

## 2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

### (非数学类) 试卷

#### 一、填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分)

(1) 设  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 若曲线  $y = y(x)$  由  $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$  确定, 则此曲线在  $t = 0$  对应点处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

(3)  $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二 (本题满分 8 分) 设函数  $f(t)$  在  $t \neq 0$  时一阶连续可导, 且  $f(1) = 0$ , 求函数  $f(x^2 - y^2)$ , 使得曲线积分  $\int_L y \left[ 2 - f(x^2 - y^2) \right] dx + x f(x^2 - y^2) dy$  与路径无关, 其中  $L$  为任一不与直线  $y = \pm x$  相交的分段光滑曲线.

三 (本题满分 14 分) 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ . 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}.$$

四 (本题满分 12 分) 计算三重积分  $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV$ , 其中  $(V)$  是由

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \geq 4, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 9$$

及  $z \geq 0$  所围成的空间图形.

五 (本题满分 14 分) 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  内可微, 且  $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq M$ ,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  是  $D$  内两点, 线段  $AB$  包含在  $D$  内. 证明:  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M |AB|$ , 其中  $|AB|$  表示线段  $AB$  的长度.

六 (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数  $f(x) > 0$ , 有  $\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$ .

七 (本题满分 14 分) 已知  $\{a_k\}, \{b_k\}$  是正数数列, 且  $b_{k+1} - b_k \geq \delta > 0, k = 1, 2, \dots, \delta$  为一常数. 证

明: 若级数  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  收敛, 则级数  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k}$  收敛.