

2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛 (数学专业) 参考答案

一、【参考解答】：过原点的平面 Σ 和椭球面

$$4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1$$

的交线 Γ 为圆时，圆心必为原点。从而 Γ 必在以原点为中心的某个球面上。设该球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 。在该圆上

$$z^2 - x^2 = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 5r^2 + z^2 - x^2 = 1 - 5r^2.$$

即该圆在曲面 $H: z^2 - x^2 = 1 - 5r^2$ 上。

断言 $5r^2 = 1$ ，否则 $H: z^2 - x^2 = 1 - 5r^2$ 是一个双曲柱面。注意到 Γ 关于原点中心对称， H 的一叶是另一叶的中心对称的像，所以 Γ 和 H 的两叶一定都有交点。另一方面， Γ 又要整个地落在 H 上，这与作为圆周的 Γ 是一条连续的曲线矛盾，所以必有 $5r^2 = 1$ 。从而 Γ 在 $z^2 - x^2 = 0$ 上，即 Γ 在平面 $x - z = 0$ 或 $x + z = 0$ 上。所以 Σ 为 $x - z = 0$ 或 $x + z = 0$ 。

反过来，当 Σ 为 $x - z = 0$ 或 $x + z = 0$ 时， Σ 和 $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1$ 的交线在 $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 = 1$ 上，从而为一个圆。总之，平面 $x - z = 0$ 或 $x + z = 0$ 即为所求。

二、【参考证明】：【思路一】：记 $a = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ ，则 $a \in (0, +\infty)$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xf(x) dx &\geq a \int_a^{+\infty} f(x) dx = a \left(a - \int_0^a f(x) dx \right) \\ &= a \int_0^a (1 - f(x)) dx > \int_0^a x(1 - f(x)) dx \end{aligned}$$

从而有 $\int_0^{+\infty} xf(x) dx > \int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$ 。

【思路二】：记 $a = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ ，则 $a \in (0, +\infty)$ ，对于 $M \geq 1$ ，记 $a_M = \int_0^M f(x) dx$ ，则 $a_M \in (0, M)$ 。这样，可令 $g_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, a_M] \\ 0, & x \in (a_M, M] \end{cases}$ ，则易见

$$G_M(x) = \int_0^x (g_M(t) - f(t)) dt > 0, \forall x \in (0, M) \text{ 且 } G_M(M) = 0.$$

进一步注意到 $a_M \geq a_1 (M \geq 1)$ ，可知

$$G_M(x) = G_1(x), \forall x \in [0, a_1], \forall M \geq 1.$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_0^M x(g_M(x) - f(x)) dx \\ &= xG_M(x)\Big|_0^M - \int_0^M G_M(x) dx \\ &= -\int_0^M G_M(x) dx \leq -\int_0^{a_1} G_M(x) dx \\ &= -\int_0^{a_1} G_1(x) dx \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} xf(x) dx \geq \int_0^M xf(x) dx \\ & \geq \int_0^M xg_M(x) dx + \int_0^{a_1} G_1(x) dx \\ &= \frac{1}{2}a_M^2 + \int_0^{a_1} G_1(x) dx, \forall M > 1. \end{aligned}$$

令 $M \rightarrow +\infty$ 得到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xf(x) dx &\geq \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 + \int_0^{a_1} G_1(x) dx \\ &> \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

【注】 如果 $f(x)$ 连续，则可以采用以下方法证明：

考虑 $F(x) = \int_0^x tf(t) dt - \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2, \forall x \geq 0$ ，则

$$F'(x) = f(x) \left(x - \int_0^x f(t) dt \right) > 0, \forall x > 0.$$

从而 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调上升. 所以 $F(+\infty) > F(0) = 0$. 即结论成立.

三、**【参考证明】** $t_n = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{n+k} (n+k)a_{n+k}$. 由假设, $\sum_{k=1}^{+\infty} (n+k)a_{n+k}$ 收敛, 而 $\frac{k}{n+k}$

关于 k 单调且一致有界, 从而由 Abel 判别法知 $\sum_{k=1}^{+\infty} ka_{n+k}$ 收敛, 即 t_n 有定义.

进一步, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得当 $n > N$ 时,

$$S_n = \sum_{k=n}^{+\infty} ka_k \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

此时对任何 $n > N$ 以及 $m > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k a_{n+k} &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{n+k} (S_{k+n} - S_{k+n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{n+k} S_{k+n} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{k-1}{n+k-1} S_{k+n} \\ &= \frac{1}{n+1} S_{n+1} - \frac{m}{n+m} S_{m+n+1} \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{n+k} - \frac{k-1}{n+k-1} \right) S_{k+n}. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m k a_{n+k} \right| &\leq \left(\frac{1}{n+1} + \frac{m}{n+m} \right) \varepsilon + \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{n+k} - \frac{k-1}{n+k-1} \right) \varepsilon \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + 2 \frac{m}{n+m} - \frac{1}{n} \right) \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $|t_n| \leq 2\varepsilon, \forall n > N$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

四、【参考证明】: 设 A 可对角化, 则有 A 的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 构成 C^n 的一组基, $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$. 对任意的 i, j , 令 $T_{ij} \in M_n(C)$, 满足

$$T_{ij} \alpha_k = \delta_{ik} \alpha_j \quad (\forall k),$$

则可证 $T_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ 是 $M_n(C)$ 的一组基, 为此, 只要验证其线性无关性: 设 $\sum_{ij} \lambda_{ij} T_{ij} = 0$, 注意到

$$T_{ij}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, \alpha_j, \dots, 0),$$

