第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 B 卷》试题及参考解答

一、(15 分) 已知椭球面$\Sigma_0: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, a>b$的外切柱面$\Sigma_\varepsilon\,(\varepsilon=1$或$-1)$平行于已知直线$l_\varepsilon: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{z-3}{c}$. 试求与$\Sigma_\varepsilon$交于一个圆周的平面的法方向.

注：本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

【参考解答】：设l是柱面的任意一条直母线，则由假设，l与已知椭球面Σ_0相切于一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$. 因为l平行于已知直线l_ε，所以，l的标准方程和参数方程分别是

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c}$$
$$x=x_1,\ y=y_1+\varepsilon t\sqrt{a^2-b^2},\ z=z_1+ct.$$

把l的参数方程代入曲面Σ_0的方程整理得

$$t^2\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}+1\right)+2t\left(\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1\right)+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0 \qquad (1)$$

其中首项系数$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}+1>0$.

因为点M_1在Σ_0上，所以$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}-1=0$. 又因为$l$与$\Sigma_0$在$M_1$点相切，所以$t=0$是二次方程(1)的重根. 因此，

$$\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1=0，\text{即}\ \varepsilon c\sqrt{a^2-b^2}y_1+b^2z_1=0.$$

此式与$\dfrac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{z-z_1}{c}$，即$\varepsilon c y_1-\sqrt{a^2-b^2}z_1=\varepsilon c y-\sqrt{a^2-b^2}z$联立解得

$$y_1=\frac{b^2}{ca^2}\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right),\ z_1=-\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right)$$

再把$x_1=x$和上面的两式代入Σ_0的方程，得到外切柱面Σ_ε的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right)^2}{a^4c^2}+\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z\right)^2}{a^4c^2}=1.$$

如果令$z=0$，上式化为、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}+\frac{\left(a^2-b^2\right)y^2}{a^4}=1，\text{即}\ x^2+y^2=a^2.$$

所以柱面Σ_ε与xOy坐标面相交于圆周$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$. 由于与二次柱面$\Sigma_\varepsilon$的交线为

圆周的所有平面都是平行的，故所求的法向量唯一为 xOy 平面的法向量，即方向数为 $0,0,1$.

二、(15 分) 设 $f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$. 证明：

$$1\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\le\frac{4}{3}.$$

【参考证明】： 由 Schwarz 不等式，有

$$1=\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$$

又由于$(f(x)-1)(f(x)-3)\le 0$，故$\dfrac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)}\le 0$，即

$$\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\le 4$$

由$4ab\le(a+b)^2$得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2}{4}\le 4$$

综上即得$1\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{f(x)}\le\dfrac{4}{3}$.

三、(15 分) 设 A 为 n 阶复方阵，$p\left(x\right)$为 A 的特征多项式，又设 $g\left(x\right)$为 m 次复系数多项式，$m\ge 1$. 证明：$g\left(A\right)$可逆当且仅当 $p\left(x\right)$与 $g\left(x\right)$互素.

【参考证明】：取 A 的 Jordan 分解为

$$A=P\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_s\end{pmatrix}P^{-1}$$

其中$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix}$为 Jordan 块.

$$g(A)=P\begin{pmatrix}g\left(J_1\right)&&\\&\ddots&\\&&g\left(J_s\right)\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}g\left(\lambda_1\right)&*&*\\&\ddots&*\\&&g\left(\lambda_s\right)\end{pmatrix}P^{-1}\quad(*)$$

$\Leftarrow$)：$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$互素，于是$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$没有公共根. 注意到$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为 A 的所有互不相同的特征根，故$g\left(\lambda_1\right),\cdots,g\left(\lambda_s\right)$均不为零，故

$$|\,g(A)\,|=g\left(\lambda_1\right)\cdots g\left(\lambda_s\right)\ne 0$$

所以$g\left(A\right)$可逆.

$\Rightarrow$)：$g\left(A\right)$可逆，从而$|\,g(A)\,|\neq 0$．由$|\,g(A)\,|=g\left(\lambda_1\right)\cdots g\left(\lambda_s\right)$知$g\left(\lambda_1\right),\cdots,g\left(\lambda_s\right)$均不为零，故$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$没有公共根．当然$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$互素，否则导致$p\left(x\right)$与$g\left(x\right)$有公共根，矛盾．

四、(20 分) 设σ为n维复向量空间$\mathbb{C}^n$的一个线性变换．$\mathbf{1}$表示恒等变换．证明以下两条等价：

(1) $\sigma=k\mathbf{1},k\in\mathbb{C}$；

(2) 存在σ的$n+1$个特征向量：$v_1,\ldots,v_{n+1}$，这$n+1$个向量中任何n个向量均线性无关．

【参考证明】：$\left(1\right)\Rightarrow\left(2\right)$：取

$$v_1=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,v_n=e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},v_{n+1}=e_1+\cdots+e_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

