2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛（数学类）参考解答

一、【参考解析】：设$\left(x,y,z\right)$为切锥面上的点（非原点）．存在唯一t使得$t\left(x,y,z\right)$落在椭圆抛物面上．于是有

$$tz=\left(3x^2+4y^2\right)t^2+1,$$

并且这个关于t的二次方程只有一个根．于是，判别式

$$\Delta=z^2-4\left(3x^2+4y^2\right)=0.$$

这就是所求的切锥面的方程．

二、【参考解析】：不妨设抛物线方程为$y=x^2, P\left(x_0,y_0\right)$．$P$与焦点在抛物线的同侧，则$y_0>x_0^2$．设$L$的方程为$y=k\left(x-x_0\right)+y_0$．$L$与$\Gamma$的交点的$x$坐标满足

$$x^2=k\left(x-x_0\right)+y_0.$$

有两个解$x_1<x_2$满足$x_1+x_2=k, x_1x_2=kx_0-y_0$．

L与x轴，$x=x_1, x=x_2$构成的梯形面积

$$D=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2-x_1\right),$$

抛物线与x轴，$x=x_1, x=x_2$构成区域的面积为

$$\int_{x_1}^{x_2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right).$$

于是有

$$A(L)=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2-x_1\right)-\frac{1}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)=\frac{1}{6}\left(x_2-x_1\right)^3.$$

$$\begin{aligned}36A(L)^2&=\left(x_2-x_1\right)^6=\left[\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2\right]^3\\&=\left(k^2-4kx_0+4y_0\right)^3=\left(\left(k-2x_0\right)^2+4\left(y_0-x_0^2\right)\right)^3\\&\geq 64\left(y_0-x_0^2\right)^3.\end{aligned}$$

等式成立当且仅当$A(L)$取最小值，当且仅当$k=2x_0$，即$x_1+x_2=2x_0$．

三、【参考解析】： 由于$f'(x)\geq 0$，有

$$0\leq\int_0^N\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x-\int_0^N\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,\mathrm{d}x\leq\int_0^N\frac{f'(x)}{f(x)\left(f(x)+f'(x)\right)}\,\mathrm{d}x$$

取极限，有

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N\frac{f'(x)}{f(x)\left(f(x)+f'(x)\right)}\,\mathrm{d}x\leq\lim_{N\to+\infty}\int_0^N\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left[-\frac{1}{f(x)}\right]_0^N=\frac{1}{f(0)}.$$

所以由已知条件，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(0)}<+\infty.$$

四、【参考解析】：设λ是$f(t)$的根，则有$\det P(t)=0$. 从而$P(t)$的n个列线性相关. 于是存在$\alpha\ne 0$，使得$P(\lambda)\alpha=0$，进而$\alpha^*P(\lambda)\alpha=0$.

具体地，$\alpha^*A\alpha\lambda^2+\alpha^*B\alpha\lambda+\alpha^*C\alpha=0$. 令

$$a=\alpha^*A\alpha,b=\alpha^*B\alpha,c=\alpha^*C\alpha,$$

则A,B,C皆为正定矩阵知$a>0,b>0,c>0$，且$\lambda=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

注意到，当$b^2-4ac\ge 0$时，$\sqrt{b^2-4ac}<b$，从而有

$$\operatorname{Re}\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0.$$

当$b^2-4ac<0$时，$\sqrt{b^2-4ac}=i\sqrt{4ac-b^2}$，从而有$\operatorname{Re}\lambda=\dfrac{-b}{2a}<0$.

五、【参考解析】：由于$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i$恰为$\dfrac{(1+x)^n}{(1-x)^3}\dfrac{1}{1-x}$展开式中$x^{n-1}$的系数，

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4}=\frac{\left(2-(1-x)\right)^n}{(1-x)^4}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i2^{n-i}(1-x)^{i-4},$$

其x^{n-1}项系数等于

$$\begin{aligned}&2^n(1-x)^{-4}-n2^{n-1}(1-x)^{-3}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2}\\&-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}\end{aligned}$$

的x^{n-1}项系数，也就等于

$$\begin{aligned}&\frac{2^n}{3!}\left((1-x)^{-1}\right)'''-\frac{n2^{n-1}}{2!}\left((1-x)^{-1}\right)''+\frac{n(n-1)2^{n-2}}{2}\left((1-x)^{-1}\right)'\\&-\frac{n(n-1)(n-2)2^{n-3}}{6}(1-x)^{-1}\end{aligned}$$

的x^{n-1}项系数，它等于

$$\begin{aligned}&\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n-\frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n+\frac{n(n-1)2^{n-2}}{2}n\\&-\frac{n(n-1)(n-2)2^{n-3}}{6}.\end{aligned}$$

所以$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{n(n+2)(n+7)}{3} 2^{n-4}$.

六、【参考解析】：由于$f(0)=f(1)$，故存在$c\in(0,1)$ 使得$f'(c)=0$.

又$f'(x)\neq 1$, $\forall x\in[0,1]$，由导函数介值性质恒有$f'(x)<1$. 令$g(x)=f(x)-x$，则$g(x)$为单调下降函数. 故

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}&=\int_0^1 g(x)dx+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)+1\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)>\int_0^1 g(x)dx=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

于是有$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{n-1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

七、【参考解析】：(1) 矩阵方程$AX=B$有解等价于B的列向量可由A的列向量线性表示. $BY=A$无解等价于A的某个列向量不能由B的列向量线性表示. 对(A,B)作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}2&2&4&b\\2&a&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&4&b\\0&a-2&-1&1-b\end{pmatrix}$$

可知，B的列向量组可由A的列向量线性表示当且仅当$a\neq 2$. 对矩阵(B,A)做初等行变换：

$$(B,A)=\begin{pmatrix}4&b&2&2\\3&1&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&b&2&2\\0&1-3b/4&1/2&a-3/2\end{pmatrix}$$

由此可知A的列向量组不能由B的列向量线性表示的重要条件是$b=\frac{4}{3}$. 所以矩阵方程$AX=B$有解但$BY=A$无解的重要条件是$a\neq 2, b=\frac{4}{3}$.

(2) 若A,B相似，则有$trA=trB$且$|A|=|B|$，故有$a=3, b=\frac{2}{3}$. 反之，若$a=3, b=\frac{2}{3}$，则有

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&2/3\\3&1\end{pmatrix},$$

A和B的特征多项式均为$\lambda^2-5\lambda+2$. 由于$\lambda^2-5\lambda+2=0$有两个不同的根，从而A和B都可以相似于同一对角阵，所以A和B相似.

(3) 由于A为对称阵，若A和B合同，则B也是对称阵，故$b=3$. 矩阵B对应的二次型为

$$g(x_1,x_2)=4x_1^2+6x_1x_2+x_2^2=(3x_1+x_2)^2-5x_1^2.$$

在可逆线性变换$y_1=3x_1+x_2, y_2=x_1$下，$g(x_1,x_2)$变成标准型：$y_1^2-5y_2^2$. 由此，B

的正、负惯性指数为 1. 类似地，A 的对应二次型为

$$f\left(x_1,x_2\right)=2x_1^2+4x_1x_2+ax_2^2=2\left(x_1+x_2\right)^2+\left(a-2\right)x_2^2.$$

在可逆线性变换 $z_1=x_1+x_2,z_2=x_2$ 下，$f\left(x_1,x_2\right)$ 变成标准型：$2z_1^2+\left(a-2\right)z_2^2$. A 和 B 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数，故 A 和 B 合同充要条件是 $a<2,b=3$.