2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛、（非数学类）试卷

一、简答下列各题（本题 25 分）

1、计算 $\lim\limits_{x\to 0+}\left[\ln\left(x\ln a\right)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\left(x/a\right)}\right)\right],\left(a>1\right)$.

2、设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$, 求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解.

3、求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$，使 $f(x)=e^{-u(x)}$，其中 $u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

4、计算不定积分 $\int x\arctan x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\,x$.

5、过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程.

二、（本题 15 分） 设曲面 $\Sigma: z^2=x^2+y^2, 1\le z\le z$, 其面密度为常数 ρ. 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力（记引力常数为 G）.

三、（本题 15 分） 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续可导，

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

四、（本题 15 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|<1$，又 $f^2(0)+\left[f'(0)\right]^2=4$. 试证在 $\left(-2,2\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''\left(\xi\right)=0$.

五、（本题 15 分） 求二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|x^2+y^2-x-y\right|\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

六、（本题 15 分） 若对于任何收敛于零的序列 $\left\{x_n\right\}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 都是收敛的，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.