

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

试卷及参考答案

一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t \, dt = x + 1$ ，则 $f(x) =$ _____。

【参考解答】：首先令 $x = 0$ ，则由等式可得 $f(0) = 1$ ；对等式两端求导数，则有

$$f'(x) \cos x - f(x) \sin x + 2f(x) \sin x = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) + f(x) \tan x = \sec x$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，由计算公式可得

$$f(x) = e^{-\int \tan x \, dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x \, dx} \, dx + C \right)$$

$$= e^{\ln \cos x} \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln \cos x} \, dx + C \right)$$

$$= \cos x \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx + C \right)$$

$$= \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x$$

代入初值 $f(0) = 1$ ，得 $C = 1$ ，所以 $f(x) = \cos x + \sin x$ 。只要求出满足条件的 $f(x)$ 即可，并没有求出所有满足条件的函数。只要满足条件的 $f(x)$ 都为所求的函数。

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) =$ _____。

【参考解答】：与第五届第一题差不多，基本思路应该一致，并且由于有平方，所以直接由正弦函数公式

$$\sin(n\pi + x) = \pm \sin x \Rightarrow \sin^2(n\pi + x) = \sin^2 x,$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - n\pi) = \sin^2 x, n \in \mathbb{Z}$$

于是有

$$\sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} - n\pi \right)$$

$$= \sin^2 \pi \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) = \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

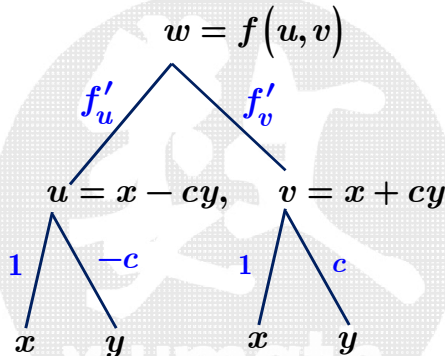
所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

3. 设 $w = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u = x - cy, v = x + cy$, 其中 c 为非零常数, 则 $w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} =$ _____。

【参考解答】：这样类型的问题在各阶试题中都有, 并且在最后发布第三届解题试题时特别强调, 多元复合函数求导的重要性; 而且这里的复合结构是已知的, 所以直接有变量关系图。



由复合函数求导数, 有变量关系图。于是有 $w_x = f'_u + f'_v, w_y = -cf'_u + cf'_v$; 由于连个偏导数仍然具有与原函数函数相同的复合结构, 所以对上面的导函数继续求导, 则有

$$\begin{aligned} w_{xx} &= (f'_u)'_x + (f'_v)'_x = f''_{uu} + f''_{uv} + f''_{vu} + f''_{vv} = f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv}, \\ w_{yy} &= -c(f'_u)'_y + c(f'_v)'_y \\ &= -c[-cf''_{uu} + cf''_{uv}] + c[-cf''_{vu} + cf''_{vv}] \\ &= c^2[f''_{uu} - f''_{uv} - f''_{vu} + f''_{vv}] = c^2[f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} &= f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv} - \frac{1}{c^2}[c^2(f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv})] \\ &= f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv} - (f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}) = 4f''_{uv}. \end{aligned}$$

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} =$ _____。

【参考解答】【解法一】在有泰勒公式应用于解题的竞赛题解析中, 特别强调了泰勒公式的两种类型适用的问题类型。这里是求极限, 并且是求自变量趋于 0 的极限; 毫无疑问, 就是用带皮亚诺余项的泰勒公式, 并且由于函数由二阶连续导数, 所以可以在 0 点可以展开为二阶带皮亚诺余项的泰勒公式, 即有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \\ &= 3x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

由此可得 $f(\sin^2 x) = 3\sin^4 x + o(\sin^4 x)$, 所以将其代入可得极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^4 x + o(\sin^4 x)}{x^4} = 3.$$

【解法二】洛必达法则。

5. 不定积分 $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【参考解答】: $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \int \frac{e^{-\sin x} 2 \sin x}{(1 - \sin x)^2} d \sin x$ 令 $\sin x = t$, 则有

$$I = 2 \int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt.$$

$$\int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt = - \int \frac{e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}}{(1-t)^2} dt$$

$$= - \int \frac{e^{-t}(1-t) - e^{-t}}{(1-t)^2} dt = - \int \frac{e^{-t}}{1-t} dt + \int \frac{e^{-t}}{(1-t)^2} dt$$

$$- \int \frac{e^{-t}}{1-t} dt = \int \frac{1}{1-t} de^{-t} = \frac{e^{-t}}{1-t} - \int e^{-t} d\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

$$= \frac{e^{-t}}{1-t} - \int \frac{e^{-t}}{(1-t)^2} dt$$

代入上式可得 $\int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt = \frac{e^{-t}}{1-t} + C$, 由于 $\sin x = t$, 所以

$$I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C$$

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域为 V , 则三重积分

$$\iiint_V z dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【参考解答一】由两个方程, 可得边界线方程为 $x^2 + y^2 = 2$, 这个题目由被积函数的结构, 只包含一个变量 z , 而且用平行于 xOy 的平面取截取立体区域, 截面都为圆, 所以考虑先二后一的截面法计算要简单。以 $z = \sqrt{2}$ 作为分割面, 将区域分割成上下两部分, 则有

$$\iiint_V z dx dy dz = \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z dx dy dz + \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z dx dy dz$$

