第十一届全国大学生数学竞赛初赛(数学类B卷)参考答案

一、（本题15分）设L_1 和L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线，点B是它们公垂线段的中点。点A_1 和A_2 分别在L_1 和L_2 上滑动，使得$A_1B\perp A_2B$. 证明直线A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面。

证明：取公垂线为z轴，B为原点。取x轴使得L_1和L_2与之夹角相同。此时我们有：

$$L_1:\begin{cases} ax+y=0\\ z=c,\end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} ax-y=0\\ z=-c,\end{cases}$$

其中$c>0$. 由于L_1 与L_2 不垂直，$a\neq\pm1$. ············ 4分

设点A_1的坐标为(x_1,y_1,c)，A_2的坐标$(x_2,y_2,-c)$, 则

$$ax_1+y_1=0,\quad ax_2-y_2=0. \tag{1}$$

由$A_1B\perp A_2B$ 得，

$$x_1x_2+y_1y_2-c^2=0. \tag{2}$$

任取A_1A_2上的点$M(x,y,z)$，有

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{z+c}{2c}. \tag{3}$$

············10分

消去x_1,x_2,y_1,y_2： 令$\frac{z+c}{2c}=k$, 由(1,3) 得

$$x=kx_1-(k-1)x_2;\quad y=-akx_1-a(k-1)x_2.$$

由(1,2)，$x_1x_2=\frac{c^2}{1-a^2}$. 又$k(k-1)=\frac{z^2-c^2}{4c^2}$, 从而

$$a^2(1-a^2)x^2-(1-a^2)y^2+a^2z^2=a^2c^2,$$

所以轨迹是单叶双曲面。 ············ 15分

二、(本题10 分) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$.

解：我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

············ 3分

对上式右端的第二个积分做变换$x=\frac{1}{t}$

得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})}dt$$

············ 7分

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_0^{1}\frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})}dt$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

············ 10分

三、（本题15分）设数列$\{x_n\}$ 满足

$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \ln(1+x_n), n = 1, 2, \cdots.$

证明：$\{x_n\}$收敛并求其极限.

证明：由于$x_1 > 0$，所以$x_2 = \ln(1+x_1)$。由数学归纳法，$x_n > 0, n = 1, 2, \cdots.$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3分

$$x_{n+1} - x_n = \ln(1+x_n) - x_n = \frac{1}{1+\xi_n}x_n - x_n = \left(\frac{1}{1+\xi_n} - 1\right)x_n$$

$$= -\frac{\xi_n}{1+\xi_n}x_n < 0,$$

这里$\xi_n \in (0, x_n)$. 所以数列$\{x_n\}$单调减少。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

应用单调有界定理，$\{x_n\}$收敛。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

设$\lim_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$. 由$x_{n+1} = \ln(1+x_n)$, 知$a = \ln(1+a)$.

令$f(x) = x - \ln(1+x)$，$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0,\ x \in (0, +\infty), f(0) = 0$. 从而$x = 0$是$f(x)$在$[0, +\infty)$上的唯一零点，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

四、（本题15分）设$\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\}$ 是n 维实线性空间V 的一组基, 令$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$. 证明:
(1) 对$i=1,2,\cdots,n+1$, $\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}\}$ 都构成V 的基;
(2) $\forall\alpha\in V$, 在(1)中的$n+1$ 组基中, 必存在一组基使α 在此基下的坐标分量均非负;
(3) 若$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$, 且$|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同, 则在(1)中的$n+1$ 组基中, 满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

证明：(1) 若$i=n+1$，显然有$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是$V$的一组基. 若$1\le i\le n$，令

$$k_1\epsilon_1+k_2\epsilon_2+\cdots+k_{i-1}\epsilon_{i-1}+k_{i+1}\epsilon_{i+1}+\cdots+k_n\epsilon_n+k_{n+1}\epsilon_{n+1}=0.$$

由于$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$，所以有

$$k_{n+1}(\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1})=0$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2分

两式相减得

$$(k_1-k_{n+1})\epsilon_1+\cdots+(k_{i-1}-k_{n+1})\epsilon_{i-1}-k_{n+1}\epsilon_i+(k_{i+1}-k_{n+1})\epsilon_{i+1}+\cdots+(k_n-k_{n+1})\epsilon_n=0.$$

