# 2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
# （数学类三、四年级）试卷

**一、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）**

(1) 设 $\Gamma$ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体：矩阵的每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为 1，则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}\left|A\right| =$______.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}\,x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛，则 $p$ 取值范围________.

(3) 设 $D: x^2+2y^2 \le 2x+4y$，则积分 $I=\iint\limits_D \left(x+y\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$_______.

(4) 若实向量 $X=\left(a,b,c\right)$ 的三个分量 $a,b,c$ 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$，则 $X=$_____或_____或________或________.

**二、（本题 15 分）** 在空间直角坐标系中，设 $S$ 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$，$\sigma$ 是空间中的平面，它与 $S$ 的交集为一个圆. 求所有这样平面 $\sigma$ 的法向量.

**三、（本题 15 分）** 设 $A,B$ 为 $n$ 阶实对称矩阵. 证明 $\mathrm{tr}\left(\left(AB\right)^2\right) \le \mathrm{tr}\left(A^2B^2\right)$.

**四、（本题 20 分）** 设单位圆 $\Gamma$ 的外切 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 $\Gamma$ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 $P_A,P_B$ 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的周长. 求证：$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

**五、（本题 10 分，抽象代数）** 设 $u_1,v_1,u_2,v_2$ 为群 $G$ 中的元素，满足

$$u_1v_1 = v_1u_1 = u_2v_2 = v_2u_2.$$

若 $u_1,u_2$ 的阶均为 8，$v_1,v_2$ 的阶均为 13. 证明：$u_1u_2$ 的阶为 4 及 $v_1v_2$ 的阶为 13.

**六、（本题 10 分，实变函数）** 设 $E\subset R^1$，$E$ 是 $L-$可测的，若 $m\left(E\right)>a>0$，则存在无内点的有界闭集 $F\subset E$，使得 $m\left(F\right)=a$.

**七、（本题 10 分，微分几何）** 设 $\gamma\left(s\right), s\in\left[0,l\right]$ 是空间中一条光滑闭曲线，以弧长为参数，且曲率 $k>0$. 设 $\beta:\left[0,l\right]\to S^2$ 为单位球面上由 $\gamma\left(s\right)$ 的单位主法向量构成的一条简单闭曲线 $B$. 证明：$B$ 将球面分成面积相等的两个部分.

**八、（本题 10 分，数值分析）** 实系数多项式 $p\left(x\right)$ 的模 1 范数定义为：

$$\| p \|_1 := \int_0^1 | p(x) | \,\mathrm{d}\,x.$$

1．求二次实系数多项式 $p\left(x\right)$ 使得 $p\left(x\right)\le x^3$，对任意 $x\in\left[0,1\right]$ 成立，且 $\left\|x^3-p\left(x\right)\right\|_1$ 达到最小.

2．求三次实系数多项式$p(x)$使得$p(x)\le x^4$，对任意$x\in[0,1]$成立，且$\left\|x^4-p(x)\right\|_1$达到最小.

**九、（本题 10 分，复变函数）**设$D=\{z\in C:|z|<1\}$是单位圆盘，$f(z)$在$D$上解析，$f(0)=0$，且在$D$上有$\mathrm{Re}\,f(z)\le 1$．求证：在$D$上有$\mathrm{Re}\,f(z)\le \dfrac{2|z|}{1+|z|}$.

**十、（本题 10 分，概率统计）**甲袋中有$N-1(N>1)$个白球和 1 个黑球，乙袋中有$N$个白球，每次从甲乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中，这样经过了$n$次，求黑球出现在甲袋中的概率$p_n$，并计算$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.