诚赞赏，手留余香」

赞赏

4 人已赞赏





欢迎参与讨论

84 条评论

默认 最新



追风少年 作者

...

近期不忙了，准备接着更了



2020-06-24

● 回复 ● 10



盛天瑄

...

正在准备动态优化考试，文章写的很好， $-1/2c$ 那里错了应该是 $-a/2c$ ，然后如果作者可以整理总结一下三种方法当中的证明过程那就最好了！

2018-05-22

● 回复 ● 4



追风少年 作者

...

证明过程可以的 有时间后再开一个动态优化的专栏！

2018-05-22

● 回复 ● 2



Lea阿麗 ▸ 追风少年

...

请问，这个动态优化专栏啥时候开啊？我还有那个证明过程不是太了解，希望大神能够早点给出比较详细的求解过程，并给详细的说明解释，谢谢啦，期待期待



2019-12-15

● 回复 ● 1

展开其他 1 条回复 >



杨柳陌

...

无限时间为啥加上指数项，为了让收敛吗。没学过呀

2022-06-26

● 回复 ● 1



键盘

...

啊啊啊啊太优秀了！！想请教一下，控制变量可以是关于时间的二次型函数嘛？如何求解呀
~~

2020-05-22

● 回复 ♥ 1



阿尔法小狒

...

想问一个有点傻的问题，这里的控制变量是关于时间的一次函数吗？这是哪里设置的呢？还是哈密顿函数本身控制变量中的定义啊。懵了

2020-09-11

● 回复 ♥ 喜欢



片画

...

救我一命 感谢

2020-02-16

● 回复 ♥ 1



求知鸟

...

有兴趣看证明过程+1

2019-04-15

● 回复 ♥ 1



蛋黄君



...

不太能理解。。2式并不做求导处理额。。不是把1、3式里u和m的表达式代入2式最后只剩下关于x的非齐次微分方程么。。算啦。。领会思想了。。

2018-12-26

● 回复 ♥ 1



盐盐

...

领会思想了吗，能不能麻烦你给我通俗的讲解一下，我想在经济学中用一下，谢谢你（鞠躬）

2021-03-11

● 回复 ♥ 1



蛋黄君



...

1.2.2的推导是不是有问题。二阶非齐次方程等号右边为啥表达式里不含参数a，应该是不会约去的吧。

2018-12-25

● 回复 ♥ 1



追风少年

作者

...

不是约掉的 是对2式进行求导了 得到x的二阶导的一个式子 所以常数a就没了

2018-12-26

● 回复 ♥ 喜欢



取三千不取一瓢

...

请问最优控制的方法和动规有什么区别呢

01-03

● 回复 ♥ 喜欢



旅行

...

猜解V(x)的结构有什么技巧吗？如果仅仅是猜，稍微难一点的偏微分方程，估计就无解了。

2023-12-20

● 回复 ♥ 喜欢

[点击查看全部评论 >](#)



评论者



欢迎参与讨论

文章被以下专栏收录



高级宏观经济学数理模型入门

梳理一下高级宏观经济学的简单版本的模型

推荐阅读

知识打卡（15）：Shapley值法

恭贺新春，虎年吉祥大家好，这里是Leanringyard学院，今天是大年初二，小编在这里祝大家新的一年万事顺遂，虎虎生威，红包多多。在这充满欢乐节日气氛的时刻，小编也不会忘记给大家带来新知...

LearningYard学苑



学习CALCULATE函数（五）

Fabri...

发表于Fabri...



Learn R | SVM of Data Mining（三）

Jason

发表于数据科学笔...

格密码基础 2（Lecture 1，施密特正交化）

注：本文章中内容和图片主要来源于 Oded Regev 的课堂讲义。今天，我们继续学习格的第一章的Lecturer 1，也就是格的基础介绍Introduction，共包含4部分，分别是：Lattices 安全六三：Latti...

六三

发表于格密码理论...

