第十届全国大学生数学竞赛试卷

(非数学类，2018 年 10 月)

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \right] = $ _____.

【参考解析】：**【思路一】** 因为 $\left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^{\alpha} < 1 + \dfrac{1}{n}$，所以

$$0 < (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = n^{\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha} - 1 \right] < n^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \to 0 \, (n \to 0)$$

所以由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \right] = 0$.

【思路二】 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \right] = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x^{\alpha}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x}{x^{\alpha}} = \alpha \lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha} = 0.$$

(2) 若曲线 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程为 _____.

【参考解析】：当 $t = 0$ 时，$x = 1$ 且 $e^y = 1$，即 $y = 0$，即求点 $(1, 0)$ 处曲线 $y = y(x)$ 的切线方程. 在方程组两端对 t 求导，得

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \sin t \\ e^y \cdot y'(t) + y + ty'(t) + \cos t = 0 \end{cases}$$

将 $t = 0$，$y = 0$ 代入方程，得 $x'(0) = 1, y'(0) = -1$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = \dfrac{y'(0)}{x'(0)} = -1$，所以切线方程为 $y - 0 = (-1)(x - 1)$，即 $y = -x + 1$.

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)}{\left(1 + x^2 \right)^{3/2}} \, \mathrm{d}x = $ _____.

【参考解析】：**【思路一】** 典型三角代换结构 $\sqrt{1 + x^2}$，令 $x = \tan t, \mathrm{d}x = \sec^2 t \, \mathrm{d}t$，所以

$$F(x) = \int \frac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)}{\left(1 + x^2 \right)^{3/2}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\ln\left(\sec t + \tan t \right)}{\sec t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int \ln\left(\sec t + \tan t\right) \mathrm{d}\left(\sin t\right) = \sin t \ln\left(\sec t + \tan t\right) - \int \frac{\sin t}{\cos t} \mathrm{d}\, t$$

$$= \sin t \ln\left(\sec t + \tan t\right) + \ln\left|\cos t\right| + C$$

由于 $\tan t = \dfrac{x}{1}$，所以 $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\sec t = \sqrt{1+x^2}$，代入得原

积分为

$$F\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\text{或} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

【思路二】 $F\left(x\right) = \int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \mathrm{d}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = $ _____.

【参考解析】：**【思路一】** $A = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \cos x\left(1 - \sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}\left(1 - \sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \left[\frac{1 - \sqrt{\left(\cos 2x - 1\right) + 1}}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[3]{\left(\cos 3x - 1\right) + 1}}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.$$

【思路二】 带皮亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - x^2 + o\left(x^2\right)$$

$$\left(\cos 3x\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

所以 $\cos x\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos 3x\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - 3x^2 + o\left(x^2\right)$，代入得

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2} = 3.$$

二(本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1) = 0$，求函数 $f\left(x^2 - y^2\right)$，

使得曲线积分 $\displaystyle\int_L y\left[2 - f\left(x^2 - y^2\right)\right]\mathrm{d}x + xf\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不

与直线 $y = \pm x$ 相交的分段光滑曲线.

【参考解析】：令 $P(x,y) = y\left[2 - f\left(x^2 - y^2\right)\right], Q(x,y) = xf\left(x^2 - y^2\right)$，于是

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2 - f\left(x^2 - y^2\right) + y\left[-f'\left(x^2 - y^2\right)(-2y)\right]$$

$$= 2 - f\left(x^2 - y^2\right) + 2y^2 f'\left(x^2 - y^2\right)$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = f\left(x^2 - y^2\right) + 2x^2 f'\left(x^2 - y^2\right)$$

由积分与路径无关的条件 $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，代入结果整理得

$$\left(x^2 - y^2\right)f'\left(x^2 - y^2\right) + f\left(x^2 - y^2\right) - 1 = 0$$

令 $x^2 - y^2 = u$，即 $uf'(u) + f(u) - 1 = 0$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}f(u)}{1 - f(u)} = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$，由分离变

量法，两端积分，得 $\dfrac{1}{1 - f(u)} = C_1 u$，即 $f(u) = 1 + \dfrac{C}{u}$，由 $f(1) = 0$，得 $C = -1$，

即 $f\left(x^2 - y^2\right) = 1 - \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

【注】 其中微分方程 $uf'(u) + f(u) - 1 = 0$ 的通解可以通过改写微分方程为 $\left[uf(u)\right]' = 1$，

得到通解为 $uf(u) = u + C$.

