2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类一、二年级）参考答案

一、填空题

(1) 0　(2) $p>1$　(3) $3\sqrt{2}\pi$　(4) $(1,0,1),(-1,0,-1),(1,t,-1),(-1,t,1),\ t\in R$.

二、【参考解答】：由于形如 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 的平面与 S 只能交于直线或空集，所以可以设平面 σ 的方程为 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$，它与 S 交线为圆. 令 $x=\cos\theta, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，则 σ 与 S 的交线可表示为

$$\Gamma(\theta)=\left(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta+\gamma\right),\theta\in[0,2\pi].$$

由于 $\Gamma(\theta)$ 是一个圆，所以它到一个定点 $P=(a,b,c)$ 的距离为常数 R. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b\right)^2+\left(\alpha\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta+\gamma-c\right)^2=R^2.$$

利用 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2},\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$，可以将上式写成

$$A\cos2\theta+B\sin2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中 A,B,C,D,E 为常数． 由于这样的方程对所有的 $\theta\in[0,2\pi]$ 恒成立，所以 $A=B=C=D=E=0$.

特别地，我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0, B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0.$$

于是得到 $\alpha=0,\beta=\pm1$，平面 σ 的法向量为

$$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1)\text{或}(0,-1,1)\text{的非零倍数.}$$

三、【参考证明】：存在可逆方阵 T 使得 $T^{-1}AT=\tilde{A}$ 为对角阵. 令 $T^{-1}BT=\tilde{B}$，则

$$\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)=\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right),\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right).$$

令 $\tilde{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn}),\tilde{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji}=\sum_{1\le i<j\le n}2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2$$

$$\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}^2b_{ij}^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ii}^2+a_{jj}^2\right)b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2$$

于是

$$\operatorname{tr}\left((\tilde{A}\tilde{B})^2\right)-\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^2\tilde{B}^2\right)=-\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ii}-a_{jj}\right)^2b_{ij}^2\le0.$$

四、【参考证明】：设 Γ 的圆心为 $O,\alpha_i=\dfrac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1},B_{n+1}=B_1$，则

$$P_A=2\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i,P_B=2\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\,.$$

先证：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x.\qquad(1)$$

令 $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x$，则 $g(0)=0,$

$$g'(x)=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1=\frac{2\cos^2x+1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1>\frac{3\sqrt[3]{\cos^2x\cos^2x\cdot1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1=0$$

故 $g(x)$ 严格单调递增，因而 $g(x)>g(0)=0$. (1)得证.

$$P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}=2\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}}=2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\geq2\sum_{i=1}^{n}\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i>2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi.$$

五、【参考证明】：令 $F(x)=\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$y(x)=Ce^{-F(x)}+\int_0^x f(t)e^{F(t)-F(x)}\,\mathrm{d}t.$$

对于任意 $\varepsilon>0$，存在 x_0，当 $t\geq x_0$ 时，有 $|f(t)|\leq\varepsilon a(t)$.

$$\int_0^x f(t)e^{F(t)-F(x)}\,\mathrm{d}t=e^{-F(x)}\int_0^{x_0}f(t)e^{F(t)}\,\mathrm{d}t+e^{-F(x)}\int_{x_0}^{x}f(t)e^{F(t)}\,\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\left|e^{-F(x)}\int_{x_0}^{x}f(t)e^{F(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leq e^{-F(x)}\int_{x_0}^{x}\varepsilon a(t)e^{F(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\varepsilon e^{-F(x)}e^{F(t)}\Big|_{t=x_0}^{t=x}=\varepsilon\left(1-e^{F(x_0)-F(x)}\right)<\varepsilon.$$

所以 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|y(x)|\leq\lim\limits_{x\to+\infty}Ce^{-F(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-F(x)}\int_0^{x_0}|f(t)|e^{-F(t)}\,\mathrm{d}t+\varepsilon=\varepsilon$. 由 ε 的任意性，知 $\lim\limits_{x\to+\infty}|y(x)|=0$.

六、【参考解答】：令 $g(x)=f(x)-x$，则有

$$xg(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

对于$x>0$，根据积分平均值定理，存在$x_1\in(0,x)$，使得$\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t=g(x_1)\frac{x}{2}$. 因而

$$g(x)=g(x_1).$$

设$x_0=\inf\{t\in(0,x)\mid f(x)=f(t)\}$，则有$g(x_0)=g(x)$.

若$x_0>0$，则重复上面的过程，可知存在$y_0\in(0,x_0)$，使得$g(y_0)=g(x_0)=g(x)$.这与x_0的取法矛盾. 因此，必有$x_0=0$. 这说明$g(x)=g(0)$.

同理，对$x<0$，也可以证明$g(x)=g(0)$.

总之，$g(x)$是常数. 于是$f(x)=x+C,C$是常数.