

2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛 (数学三、四年级) 参考答案

一、填空题:

(1) 【参考解答】: 0.

因为该多项式无 3 次项, 故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得到行列式的值为 0.

(2) 【参考解答】: $a > 27$ 或 $a < -37$.

记 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \\ &= 12(x-1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$f(x)$ 在 -2 和 3 取得极小值 $-152 + a$ 和 $-27 + a$. $f(x)$ 在 1 取得极大值 $37 + a$. 因此, 当且仅当 $a > 27$ 或 $a < -37$ 时方程有虚根.

(3) 【参考解答】: $-\frac{\pi}{2}a^3$.

令曲面 $S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 取下侧, 则 $S_1 \cup S$ 为闭下半球面的内侧. 设其内部区域为 Ω , 令 D 为 xOy

平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 则利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \left\{ \iint_{S \cup S_1} - \iint_{S_1} [ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy] \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ - \iiint_{\Omega} (3a + 2z) \, dV + \iint_D a^2 \, dx \, dy \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ -2\pi a^4 - 2 \iiint_{\Omega} z \, dV + \pi a^4 \right\} \\ &= -\pi a^3 - \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \, dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z \, dz \\ &= -\frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

(4) 【参考解答】: $-\frac{1}{2}$.

$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^T$, Q 可以表示为 $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$, 所以 $a_{21} = -\sin t \cos t$, 立即

得到结果.

第二题：【参考解答】：交线为抛物线或椭圆.

(1)如果平面 P 平行于 z - 轴，则相交曲线 $C = \Gamma \cap P$ 可以经过以 z - 为旋转轴的旋转，使得 P 平行于 yz - 平面， C 的形式不变. 所以不妨设 P 的方程为 $x = c$ ，交线 C 的方程为

$$z = \frac{1}{2}(c^2 + y^2).$$

将 C 投影到 yz - 平面上，得到抛物线 $z - \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 yz - 平面，故交线为抛物线.

(2)如果平面 P 不平行于 z - 轴，设 P 的方程为 $z = ax + by + c$. 代入 Γ 的方程 $z = \frac{1}{2}(c^2 + y^2)$ ，得

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 2c := R^2$$

将 $C = \Gamma \cap P$ 垂直投影到 xy - 平面，得到圆周

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

令 Q 是以这个圆为底的圆柱，则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体，它与平面 P 相切于 F_1, F_2 ，与圆柱 Q 相交于圆 D_1, D_2 . 对 $C = Q \cap P$ 上的任意一点 A ，过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1 ，交圆 D_2 于 B_2 ，则线段 B_1B_2 为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到 $|AF_1| + |AF_2| = |AB_1| + |AB_2| = |B_1B_2|$ 为常数，故曲线 C 为椭圆.

第三题：【参考证明】：设 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q, B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}$ ，其中 P, Q 为可逆方阵， B_1 为

r 阶方阵，则有

$$AB = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}, BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix} Q$$

$$ABA = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

由 $\text{rank} ABA = \text{rank} B_1 = \text{rank} B$ 可得，存在矩阵 X, Y 使得 $B_2 = B_1 X, B_3 = Y B_1$ ，从而有

$$AB = P \begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} I & O \\ Y & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -Y & I \end{pmatrix} Q$$

因此， AB 与 BA 相似.

第四题：【参考证明】：由于 $f \in \mathcal{S}$ ，因此存在 $M_1 > 0$ 使得

$$|2\pi i x f(x)| \leq \frac{M_1}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

这样 $\int_R (-2\pi i y) f(y) e^{-2\pi i x y} dy$ 关于 $x \in R$ 一致收敛，从而可得

$$\frac{d\hat{f}(x)}{dx} = \int_R -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y} dy. \quad (2)$$

同理可得

$$\frac{d^n \hat{f}(x)}{dx^n} = \int_R (-2\pi i y)^n f(y) e^{-2\pi i x y} dy. \quad (3)$$

利用分部积分法可得

$$\left(f^{(n)} \right)^\wedge(x) = (2\pi i x)^n \hat{f}(x), \forall n \geq 0 \quad (4)$$

结合(3)(4)并利用 $f \in \mathcal{S}$ ，可得对任何 $m, k \geq 0$ ，有

$$x^m \frac{d^k \hat{f}(x)}{dx^k} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_R \frac{d^m \left((-2\pi i y)^k f(y) \right)}{dy^m} e^{-2\pi i x y} dy$$

在 R 上有界。从而 $\hat{f} \in \mathcal{S}$ 。于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy$ 收敛，

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy &= \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i (x-t)y} dt \\ &= \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{2\pi i t y} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-A}^A f(x-t) e^{2\pi i t y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi A t)}{\pi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi A t) dt + f(x) \end{aligned} \quad (5)$$

由于 $f \in \mathcal{S}$ 易得积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \right| dt$ 收敛，从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi A t) dt = 0. \quad (6)$$

