2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一 、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是__________________.

【参考解答】: 由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r=1$, 故所求微分方程为

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=0.$$

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi: 2x + 2y + z = 0$，则与 π 平行的 S 的切平面方程是__________________.

【参考解答】: 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上一点，则 S 在点 P_0 的切平面方程为 $-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$。由于该切平面与已知平面 L 平行，则 $(-2x_0,-4y_0,1)$ 平行于 $(2,2,1)$，故存在常数 $k\neq 0$，使得 $(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,2,1)$，故得 $x_0=-1, y_0=-\dfrac{1}{2}, z_0=\dfrac{3}{2}$,所以切平面方程就为 $2x+2y+z+\dfrac{3}{2}=0.$

(3) 设 $y = y(x)$ 由 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}\, t$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}\right|_{x=0} =$________.

【参考解答】: 易知 $y(0)=1$, 两边对变量 x 求导，则

$$1=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1)\Rightarrow y'=\csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)+1$$

把 $x=0$ 代入可得 $y'=3.$

(4) 设 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$____________.

【参考解答】: $x_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right]$, $1-\dfrac{1}{(n+1)!}\to 1.$

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} =$______.

【参考解答】: 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3.$

于是 $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha,\alpha\to 0(x\to 0)$，即有 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\alpha x}{x}-1=2.$$

第二题：(12 分) 设 n 为正整数，计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}\, x.$

【参考解答】：$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln x)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}dx$

令 $\ln x=u$，则有 $I=\int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin(u)\right|du=\int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|dt=4n\int_{0}^{\pi/2}\left|\sin t\right|dt=4n.$

第三题：(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $\left|f(x)\right|\le A,\left|f''(x)\right|\le B$，证明：对于任意 $x\in[0,1]$，有 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\frac{B}{2}.$

【参考证明】：由泰勒公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\xi\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\eta\in(x,1)$$

上面两式相减，得到 $f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

由条件 $\left|f(x)\right|\le A,\left|f''(x)\right|\le B$，得到 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\frac{B}{2}\left[(1-x)^2+x^2\right]$

由于 $(1-x)^2+x^2$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 1，所以有 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\frac{B}{2}.$

第四题：(14 分) (1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh.$

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【参考证明】(1)：设球缺所在球表面方程为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α。

记球缺的区域为 Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega}dV=\int_{R-h}^{R}dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为 $dS=R^2\sin\theta d\theta$，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh.$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1，方向指向球缺外，且记 $J=\iint_{P_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$. 由高斯公式，有 $I+J=\iiint_{\Omega}3dV=3V(\Omega)$，其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积。由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故 $J=\frac{-1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1)$，

其中 $\sigma(P_1)$ 为 P_1 的面积。故 $I=3V(\Omega)-J=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1)$.

因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$，故球缺的高度为

$h=|QD|=\sqrt{3}$.再由(1)所证并代入 $h=\sqrt{3}$ 和 $R=2\sqrt{3}$ 得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi\left(2Rh-h^2\right)=33\sqrt{3}\pi.$$

第五题：(15 分)设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得

$$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)\right]^n\mathrm{d}x,\ 求\ \lim_{n\to\infty}x_n.$$

【参考解答】：考虑特殊情形：$a=0,b=1$。下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

首先，$x_n\in[0,1]$，即 $x_n\le 1$，只要证明 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，$\exists N,\forall n>N$ 时，$1-\varepsilon<x_n$。由 f 在 $[0,1]$ 上严格单增，就是要证明 $f^n(1-\varepsilon)<\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\int_0^1\left[f(x)\right]^n dx.$

由于 $\forall c\in(0,1)$，有 $\int_c^1\left[f(x)\right]^n dx>f^n(c)(1-c)$. 取 $c=1-\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则 $f(1-\varepsilon)<f(c)$，即 $\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0$, 所以 $\exists N,\forall n>N$ 时有 $\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\dfrac{\varepsilon}{2}=1-c$. 即

$$f^n(1-\varepsilon)<\left[f(c)\right]^n(1-c)\le\int_c^1\left[f(x)\right]^n dx\le\int_0^1\left[f(x)\right]^n dx=f^n\left(x_n\right).$$

从而 $1-\varepsilon<x_n$，由 ε 的任意性得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

再考虑一般情形。令 $F(t)=f\left(a+t(b-a)\right)$，由 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，知 F 在 $[0,1]$ 上非负连续，严格单增。从而 $\exists t_n\in[0,1]$，使得 $F^n\left(t_n\right)=\int_0^1 F^n(t)dt$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$. 即

$$f^n\left(a+t_n(b-a)\right)=\int_0^1 f^n\left(a+t(b-a)\right)dt.$$

记 $x_n=a+t_n(b-a)$, 则有 $\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)\right]^n dx$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)=b.$

第六题：(15 分)设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$.

【参考解答】：令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，因 $A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{1+i^2/n^2}$, 所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$.

记 $x_i=\dfrac{i}{n}$, 则 $A_n=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f\left(x_i\right)dx$, 故 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(x_i\right)\right]dx.$

由拉格朗日中值，存在 $\zeta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$ 使得 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)\left(x-x_i\right)dx.$

记 m_i,M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $\left[x_{i-1},x_i\right]$ 上的最大值和最小值，则 $m_i\le f'\left(\zeta_i\right)\le M_i$，故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)\left(x-x_i\right)dx$ 介于 $m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_i\right)dx,M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_i\right)dx$

之间，所以存在 $\eta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$ 使得 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'\left(\zeta_i\right)\left(x-x_i\right)dx=-f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)^2/2.$

于是，有 $J_n=-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^n f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)^2=-\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n f'\left(\eta_i\right)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right]=\frac{1}{4}.$$