由于$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$线性无关，故得

$$k_1-k_{n+1}=\cdots=k_{i-1}-k_{n+1}=-k_{n+1}=k_{i+1}-k_{n+1}=\cdots=k_n-k_{n+1}=0$$

从而有

$$k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_n=k_{n+1}=0$$

因此可得$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$线性无关，于是(1)得证. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2) 由于

$$(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_i,\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})A$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & -1 & & & \end{pmatrix}$$

为两组基之间的过渡矩阵. ············ 7分

$\forall\alpha\in V$，设$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，若$a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0$，则结论正确，否则令$a_i$是负坐标中绝对值最大者，那么

$$\alpha=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})A\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})\begin{pmatrix} a_1-a_i\\ \vdots\\ a_{i-1}-a_i\\ a_{i+1}-a_i\\ \vdots\\ a_n-a_i\\ -a_i\end{pmatrix}$$

于是$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$即为所求的一组基. ············ 10分

(3) 设$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，且$|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同. 设a_i是负坐标中绝对值最大者，除了基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$之外，可以证明$\alpha$无论

在哪一组基下的坐标都有负的分量. 事实上，对任意的$k \neq i$ 都有

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \cdots, \epsilon_{n+1})\begin{pmatrix} a_1 - a_k \\ \vdots \\ a_i - a_k \\ \vdots \\ a_n - a_k \\ -a_k \end{pmatrix}$$

其中$a_i - a_k < 0$，于是知满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

五、（本题20分）设A 是数域F 上的n 阶矩阵, 若$A^2 = I_n$ (I_n 表示单位矩阵), 则称A 为对合矩阵.试证：

(1) 若A 是n 阶对合矩阵, 则

$$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n;$$

(2) n 阶对合矩阵A 一定可以对角化, 其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中$r = \operatorname{rank}(I_n + A)$;

(3) 若A, B 均是n 阶对合矩阵, 且$AB = BA$, 则存在可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP$ 和$P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

证明：(1) 因为$A^2 = I_n$，故有$I_n - A^2 = 0$ 即$(I_n + A)(I_n - A) = 0$，

于是$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) \le n$.

又因为$(I_n + A) + (I_n - A) = 2I_n$，所以$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) \ge \operatorname{rank}(2I_n) = n$.

从而得

$$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n.$$

············ 5分

(2) 先证A的特征值为1或-1. 设λ为A的任一特征值，则存在非零向量α，使得$A\alpha = \lambda\alpha$，由$A^2 = I_n$可得

$$\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$$

由$\alpha \ne 0$，可得$\lambda^2 - 1 = 0$，所以有$\lambda = 1$或$\lambda = -1$. ············ 8分

下证对合矩阵一定可以对角化. 因为$A^2 = I_n$，故$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$为A的零化多项式，所以A的最小多项式一定为数域F 上互素的一次因式的乘积，从而可知对合矩阵A一定可以对角化.

············ 10分

又因为对合矩阵A的特征值为1或-1. 由(1)知特征值$\lambda = 1$的几何重数$r = \operatorname{rank}(I_n + A)$，$\lambda = -1$的几何重数为$n - r = \operatorname{rank}(I_n - A)$，所以其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12分

可对角化另一证明思路：

[对应于特征值$\lambda = 1$，有$n - \mathrm{rank}(I_n - A)$个线性无关的特征向量，对应于特征值$\lambda = -1$，有$n - \mathrm{rank}(-I_n - A)$个线性无关的特征向量，由(1)知，$A$共有$n - \mathrm{rank}(I_n - A) + n - \mathrm{rank}(-I_n - A) = n$个线性无关的特征向量，从而$A$一定可以对角化，其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$. .... 参照上面证明给分]

(3) 由于A为对合矩阵，故存在可逆矩阵G，使得

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

又由$AB = BA$, 则有

$$(G^{-1}AG)(G^{-1}BG) = (G^{-1}BG)(G^{-1}AG).$$

所以$G^{-1}BG = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$为一个准对角矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

