

## 2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

**一、(本题 15 分)** 平面  $R^2$  上两个半径为  $r$  的圆  $C_1, C_2$  外切于  $P$  点，将圆  $C_2$  沿  $C_1$  的圆周(无滑动)滚动一周，这时  $C_2$  上的  $P$  点也随  $C_2$  的运动而运动。记  $\Gamma$  为  $P$  点的运动轨迹曲线，称为心脏线。现设  $C$  为以  $P$  的初始位置(切点)为圆心的圆，其半径为  $R$ 。记  $\gamma: R^2 \cup \{\infty\} \rightarrow R^2 \cup \{\infty\}$  为圆  $C$  的反演变换，它将  $Q \in R^2 \setminus \{P\}$  映成射线  $PQ$  上的点  $Q'$ ，满足  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$ 。求证： $\gamma(\Gamma)$  为抛物线。

**二、(本题 10 分)** 设  $n$  阶方阵  $B(t)$  和  $n \times 1$  矩阵  $b(t)$  分别为

$$B(t) = (b_{ij}(t)), b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T,$$

其中  $b_{ij}(t), b_i(t)$  均为关于  $t$  的实系数多项式， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。记  $d(t)$  为  $B(t)$  的行列式， $d_i(t)$  为用  $b(t)$  替代  $B(t)$  的第  $i$  列后所得的  $n$  阶矩阵的行列式。若  $d(t)$  有实根  $t_0$ ，使得  $B(t_0)X = b(t_0)$  成为关于  $X$  的相容线性方程组，试证明： $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$  必有次数大于等于 1 的公因式。

**三、(本题 15 分)** 设  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上有二阶连续导数， $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$  且  $0 < f(x) < x, x \in (0, a)$ 。令  $x_{n+1} = f(x_n), x_1 \in (0, a)$ 。

(1) 求证  $\{x_n\}$  收敛并求极限；

(2) 试问  $\{nx_n\}$  是否收敛？若不收敛，则说明理由；若收敛，则求其极限。

**四、(本题 15 分)** 设  $a > 1$ ，函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  可微，求证：存在趋于无穷的正数列  $\{x_n\}$  使得  $f'(x_n) < f(ax_n), n = 1, 2, \dots$ 。

**五、(本题 20 分)** 设  $f: [-1, 1] \rightarrow R$  为偶函数， $f$  在  $[0, 1]$  上单调递增，又设  $g$  是  $[-1, 1]$  上的凸函数，即对任意  $x, y \in [-1, 1]$  及  $t \in (0, 1)$  有

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

求证： $2 \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \geq \int_{-1}^1 f(x)dx \int_{-1}^1 g(x)dx$ 。

**六、(本题 25 分)** 设  $R^{n \times n}$  为  $n$  阶实方阵全体， $E_{ij}$  为  $(i, j)$  位置元素为 1，其余位置元素为 0 的  $n$  阶方阵， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。让  $\Gamma_r$  为秩等于  $r$  的  $n$  阶实方阵全体， $r = 0, 1, 2, \dots, n$ ，并让  $\phi: R^{n \times n} \rightarrow R^{n \times n}$  为可乘映照，即满足： $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B), \forall A, B \in R^{n \times n}$ 。试证明：(1)  $\forall A, B \in \Gamma_r$ ，秩  $\phi(A) = \text{秩} \phi(B)$ 。

(2) 若  $\phi(0) = 0$ ，且存在某个秩为 1 的矩阵  $W$ ，使得  $\phi(W) \neq 0$ ，则必存在可逆方阵  $R$  使得  $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$  对于一切  $E_{ij}$  皆成立， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。