2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类）参考答案

一、【参考解答】：平面 ABC 的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,1,1)\times(0,-1,-3)=(-2,0,0)$. 设所求直线的方向向量为 $\vec{l}=(a,b,c)$，则由条件得 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0,\vec{l}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. 由此可解得 $\vec{l}=(0,c,c)(c\neq 0)$，取 $\vec{l}=(0,1,1)$. 于是所求直线方程为 $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

二、【参考证明】：【思路一】：$\forall x\in[a,b]$，利用牛顿-莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\int_a^x f'(u)\,\mathrm{d}u=f(a)+\int_a^x f'(a)\,\mathrm{d}u+\int_a^x \mathrm{d}u\int_a^u f''(t)\,\mathrm{d}t\\&=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x \mathrm{d}t\int_t^x f''(t)\,\mathrm{d}u\\&=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

【思路二】：$\forall x\in[a,b]$，利用分部积分公式，得

$$\begin{aligned}&\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t=\left[(x-t)f'(t)\right]_a^x+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\\&=-f'(a)(x-a)+f(x)-f(a),\end{aligned}$$

即 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.

三、【参考证明】：当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有 $2k_0$ 个零点，下面证明无论 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 取什么值，$f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上都至少有 $2k_0$ 个零点.

考虑函数 $F_1(x)=-\dfrac{1}{k_0^2}\left(\sin k_0x+\sum_{i=1}^n\dfrac{A_ik_0^2}{k_i^2}\sin k_ix\right)$，容易得到

$$F_1(0)=F_1(2\pi)=0,F_1''(x)=f(x).$$

设 $F_1(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上的零点个数为 N，则由罗尔定理知 $F_1'(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的至少有 N 个零点；从而 $F_1''(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的至少有 $N-1$ 个零点，于是 $F_1''(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上至少有 N 个零点. 记 $F_0(x)=f(x)$. 重复上面的过程，得到一系列函数 $F_s(x)=\dfrac{(-1)^s}{k_0^{2s}}\left(\sin k_0x+\sum_{i=1}^n\dfrac{A_ik_0^{2s}}{k_i^{2s}}\sin k_ix\right)$ 满足 $F_{s+1}''(x)=F_s(x),s=0,1,2,\cdots$，从而若 $F_s(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上零点个数为 N，则 $f(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上的零点个数至少为 N. 令 $g(x)=\sin k_0x+\sum_{i=1}^n\dfrac{A_ik_0^{2s}}{k_i^{2s}}\sin k_ix$，则 $F_s(x)=\dfrac{(-1)^s}{k_0^{2s}}g(x)$. 由于 $k_0<k_1<\cdots<k_n$，可取充分大的正整数 s，使得 $\sum_{i=1}^n\dfrac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i k_0^{2s}}{k_i^{2s}}\sin k_i x\right| \le \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此，当$m = 1,2,\cdots,2k_0 - 1$时，或者

$$g\left(\frac{m\pi + \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}} > 0,$$
$$g\left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < 0,$$

成立，或者

$$g\left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}} > 0,$$
$$g\left(\frac{m\pi + \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < 0,$$

成立. 不论何种情形，都存在$x_m \in \left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{4}}{k_0}, \frac{m\pi + \frac{\pi}{4}}{k_0}\right)$, 使得

$$g(x_m) = 0, m = 1,2,\cdots,2k_0 - 1.$$

由此可知，$F_s(x)$在$[0,2\pi)$上零点个数为$N \ge 2k_0$，故$f(x)$零点个数的最小可能值为$2k_0$.

四、【参考证明】：令$x_n = \ln a_n$，则由题设条件有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \lim_{n\to\infty} x_n < +\infty, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k = 0.$$

首先假设所有的$x_n \ge 0$. 由上面第二式可知存在$A > 0$，使得所有的$x_n \le A$. 容易知道$0 \le x \le \ln 2$时，成立不等式$e^x \le 1 + 2x$. 对于固定的n，令

$$S_n = \left\{i \in Z \mid 1 \le i \le n, x_i \le \ln 2\right\},$$

有$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \le \frac{1}{n}\sum_{k\in T_n}x_k > \frac{|T_n|}{n}\ln 2 \ge 2$, 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|T_n|}{n} = 0$. 由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}=\frac{1}{n}\sum_{k\in S_n}e^{x_k}+\frac{1}{n}\sum_{k\in T_n}e^{x_k}\le\frac{1}{n}\sum_{k\in S_n}\left(1+2x_k\right)+\frac{|T_n|}{n}e^{A}$$
$$\le 1-\frac{|T_n|}{n}(1-e^{A})+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