组合(5)(6)即得结论成立。

第五题：【参考证明】：假设 φ 不恒为 0，则 $\exists a \in F$ 使得 $\varphi(a) \neq 0$ 。于是由 $\varphi(0+a) = \varphi(a)$ 可知

$$\varphi(a) = \varphi(0) \varphi(a)$$

导致 $\varphi(0) = 1$ 。进而 $\forall x \in F$ 有

$$1 = \varphi(0) = \varphi(\underbrace{x + \cdots + x}_p) = (\varphi(x))^p, \quad (\varphi(x))^p - 1 = 0$$

注意到 $ChF = p$ ， p 为素数，故有 $\forall a, b \in F$ ，

$$(a+b)^p = a^p + b^p, \quad \text{进而} (a-b)^p = a^p - b^p.$$

结果由 $(\varphi(x))^p - 1 = 0$ 可得 $(\varphi(x) - 1)^p = 0$ ，即 $\varphi(x) = 1$ 。

第六题：【参考证明】：(1) 做 $[0, 1]$ 的划分 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ ，其中

$$x_0 \in E, x_2 \in E, \cdots, x_n \in E; x_1 \notin E, x_3 \notin E, \cdots, x_{n-1} \notin E.$$

构造如下： $\forall n \geq 1$ ，先取 $x_0 = 0, x_2, x_4, x_{n-2} \in E, x_n = 1$ 。由 E 的构造知：

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \cdots, [x_{n-2}, x_n]$$

中有无穷多不属于 E 的点，取 $x_1 \in (x_0, x_2) \setminus E, x_3 \in (x_2, x_4) \setminus E, \cdots, x_{n-1} \in (x_{n-2}, x_n) \setminus E$ ，于是

$$\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| = n.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \rightarrow \infty$ ，即 $\bigvee_0^1 (\chi_E(x)) = +\infty$ 。

(2) 证明： (\Rightarrow) 反证法。假设 E 有无穷多边界点 $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ 。 $\forall n > 1$ ，造 $[0, 1]$ 的划分 Δ 如下：取 $x_0 = 0$ ，

在 $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ 中任取 n 个点按大小排列记作 $\{c_1, \cdots, c_n\}$ 。

由边界点的定义： $\forall \varepsilon > 0$ ， $U(c_i, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ 且 $U(c_i, \varepsilon) \cap \complement E \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq n$)。对

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{c_{i+1} - c_i, i = 1, 2, \cdots, n-1\},$$

若取 $x_0 \in E$ ，取 $x_1 \in (x_0, c_1 + \varepsilon) \cap \complement E$ ， $x_2 \in (x_1, c_2 + \varepsilon) \cap E$ ，

$$x_3 \in (x_2, c_3 + \varepsilon) \cap \complement E, x_4 \in (x_3, c_4 + \varepsilon) \cap E, \cdots;$$

若 $x_{n-2} \in \complement E$ ，取

$$x_{n-1} \in (x_{n-2}, c_{n-1} + \varepsilon) \cap E, x_n = 1.$$

于是 $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \geq n-1$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \rightarrow \infty,$$

即 $\bigvee_0^1 (\chi_E(x)) = +\infty$ 。与 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界变差矛盾，故假设不真。

(\Leftarrow) 设 c_1, c_2, \cdots, c_m 是 E 的边界点， m 有限。对任意 $[0, 1]$ 分划 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ ， n 各小区间

$$[x_i, x_{i+1}] (0 \leq i \leq n-1)$$

中至多 m 个含有 $\{c_i\}_{i=1}^m$ 的点，也即

$$[x_i, x_{i+1}] (0 \leq i \leq n-1)$$

中至多 m 个小区间中既有 E 的点同时也有 $\notin E$ 的点。由 $\chi_E(x)$ 的定义，有

$$|\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| = \begin{cases} 1, & x_i \in E, x_{i-1} \notin E, \text{ or } x_{i-1} \in E, x_i \notin E \\ 0, & x_i, x_{i-1} \in E, \text{ or } x_i, x_{i-1} \notin E \end{cases}$$

于是

$$\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \leq m \Rightarrow \bigvee_0^1 (\chi_E(x)) \leq m < \infty.$$

第七题：【参考证明】： 设 k_1, k_2 为曲面 S 的两个主曲率，它对应的单位主方向为 e_1, e_2 。设 v 是 $p \in S$ 点处单位切向量，它与 e_1 的交角为 θ ，则沿 v 的方向法曲率为

$$k_n(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

在 $p \in S$ 点记 σ 为曲面法向量 N 和 v 张成的平面，它截曲面 S 为曲线 C ， C 称为 S 沿 v 方向的法截线，则法曲率 $k_n(v)$ 等于法截线 C 在平面 σ 上 p 点处的相对曲率。