其中上下积分区域可以描述为

$$\Omega_{\text{上}} : \sqrt{2} \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 4 - z^2;$$

$$\Omega_{\text{下}} : 0 \leq z \leq \sqrt{2}, x^2 + y^2 \leq z^2;$$

所以有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_{\sqrt{2}}^2 z \, dz \iint_{D(x)} dx \, dy \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 z \left(\pi (4 - z^2) \right) dz = \int_{\sqrt{2}}^2 (4\pi z - \pi z^3) dz \\ &= \left[2\pi z^2 - \frac{\pi z^4}{4} \right]_{\sqrt{2}}^2 = \pi \\ \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} z \, dz \iint_{D(z)} dx \, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi z^3 \, dz = \left[\frac{\pi z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \pi \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z \, dx \, dy \, dz + \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z \, dx \, dy \, dz = 2\pi.$$

【参考解答二】使用球面坐标

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 = 2\pi \end{aligned}$$

二、(本题 14 分) 设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α , 定义一元函数

$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$, 若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$ 且 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$, 证明: $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值。

【参考解答】根据基于二元函数极值判定极小值的充分条件, 如果函数在 $(0, 0)$ 点取到极小值, 第一步, 判定梯度向量为零向量, 即 $\nabla f(0, 0) = (f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)) = \vec{0}$;

第二步: 判定黑塞矩阵为正定矩阵, 对于存在二阶连续偏导数的函数, 即由三个偏导数构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} \text{ 为正定矩阵.}$$

如果符合这样两个前提条件, 则可以判定函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 取到极小值, 即 $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值。

下面，就依据已知条件我们来验证这样两个条件是满足的。两个步骤中需要二元函数的一阶、二阶偏导数，而已知条件是计算函数 $g_\alpha(t)$ 关于 t 的导数，下面就来计算一下，是否会出现需要的描述形式。

根据已知条件，对函数 $g_\alpha(t)$ 关于 t 求导数，其实又是一个复合函数求导数，令 $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha$ ，绘制变量关系图，可得

$$\begin{aligned} g'_\alpha(t) &= f'_x(t \cos \alpha, t \sin \alpha) \cdot \cos \alpha + f'_y(t \cos \alpha, t \sin \alpha) \cdot \sin \alpha \\ \Rightarrow g'_\alpha(0) &= f'_x(0, 0) \cdot \cos \alpha + f'_y(0, 0) \cdot \sin \alpha = [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)] \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ &= \left\| [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)] \right\| \cos \theta, \theta = \left([f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)], (\cos \alpha, \sin \alpha) \right) = 0 \end{aligned}$$

要求对于任意的任何 α 都有 $\frac{d g_\alpha(0)}{d t} = 0$ ，则必定有

$$\left\| [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)] \right\| = 0 \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

因此 $(0, 0)$ 是二元函数 $f(x, y)$ 的驻点。

根据已知条件，继续求二阶导数，则有

$$\begin{aligned} g''_\alpha(t) &= (f'_x)'_x \cdot \cos \alpha + (f'_y)'_x \cdot \sin \alpha \\ &= \cos \alpha [f''_{xx} \cdot \cos \alpha + f''_{xy} \cdot \sin \alpha] + \sin \alpha [f''_{yx} \cdot \cos \alpha + f''_{yy} \cdot \sin \alpha] \\ &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} f''_{xx} \cdot \cos \alpha + f''_{xy} \cdot \sin \alpha \\ f''_{yx} \cdot \cos \alpha + f''_{yy} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则由 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{d t^2} > 0$ ，有

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} f''_{xx}(0, 0) & f''_{xy}(0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0) & f''_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} > 0$$

由 α 的任意性，并且向量 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 为非零向量，由此可知这是一个正定二次型，并且矩阵为实对称矩阵，所以矩阵为正定矩阵。矩阵正定，所以驻点为极小值点。

三、(本题 14 分) 设曲线 Γ 为曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 上从点 $A(1, 0, 0)$ 到点 $B(0, 0, 1)$ 的一段。求曲线积分 $I = \int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ 。

