2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛
(数学类）试题

一、(本题 15 分) 设有空间中五点

$$A(1,0,1), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,1,0), E(3,1,2).$$

试求过点 E 且与 A,B,C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两阶导数，且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 证明:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)dt, \forall x \in [a,b].$$

三、(本题 10 分) 设 $k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ 为给定的正整数，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实参数，指出函数 $f(x) = \sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + \cdots + A_n \sin k_n x$ ，在 $[0, 2\pi]$ 上零点的个数（当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 变化时）的最小可能值并加以证明.

四、(本题 10 分) 设正数列 a_n 满足

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 1, \varlimsup_{n\to\infty} a_n < +\infty, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$

五、(本题 15 分) 设 A, B 分别是 $3\times2, 2\times3$ 实矩阵，若有 $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 BA.

六、(本题 20 分) 设 $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$ 是数域 F 上两个矩阵几何，称他们在 F 上相似，如果存在 F 上与 $i \in I$ 无关的可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}A_iP = B_i, \forall i \in I$. 证明：有理数域 Q 上两个矩阵集合 $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$，如果它们在实数域 R 上相似，则它们在有理数域 Q 上也相似.

七、(本题 15 分) 设 $F(x), G(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个非负单调递减函数，

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(F(x)+G(x)\big) = 0.$$

(1) 证明: $\forall \varepsilon > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_\varepsilon^{+\infty} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$

(2) 若进一步有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \big(F(t)-G(t)\big)\cos\dfrac{t}{n}\,\mathrm{d}t = 0$，证明

$$\lim_{x\to0} \int_0^{+\infty} \big(F(t)-G(t)\big)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$