

2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

(数学类) 试卷

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中，设马鞍面 S 的方程为 $x^2 - y^2 = 2z$. 设 σ 为平面 $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, 其中 α, β, γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使得过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ .

二、(本题 15 分) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶实方阵, 满足

$$1) a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a > 0;$$

$$2) \text{对每个 } i (i = 1, 2, \cdots, n), \text{ 有 } \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |a_{ji}| < 4a.$$

$$\text{求 } f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ 的规范形.}$$

三、(本题 20 分) 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A, B 皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价: i) A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵; ii) A 的行列式的绝对值为 1;

2) 若又知 $A, A-2B, A-4B, \cdots, A-2nB, A-2(n+1)B,$

$A-2(n+n)B$ 皆可逆, 且它们的逆矩阵皆为整矩阵. 证明: $A+B$ 可逆.

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数,

$$f^{(n)}(0) = 0 (\forall n \geq 0),$$

且存在常数 $C > 0$ 使得

$$|xf'(x)| \leq C |f(x)|, \forall x \in [0, 1].$$

证明: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = 0 (\forall n \geq 0)$; (2) 在 $[0, 1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$.

五、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0 (n \geq 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + b_n, n \geq 2.$$

求证: (1) $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n (n \geq 2)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

六、(本题 20 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|^\alpha, \text{ 其中 } \alpha \in (0, 1] \text{ 是常数.}$$

求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x)$.