有 $\sum_{ij} \lambda_{ij} T_{ij}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = 0$. 从而

$$\sum_i \sum_j \lambda_{ij} (0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0) = 0.$$

即

$$\begin{aligned} &\left(\sum_j \lambda_{1j} \alpha_j, \dots, \sum_j \lambda_{ij} \alpha_j, \dots, \sum_j \lambda_{nj} \alpha_j \right) \\ &= \sum_j \left(0, 0, \sum_j \lambda_{ij} \alpha_j, 0, \dots, 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

从而有 $\sum_j \lambda_{ij} \alpha_j = 0 (\forall i)$, 故 $\lambda_{ij} = 0 (\forall i, j)$. 所以

$$T_{ij}, i, j = 1, \dots, n$$

是 $M_n(C)$ 的一组基. 又 $\sigma_A(T_{ij}) = AT_{ij} - T_{ij}A$,

$$\begin{aligned} & \sigma_A(T_{ij})(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \\ &= (0, \dots, 0, (\lambda_j - \lambda_i)\alpha_j, 0, \dots, 0) \\ &= (\lambda_j - \lambda_i)T_{ij}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

故 $\sigma_A(T_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i)T_{ij}$. 即 $T_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ 是 σ_A 的特征向量, 所以 σ_A 可对角化.

五、【参考证明】: 记 $M = \sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)|$, 则

$$|f(2x) - 2f(x)| \leq M,$$

$$|f(3x) - f(2x) - f(x)| \leq M,$$

.....

$$|f(nx) - f((n-1)x) - f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+.$$

从而

$$|f(nx) - nf(x)| \leq (n-1)M \leq nM, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+. (1)$$

上式中 x 用 mx 代入, 则有

$$|f(mnx) - nf(mx)| \leq nM, \forall x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}^+.$$

把上式中的 m, n 互换, 得

$$|f(mnx) - mf(nx)| \leq mM, \forall x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}^+.$$

于是有

$$\left| \frac{f(mx)}{m} - \frac{f(nx)}{n} \right| \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) M, \forall x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}^+. (2)$$

这表明函数行列 $\left\{ \frac{f(nx)}{n} \right\}$ 是关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛的. 设其极限为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 连续. 由题设,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^+,$$

$$\left| \frac{f(n(x+y))}{n} - \frac{f(nx)}{n} - \frac{f(ny)}{n} \right| \leq \frac{M}{n}.$$

取极限即得

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. (3)$$

而在(1)式除以 n 后取极限可以得到

$$|g(x) - f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}. (4)$$

从而 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - f(x)| < +\infty$.

下面证明 $g(x) = g(1)x$. 由(3)可得,

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} g(1), \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+.$$

由 $g(x)$ 的连续性和有理数的稠密性得到

$$g(x) = g(1)x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

综上所述, 要证的结论成立.

【注】如果最后由 $g(x)$ 的连续性和 $g(x+y) = g(x) + g(y)$ 得到 $g(x) = ax$ ，算全对。

六、**【参考证明】**：首先证明 $\varphi = a \cdot \text{tr}(-)$ ，这里 $\text{tr}(-)$ 是取迹映射：

$$\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{i1}E_{1j}) = \varphi(E_{1j}E_{i1}) = \delta_{ij}\varphi(E_{11})$$

其中 E_{ij} 是 (i, j) 位置为 1，其他位置为 0 的矩阵。

取 $a = \varphi(E_{11})$ ，则 $\varphi(E_{ij}) = a \cdot \text{tr}(E_{ij})$ ，故

$$\varphi = a \cdot \text{tr}(), a \neq 0.$$

1. $(-, -)$ 是双线性型，且是对称点。

设 $(X, Y) = 0, \forall Y \in M_n(R)$ ，取 $Y = X^t$ ， X 的共轭转置，则 $(X, Y) = a \cdot \text{tr}(XX^t) = 0$ 。有 $\text{tr}(XX^t) = 0$ ，故 $X = 0$ 。

2. 证明 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 与任意 A_k 可交换：设

$$\begin{aligned} B_i A_k &= \sum_l x_l B_l, x_l = (B_i A_k, A_l); A_k A_i \\ &= \sum_l y_l A_l, y_l = (A_k A_i, B_l). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{计算 } \Delta &= \left(\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i \right) A_k - A_k \sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n^2} (A_i B_i A_k - A_k A_i B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} \left(A_i \sum_l (B_i A_k, A_l) B_l - \sum_l (A_k A_i, B_l) A_l B_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n^2} \sum_l \left[(B_i A_k, A_l) A_i B_l - (A_k A_i, B_l) A_l B_i \right] \end{aligned}$$

上式中 $(A_k A_i, B_l) = (B_l A_k, A_i)$ 。故 $\Delta = 0$ 。从而 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 与任意 A_k 可交换， $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 是数量矩阵。



考研竞赛数学(ID:xwmath)
一个专注于大学数学公共基础课
资源分享的微信公众平台
高等数学, 线性代数
概率论与数理统计
考研数学, 竞赛数学
数学文化, 实验与建模
大学学习、生活历程
因为专业, 所以精彩