并且$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}\ge e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}$，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}=1.$$

对于一般情形，作数列$z_n=\begin{cases}-x_n, x_n<0\\ 0, x_n\ge 0\end{cases}, n=1,2,\cdots$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

令$y_n=x_n+z_n$，则$y_n\ge 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0\ \lim_{n\to\infty}y_n<+\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=0.$$

由上面已经证明的结论，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{y_k}=1$. 又因为$z_n\ge 0$，从而$x_n\le y_n$，于是有

$$e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{y_k}.$$

再由夹逼准则，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}=1.$

五、【参考解答】： 可得AB的特征多项式为$\lambda\left(\lambda-9\right)^2$. 由于$AB$和$BA$有相同的非零特征值（并且重数也相同），可知$BA$的特征值均为 9. 由此可知$BA$可逆，即存在 2 阶矩阵$C$，使得$CBA=BAC=I_2$，$AB$的最小多项式为$\lambda\left(\lambda-9\right)$，从而

$$A(BA-9I_2)B=ABAB-9AB=AB(AB-9I_3)=0,$$

于是有$BA-9I_2=CB\cdot A(BA-9I_2)B\cdot AC=0$, 即

$$BA=9I_2=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}.$$

六、【参考证明】： $\forall i\in I$，考虑$M_n(R)$的子空间

$$U_{i,R}=\left\{T\in M_n(R)\mid A_iT=TB_i\right\}$$

以及$M_n(Q)$的子空间

$$U_{i,Q}=\left\{T\in M_n(Q)\mid A_iT=TB_i\right\}$$

其中$M_n(R)$和$M_n(Q)$分别表示实数域R和有理数域Q上全体n阶矩阵构成的向量空间.

令$U_R=\bigcap_{i\in I}U_{i,R}, U_Q=\bigcap_{i\in I}U_{i,Q}$，由题意$U_R\ne 0$. 由于所涉及的向量空间的维数都不超过$n^2$，

因此U_R,U_Q实际上都只能是有限个$U_{i,R},U_{i,Q}$的交集. 求$U_{i,R},U_{i,Q}$的基底实际上就是解线性方程组（这些方程组由$A_iT=TB_i$给出），并且求它们的基础解系的步骤相同，因此可以去到一组公共基底，设为$T_1,T_2,\cdots,T_l$. 考虑多项式

$$f\left(t_1,t_2,\cdots,t_l\right)=\det\left(\sum_{k=1}^{l}t_kT_k\right),$$

由$U_R\neq 0$可知，存在一组实数$s_1,s_2,\cdots,s_l$满足$f\left(s_1,s_2,\cdots,s_l\right)\neq 0$，从而可知$f$作为$Q$上的多项式不是零多项式，因此存在一组有理数$r_1,r_2,\cdots,r_l$满足$f\left(r_1,r_2,\cdots,r_l\right)\neq 0$，此时矩阵$P=\sum_{k=1}^{l}r_kT_k\in U_Q$且可逆，即$\forall i\in I$，都有$P^{-1}A_iP=B_i$.

七、【参考证明】：(1) 由条件知，$\lim_{x\to+\infty}xF(x)=0$. 从而$\forall\varepsilon>0$, 当$x\to+\infty$,

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t\right|\leq xF\left(\alpha x\right)\int_{\alpha}^{\beta}|\cos t|\,\mathrm{d}\,t\to 0,$$

取$\alpha=\min\left\{\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right\},\beta=\max\left\{\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right\}$. 因此下面只需证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$

由 Dirichlet 判别法可知这个反常积分收敛. 将这个积分做如下变形，有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t$$
$$=x\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}F(x(t+k\pi))\cos t\,\mathrm{d}\,t.$$

这是一个收敛的交错级数，因此

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t\right|\leq x\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}F(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t\right|\leq 2xF(\frac{\pi x}{2})\to 0,x\to+\infty$$

于是得到$\lim_{x\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{+\infty}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0$.

