第十二届全国大学生数学竞赛初赛 《数学类 B 卷》试题

一、(15 分) 已知椭球面 $\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>b$ 的外切柱面 $\Sigma_\varepsilon(\varepsilon=1$ 或-1)平行于已知直线 $l_\varepsilon: \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}$. 试求与 Σ_ε 交于一个圆周的平面的法方向.

注:本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

二、(15分) 设f(x)在[0,1]上连续,且 $1 \le f(x) \le 3$. 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}\,x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{f(x)} \leq \frac{4}{3}.$$

三、(15 分) 设A为n 阶复方阵,p(x)为A 的特征多项式,又设g(x)为m 次复系数多项式, $m \geq 1$. 证明:g(A)可逆当且仅当p(x)与g(x)互素.

四、(20 分) 设 σ 为n 维复向量空间 \mathbb{C}^n 的一个线性变换. **1**表示恒等变换. 证明以下两条等价:

- (1) $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$;
- (2) 存在 σ 的 n+1 个特征向量: v_1, \ldots, v_{n+1} ,这 n+1 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

五、(15 分) 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} \mathrm{d} x$,这里(x)表示x的小数部分(例如:当n为正整数且 $x \in [n,n+1)$ 时,则(x) = x - n).

六、(20 分) 设函数 fig(xig)在ig(0,1ig)上连续,满足对任意 $x\in [0,1]$, $\int_{x^2}^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\geq rac{x^2-x^4}{2}$.

证明: $\int_0^1 f^2(x) \, \mathrm{d} \, x \geq rac{1}{10}$.