2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛
（数学类）试卷

一、（本题 15 分） 已知四点$(1,2,7),(4,3,3),(5,-1,6),(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$.试求过这四点的球面方程。

二、（本题 10 分） 设$f_1,f_2,\cdots,f_n$为$[0,1]$上的非负连续函数，求证：存在$\xi\in[0,1]$，使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi)\le\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

三、（本题 15 分） 设F^n是数域F上的n维列空间，$\sigma: F^n\to F^n$是一个线性变换。若

$$\forall A\in M_n(F),\sigma(A\alpha)=A\sigma(\alpha),(\forall\alpha\in V),$$

证明：$\sigma=\lambda\cdot\mathrm{id}_{F^n}$，其中$\lambda$是$F$中的某个数，$\mathrm{id}_{F^n}$表示恒同变换。

四、（本题 10 分） 对于ΔABC，求$3\sin A+4\sin B+18\sin C$的最大值。

五、（本题 15 分） 对于任何实数α，求证存在取值于$\{-1,1\}$的数列$\{a_n\}_{n\ge1}$满足

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

六、（本题 20 分） 设A是数域F上的n阶方阵。证明：A相似于$\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$，其中$B$是可逆矩阵，$C$是幂零阵，即存在$m$使得$C^m=0$.

七、（本题 15 分） 设$F(x)$是$[0,+\infty)$上的单调递减函数，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\,\mathrm{d}\,t=0.$$

证明：(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$；(ii) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t=0.$