2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=$______.

2．若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在，则极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$__________.

3．设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$．记 $z=f\left(e^x y^2\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为______________.

4．设 $f(x)=e^x\sin 2x$，则 $f^{(4)}(0)=$______________.

5．曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为______________.

第二题：(14 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$，$0<f'(x)<1$．试证：当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x.$

第三题：(14 分)某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量 $M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

第四题：(14 分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1.$ 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$．证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2，使得 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}.$

第六题：(14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$，用傅里叶(Fourier)级数理论证明 $f(x)$ 为常数。