2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）参考答案

一、【参考证明】(1)：过直线 L_2 上一点和线性无关向量 v 和 w 作平面 σ，则直线 L_2 落在平面 σ 上，且直线 L_1 平行于平面 σ. 过 L_1 作平面 τ 垂直于 σ，记两平面的交线为 L_1^*. 设两直线 L_1^* 和 L_2 的交点为 Q，过 Q 做平面 σ 的法线，交直线 L_1 为 P，则 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2.

设 $X=P+sv\in L_1$，$Y=Q+tw\in L_2$ 也使得 XY 同时垂直于 L_1 和 L_2，则有

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{PQ}-sv+tw$$

垂直于 v 和 w，故有

$$-s+(v\cdot w)t=0\text{和}-s(v\cdot w)+t=0.$$

由于 $(v.w)^2<1$，我们得到 $s=t=0$，即 $X=P,Y=Q$，这样 P,Q 存在且唯一.

【参考解答】(2)：设 $P=a+sv\in L_1$，$Q=b+tw\in L_2$，因为

$$\overrightarrow{PQ}=\lambda v\times w\Rightarrow(b-a)-sv+tw=\lambda v\times w.$$

于是有

$$(b-a)\cdot v-s+t(v\cdot w)=0,(b-a)\cdot w-s(v\cdot w)+t=0,$$

故有

$$s=\frac{(b-a)\cdot\left(v-(v\cdot w)w\right)}{1-(v\cdot w)^2},t=\frac{(b-a)\cdot\left(w-(v\cdot w)v\right)}{1-(v\cdot w)^2}$$

得到 $P=a+\dfrac{(b-a)\cdot\left(v-(v\cdot w)w\right)}{1-(v\cdot w)^2}v,Q=b+\dfrac{(b-a)\cdot\left(w-(v\cdot w)v\right)}{1-(v\cdot w)^2}w.$

二、【参考解答】：$|A|=\dfrac{1}{24}$. 过程如下：

首先，记 A 的 4 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$，$A$ 的特征多项式为

$$p(\lambda)=\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0,$$

则由 $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$ 可知

$$\begin{cases}a_3=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4),\\ a_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4,\\ a_1=-(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_4\lambda_2\lambda_3),\\ a_0=|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.\end{cases}$$

齐次，由于迹在相似变换下保持不变，故由 A 的约当标准型（或 Schur 分解），有

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2=2 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3=3 & \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

由(1)和(2)得 $a_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4=-\dfrac{1}{2}$. 由(1)两边立方得

$$\begin{aligned}1=&\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3+3\lambda_1^2\left(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)\\&+3\lambda_2^2\left(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4\right)+3\lambda_3^2\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4\right)+3\lambda_4^2\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)-6a_1\end{aligned}$$

再由(1)(2)(3)，可以得到

$$1=3+3\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2\right)-3\left(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3\right)-6a_1,\quad a_1=-\frac{1}{6}$$

最后，由 $p(\lambda)=\lambda^4-\lambda^3-\dfrac{1}{2}\lambda^2-\dfrac{1}{6}\lambda+a_0$，得 $\begin{cases}p(\lambda_1)=0\\ \vdots\\ p(\lambda_4)=0\end{cases}$ 相加得

$$4-3-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{6}\times 1+4a_0=0\Rightarrow a_0=\frac{1}{24},$$

即 $|A|=\dfrac{1}{24}$.

三、【参考证明】: 设 $C=I+A, B=A^2$，A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 B 的 n 个特征值为 ${\lambda^2}_1,{\lambda^2}_2,\cdots,{\lambda^2}_n$；$C$ 的 n 个特征值为 $\mu_1=\lambda_1+1,\mu_2=\lambda_2+1,\cdots,\mu_n=\lambda_n+1$；$C$ 的特征多项式为

$$p_C(\lambda)=(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\cdots(\lambda-\mu_n).$$

若 X 为 $X+AX-XA^2=0$ 的解，则有 $CX=XB$；进而有

$$C^2X=XB^2,\cdots C^kX=XB^k,\cdots,$$

结果有 $0=p_C(C)X=Xp_C(B)=X(B-\mu_1I)\cdots(B-\mu_nI)$. 注意到 B 的 n 个特征值皆为偶数，而 C 的 n 个特征值皆为奇数，所以 $B-\mu_1I,\cdots,B-\mu_nI$ 皆为可逆矩阵，结果由

$$0=X(B-\mu_1I)\cdots(B-\mu_nI)$$

立即可得 $X=0$.

四、【参考证明】: $a_2=a_1+\dfrac{1}{a_1}\geq 2$, 若 $a_n\geq n$，则

$$a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-n-1=\left(1-\frac{1}{a_n}\right)(a_n-n)\geq 0$$

故 $a_n\geq n,\forall n\geq 2$ 且 a_n-n 单调递减.

