2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

非数学专业竞赛试题

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$__________.

(2) 设隐函数 $y=y\left(x\right)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{y^2}=$__________.

(3) 定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}\,x=$__________.

(4) 已知 $\mathrm{d}\,u(x,y)=\dfrac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则 $u\left(x,y\right)=$__________.

(5) 设 $a,b,c,\mu>0$，曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切，则 $\mu=$__________.

二、(本题满分 14 分)计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$，其中 Ω 是由曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

三、(本题满分 14 分) 设 $f\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f\left(0\right)=0$，且存在常数 $A>0$，使得 $|\,f'\left(x\right)|\le A\,|\,f\left(x\right)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f\left(x\right)\equiv 0$.

四、(本题满分 14 分)计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

五、(本题满分 14 分)设 $f\left(x\right)$ 是仅有正实根的多项式函数，满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$，证明：$c_n>0\left(n\ge 0\right)$，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在，且等于 $f\left(x\right)$ 的最小根.

六、(本题满分 14 分)设 $f\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数，满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2},$$

且 $f\left(0\right)\le 1$. 证明：存在常数 $M>0$，使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $|\,f\left(x\right)|\le M$.