2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
(数学类三、四年级) 参考答案

一、填空题

(1) 0 (2) $p>1$ (3) $3\sqrt{2}\pi$ (4) $(1,0,1),(-1,0,-1),(1,t,-1),(-1,t,1),\ t\in R.$

二、**【参考解答】**: 由于形如$\alpha x+\beta y+\gamma=0$的平面与$S$只能交于直线或空集，所以可以设平面$\sigma$的方程为$z=\alpha x+\beta y+\gamma$，它与$S$交线为圆.

令$x=\cos\theta, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，则$\sigma$与$S$的交线可表示为

$$\Gamma(\theta)=\left(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta+\gamma\right),\theta\in[0,2\pi].$$

由于$\Gamma(\theta)$是一个圆，所以它到一个定点$P=(a,b,c)$的距离为常数R. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b\right)^2+\left(\alpha\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta+\gamma-c\right)^2=R^2.$$

利用$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，可以将上式写成

$$A\cos 2\theta+B\sin 2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中A,B,C,D,E为常数. 由于这样的方程对所有的$\theta\in[0,2\pi]$恒成立，所以

$$A=B=C=D=E=0.$$

特别地，我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0, B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0.$$

于是得到$\alpha=0,\beta=\pm1$，平面σ的法向量为

$$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1)\text{或}(0,-1,1)\text{的非零倍数.}$$

三、**【参考证明】**: 存在可逆方阵T使得$T^{-1}AT=\tilde{A}$为对角阵. 令$T^{-1}BT=\tilde{B}$，则

$$\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)=\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right),\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right).$$

令$\tilde{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn}),\tilde{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right)=\sum_{i,j=1}^n a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji}=\sum_{1\le i<j\le n}2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2$$

$$\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right)=\sum_{i,j=1}^n a_{ii}^2b_{ij}^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ii}^2+a_{jj}^2\right)b_{ij}^2+\sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2$$

于是$\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right)-\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right)=-\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ii}-a_{jj}\right)^2b_{ij}^2\le 0.$

四、【参考证明】：设Γ的圆心为$O,\alpha_i=\dfrac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1},B_{n+1}=B_1$，则

$$P_A=2\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i,P_B=2\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i.$$

先证：当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x. \qquad (1)$$

令$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x$，则$g(0)=0,$

$$g'(x)=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1=\frac{2\cos^2x+1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1>\frac{3\sqrt[3]{\cos^2x\cos^2x\cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1=0$$

故$g(x)$严格单调递增，因而$g(x)>g(0)=0.$ (1)得证.

$$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}=2\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}}=2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\geq 2\sum_{i=1}^{n}\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i>2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi.$$

五、【参考证明】：首先，令

$$G_1=(u_1),G_2=(v_1),G_3=(u_2),G_4=(v_2),$$
$$T=\{g_1g_2\mid g_1\in G_1,g_2\in G_2\},H=\{g_3g_4\mid g_3\in G_3,g_4\in G_4\}$$

则T,H均为G的Abel群. 进一步，由$(8,13)=1$可知：

$$G_1\cap G_2=\{e\},G_3\cap G_4=\{e\},$$

结果，$T=G_1G_2$为内直积分解，$H=G_3G_4$为内直积分解.

其次，分别计算u_1v_1,u_2v_2的阶.

若$(u_1v_1)^x=e$，则$u_1^xv_1^x=e$，由$T=G_1G_2$为内直积分解，得$u_1^x=e,v_1^x=e$，从而$8\mid x,13\mid x$，故$o(u_1v_1)=8\times 13$，即有$T=(u_1v_1)$. 同理知，$o(u_2v_2)=8\times 13$，即有$H=(u_2v_2)$. 注意到$u_1v_1=u_2v_2$，故$T=H.$

第三，$u_2\in G_3\subseteq H=T$，故u_2可表示为$u_2=g_1g_2,g_1\in G_1,g_2\in G_2$. 结果$u_2^8=g_1^8g_2^8$，即$g_2^8=e.$

令$g_2=v_1^t$，于是$v_1^{8t}=e$，得$13\mid 8t$，故$g_2=3$，由此得$u_2\in G_1$；同理可知$v_2\in G_2$.

第四，在此考虑$u_1v_1 = u_2v_2$以及$T = G_1G_2$为内直积分解，因此有$u_1 = u_2, v_1 = v_2$.

最后，直接计算可知，u_1u_2的阶为 4，v_1v_2的阶为 13.