三（本题满分 14 分） 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \leq f(x) \leq 3$. 证明：

$$1 \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{4}{3}.$$

【参考解析】：由柯西不等式，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq \left[\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right]^2 = 1$$

又由于 $\big[f(x)-1\big]\big[f(x)-3\big] \leq 0$，则 $\dfrac{\big[f(x)-1\big]\big[f(x)-3\big]}{f(x)} \leq 0$，即

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4$$，所以 $\int_0^1 \left[f(x)+\frac{3}{f(x)}\right]\mathrm{d}x \leq 4$. 由于

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right]^2 \leq 4$$

所以 $1 \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \dfrac{4}{3}$.

四（本题满分 12 分） 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中 (V) 是由

$$x^2+y^2+\left(z-2\right)^2 \geq 4, \quad x^2+y^2+\left(z-1\right)^2 \leq 9$$

及 $z \geq 0$ 所围成的空间图形.

【参考解析】：画图（关键），考虑区域的特殊性，采用容易计算的整体减去容易计算的部分来完成计算，从而分成三个部分来讨论：

第一部分：整个大球 $\left(V_1\right)$ 的积分：采用球坐标换元，令

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\, y = r\sin\varphi\sin\theta,\, z = 1 + r\cos\varphi$$
$$0 \leq r \leq 3,\, 0 \leq \varphi \leq \pi,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是有

$$\iiint\limits_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{648\pi}{5}$$

第二部分：小球 $\left(V_2\right)$ 的积分：采用球坐标换元，令

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\, y = r\sin\varphi\sin\theta,\, z = 2 + r\cos\varphi$$
$$0 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \varphi \leq \pi,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是有

$$\iiint\limits_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{256\pi}{15}$$

第三部分：大球 $z=0$ 下部分的积分 $\left(V_3\right)$，采用柱坐标：

$$x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta,\, 1-\sqrt{9-r^2} \leq z \leq 0$$
$$0 \leq r \leq 2\sqrt{2},\, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

于是有 $\iiint\limits_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r\,\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2\,\mathrm{d}z = \dfrac{136\pi}{5}$

所以最终的积分为

$$\iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V_1)} - \iiint\limits_{(V_2)} - \iiint\limits_{(V_3)}$$

$$= \frac{648}{5}\pi - \frac{256}{15}\pi - \frac{136}{5}\pi = \frac{256}{3}\pi.$$

五（本题满分 14 分） 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \le M$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$\left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| \le M \mid AB \mid,$$

其中 $\mid AB \mid$ 表示线段 AB 的长度.

【参考解析】: 作辅助函数 $\varphi(t) = f\left[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)\right]$, 显然函数 $\varphi(t)$

在 $[0,1]$ 上可导. 根据拉格朗日中值定理, 存在 $c \in (0,1)$, 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2 - y_1)$$

所以 $\left| \varphi(1) - \varphi(0) \right| = \left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right|$

$$= \left| \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2 - y_1) \right|$$

$$\le \sqrt{\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \le M \mid AB \mid.$$

六（本题满分 14 分） 证明: 对于连续函数 $f(x) > 0$, 有

$$\ln \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

【参考解析】: 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k), x_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

由算术几何不等式 $\left[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\right]^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$. 于是有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f(x_k) \le \ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\right]$$

根据 $\ln x$ 的连续性, 两边取极限, 得

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f(x_k) \le \lim_{n \to +\infty} \ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\right]$$

即 $\ln \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x.$

七（本题满分 14 分） 已知 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是正数数列, 且 $b_{k+1} - b_k \ge \delta > 0, k = 1, 2, \cdots$, δ

为一常数. 证明：若级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k}$ 收敛.

【参考解析】：令 $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i b_i, a_k b_k = S_k - S_{k-1}$,

$$S_0 = 0, a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}, k = 1, 2, \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}} \right) + \frac{S_N}{b_N}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k$$

所以 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ 收敛. 由不等式

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$

可知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{S_k}{b_k b_{k+1}}$，故原不等式成立.