2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛

（数学类三、四年级）试卷

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为________.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的和为_________.

(3) 计算 $I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^2+2y^2+3z^2\right)\mathrm{d}S =$________.

(4) $A = \left(a_{ij}\right)$ 为 n 阶实对称矩阵 $\left(n>1\right)$，$rank\left(A\right) = n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式，则有 $A_{11} =$_________.

二、（本题 15 分） 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P，且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C\right\}$, 其中 C 表示复数域. 试证明：$\forall A \in \Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ；进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

四、（本题 20 分） 设 $f\left(x\right) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$ 求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|}{\left|x-y\right|^{\alpha}} < +\infty.$$

五、（本题 15 分） $a\left(t\right), f\left(t\right)$ 为实连续函数，$\forall t \in R$，有

$$f\left(t\right) > 0, a\left(t\right) \geq 1, \int_0^{\infty} f\left(t\right)\mathrm{d}t = +\infty.$$

已知 $x\left(t\right)$ 满足 $x''\left(t\right) + a\left(t\right)f\left(x\left(t\right)\right) \leq 0, \forall t \in R.$ 求证：$x\left(t\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界.

六、（本题 10 分，复变函数） 设 a, b 是两个不同的复数，求满足方程

$$\left(f'\left(z\right)\right)^2 = \left(f\left(z\right)-a\right)\left(f\left(z\right)-b\right) \qquad (1)$$

的非常数整函数 $f\left(z\right)$.

七、（本题 10 分，实变函数） 设 $f\left(x\right)$ 是 R^1 上的 Lipschitz 函数，Lipschitz 常数为 K，则对任意的可测集 $E\subset R^1$，均有 $m\left(f\left(E\right)\right)\le K\cdot m\left(E\right)$.

八、（本题 10 分，微分几何） 设三维空间的曲面 S 满足：

(1) $P_0=\left(0,0,-1\right)\in S$;

(2) 对任意 $P\in S,\left|\overrightarrow{OP}\right|\le 1$，其中 O 是原点.

证明：曲面 S 在 P_0 的 Gauss 曲率 $K\left(P_0\right)\ge 1$.

九、（本题 10 分，数值分析） 考虑求解线性方程组 $Ax=b$ 的如下迭代格式

$$\left(\alpha D-C\right)x^{(k+1)}=\left(\left(\alpha-1\right)D+C^T\right)x^{(k)}+b,$$

其中 D 为实对称正定方阵，C 是满足 $C+C^T=D-A$ 的实方阵，α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵，且 $\alpha D-C$ 可逆，$\alpha>\dfrac{1}{2}$. 证明：上述迭代格式对任何初始向量 $x^{(0)}$ 收敛.

十、（本题 10 分，抽象代数） 设 R 为 $\left[0,1\right]$ 上的连续函数环，其加法为普通的函数加法，乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的一个极大左理想. 证明：$\forall f,g\in I,f$ 与 g 在 $\left[0,1\right]$ 上必有公共的零点.

十一、(本题 10 分，概率统计) 设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量 X（单位：吨）是随机变量，X 服从 $\left[100,200\right]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一吨，可以为国家挣得外汇 3 万元；若销售不出而囤积于仓库，则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求：应组织多少吨货源，才能使得国家的收益最大?