六、【参考证明】：令$E_1 = E - Q$，其中Q是有理数集，则E_1无内点且$m\left(E_1\right) = m\left(E\right)$.

1) 存在闭集$E_2 \subset E_1$，使得$a < m\left(E_2\right) < m\left(E_1\right) = m\left(E\right)$.

对$m\left(E_1\right) > a + q > a$的正实数$q$，由测度的连续性知，$\exists A \subset E_1$，使得$m\left(A\right) = a + q$. 由可测集的定义，对$\dfrac{q}{2}$，$\exists$闭集$E_2 \subset A$，使得$m\left(A - E_2\right) < \dfrac{q}{2}$，于是

$$m\left(E_1\right) = m\left(A\right) - m\left(A - E_2\right) > a + q - \frac{q}{2} > a + \frac{q}{2} > a.$$

又$m\left(E_2\right) \le m\left(A\right) = a + q < m\left(E_1\right)$，即

$$a < m\left(E_2\right) < m\left(E_1\right) = m\left(E\right).$$

2) 令$f\left(x\right) = m\left(E_2 \cap \left[-x, x\right]\right), x \in R$，可证$f\left(x\right)$是连续单增函数且

$$f\left(0\right) = 0, \lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = m\left(E_2\right) > a.$$

由连续函数的介值性定理知：$\exists r > 0$，使得

$$f\left(r\right) = m\left(E_2 \cap \left[-r, r\right]\right) = a.$$

令$F = E_2 \cap \left[-r, r\right]$，则$F$为无内点的有界闭集且$F \subset E, m\left(F\right) = a$.

七、【参考证明】：设e_1, e_2, e_3为曲线γ的 Frenet 标架：

$$e_1 = \frac{d\gamma}{ds}, e_2 = \frac{1}{k}\frac{d^2\gamma}{ds^2}, e_3 = e_1 \times e_2.$$

则有$\dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = ke_2, \dfrac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = -ke_1 + \tau e_3, \dfrac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -\tau e_2$，其中$\tau$为曲线$\gamma$的挠率.

设$\beta = e_2 : \left[0, l\right] \to S^2$为球面上的简单曲线，它的弧长参数为$\tilde{s}$，于是有：

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = -ke_1 + \tau e_3, \frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s} = \sqrt{k^2 + \tau^2}.$$

球面在$\beta\left(s\right)$点的单位法向量为β，曲线$\beta\left(s\right)$的切向量为$\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = -ke_1 + \tau e_3$，所以曲线$\beta\left(s\right)$的球面上的法向量$\tilde{e}_2$为

$$\tilde{e}_2 = \frac{\beta \times \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}}{\left|\beta \times \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\right|} = \frac{\left(\tau e_1 + ke_3\right)}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}.$$

于是，曲线β在球面上的测地曲率

$$k_g=\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}\cdot\tilde{e}_2=\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}\right)\cdot\tilde{e}_2$$
$$=\frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}e_1+\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}e_3\right)\cdot\left(\tau e_1+ke_3\right)$$
$$=\frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right).$$

故有

$$\int_B k_g\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_0^l\frac{1}{\left(k^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right)\sqrt{k^2+\tau^2}\,\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^l\frac{1}{k^2+\tau^2}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\arg\tan\frac{\tau}{k}\right)\mathrm{d}s=\arg\tan\frac{\tau}{k}\bigg|_0^l=0,$$

其中用到闭曲线性质：$k(0)=k(l),\tau(0)=\tau(l)$. 由于$B$为简单闭曲线，它围成球面一个单连通区域$D$. 由 Gauss-Bonett 定理，有

$$\int_B k_g\,\mathrm{d}\tilde{s}=\int_D K\,\mathrm{d}S=2\pi.$$

对球面而言，Gauss 曲率$K=1$，故区域D的面积$|D|=2\pi$，为球面面积的一半.

八、【参考解答】：1. 令$q(x)=x^3-p(x)$. 我们证明$q(x)$具有形式：$q(x)=xJ^2(x)$，其中$J(x)$为一次多项式. 首先说明$q(x)$的根都为实数. 实际上$q(x)$必有一个实根α_1，如另两个为一对共轭复根，则$q(x)$具有形式：

$$q(x)=\left(x-\alpha_1\right)\left(x^2+ax+b\right),\ \text{且}\ a^2-4b<0.$$

由于$q(x)\geq 0,\alpha_1\leq 0,q(x)>x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$, $\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^1 x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2\mathrm{d}x$. 这与$\|q(x)\|_1$达到最小矛盾！因此，$q(x)$三个根都为实数，设为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

若$q(x)$的三个互不相等，则

$$\alpha_i\leq 0,\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x>\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

矛盾！因此$q(x)$有两个相等，设$\alpha_2=\alpha_3$. 故

$$q(x)=\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)^2,$$

并且$\alpha_1=0$时$\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x$会更小.

