2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
（数学一、二年级）试卷

一、填空题：

(1)设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，则

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

(2)设 a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足______________.

(3) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$（$a>0$ 为常数），其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，则 $I=$____________.

(4)记两个特征值为 1，2 的 2 阶实对称矩阵的全体为 Γ．$\forall A\in\Gamma, a_{12}$ 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素，则集合 $\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元等于______.

第二题：在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$．设 P 为空间中的平面，它交抛物面 Γ 于交线 C．问：C 是何种类型的曲线？证明你的结论.

第三题：证明题：设 n 阶方阵 A,B 满足：秩 (ABA)=秩 (B)．证明：AB 与 BA 相似.

第四题：对 R 上无穷次可微的（复值）函数 $\varphi(x)$，称 $\varphi\in\mathscr{S}$，如果 $\forall m,k\ge 0$ 成立 $\sup\limits_{x\in R}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$．若 $f\in\mathscr{S}$，可定义 $\hat{f}(x)=\int_R f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\,(\forall x\in R)$.
证明：$\hat{f}\in\mathscr{S}$，且 $f(x)=\int_R \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\,(\forall x\in R)$.

第五题： 设 $n>1$ 为正整数，令 $S_n=\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

1．证明：数列 S_n 单调增加且有界，从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在；

2．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

第六题：求证：常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$ 有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解.