

2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛 (数学专业一、二年级) 参考答案

一、填空题

(1) 【参考解答】: 10

H_n 是 $m = 2^n$ 阶对称方阵, 存在正交方阵 P 使得 $P^{-1}H_nP = D$ 是对角方阵. 从而,

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}^{-1}$$

与 $\begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix}$ 相似. 设 H_n 的所有特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 则 H_{n+1} 的所有特征值是

$$\lambda_1 + 1, \lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_m + 1, \lambda_m - 1$$

利用数学归纳法容易证明: H_n 的所有不同特征值 $\{n - 2k \mid k = 0, 1, \dots, n\}$, 并且每个特征值 $n - 2k$ 的

代数重数为 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 因此, $\text{rank}(H_4) = 2^4 - C_4^2 = 10$.

(2) 【参考解答】: $\frac{1}{2}$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(3) 【参考解答】: -2

考虑直接法计算, 直接代入参数表达式, 得定积分被积函数为

$$f(t) = 2 \cos(2t) \cos(\sin(2t)) + e^{\sin\left(\pi \sin \frac{t}{2}\right)} \left[\frac{1}{2} \pi \cos \frac{t}{2} \cos\left(\pi \sin \frac{t}{2}\right) \cos(t - \sin t) - \sin(t - \sin t)(1 - \cos t) \right]$$

可得原函数为

$$F(t) = \sin(\sin(2t)) + e^{\sin\left(\pi \sin \frac{t}{2}\right)} \cos(t - \sin t),$$

$$\text{所以原积分} = \int_0^\pi f(t) dt = [F(t)]_0^\pi = -2.$$

(4) 【参考解答】: $((n-1)a+1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \dots - (a-1)y_n^2$

只需要求出 A 的全部特征值即可. 显然 $A + (a-1)I$ 的秩 ≤ 1 , 所以 $A + (a-1)I$ 的零空间的维数为 $\geq n-1$, 从而可设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = 1-a, \lambda_2 = 1-a, \dots, \lambda_{n-1} = 1-a, \lambda_n$. 注意到 $\text{tr } A = n$, 所以得 $\lambda_n = (n-1)a+1$. 结果就是 f 在正交变换下的标准形为

$$((n-1)a+1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \dots - (a-1)y_n^2$$

二、【参考解析】：【思路一】因为 A 在 S 的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 > 0 \quad (1)$$

对于任意的 $M(x, y, z) \in S \cap \Sigma$ ，连接 A, M 的直线记为 l_M ，其参数方程可设为

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + t(x - x_0) \\ \tilde{y} = y + t(y - y_0) \\ \tilde{z} = z + t(z - z_0) \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (2)$$

代入椭球面的方程得

$$\frac{(x + t(x - x_0))^2}{a^2} + \frac{(y + t(y - y_0))^2}{b^2} + \frac{(z + t(z - z_0))^2}{c^2} = 1$$

整理得

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + t^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2 \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) \\ & + 2t \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

因点 M 在椭球面 S 上， $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。所以上式化为

$$\begin{aligned} & t^2 \left(1 + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2 \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) \\ & + 2t \left(1 - \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由于 l_M 与 S 在 M 点相切，方程 (3) 有一个二重根 $t = 0$ 。故有

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0 \quad (4)$$

此时由 (1) 知，方程 (3) 的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 > 0$$

特别地，(4) 的系数均不为零因而是一个平面方程，确定的平面记为 Π 。上述的推导证明了 $S \cap \Sigma \subset \Pi$ ，从而证明了 $S \cap \Sigma \subset S \cap \Pi$ 。

反之，对于截线 $S \cap \Pi$ 上的任一点 $M(x, y, z)$ ，由 (3)、(4) 两式即知，由 A, M 两点确定的直线 l_M 一定在点 M 与 S 相切。故由定义， l_M 在锥面 Σ 上。特别地 $M \in \Sigma$ ，由 M 的任意性， $S \cap \Pi \subset S \cap \Sigma$ 。

【思路二】因为 A 在 S 的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} > 1 > 0 \quad (5)$$

对于任意的 $M(x_1, y_1, z_1) \in S \cap \Sigma$, 椭球面 S 在 M 点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y + \frac{z_1}{c^2}z - 1 = 0$$