由于$\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\left(6\alpha_2^2-8\alpha_2+3\right)$，当$\alpha_2=\frac{2}{3}$，即$p(x)=x^3-q(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{9}x$时，$\left\|x^3-p(x)\right\|_1$最小.

2．令$q(x)=x^4-p(x)$. 类似于 1 的分析，$q(x)$的根都为实数，且都为重根. 即$q(x)=J^2(x)$，其中$J(x)$为二次多项式. 设$J(x)=x^2+ax+b$，则

$$f(a,b):=\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}a^2+ab+b^2.$$

由$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{2}{3}a+b+\frac{1}{2}=0,\frac{\partial f}{\partial b}=a+2b+\frac{2}{3}=0,$ 解得$a=-1,b=\frac{1}{6}$，因此得

$$p(x)=x^4-\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2=2x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}.$$

九、【参考证明】：设$\varepsilon>0,g(z)=1+\varepsilon-f(z)$,则$g(z)$在$D$上解析，

$$g(0)=1+\varepsilon>0,\mathrm{Re}\,g(z)=1+\varepsilon-\mathrm{Re}\,f(z)\ge\varepsilon>0.$$

因而

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|^2=\frac{|g(z)|^2-2(1+\varepsilon)\mathrm{Re}\,g(z)+(1+\varepsilon)^2}{|g(z)|^2+2(1+\varepsilon)\mathrm{Re}\,g(z)+(1+\varepsilon)^2}<1.$$

所以$\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}$是一个将$D$映入$D$，将 0 映到 0 的解析函数，根据 Schwarz 引理，有

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|\le|z|.$$

令$\varepsilon\to0$，得到$\frac{|f(z)|}{|2-f(z)|}\le|z|$. 两边平方得

$$|f(z)|^2\le|z|^2\left(4-4\,\mathrm{Re}\,f(z)+|f(z)|^2\right)$$

即$\left(1-|z|^2\right)|f(z)|^2\le4|z|^2\left(1-\mathrm{Re}\,f(z)\right)$.

由于$\left(\mathrm{Re}\,f(z)\right)^2\le|f(z)|^2$，从上式可得

$$\left(\mathrm{Re}\,f(z)+\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right)^2\le\frac{4|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)^2}.$$

由此即得

$$\operatorname{Re} f(z) \le \frac{2|z|}{1-|z|^2} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} = \frac{2|z|}{1+|z|}.$$

十、【参考解答】：用 A_n 表示事件："经 n 次试验后，黑球出现在甲袋中"，$\tilde{A}_n$ 表示事件"经 n 次试验后，黑球出现在乙袋中"，C_n 表示事件"第 n 次从黑球所在的袋中取出一个白球"．记

$$p_n = P(A_n), q_n = P(\tilde{A}_n) = 1 - p_n, n = 1, 2, \cdots$$

当 $n \ge 1$ 时，由全概率公式得

$$\begin{aligned} p_n &= P(A_n \mid A_{n-1}) P(A_{n-1}) + P(A_n \mid \tilde{A}_{n-1}) P(\tilde{A}_{n-1}) \\ &= P(C_n \mid A_{n-1}) P(A_{n-1}) + P(\tilde{C}_n \mid \tilde{A}_{n-1}) P(\tilde{A}_{n-1}) \\ &= p_{n-1} \cdot \frac{N-1}{N} + q_{n-1} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N} p_{n-1} + \frac{1}{N}(1 - p_{n-1}). \end{aligned}$$

因此可得递推等式 $p_n = \dfrac{N-2}{N} p_{n-1} + \dfrac{1}{N}(n \ge 1)$.

由初始条件 $p_0 = 1$，于是由递推关系式并利用等比级数求和公式，得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} + \cdots + \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^n}{1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

故黑球出现在甲袋中的概率为 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N-2}{N}\right)^n$．若 $N = 2$，则对任何 n，有 $p_n = \dfrac{1}{2}$；若 $N > 2$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$.