2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛（数学类）参考答案

一、【证明】：注意到$|(\sin x)'|=|\cos x|\le 1$，由中值定理，有

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|,\forall x,y\in R$$

所以

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|=|\varepsilon(\sin x_{n+1}-\sin x_n)|\le\varepsilon|x_{n+1}-x_n|,n=0,1,2,\cdots$$

从而可得

$$|x_{n+1}-x_n|\le\varepsilon^n|x_1-x_0|,\forall n=0,1,2,\cdots$$

于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛，从而 $\xi=\lim_{n\to+\infty}x_n$ 极限存在.

对于递推式 $x_{n+1}=a+\varepsilon\sin x_n$ 两边取极限即得ξ为 $x-\varepsilon\sin x=a$ 的根.

进一步，设η也为 $x-\varepsilon\sin x=a$的根，则

$$|\xi-\eta|=\varepsilon|\sin\xi-\sin\eta|\le\varepsilon|\xi-\eta|.$$

所以由$\varepsilon\in(0,1)$可得$\eta=\xi$，即$x-\varepsilon\sin x=a$的根唯一.

二、【证明】：反证法. 设方程有解，即存在复矩阵A使得$A^2=B$. 注意到B的特征根为 0，且其代数重根为 3.

设λ为A的一个特征根，则λ^2为B的特征根，所以$\lambda=0$. 从而A的特征根为 0. 于是A的 Jordan 标准型只可能为

$$J_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},J_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},J_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

从而A^2的 Jordan 标准型只能为$J_1=J_1^2=J_2^2$或$J_2=J_3^2$. 因此A^2的秩不大于 1，与$B=A^2$的秩为 2 矛盾. 所以$X^2=B$无解.

三、【证明】：结论成立. 分两步证明结论.

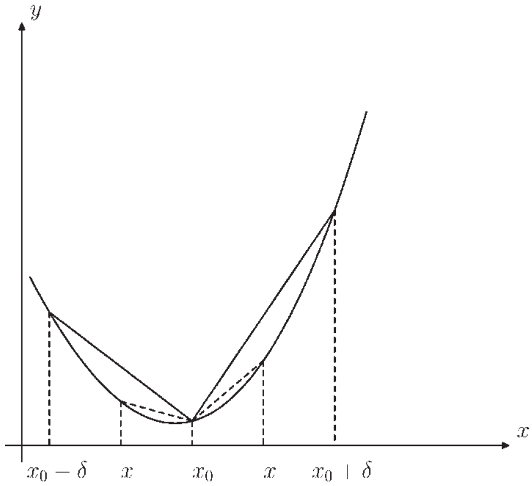
(i) 对于 $\delta>0$以及$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上的凸函数$g(x)$，容易验证$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$：

$$\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\le\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\le\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}$$

从而

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right|\le\left|\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\right|+\left|\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\right|,\forall\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

由此即得$g(x)$在x_0连续. 一般地，可得开区间上的一元凸函数连续.



(ii)设$\left(x_0,y_0\right)\in D$，则有$\delta>0$使得

$$E_\delta\equiv\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]\times\left[y_0-\delta,y_0+\delta\right]\subset D.$$

注意到固定 x 或 y 时，$f(x,y)$ 作为一元函数都是凸函数，由(i)的结论，$f\left(x,y_0\right),f\left(x,y_0+\delta\right),f\left(x,y_0-\delta\right)$都是$x\in\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]$上的连续函数，从而它们有界，即存在常数$M_\delta>0$使得

$$\frac{\left|f(x,y_0+\delta)-f\left(x,y_0\right)\right|}{\delta}+\frac{\left|f(x,y_0)-f\left(x,y_0-\delta\right)\right|}{\delta}+\frac{\left|f(x_0+\delta,y_0)-f\left(x_0,y_0\right)\right|}{\delta}+\frac{\left|f\left(x_0,y_0\right)-f(x_0-\delta,y_0)\right|}{\delta}\le M_\delta,$$
$$\forall x\in\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]$$

进一步，由 (i) 的结论，对于$\left(x,y\right)\in E_\delta$，

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\le\left(\frac{\left|f(x,y_0+\delta)-f\left(x,y_0\right)\right|}{\delta}+\frac{\left|f(x,y_0)-f\left(x,y_0-\delta\right)\right|}{\delta}\right)|y-y_0|+\\&\left(\frac{\left|f(x_0+\delta,y_0)-f\left(x_0,y_0\right)\right|}{\delta}+\frac{\left|f\left(x_0,y_0\right)-f(x_0-\delta,y_0)\right|}{\delta}\right)|x-x_0|\\&\le M_\delta|y-y_0|+M_\delta|x-x_0|.\end{aligned}$$

于是$f(x,y)$在$\left(x_0,y_0\right)$连续.

