

## 2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛

### (非数学类) 试卷

#### 一、解答下列各题 (本题共 28 分, 每小题 7 分)

1. 计算积分  $\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt dx$ .

2. 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的连续函数, 且满足  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ , 求一个这样的函数  $f(x)$ , 使得积分  $I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx$  取到最小值.

3. 设  $F(x, y, z), G(x, y, z)$  有连续偏导数,  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$ , 曲线  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . 记  $\Gamma$  在  $xOy$  面上的投影曲线为  $S$ . 求  $S$  上过点  $(x_0, y_0)$  的切线方程.

4. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 其中  $a$  为常数, 矩阵  $B$  满足关系式  $AB = A - B + E$ , 其中

$E$  是单位矩阵且  $B \neq E$ . 若秩  $\text{rank}(A+B) = 3$ , 求常数  $a$  的值.

二、(12 分) 设  $f \in C^4(-\infty, +\infty)$ ,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,$$

其中  $\theta$  是与  $x, h$  无关的常数. 证明  $f$  是不超过三次的多项式.

三、(12 分) 设当  $x > -1$  时, 可微函数  $f(x)$  满足条件

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dt = 0 \text{ 且 } f(0) = 1.$$

试证: 当  $x \geq 0$  时, 有  $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$  成立.

四、(10 分) 设  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中函数

$$f(x, y) \text{ 在 } D \text{ 上有连续二阶偏导数, 若对任何 } x, y \text{ 有 } f(0, y) = f(x, 0) = 0 \text{ 且 } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A.$$

证明  $I \leq \frac{A}{4}$ .

五、(12分) 设函数  $f(x)$  连续可导,  $P = Q = R = f\left(\left(x^2 + y^2\right)z\right)$ , 有向曲面  $\Sigma_1$  是圆柱体  $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq 1$  的表面, 方向朝外. 记第二型曲面积分

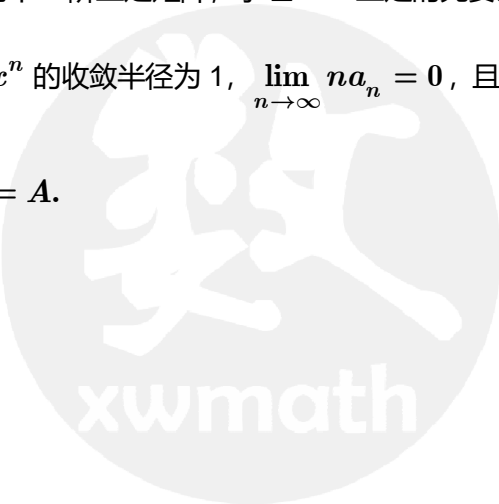
$$I_t = \iint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy .$$

求极限  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{I_t}{t^4}$ .

六、(12分) 设  $A, B$  是两个  $n$  阶正定矩阵, 求证  $AB$  正定的充要条件是  $AB = BA$ .

七、(12分) 假设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ . 证

明  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛且  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ .



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)