2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学专业）试卷

一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 微分方程 $y''-(y')^3=0$ 的通解是____________.

(2) 设 $D:1\le x^2+y^2\le 4$，则 $I=\iint_D\left(x+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2-4\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值是________.

(3) 设 $f(t)$ 二阶连续可导，且 $f(t)\ne 0$，若 $\begin{cases} x=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \\ y=f(t), \end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

(4) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，$f(x)$ 为多项式，则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值为______________.

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin(\pi n!e)\right]$ 的值为__________

二、（本题满分 14 分） 设 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数，证明：曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面都交于点 (a,b,c).

三、（本题满分 14 分） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

四、（本题满分 14 分） 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，C 是 $p\times q$ 矩阵.
证明：$R(AB)+R(BC)-R(B)\le R(ABC)$，其中 $R(X)$ 表示矩阵 X 的秩.

五（本题满分 14 分） 设 $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

(1) 若 $n\ge 2$，计算 I_n+I_{n-2}；

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

六、（本题 14 分） 设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数，设上半球面

$$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}，方向向上，$$

若对任何点 (x_0,y_0,z_0) 和 $r>0$，第二型曲面积分 $\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$. 证明：

$$\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0.$$