由于$B^2 = I_n$为对合矩阵，故$B_{11}^2 = I_r, B_{22}^2 = I_{n-r}$也是对合矩阵. 由(2)，存在可逆矩阵$G_1, G_2$，使得

$$G^{-1}B_{11}G_1 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{pmatrix}, \quad G_2^{-1}B_{22}G_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & -I_{n-r-t} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 令$P = G\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$，则有$P$可逆，且有$P^{-1}AP, P^{-1}BP$同时为对角矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20分

六、（本题15分）设函数$f(x)$ 为闭区间$[a,b]$上的连续凹函数, 满足$f(a)=0, f(b)>0$且$f(x)$在$x=a$处存在非零的右导数. 对$n\geq 2$, 记

$$S_n=\left\{\sum_{k=1}^n kx_k:\ \sum_{k=1}^n kf(x_k)=f(b),\ x_k\in[a,b]\right\}.$$

(1) 证明对$\forall\alpha\in(0,f(b))$, 存在唯一$x\in(a,b)$ 使得$f(x)=\alpha$;
(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sup S_n-\inf S_n)$.

解：(1) 因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 于是对$\forall\alpha\in(0,f(b))$在(a,b)内至少存在一个点ξ使得$f(\xi)=\alpha$. ············ 1分

下面证明满足上述要求的点是唯一的。假设$\xi,\eta\in(a,b)$, 满足$\xi<\eta$ 及$f(\xi)=f(\eta)=\alpha$. 则点$(\eta,f(\eta))=(\eta,\alpha)$落在端点为$(\xi,f(\xi))=(\xi,\alpha),(b,f(b))$的线段的下方，这与函数的凹性矛盾。 ············ 3分

(2) 我们记

$$T_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ \sum_{k=1}^n kf(x_k)=f(b),x_k\in[a,b]\right\},\quad n\geq 2.$$

现对$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in T_n$, 由函数的凹性有

$$\frac{2f(b)}{n(n+1)}=\frac{\sum_{k=1}^n kf(x_k)}{1+2+\cdots+n}\leq f\left(\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}\right)$$

············ 5分

于是，

$$\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}\geq f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^n kx_k\geq\frac{n(n+1)}{2}f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

上面不等式当$x_1=x_2=\cdots=x_n=f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\in[a,b]$时等号成立。而$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),\cdots,f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right)\in T_n$,

于是

$$\inf S_n = \frac{n(n+1)}{2} f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

另一方面，连接点$(a, f(a))$与点$(b, f(b))$的直线段落在曲线$y = f(x)$的下方。故有对任意$x \in [a, b]$

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a) \leq f(x),$$

即

$$x \leq \frac{b-a}{f(b)} f(x) + a.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} k x_k \leq \frac{b-a}{f(b)} \sum_{k=1}^{n} k f(x_k) + \frac{n(n+1)}{2} a = b - a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

注意，上式的等号当$x_1 = b, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = a$时达到。而$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (b, a, a, \cdots, a) \in T_n$, 故有

$$\sup S_n = b - a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12分

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\sup S_n - \inf S_n) = b - a + \lim_{n\to\infty} \tfrac{n(n+1)}{2} \left(a - f^{-1}\left(\tfrac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right) \\
&= b - a + f(b) \lim_{n\to\infty} \frac{a - f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)}{\frac{2f(b)}{n(n+1)}} \\
&= b - a + f(b) \lim_{x\to 0+} \frac{a - f^{-1}(x)}{x} = b - a + f(b) \lim_{t\to a^+} \frac{a-t}{f(t)} \\
&= b - a - \frac{f(b)}{f'(a)}
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

七、（本题10分）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛, 其中$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

证明：记$S_0=0$，$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$. 则

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{S_n^2}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n^2}(S_n-S_{n-1})$$

$$\le\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_nS_{n-1}}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n}$$

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^2}{S_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n}\le\frac{5}{a_1}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{S_n} \qquad (1)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4分

由Cauchy不等式

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\le\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\le\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}\right)^{1/2}$$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6分

则由(1)

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\le\frac{5}{a_1}+2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}+\sigma,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}-2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}+\sigma\le\frac{5}{a_1}+2\sigma,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\le\sqrt{\sigma}+\sqrt{2\sigma+5/a_1}.$$

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分