2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛
（非数学专业）试卷

一、 计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

(3) 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+e^{2t}) \\ y=t-\arctan e^{t} \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(本题 10 分) 求方程 $(2x+y-4)\,\mathrm{d}x+(x+y-1)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

三、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0),f'(0),f''(0)$ 均不为零. 证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

四、(本题 17 分) 设 $\Sigma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$，Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

五、(本题 16 分) 已知 Σ 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕着 y 旋转而成的椭球面，S 表示曲面 Σ 的上半部分（$z\geq 0$），Π 是椭球面 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离，λ,μ,ν 表示 S 的外法线的方向余弦.

1）计算 $\displaystyle\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}S$；

2）计算 $\displaystyle\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为外侧.

六、（本题 12 分） 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且满足 (1) $f(x)>0$; (2) $|f'(x)|\leq mf(x)$，其中 $0<m<1$. 任取 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

七、(本题 15 分) 问：在区间 $[0,2]$ 上是否存在连续可微的函数 $f(x)$，满足

$$f(0)=f(2)=1,\quad |f'(x)|\leq 1,\quad \left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq 1?$$

请说明理由.