2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛

（非数学专业）试题

一、计算题（本题共 5 小题，每题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足 $f_y \neq 0$ 且

$$f_x^{\ 2}f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}+f_y^{\ 2}f_{xx}=0,$$

$y=y\left(x,z\right)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

4. 求不定积分 $I=\displaystyle\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

5. 求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ \left(a>0\right)$ 所围立体的表面积.

二、（本题 13 分） 讨论 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$ 的敛散性，其中 α 是一个实常数.

三、（本题 13 分） 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上无穷次可微，并且满足：存在 $M>0$，使得

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M,\forall x\in\left(-\infty,+\infty\right)\left(k=1,2,\cdots\right)\text{且}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0,\left(n=1,2,\cdots\right).$$

求证：在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

四、（本题共 16 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 10 分） 设 D 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le a\left(a>b>0\right)$，面密度为 ρ 的均质薄板；l 为通过椭圆焦点 $\left(-c,0\right)$（其中 $c^2=a^2-b^2$）垂直于薄板的旋转轴.

（1）求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J；

（2）对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

五、（本题 12 分） 设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$（其中 $F(u,v)$

有连续偏导数）唯一确定，L 为正向单位圆周，试求：

$$I = \oint_L \left(xz^2 + 2yz\right)\mathrm{d}\,y - \left(2xz + yz^2\right)\mathrm{d}\,x\,.$$

六、（本题共 16 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 10 分）

（1）求解微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

（2）如 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{n^2x^2+1}\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}.$$