【参考解答一】 对于曲线积分，尤其是开放曲线的曲线积分，最开始应该考虑的积分计算的直接法，即写出曲线的参数方程来计算曲线积分。用连个方程消去 z ，即由 $x + z = 1, z = 1 - x$ 代入球面方程，则有

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,$$

$$\Rightarrow z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t, t: 0 \rightarrow \pi$$

将它代入积分表达式，则有

$$I = \int_0^\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \left(-\frac{1}{2}\sin t \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \right) \left(\frac{1}{2}\sin t \right) \right] dt$$

$$= I = \int_0^\pi \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 t + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos^2 t \right) + \left(\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\cos t \sin t \right) \right] dt$$

$$= I = \int_0^\pi \left[-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\cos t \sin t \right] dt$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}[-\cos t]_0^\pi = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

【参考解答二】记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段，则

$$x = t, y = 0, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1,$$

$$\int_{\Gamma_1} ydx + zdz + xdz = \int_0^1 td(1-t) = -\frac{1}{2}.$$

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ ，方向按右手法则。由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} \right) ydx + zdz + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy$$

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积，而 Σ 在 zx 面上投影面积为零。故

$$I + \int_{\Gamma_1} = -\iint_{\Sigma} dydz + dxdy.$$

曲线 Γ 在 xy 面上投影的方程为

$$\frac{(x - 1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

又该投影（半个椭圆）的面积得知 $\iint_{\Sigma} dxdy = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ 。同理， $\iint_{\Sigma} dydz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ 。这样就有

$$I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

四、(本题 15 分) 设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$.

证明: $\forall a, b, a < b$, 有 $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a+2}{2}$.

【参考解答】: 这个竞赛题是考研竞赛数学公众号每日一题栏目中发布的第 62 个题目, 完全一模一样的。下面我们也来讨论一下, 思路是怎样的。

根据题目的条件, 函数 $f(x) > 0$, 而且自然常数为底的函数也是大于 0 的, 所以, 可以知道已知积分中的被积函数 $e^{-|t-x|} f(x) > 0$, 并且积分区间越大, 积分值越大, 所以由原积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$, 当然也就可以得到 $\forall a, b (a < b)$,

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1.$$

右边要出现 $b-a$ 的表达式, 于是由积分的保序性, 两边同时关于 t 变量在 $[a, b]$ 积分, 可得

$$\int_a^b \left[\int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \right] dt \leq b-a.$$

左边就是一个先对 x 后对 t 积分的二重积分的累次积分表达式, 对于它的操作, 好像就积分而言不能执行什么有效的处理。但是, 看到二重积分的累次积分表达式, 可以尝试性的考虑交换积分次序, 即先对 t 求积分, 再对 x 积分, 于是左边的累次积分也就等于

$$\int_a^b \left[\int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \right] dt = \int_a^b \left[f(x) \int_a^b e^{-|t-x|} dt \right] dx$$

里面对 t 积分, 应该就是属于可以计算的了。只要考虑将绝对值去掉就可以了。由于在积分中对 x 在 $[a, b]$ 区间上积分, 所以 x 夹在 a, b 之间, 因此以 x 作为区间的分割点, 则有

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-|t-x|} dt &= \int_a^x e^{t-x} dt + \int_x^b e^{x-t} dt \\ &= \left[e^{t-x} \right]_a^x + \left[-e^{x-t} \right]_x^b = 1 - e^{a-x} - e^{x-b} + 1 = 2 - e^{a-x} - e^{x-b} \end{aligned}$$

所以上面的不等式等价于

$$\int_a^b \left[f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) \right] dx \leq b-a.$$

将左边拆开, 则有

$$\int_a^b \left[f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) \right] dx = 2 \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \left[f(x) e^{a-x} \right] dx - \int_a^b \left[f(x) e^{x-b} \right] dx \leq b-a.$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b \left[f(x) e^{a-x} \right] dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left[f(x) e^{x-b} \right] dx$$

这样, 再由已知条件, 并且有 t 的任意性, 可以将右边的两个积分改写成

$$\int_a^b e^{a-x} f(x) dx = \int_a^b e^{-|x-a|} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-a|} f(x) dx \leq 1$$

因为 x 属于 $(-\infty, +\infty)$ 都有积分小于等于 1, 所以同理可得 $\int_a^b e^{x-b} f(x) dx \leq 1$.

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + 1.$$

这就是这个竞赛题的解题过程。

五、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

【参考证明】对于 $i = 0, 1, \dots, p-1$, 记

$$A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}.$$

由题设 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$, 从而

$$\lim_n \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \dots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda.$$

而 $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \dots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$. 由题设知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} \frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$$

对正整 m , 设 $m = np + i$, 其中 $0, 1, \dots, p-1$, 从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何

这样的子列, 下面极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$.