因为连接 M 和 A 两点的直线是 S 在点 M 的切线, 所以 A 点在上述切平面上. 故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0 + \frac{y_1}{b^2}y_0 + \frac{z_1}{c^2}z_0 - 1 = 0$$

于是, 点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 在平面 (注意, 由 (6) 式, x_0, y_0, z_0 不全为 0)

$$\Pi: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0$$

上, 即 $M \in S \cap \Pi$. 反之, 对于任意的 $M(x_1, y_1, z_1) \in S \cap \Pi$, 有 $\frac{x_0}{a^2}x_1 + \frac{y_0}{b^2}y_1 + \frac{z_0}{c^2}z_1 - 1 = 0$, 则 S

在 M 点的切平面 $\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y + \frac{z_1}{c^2}z - 1 = 0$ 通过点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 因而 M, A 的连线在点 M 和椭球面 S 相切, 它在锥面 Σ 上. 故 $M \in S \cap \Sigma$. 结论得证

三、【参考解析】: (1) 设 C 的不同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 不妨设 C 具有 Jordan 标准型: $C = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$, 其中 J_i 为特征值 λ_i 对应的 Jordan 块. 对矩阵 B 做与 C 相同的分块, $B = (B_{ij})_{k \times k}$, 由 $BC = CB$ 可得 $J_i B_{ij} = B_{ij} J_j, i, j = 1, 2, \dots, k$.

这样对任意多项式 p 有 $p(J_i)B_{ij} = B_{ij}p(J_j)$. 取 p 为 J_i 的最小多项式, 则得 $B_{ij}p(J_j) = 0$.

当 $i \neq j$ 时, $p(J_j)$ 可逆, 从而 $B_{ij} = 0$. 因此, $B = \text{diag}(B_{11}, \dots, B_{kk})$.

同理, $A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{kk})$, 由 $AB - BA = C$ 得

$$A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii} = J_i, i = 1, \dots, k.$$

故 $\text{Tr}(J_i) = \text{Tr}(A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii}) = 0, i = 1, 2, \dots, k$. 从而 $\lambda_i = 0$, 即 C 为幂零方阵.

(2) 令 $V_0 = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Cv = 0\}$. 对任意 $v \in V_0$, 由于 $C(Av) = A(Cv) = 0$, 因此 $AV_0 \subseteq V_0$, 同理, $BV_0 \subseteq V_0$.

于是存在 $0 \neq v \in V_0$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $Av = \lambda v$, 记 $V_1 = \{v \mid Av = \lambda v\} \subseteq V_0$, 由 $AB - BA = C$ 知, 对任意 $u \in V_1, A(Bu) = B(Au) + Cu = \lambda Bu$. 故 $BV_1 \subseteq V_1$. 从而存在 $0 \neq v_1 \in V_1$ 及 $\mu \in \mathbb{C}$ 使得 $Bv_1 = \mu v_1$, 同时有 $Av_1 = \lambda v_1, Cv_1 = 0$. 将 v_1 扩充为 \mathbb{C}^n 的一组基 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令 $P = (v_1, \dots, v_n)$, 则

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad BP = P \begin{pmatrix} \mu & y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad CP = P \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

并且 A_1, B_1, C_1 满足 $A_1B_1 - B_1A_1 = C_1, A_1C_1 = C_1A_1, B_1C_1 = C_1B_1$. 由数学归纳法即可得知,

A, B, C 同时相似于上三角阵.

(3) 当 $n \geq 3$ 时, 取 $A = E_{12}, B = E_{23}, C = E_{13}$, 则 A, B, C 满足题意.

对 $n = 2$, 不妨设 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则有 $AC = CA$, 得 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$.

类似有 $BC = CB$ 得 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$. 于是 $AB - BA = 0$, 这与 $AB - BA = C$ 矛盾! 故满足

$C \neq 0$ 的 n 最小为 3.

四、【参考解析】: 设 $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(x_1)|, m = \min_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(x_0)|$, 则有

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq \left| \int_{x_0}^{x_1} f''(x) dx \right| = |f'(x_1) - f'(x_0)| \geq M - m$$

另一方面, 有 $\int_0^1 |f'(x)| dx \leq M \int_0^1 dx = M$ 故, 只需证明 $m \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx$.

