B - RE.狠简单的构造题

题意：构造两个整数 x, y 使得 $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$ 这四个值里恰好有 t 个等于 a 。

分类讨论即可。有非常多的构造方法，以下为出题人认为最优雅的构造方法：

- 如果 $t=0$，那么构造 $x=a-2, y=1$。
- 如果 $t=1$，那么构造 $x=a-1, y=1$。
- 如果 $t=2$，那么构造 $x=a, y=1$。
- 如果 $t=3$，并且 $a=0$，那么构造 $x=0, y=0$。
- 如果不满足以上条件，那么可以通过数学证明无法构造。

D - I love cat too!

题意：有三个正整数 x, y, z ，每次先手和后手轮流选择两个数，删除你选择的其中一个数，并将另一个数分解成两个正整数的和。重复上述过程直到无法操作，无法操作者败。问先手有没有必胜策略。

首先最终局面 $1,1,1$ 显然是必败局面。

如果 x, y, z 中有一个偶数，那么可以随意删除一个奇数，并将偶数分解成两个奇数的和。这样得到的新的三个数均为奇数。

如果 x, y, z 有两个偶数，那么随意删除一个偶数，并将另一个偶数分解为两个奇数的和，这样也能转换为三个数都是奇数的局面。

如果这三个数全是奇数，那么无论如何操作，都只能转换为有一个偶数的局面。

所以我们可以推导出：如果 x, y, z 不全是偶数时，那么必胜局面为 x, y, z 有一个或两个偶数，相应的必败局面为三个数全是奇数。

接下来重点是，这三个数全是偶数时的情况。先手肯定不会将偶数转换为两个奇数的和，因为那样就转换为了后手的必胜局面。因此，先手必定会将偶数分解为两个偶数的和，除非这三个数全是 2。同理，后手为了不转移到先手的必胜局面也同样会保证这三个数全为偶数，除非抵达了这三个数都是 2 的局面。因此，我们可以将这三个数同时除以 2 ，然后把问题转换为对这三个新的数进行操作。很容易发现这个问题是一个与原问题性质完全相同的子问题，因此，我们可以递归地解决这个问题，具体来说，如果定义 $f(x,y,z)=\begin{cases}1\text{，先手有必胜策略}\\0\text{，先手没有必胜策略}\end{cases}$，那么上述这些情况可以写成：

$$f(x,y,z)=\begin{cases}0\,,\,x,y,z\text{ 均为奇数}\\1\,,\,x,y,z\text{ 中有 }1\text{ 或 }2\text{ 个偶数}\\f(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})\,,\,x,y,z\text{ 均为偶数}\end{cases}$$

将上述式子写成递归函数即可完成本题。事实上，上述式子还可以进一步推出先手有必胜策略的充要条件是 $\operatorname{lowbit}(x), \operatorname{lowbit}(y), \operatorname{lowbit}(z)$ 不同时相等。

F - 位运算全家桶

题意：找到能使 $((a\otimes b)\oplus c)\ominus d=n$ 成立，且 $0\le a,b,c,d<2^k$ 的整数数对 (a,b,c,d) 的个数，其中 $0\le n<2^k$。

我们先列出以下真值表：

a	b	c	d	$F=((a\otimes b)\oplus c)\ominus d$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

a	b	c	d	$F=((a\otimes b)\oplus c)\ominus d$
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

观察上表，我们可以发现对于 n 的每一位，如果该位为 0，a,b,c,d 的对应位一共有 4 种方法能让它们的位运算结果为 0；如果该位为 1，则一共有 12 种方法能够使得对应位上的位运算的结果等于 1。

因此，根据乘法原理，我们可以拆解 n 的每一位。假设 $\mathrm{bitcnt}(n)$ 代表 n 二进制里 1 的个数，那么答案就是 $12^{\mathrm{bitcnt}(n)}\times 4^{k-\mathrm{bitcnt}(n)}$。

H - RE.重生之我是数论高手

题意：给定三个正整数 a,b,c，求出 a^{b^c} 模 10^9+7 的值。

这是一道诈骗题。许多人可能会将指数部分 b^c 对 10^9+7 取模，得到结果 K 后再算 a^K 对 10^9+7 取模的值。这是不正确的。下面举出一个反例：$2^6 \bmod 5 = 64 \bmod 5 = 4$，但是如果对指数取模，得到的结果为 $2^6 \bmod 5 = 2^{6 \bmod 5} \bmod 5 = 2 \bmod 5 = 2$，显然不对。

事实上，对于一个质数 p ，根据费马小定理 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$，我们可以知道指数的模运算周期为 $p-1$ 。因此，我们要对指数部分取的模数是 $p-1$ 而非 p。记 $K=b^c \bmod (10^9+6)$，原式即为 $a^K \bmod (10^9+7)$。这些过程都可以通过快速幂实现。