令$b_n=n\left(a_n-n\right)$，则

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\left(n+1\right)\left(a_{n+1}-n-1\right)=\left(n+1\right)\left(a_n+\frac{n}{a_n}-n-1\right)\\&=\left(a_n-n\right)\left(n+1\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)b_n\\&=\left(1+\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}\right)b_n=\left(1+R_n\right)b_n\end{aligned}$$

其中$R_n=\dfrac{a_n-n}{na_n}-\dfrac{1}{na_n}$，从而$b_n=b_2\prod\limits_{k=2}^{n-1}\left(1+R_k\right)$. 考察$R_n$.

$$\left|R_n\right|\leq\left|\frac{a_n-n}{na_n}\right|+\frac{1}{na_n}\leq\frac{1+\left|a_2-2\right|}{n^2},n\geq 2.$$

结果由$\lim\prod\limits_{k=2}^{n-1}\left(1+R_k\right)$存在知$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a_n-n\right)$存在.

五、【参考证明】: 记$M=\sup\left|f\left(x\right)\right|$. 因而$\left|g_0\left(x\right)\right|\leq M$. 假设

$$\left|g_{n-1}\left(x\right)\right|\leq\left(1+a+\cdots+a^{n-1}\right)M.$$

由(1)可得$\left|g_n\left(x\right)\right|\leq\left|f\left(x\right)\right|+\int_0^x\left|h\left(t\right)\right|\left|g_{n-1}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}&\leq M+\int_0^{+\infty}\left|h\left(t\right)\right|\left(1+a+\cdots+a^{n-1}\right)M\,\mathrm{d}t\\&=M+a\left(1+a+\cdots+a^{n-1}\right)M=\left(1+a+\cdots+a^{n-1}+a^n\right)M\end{aligned}$$

因此$\left|g_n\left(x\right)\right|\leq\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}M$. 由(1)可得

$$g_n\left(x\right)-g_{n-1}\left(x\right)=\int_0^x h\left(t\right)\left[g_{n-1}\left(t\right)-g_{n-2}\left(t\right)\right]\mathrm{d}t,$$

由此可得$\sup\left|g_n\left(x\right)-g_{n-1}\left(x\right)\right|\leq a\sup\left|g_{n-1}\left(t\right)-g_{n-2}\left(t\right)\right|$，从而

$$\sup\left|g_n\left(x\right)-g_{n-1}\left(x\right)\right|\leq a^{n-1}\sup\left|g_1\left(t\right)-g_0\left(t\right)\right|\leq a^nM$$

由于$a\in[0,1)$，从上面的这个式子可以知道函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(g_n(x)-g_{n-1}(x)\right)$在$[0,+\infty)$上一致收敛，即函数列$\left\{g_n\left(x\right)\right\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛. 因为函数列的每一项都连续，因而其极限函数$g\left(x\right)$也是连续函数.

在(1)的两边取极限，有

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_0^x h\left(t\right)g\left(t\right)\mathrm{d}t,\qquad(2)$$

记$\varphi\left(x\right)=\int_0^x h\left(t\right)g\left(t\right)\mathrm{d}t,H\left(x\right)=\int_0^x h\left(t\right)\mathrm{d}t$则两个函数可导，且

$$\varphi'\left(x\right)=h\left(x\right)g\left(x\right),H'\left(x\right)=h\left(x\right).$$

由(2)可得

$$\varphi'(x)-h(x)\varphi(x)=h(x)f(x).$$

因而$\left[e^{-H(x)}\varphi(x)\right]'=e^{-H(x)}h(x)f(x)$. 两边同时积分，得

$$e^{-H(x)}\varphi(x)=\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

即$\varphi(x)=e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,\mathrm{d}t$. 将其代入(2)就可以得到

$$g(x)=f(x)+e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

六、【参考证明】：不妨设$f(x)$ 有下界. 设

$$m=\inf_{x\in R}f(x),g(x)=f(x)-m,$$

则$g(x)$为非负连续函数，且

$$A=g(x)+a\int_{x-1}^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

为非负函常数.

由(1)知$g(x)$时可微函数，且

$$g'(x)+a\big(g(x)-g(x-1)\big)=0.$$

由此，$\left[e^{ax}g(x)\right]'=ae^{ax}g(x-1)\geq 0$. 这说明$e^{ax}g(x)$是递增函数. 由(1)可得

$$\begin{aligned}A&=g(x)+a\int_{x-1}^x e^{at}g(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t\leq g(x)+ae^{ax}g(x)\int_{x-1}^x e^{-at}\,\mathrm{d}t\\&=g(x)+e^{ax}g(x)\left(e^{-a(x-1)}-e^{-ax}\right)=e^a g(x)\end{aligned}$$

由此可得$g(x)\geq Ae^{-a}$.

由$g(x)$的定义可知，$g(x)$的下确界为 0，因此$A=0$. 再根据(1)可知$g(x)$恒等于 0，即$f(x)$为常数.