2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛

(非数学专业) 试题

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

(1) 设函数$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$在点$x=0$处连续，则$a+b$的值为_____

(2) 设$a>0$，则$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=$_______

(3) 设曲线 L 是空间区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线，则$\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right|=$_______

(4) 设函数$z=z(x,y)$由方程$F(x-y,z)=0$确定，其中$F(u,v)$具有连续二阶偏导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_______

(5) 已知二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^2$，则$f$的规范形为_

二、(本题 12 分) 设$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶连续可导，满足

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1;$$

又设数列$\{a_n\}$满足

$$a_1\in(0,1), a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,3,\cdots),$$

严格单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

三、(满分 12 分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数，且

$$|f(x)|\le 1, f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty),$$

证明：对于$0<\alpha<\beta$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'(nx-\dfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x=0$

四、(满分 12 分) 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中，

$$\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$$

五、(满分 12 分) 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{7}\cdots\dfrac{n}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{n+1}$之和.

六、（满分 11 分） 设 A 是 n 阶幂零矩阵，即满足 $A^2=O$.证明：若 A 的秩为 r，且 $1\le r<\dfrac{n}{2}$，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$，其中 I_r 为 r 阶单位矩阵。

七、（满分 11 分） 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，为一实数列，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$ 收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\dots+a_n)u_n=0$