2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
(非数学专业) 参考答案

一、填空题

(1) 【参考解答】: 令 $y'=p$，则 $y''=p'=p^3$，这是可分离变量的微分方程，有 $\frac{\mathrm{d}p}{p^3}=\mathrm{d}x$，积分得到 $-\frac{1}{2}p^{-2}=x-C_1$，即 $p=y'=\frac{\pm 1}{\sqrt{2(C_1-x)}}$，积分得 $y=C_2\pm\sqrt{2(C_1-x)}$.

(2) 【参考解答】: 利用对称性和极坐标，有

$$I=4e^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\sin^2\theta e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}e^4\int_1^4 ue^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}(2e^3-5).$$

(3) 【参考解答】: $\mathrm{d}x=f(t)\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=f'(t)\mathrm{d}t$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)}{f(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{f(t)f''(t)-f'(t)^2}{f^3(t)}.$$

(4) 【参考解答】: $\left|f(A)\right|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

(5) 【参考解答】: $\pi n!e=\pi n!\left[2+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]$

$$=\pi a_n+\frac{\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

其中 a_n 为整数，并且当 $n=2k$ 时

$$\begin{aligned}f(2k)&=2\cdot(2k)!+\frac{(2k)!}{2!}+\frac{(2k)!}{3!}+\cdots+\frac{(2k)!}{(2k)!}\\&=2\cdot(2k)!+(2k)(2k-1)\cdot 3+\cdots+(2k)+1\end{aligned}$$

为奇数

$$\begin{aligned}f(2k+1)&=2\cdot(2k+1)!+\frac{(2k+1)!}{2!}+\frac{(2k+1)!}{3!}+\cdots+\frac{(2k+1)!}{(2k+1)!}\\&=2\cdot(2k+1)!+(2k+1)(2k)\cdot 3+\cdots+(2k+1)+1\end{aligned}$$

为偶数. 所以

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(\pi n!e)=\pm\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})\right)\right]=\pm\pi.$$

即极限不存在，如果加上绝对值则极限存在等于 π.

二、【参考证明】：记 $F(x,y,z)=f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)$，则

$$\left(F_x,F_y,F_z\right)=\left(\frac{f_1}{z-c},\frac{f_2}{z-c},\frac{-(x-a)f_1-(y-b)f_2}{(z-c)^2}\right)$$

取曲面的法向量

$$\vec{n}=\left((z-c)f_1,(z-c)f_2,-(x-a)f_1-(y-b)f_2\right).$$

记 (x,y,z) 为曲面上的点，(X,Y,Z) 为切面上的点，则曲面上过点 (x,y,z) 的切平面方程为

$$\begin{aligned}&\left[(z-c)f_1\right](X-c)+\left[(z-c)f_2\right](Y-y)\\&-\left[(x-a)f_1+(y-b)f_2\right](Z-z)=0\end{aligned}$$

容易验证，对任意 $(x,y,z)(z\neq c),(X,Y,Z)=(a,b,c)$ 都满足上述切平面方程.

三、【参考证明】：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

令 $F(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=-f(x)$. 由此，

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)F(x)\,\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

$$=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(b)-F^2(a)=F^2(a)=\left(\int_a^b f(x)\right)^2$$

四、【参考证明】：要证明不等式成立，即要证明

$$R(AB)+R(BC)\le R(B)+R(ABC)=R\begin{pmatrix}ABC & O\\ O & B\end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix}E_m & A\\ O & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABC & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_q & O\\ -C & E_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & AB\\ -BC & B\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}O & AB\\ -BC & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & -E_q\\ E_p & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB & O\\ B & BC\end{pmatrix}$$

且 $\begin{pmatrix}E_m & A\\ O & E_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E_q & O\\ -C & E_p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}O & -E_q\\ E_p & O\end{pmatrix}$ 可逆，所以

$$R\begin{pmatrix}ABC & O\\ O & B\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}AB & O\\ B & BC\end{pmatrix}\ge R(AB)+R(BC).$$

五【参考解答】：(1) $I_n+I_{n-2}=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\left(\tan x\right)=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{n-1}$$

(2) 由于$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，所以$0<\tan x<1$，$\tan^{n+2}x<\tan^{n}x<\tan^{n-2}x$. 从而

$$I_{n+2}<I_n<I_{n-2},$$

于是$I_{n+2}+I_n<2I_n<I_{n-2}+I_n$，

$$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)},\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^p<I_n^p<\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^p.$$

当$p>1$时，$\left|\left(-1\right)^p I_n^p\right|\le I_n^p<\dfrac{1}{2^p\left(n-1\right)^p},(n\ge 2)$. 由$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n-1\right)^p}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n I_n^p$绝对收敛.

当$0<p\le 1$时，由于$\left\{I_n^p\right\}$单调减少，并趋近于 0，由莱布尼兹判别法，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n I_n^p$收敛.

而$I_n^p>\dfrac{1}{2^p\left(n+1\right)^p}\ge\dfrac{1}{2^p}\cdot\dfrac{1}{n+1}$，$\dfrac{1}{2^p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n I_n^p$是条件收敛的.

当$p\le 0$时，则$\left|I_n^p\right|\ge 1$，由级数收敛的必要条件，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n I_n^p$发散.

六、【参考证明】：记上半球面S的底平面为D，方向向下，S和D围成的区域记为Ω，由高斯公式得

$$\left(\iint\limits_S+\iint\limits_D\right)P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

由于$\iint\limits_D P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_D R\,\mathrm{d}\sigma$和题设条件，其中$\mathrm{d}\sigma$是$xOy$平面上的面积微元，则有

$$-\iint\limits_D R\,\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\qquad(*)$$

注意到上式对任何$r>0$成立，由此证明$R\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$.

若不然，设$R\left(x_0,y_0,z_0\right)\ne 0$，注意到

$$\iint\limits_D R\,\mathrm{d}\sigma=R\left(\xi,\zeta,z_0\right)\pi r^2,\text{其中}\left(\xi,\zeta,z_0\right)\in D,$$

而当$r\to 0^+,R\left(\xi,\zeta,z_0\right)\to R\left(x_0,y_0,z_0\right)$， 故$(*)$左端为一个二阶的无穷小. 类似地，当

$$\frac{\partial P\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\partial x}+\frac{\partial R\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\partial z}\ne 0,$$

$\iiint\limits_\Omega\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$ 是一个 3 阶的无穷小；而当

$$\frac{\partial P\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\partial x}+\frac{\partial R\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\partial z}=0,$$

该积分趋于 0 的阶高于 3. 因此$(*)$式右端阶高于左端，从而当r很小时，有

$$\left|\iint_D R\,\mathrm{d}\sigma\right|\geq\left|\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\right|,$$

这与$(*)$矛盾.

由于在任何点$R\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$，故$R\left(x,y,z\right)\equiv 0$. 代入入$(*)$式得到

$$\iiint_\Omega\frac{\partial P\left(x,y,z\right)}{\partial x}\mathrm{d}V=0$$

重复前面的证明可知$\frac{\partial P\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\partial x}=0$. 由$\left(x_0,y_0,z_0\right)$的任意性得$\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0.$