2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛
(数学类) 参考答案

第一题：【参考解析】： 先求圆柱面的轴 L_0 的方程．由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n}=(1,1,1)$，且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$，过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n}=(1,1,1)$ 的平面 π 的方程为：$x+y+z=0$．π 与三已知直线的交点分别为

$$O(0,0,0),P(1,0,-1),Q(0,-1,1)。$$

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹， 即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$。将 L_0 的方程改为标准方程 $x-1=y+1=z$．圆柱面的半径即为平行直线 $x=y=z$ 和 $x-1=y+1=z$ 间的距离．$P_0(1,-1,0)$ 为 L_0 上的点。对圆柱面上任意一点 $S(x,y,z)$， 有 $\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$， 即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0.$$

第二题：【参考解析】：(1) 的证明：记

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\ ,\quad M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E.$$

要证明 $M=A$，只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可．若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量．于是，只需证明：对每个 i， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$．

记 $\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$， 则 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$．注意到，

$$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,$$
$$F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n\quad (*)$$

由

$$\begin{aligned}Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1\\&=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1\\&=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1\\&=\alpha_1=Ae_1.\end{aligned}$$

知 $Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$ ．

$$Me_3=MF^2e_1=F^2Me_1=F^2Ae_1=AF^2e_1=Ae_3$$

……………

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以，$M = A$.

(2) 解：由（1），$C(F) = span\{E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}\}$，

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1} = O$，等式两边同右乘 e_1，利用(*)得

$$\begin{aligned}\theta = Oe_1 &= (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1})e_1 \\ &= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1 \\ &= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n.\end{aligned}$$

因 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 线性无关，故

$$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0 \ ,$$

所以，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 线性无关.

因此，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基，特别地，$\dim C(F) = n$.

第三题：【参考解析】：: 假设 λ_0 是 f 的特征值，W 是相应的特征子空间，即 $W = \left\{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\right\}$.于是，$W$ 在 f 下是不变的.

下面先证明，$\lambda_0 = 0$. 任取非零 $\eta \in W$，记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数，于是，当 $0 \le i \le m-1$ 时，$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^i(\eta)$ 线性无关。

$0 \le i \le m-1$ 时，令 $W_i = span\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{i-1}(\eta)\}$,其中，$W_0 = \{\theta\}$. 因此，$\dim W_i = i\left(1 \le i \le m\right)$，并且，

$$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots.$$

显然，$g(W_i) \subseteq W_{i+1}$，特别地，W_m 在 g 下是不变的.

下面证明，W_m 在 f 下也是不变的.

事实上，由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta$$

$$\begin{aligned}fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\ &= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) \\ &= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta.\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\ &= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)\end{aligned}$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$ 一定可以表示成

$$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^k(\eta)$$

的线性组合，且表示式中$g^k(\eta)$前的系数为λ_0.

因此，W_m在f下也是不变的，f在W_m上的限制在基

$$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{m-1}(\eta)$$

下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是λ_0，因而，这一限制的迹为$m\lambda_0$.

由于$fg-gf=f$在W_m上仍然成立，而$fg-gf$的迹一定为零，故$m\lambda_0=0$，即$\lambda_0=0$. 任取$\eta\in W$，由于

$$f(\eta)=\theta, fg(\eta)=gf(\eta)+f(\eta)=g(\theta)+f(\eta)=\theta$$

所以，$g(\eta)\in W$.因此，W在g下是不变的. 从而，在W中存在g的特征向量，这也是f,g的公共特征向量.

第四题：【参考解析】：(1) $\forall\varepsilon>0$，将$\left[a,b\right]$ K等分，分点为

$$x_j=a+\frac{j(b-a)}{K}, j=0,1,2,\cdots,K,$$

使得$\dfrac{b-a}{K}<\varepsilon$. 由于$\left\{f_n(x)\right\}$在有限个点$\left\{x_j\right\}, j=0,1,2,\cdots,K$上收敛，因此$\exists N$，$\forall m>n>N$，使得$\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|<\varepsilon$对每个$j=0,1,2,\cdots,K$成立.

于是$\forall x\in[a,b]$，设$x\in[x_j,x_{j+1}]$，则

$$\begin{aligned}&\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\le\left|f_m(x)-f_m(x_j)\right|+\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|+\left|f_n(x_j)-f_n(x)\right|\\&=\left|f_m{}'(\xi)(x-x_j)\right|+\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|+\left|f_n{}'(\eta)(x-x_j)\right|\\&<\left(2M+1\right)\varepsilon\end{aligned}$$

(2) 不一定. 令$f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$，则

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$在$\left[a,b\right]$上不能保证处处可导.

第五题：【参考解析】：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2 n}{2},$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3\mathrm{d}t=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2 n}{8}$$

因此$\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{\pi^2 n}$，由此得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$发散.

第六题：【参考解析】：令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^1 \mathrm{d}r\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r \rho^5\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{168}$$

第七题：【参考解析】：因为 $f(x)$在$[0,c]$上满足拉格朗日(Lagranger)中值定理的条件，故存在$\xi_1\in(0,c)$，使$f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$．由于$c$在弦$AB$上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$

从而$f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$.

同理可证，存在$\xi_2\in(c,1)$，使$f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$． 由$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知在$[\xi_1,\xi_2]$上$f'(x)$满足罗尔(Rolle)定理的条件，所以存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使$f''(\xi)=0$.