则可知$v_1,\ldots,v_{n+1}$均是σ的特征向量． 进一步，该组向量中任何n个向量必线性无关．事实上，不妨设这n个向量为：$v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}$．于是

$$\begin{aligned}&a_1v_1+\cdots+a_{i-1}v_{i-1}+a_{i+1}v_{i+1}+\cdots+a_{n+1}v_{n+1}=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(a_1+a_{n+1}\right)e_1+\cdots+\left(a_{i-1}+a_{n+1}\right)e_{i-1}\\ &\quad+a_{n+1}e_i+\left(a_{i+1}+a_{n+1}\right)e_{i+1}+\cdots\\ &\qquad+\left(a_n+a_{n+1}\right)e_n=0\end{aligned}$$

结果得$a_{n+1}=0$，进而$a_1=\cdots=a_{n+1}=0$．

$\left(2\right)\Rightarrow\left(1\right)$：记$\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$分别是相应于$v_1,\ldots,v_{n+1}$的$\sigma$的特征值，其和为$s$，即$s=\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}$．由条件知，$v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}$线性无关，因此它可充当$\mathbb{C}^n$的基．$\sigma$在此基下的表示矩阵为$A$：

$$\sigma\left(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}\right)=\left(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n+1}\right)A$$

从而有$\operatorname{tr}A=s-\lambda_i$．

又取$v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{n+1}$，$\sigma$在此基下的表示阵为$B$：

$$\sigma\left(v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{n+1}\right)=\left(v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{n+1}\right)B$$

从而$\operatorname{tr}B=s-\lambda_j$．注意到$A,B$相似，因为它们是同一线性变换在不同基下的表示阵．故$s-\lambda_i=s-\lambda_j,\lambda_i=\lambda_j$，即$\sigma=k\mathbf{1},k\in\mathbb{C}$．

五、(15 分) 计算广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x$，这里$\left(x\right)$表示$x$的小数部分（例如：当$n$为正整数且$x\in[n,n+1)$时，则$(x)=x-n$）．

【参考解答】：对于任意正整数$\ell>2$，有

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x &= \sum_{n=1}^{\ell-1}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^3}\\
&=\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\int_n^{n+1}x^{-2}\,\mathrm{d}\,x-n\int_n^{n+1}x^{-3}\,\mathrm{d}\,x\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{2n+1}{n(n+1)^2}\\
&=\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)^2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

对于$y\in\left[\ell,\ell+1\right]$，则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}=\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x\\
&\le\int_1^{y}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x\le\int_1^{\ell+1}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell+1}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

于是得

$$
\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{12}
$$

六、(20 分)设函数$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上连续，满足对任意$x\in[0,1]$，$\displaystyle\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}\,t\ge\frac{x^2-x^4}{2}$.

证明：$\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\ge\frac{1}{10}$.

【参考证明】：**【思路一】**：注意到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1\mathrm{d}t\int_t^{\sqrt{t}}f(t)\,\mathrm{d}\,x\\
&=\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}\,t\\
&\ge\int_0^1\frac{x^2-x^4}{2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

因为

$$\begin{aligned}0&\le\int_0^1(f(t)-(\sqrt{t}-t))^2\,\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t-2\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_0^1(\sqrt{t}-t)^2\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

所以得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t&\ge 2\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t-\int_0^1(\sqrt{t}-t)^2\,\mathrm{d}\,t\\&\ge\frac{2}{15}-\frac{1}{30}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

【思路二】：注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}\,t&=\int_0^1\mathrm{d}t\int_t^{\sqrt{t}}f(t)\,\mathrm{d}\,x\\&=\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned}\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}\,t\\&\ge\int_0^1\frac{x^2-x^4}{2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

因为对于任意$\beta\in(0,+\infty)$，

$$\begin{aligned}0&\le\int_0^1(\beta f(t)-(\sqrt{t}-t))^2\,\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^1\beta^2 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t-2\beta\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_0^1(\sqrt{t}-t)^2\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

所以得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t&\ge\frac{2}{\beta}\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{\beta^2}\int_0^1(\sqrt{t}-t)^2\,\mathrm{d}\,t\\&\ge\frac{2}{15\beta}-\frac{1}{30\beta^2}=\frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta}-\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right)\end{aligned}$$

容易得当$\beta\in[1/3,1]$时，有

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\ge\frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta}-\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right)\ge\frac{1}{10}$$

特别地，当$\beta=\dfrac{1}{2}$时，有

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\ge\frac{1}{30}\left(4\cdot 2-2^2\right)=\frac{2}{15}>\frac{1}{10}$$

【思路三】：因为对于任意$0<\beta<1$，任意正整数n，有

$$\begin{aligned}\int_{\beta^{2^n}}^{\beta}f(t)\,\mathrm{d}\,t&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}}f(t)\,\mathrm{d}\,t\\&\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta^{2^k}-\beta^{2^{k+1}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\beta^2-\beta^{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

于是$\int_0^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}\,t \geq \frac{\beta^2}{2}$，从而

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\beta\to 1-}\int_0^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}\,t \geq \lim_{\beta\to 1-}\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}$$

最后，由柯西-施瓦兹不等式得

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t \leq \left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\,t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^{1/2}$$

于是$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{10}$.