

2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

一、(本题 15 分) 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光照射 S , 其中部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ . 证明: Γ 落在一张过椭球中心的平面上.

二、(本题 15 分) 设 n 为奇数, A, B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 S_1 , $B + J_B$ 的特征值集合为 S_2 , 其中 J_A, J_B 分别表示 A, B 的 Jordan 标准型. 求证: $0 \in S_1 \cup S_2$.

三、(本题 20 分) 设 A_1, \dots, A_{2017} 为 2016 阶实方阵. 证明关于 x_1, \dots, x_{2017} 的方程

$$\det(x_1 A_1 + \dots + x_{2017} A_{2017}) = 0$$

至少有一组非零实数解, 其中 \det 表示行列式.

四、(本题 20 分) 设 $f_0(x), f_1(x)$ 是 $[0, 1]$ 上正连续函数, 满足 $\int_0^1 f_0(x) dx \leq \int_0^1 f_1(x) dx$.

$$\text{设 } f_{n+1}(x) = \frac{2f_n^2(x)}{f_n(x) + f_{n-1}(x)}, n = 1, 2, \dots.$$

求证: 数列 $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx, n = 1, 2, \dots$ 单调递增且收敛.

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证: 不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geq f^\alpha(x), x \in [0, +\infty). \quad (1)$$

六、(本题 15 分) 设 $f(x), g(x)$ 是 $[0, 1]$ 区间上的单调递增函数, 满足

$$0 \leq f(x), g(x) \leq 1, \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

求证: $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{1}{2}$.