(2) 只需要考虑$x\to 0+$的情形，这等价于证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{+\infty}x\left(F(xt)-G(xt)\right)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$

由（1）的结论，这又只需证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{\varepsilon_0}x\left(F(xt)-G(xt)\right)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0,0<\varepsilon_0\leq\frac{\pi}{2}.$$

下面先证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon_0} n\Big(G(nt)-G\big((n+1)t\big)\Big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$

事实上，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon_0} n\Big(G(nt)-G\big((n+1)t\big)\Big)\cos t\,\mathrm{d}\,t\\
&=\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n}\,\mathrm{d}\,u-\frac{n}{n+1}\int_0^{(n+1)\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n+1}\,\mathrm{d}\,u\\
&=\frac{1}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n}\,\mathrm{d}\,u+\frac{n}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\left(\cos\frac{u}{n}-\cos\frac{u}{n+1}\right)\mathrm{d}\,u\\
&\quad-\frac{n}{n+1}\int_{n\varepsilon_0}^{(n+1)\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n+1}\,\mathrm{d}\,u\\
&=I_1+I_2-I_3,
\end{aligned}$$

由题设条件知 $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=0,$ 从而有

$$\begin{aligned}
|I_1|&=\frac{1}{n+1}\int_0^{n\varepsilon_0} G(u)\cos\frac{u}{n}\,\mathrm{d}\,u\le\int_0^{\varepsilon_0} G(nu)\cos u\,\mathrm{d}\,u\\
&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} G(nu)\cos u\,\mathrm{d}\,u+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon_0} G(nu)\cos u\,\mathrm{d}\,u\\
&\le\frac{G(0)}{\sqrt{n}}+G(\sqrt{n})\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon_0}\cos u\,\mathrm{d}\,u\to 0,n\to\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_2|&=\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\varepsilon_0}^{k\varepsilon_0} G(u)\left(\cos\frac{u}{n+1}-\cos\frac{u}{n}\right)\mathrm{d}\,u\\
&\le\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n} G((k-1)\varepsilon_0)\int_{(k-1)\varepsilon_0}^{k\varepsilon_0}\frac{u}{n(n+1)}\,\mathrm{d}\,u\\
&=\frac{\varepsilon_0}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\varepsilon_0 G((k-1)\varepsilon_0)+\frac{\varepsilon_0^2}{2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} G((k-1)\varepsilon_0)\\
&=\frac{n\varepsilon_0}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\varepsilon_0 G((k-1)\varepsilon_0)+\frac{n\varepsilon_0^2 G(0)}{2(n+1)^2}\to 0,n\to\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_3|&=n\int_{\frac{n}{n+1}\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} G\big((n+1)u\big)\cos u\,\mathrm{d}\,u\le nG(n\varepsilon_0)\int_{\frac{n}{n+1}\varepsilon_0}^{\varepsilon_0}\cos u\,\mathrm{d}\,u\\
&\le\frac{n\varepsilon_0 G(n\varepsilon_0)}{n+1}\to 0,n\to\infty.
\end{aligned}$$

于是得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon_0} n\Big(G(nt)-G\big((n+1)t\big)\Big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.\qquad(*)$$

现在用类似于估计 I_1 的方法易知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\varepsilon_0}\Big(F(xt)-G(xt)\Big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$

从而只需证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]\int_0^{\varepsilon_0}\big(F(xt)-G(xt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$

这里$[x]$表示不超过x的最大整数. 记$[x]=n$，由$F(x),G(x)$的非负递减性以及$n\le x\le n+1$，可得

$$\begin{aligned}&n\int_0^{\varepsilon_0}\big(F(xt)-G(xt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t\\ \le\ & n\int_0^{\varepsilon_0}\big(F(nt)-G(nt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t+n\int_0^{\varepsilon_0}\big(G(nt)-G((n+1)t)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&n\int_0^{\varepsilon_0}\big(F(xt)-G(xt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t\\ \ge\ & n\int_0^{\varepsilon_0}\big(F((n+1)t)-G((n+1)t)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t-n\int_0^{\varepsilon_0}\big(G(nt)-G((n+1)t)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

而由题设条件可知

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{+\infty}\big(F(nt)-G(nt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$

再由（1）的结论得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\varepsilon_0}\big(F(nt)-G(nt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$

结合(*)式，由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}n\int_0^{\varepsilon_0}\big(F(xt)-G(xt)\big)\cos t\,\mathrm{d}\,t=0.$$