

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类) 试卷

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设 $x_n = (1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$ ，其中 $|a| < 1$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 。

(3) 设 $s > 0$ ，求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx (n = 1, 2, \cdots)$ 。

(4) 设 $f(t)$ 有二阶连续导数， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ ，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ 。

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离。

第二题: (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0,$$

且存在一点 x_0 ，使得 $f(x_0) < 0$ 。证明：方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两个实根。

第三题: (15 分) 设 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定。且 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ ，其中 $\psi(t)$

具有二阶导数，曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切。求函数 $\psi(t)$ 。

第四题: (15 分) 设 $a_n > 0$ ， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，证明：(1) 当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛；(2) 当 $\alpha \leq 1$ ，

且 $S_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 时， $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

第五题: (15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线，均匀椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{其中 } 0 < c < b < a, \text{ 密度为 } 1) \text{ 绕 } l \text{ 旋转.}$$

(1) 求其转动惯量； (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值。

第六题: (15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分

$$\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$$
 的值为常数。

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$. 证明: $\oint_L \frac{2xy \, dx + \varphi(x) \, dy}{x^4 + y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$; (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2xy \, dx + \varphi(x) \, dy}{x^4 + y^2}$.