2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类）试卷

一、（本题 15 分） 设 A 为正常数，直线 l 与双曲线 $x^2-y^2=2\left(x>0\right)$ 所围的有限部分的面积为 A．证明：

(i) 所有上述 l 与双曲线 $x^2-y^2=2\left(x>0\right)$ 的截线段的中点的轨迹为双曲线.

(ii) l 总是(i)中的轨迹曲线的切线.

二、（本题 15 分） 设函数 $f(x)$，满足条件：

1) $-\infty<a\le f(x)\le b<+\infty, a\le x\le b;$

2) 对于任意不同的 $x,y\in\left[a,b\right]$，有 $\left|f(x)-f(y)\right|<L\,|\,x-y\,|$，其中 L 是大于 0 小于 1 的常数. 设 $x_1\in\left[a,b\right]$，令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+f\left(x_n\right)\right), n=1,2,\cdots.$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ 存在，且 $f(x)=x.$

三、（本题 15 分） 设 n 阶实方阵 A 的每个元素的绝对值为 2．证明：当 $n\ge 3$ 时，

$$|\,A\,|\le\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}n!.$$

四、（本题 15 分） 设 $f(x)$ 为区间 $\left(a,b\right)$ 上的可导函数．对于 $x_0\in\left(a,b\right)$，若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x\in U\setminus\left\{x_0\right\}$，有

$$f\left(x\right)>f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点．类似地，若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x\in U\setminus\left\{x_0\right\}$，有

$$f\left(x\right)<f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点．证明：若 $f(x)$ 为区间 $\left(a,b\right)$ 上的可导函数，且不是一次函数，则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

五、（本题 20 分） 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵．记

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4\\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ -x_3 & a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ -x_4 & a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

若 $|\,A\,|=-12, A$ 的特征值之和为 1，且 $\left(1,0,-2\right)^T$ 为 $\left(A^*-4I\right)x=0$ 的一个解．试给出一

正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$使得$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$化为标准型.

六、（本题 20 分）设R为实数域，n为给定的自然数，A表示所有n次首一实系数多项式组成的几何. 证明：

$$\inf_{b\in R, a>0, P(x)\in A} \frac{\int_b^{b+a} |P(x)| \, \mathrm{d}x}{a^{n+1}} > 0.$$