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点, 则 $m = 0$. 此时 (2) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x) > 0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情形讨论.

情形1 $f(0) \geq 0$ 此时 $f(x) \geq 0 (x \in [0,1])$. 由 $f'(x) = |f'(x)| \geq m$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx + f(0) \\ &\geq \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx = \int_0^1 f'(\xi) x dx \geq \int_0^1 m x dx = \frac{1}{2} m \end{aligned}$$

故, (2) 成立.

情形2 $f(0) < 0$. 此时有 $f(1) \leq 0$, 根据 f 的递增性, 有 $f(x) \leq 0 (x \in [0,1])$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= -\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(1) - f(x)) dx - f(1) \\ &\geq \int_0^1 |f(1) - f(x)| dx = \int_0^1 |f'(\xi)| (1-x) dx \geq \int_0^1 m (1-x) dx = \frac{1}{2} m \end{aligned}$$

五、【参考证明】 A 为幂零矩阵, 所以 $A^n = 0$. 记 $f(x) = (1-x)^\alpha$, 当 $j > k$ 时, 记 $C_k^j = 0$, 则

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^j x^{k-j} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A^j, \quad x \in (-1,1)$$

若有 $2 < m < n$ 使得 $A^m \neq 0, A^{m+1} = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{m-\alpha} G(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} A^m$$

若 $m \geq 3$, 则 $m - \alpha > 1$, 此时 $\int_0^1 G(x) dx$ 发散. 另一方面, 若 $m \leq 2$, 则 $m - \alpha < 1$, 此时

$\int_0^1 G(x) dx$ 收敛. 总之, 使得对于 $1 \leq i, j \leq n$, 积分 $\int_0^1 g_{ij}(x) dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

六、【参考证明】【思路一】令 $y = \frac{x'(t)}{x(t)}$ ，则 y 定号。不妨设 $y(t) \geq 0$ （否则考虑 $t \rightarrow -t$ ）。

下证结论对于 $C_1 = 1, C_2 = \sqrt{3}$ 成立。若存在 $t_0, y(t_0) > \sqrt{3}$ ，则

$$y'(t) = \frac{x''(t)x(t) - x'(t)^2}{x^2(t)} = g(t) - y^2 < 2 - y^2 < -1, t < t_0$$

则 $y'(t)|_{t < t_0} < 0 \Rightarrow \frac{y'}{y^2 - 2} < -1, t < t_0 \Rightarrow \int_t^{t_0} \frac{y' ds}{y^2 - 2} < t - t_0, t < t_0$ ，即

$$t > t_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{y(s) - 2}{y(s) + 2} \Big|_t^{t_0} > -L > -\infty,$$

其中 $L > 0$ 为一个常数。这与 $y(t)$ 在 \mathbb{R} 上有定义矛盾。

若存在 $t_0, y(t_0) < 1$ ，则 $y' = g(t) - y^2 > \delta > 0, t < t_0$ ，也就 $\exists t_1 < t_0, y(t_1) < 0$ 矛盾。

【思路二】不妨设 $x(t)$ 递增（否则考虑方程 $\ddot{x} = g(-t)x$ ）。注意到 $\ddot{x} = g(t)x > 0$ ，则 $x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0$ 。于是 $\dot{x}\ddot{x} = g(t)x\dot{x}$ ，则

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 &= \int_{-\infty}^t \dot{x}\ddot{x} ds = \int_{-\infty}^t g(s)x\dot{x} ds \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^t x\dot{x} ds &< \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 < 2 \int_{-\infty}^t x\dot{x} ds \\ \Rightarrow \frac{1}{2} x(t)^2 &< \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 < x(t)^2 \Rightarrow x(t) < \dot{x}(t) < \sqrt{2}x(t) \end{aligned}$$

微信公众号:



考研竞赛数学(ID:xwmath)
 一个专注于大学数学公共基础课
 资源分享的微信公众平台
 高等数学, 线性代数
 概率论与数理统计
 考研数学, 竞赛数学
 数学文化, 实验与建模
 大学学习、生活历程
 因为专业, 所以精彩