2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

（非数学类）试卷

一、解答下列各题（本题共 28 分，每小题 7 分）

1． 计算积分 $\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

2． 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$，求一个这样的函数 $f(x)$，使得积分 $I=\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 取到最小值.

3． 设 $F\left(x,y,z\right),G\left(x,y,z\right)$ 有连续偏导数，$\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,z\right)}\neq 0$，曲线 $\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0,\\ G\left(x,y,z\right)=0\end{cases}$ 过点 $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$. 记 Γ 在 xOy 面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 $\left(x_0,y_0\right)$ 的切线方程.

4． 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中 a 为常数，矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$，其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $rank\left(A+B\right)=3$，求常数 a 的值.

二、（12 分） 设 $f\in C^4\left(-\infty,+\infty\right)$，

$$f\left(x+h\right)=f\left(x\right)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''\left(x+\theta h\right)h^2,$$

其中 θ 是与 x,h 无关的常数. 证明 f 是不超过三次的多项式.

三、（12 分） 设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0 \text{ 且 } f(0)=1.$$

试证：当 $x\geq 0$ 时，有 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

四、（10 分） 设 $D=\left\{\left(x,y\right)\mid 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\right\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数，若对任何 x,y 有 $f\left(0,y\right)=f\left(x,0\right)=0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leq A$.

证明$I \le \dfrac{A}{4}$.

五、(12 分) 设函数$f(x)$连续可导，$P=Q=R=f\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)$，有向曲面$\Sigma_1$是圆柱体$x^2+y^2 \le t^2, 0 \le z \le 1$的表面，方向朝外. 记第二型曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y .$$

求极限$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

六、(12 分) 设A, B是两个n阶正定矩阵，求证AB正定的充要条件是$AB=BA$.

七、(12 分) 假设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 1，$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n=0$，且$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=A$. 证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$收敛且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$.