四、【证明】: 记$M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<+\infty$，令

$$r(x)=f(x)-f(1)-f'(1)\left(x-1\right)=f(x)-a\left(x-1\right).$$

由 Peano 型的泰勒展开式可得$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in\left(0,1\right)$，使得当$\delta<x\le1$时，$|r(x)|\le\varepsilon\left(1-x\right)$. 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^1x^nf(x)dx&=\int_0^\delta x^nf(x)\,\mathrm{d}x+\int_\delta^1ax^n\left(x-1\right)\mathrm{d}x+\int_\delta^1x^nr(x)\,\mathrm{d}x\\&=R_1+R_2+R_3.\end{aligned}$$

注意到

$$|R_1|\le M\int_0^\delta x^n dx=M\frac{\delta^{n+1}}{n+1},\quad R_2=-\frac{a}{(n+1)(n+2)}+a\left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1}-\frac{\delta^{n+2}}{n+2}\right)$$

$$\begin{aligned}|R_3|&\le\int_\delta^1 x^n|r(x)|\,\mathrm{d}x\le\varepsilon\int_\delta^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x\\&\le\varepsilon\int_0^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|n^2R_1\right|=0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left|n^2R_2+a\right|=0,\ \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\left|n^2R_3\right|\le\varepsilon$. 所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|n^2\int_0^1 x^nf(x)\,\mathrm{d}x+a\right|\le\varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon>0$ 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\int_0^1 x^nf(x)\,\mathrm{d}x=-a$.

五、【证明】： 容易知道 A,B,C 共线， D,E,F 共线． 而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点：单叶双曲面和双曲抛物面． 然后，可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的，且不是同一条直线． 这就又排除了双曲抛物面的可能（双曲抛物面的同族直母线都异面，不同族直母线都相交），所以只可能是单叶双曲面.

【注】 曲面方程是 $(x-2)^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$（不要求写）.

六、【证明】： 取任意实数 r，由题设知 $(v+r\beta)A(v+r\beta)^T\ge 0$，即

$$vAv^T+rvA\beta^T+r\beta Av^T+r^2\beta A\beta^T\ge 0.$$

亦即 $vAv^T+r\left(vA\beta^T+\beta Av^T\right)+r^2\beta A\beta^T\ge 0$.

若 $vA\beta^T\ne 0$，则有 $vA\beta^T+\beta Av^T\ne 0$，因此可取适当的实数 r 使得

$$vAv^T+r\left(vA\beta^T+\beta Av^T\right)+r^2\beta A\beta^T<0$$

矛盾.

七、【证明】： 取定 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，定义

$$A_m=\left[\frac{m}{n},\frac{m}{n}+\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}}f(t)dt\right),\quad g(x)=\begin{cases}1,x\in\bigcup\limits_{m=0}^{n-1}A_m,\\0,x\notin\bigcup\limits_{m=0}^{n-1}A_m.\end{cases}$$

对于 $0\le\alpha<\beta\le1$，设非负整数 $k\le l$ 满足 $\dfrac{k}{n}\le\alpha<\dfrac{k+1}{n},\dfrac{l}{n}\le\beta<\dfrac{l+1}{n}$ ，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}\,x\right| &\le \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}}\big|f(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}\,x \\ &\quad+\left|\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{l}{n}}\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}\,x\right|+\int_{\frac{l}{n}}^{\beta}\big|f(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}\,x \\ &\le \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}}1\,\mathrm{d}\,x+0+\int_{\frac{l}{n}}^{\beta}1\,\mathrm{d}\,x\le\frac{2}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

八、【证明】：令 $P=\int_{p}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t,\ Q=\int_{q}^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}\,t, I=a-P-Q$，其中 $pq=a$.

则

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\left[\varphi^{-1}(t)\right]^{2}\mathrm{d}\,t &\ge \int_{0}^{q}\left[\varphi^{-1}(t)\right]^{2}\mathrm{d}\,t \\ &\ge \frac{1}{q}\left(\int_{0}^{q}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^{2}=\frac{1}{q}\left(a-Q\right)^{2}=\frac{1}{q}\left(I+P\right)^{2},\end{aligned}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\varphi(t)\right]^{2}dt\ge\int_{0}^{p}\left[\varphi(t)\right]^{2}dt\ge\frac{1}{p}\left(\int_{0}^{p}\varphi(t)dt\right)^{2}=\frac{1}{p}\left(a-P\right)^{2}=\frac{1}{p}\left(I+Q\right)^{2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty}\left[\varphi(t)\right]^{2}\mathrm{d}\,t+\int_{0}^{+\infty}\left[\varphi^{-1}(t)\right]^{2}\mathrm{d}\,t\ge\frac{1}{p}\left(I+Q\right)^{2}+\frac{1}{q}\left(I+P\right)^{2} \\ &\ge\frac{2}{\sqrt{pq}}\left(I+P\right)\left(I+Q\right)=\frac{2}{\sqrt{a}}\left(QP+aI\right).\end{aligned}$$

易见，可取到适当的 p,q 满足 $P=Q=\dfrac{a-I}{2}$，从而

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}\left[\varphi(t)\right]^{2}\mathrm{d}\,t+\int_{0}^{+\infty}\left[\varphi^{-1}(t)\right]^{2}\mathrm{d}\,t &\ge\frac{1}{a}\left[\frac{\left(a-I\right)^{2}}{4}I+aI\right] \\ &=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\left(a+I\right)^{2}}{4}\ge\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$