2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛

(数学类）试卷

第一题：(15 分) 求经过三平行直线 $L_1: x=y=z$， $L_2: x-1=y=z+1$， $L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

第二题：(20 分) 设 $C^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 C 上的线性空间，

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

(1) 假设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若 $AF=FA$，证明：

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E;$$

(2) 求 $C^{n\times n}$ 的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$ 的维数.

第三题：(15 分) 假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间（$n>0$），f,g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg-gf=f$，证明：f 的特征值都是 0，且 f,g 有公共特征向量.

第四题：(10 分) 设 $\left\{f_n(x)\right\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上满足 $\left|f_n'(x)\right|\le M$.

(1) 证明 $\left\{f_n(x)\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导，为什么？

第五题：(10 分) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 \mathrm{d}t$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散.

第六题：(15 分) $f(x,y)$ 是 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ 上二次连续可微函数，满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2,$$

计算积分 $I=\iint_{x^2+y^2\le1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

第七题：(15 分) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$，与点 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.