因为 p 点处沿三个不同方向 v_1, v_2, v_3 的法截线 C 为直线，故存在不同的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ($0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$) 使得

$$k_n(v_1) = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \sin^2 \theta_1 = 0;$$

$$k_n(v_2) = k_1 \cos^2 \theta_2 + k_2 \sin^2 \theta_2 = 0;$$

$$k_n(v_3) = k_1 \cos^2 \theta_3 + k_2 \sin^2 \theta_3 = 0.$$

如果 $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ ，则存在 $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$ ，有

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \varepsilon_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \varepsilon_1 \theta_2) = 0;$$

$$\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \varepsilon_2 \cos \theta_1 \sin \theta_3 = \sin(\theta_1 + \varepsilon_2 \theta_3) = 0;$$

$$\sin \theta_2 \cos \theta_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 = \sin(\theta_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta_3) = 0.$$

由于 $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ ，所以有

$$\theta_1 + \varepsilon_1 \theta_2 = 0, \theta_1 + \varepsilon_2 \theta_3 = 0, \theta_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta_3 = 0.$$

于是推出 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 必有两个相同，矛盾。故在曲面 S 的任何点 p 有 $k_1 = k_2 = 0$ 。

由此推出 Weingarten 变换 $W \equiv 0$ 。将曲面 S 参数化为 $x(u, v)$ ，它的法向量为 $N(u, v)$ ，则有

$$W(x_u) = -N_u = 0, W(x_v) = -N_v = 0.$$

故法向量 N 为常向量。再由 $x_u \cdot N = x_v \cdot N = 0$ ，得到 $x \cdot N = c$ 为常数，故 S 落在一张平面上。

第八题：【参考解答】： (1) 对 $y' = f(x, y)$ 两边取积分得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

由 Simpson 公式，有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{6} [f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] + o(h^5)$$

由此可令 $c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{4}{6}, c_3 = \frac{1}{6}$.

令 $y_n = y(x_n)$, 可得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{2h}{3} [f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)] + \frac{h}{6} [f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{32}hK_1 + b_{32}hK_2)]$$

我们只需要选取参数化 $a_2, a_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}$ 使得上式右端为 $O(h^4)$.

注意到 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$, 记 $f_n = f(x_n, y(x_n))$, 将 $y(x_n + h/2)$ 做 Taylor 展开得

$$\begin{aligned} & f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \\ &= f(x_n + h/2, y(x_n)) + hf_n/2 + h^2y''(x_n)/8 + O(h^3) \\ & \quad - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \end{aligned}$$

为了使得上式达到精度的要求, 应取 $a_2 = \frac{1}{2}, b_{21} = \frac{1}{2}$. 于是利用 Taylor 展开有

$$\begin{aligned} & f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + h/2, y_n + hK_1/2) \\ &= \frac{h^2}{8} y''(x_n) f_y(x_n, y_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} & f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)) \\ &= f(x_n + h, y(x_n)) + hf_n + h^2y''(x_n)/2 + O(h^3) \\ & \quad - f(x_n + a_3h, y_n + (b_{31} + b_{32})hf_n + b_{32}h^2/2(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n) + O(h^3)) \end{aligned}$$

为了使得上式达到给定的精度, 令 $a_3 = 1, b_{31} + b_{32} = 1$. 注意到

$$y''(x_n) = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n,$$

再次利用泰勒展开得

$$\begin{aligned} & f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)) \\ &= \frac{h^2}{3} (1 - b_{32}) y''(x_n) f_y(x_n, y_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

综合上面的结果得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^3}{12}(2 - b_{32})y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^4)$$

令 $h_{32} = 2$ ，得到三级三阶 Runge-Kutta 格式的所有参数。

(2) 下面讨论格式的稳定性。对微分方程 $y' = \lambda y$ 应用上述 Runge-Kutta 格式，得

$$K_1 = \lambda y_n, K_2 = \lambda \left(1 + \frac{1}{2}\lambda h\right)y_n, K_3 = \lambda \left(1 + \lambda h + (\lambda h)^2\right)y_n$$

从而有 $y_{n+1} = \left(1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3\right)y_n$ ，故格式稳定的条件是

$$\left|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3\right| < 1.$$

第九题：【参考证明】 令 $w = w(z) = \frac{f(z)}{M}$ ，做变换 $F(z) = \frac{w(z) - w(0)}{1 - \overline{w(0)}w(z)}$ ，这里 $w(0) = \frac{f(0)}{M}$ 。

则该变换把单位圆 $|w| < 1$ 映射为 $|F(z)| < 1$ 。由施瓦兹引理 $|F'(0)| \leq 1$ 。由于

$$F'(z)|_{z=0} = \left(\frac{w(z) - w(0)}{1 - \overline{w(0)}w(z)}\right)'_{z=0} = \frac{w'(0)}{1 - |w(0)|^2} = \frac{f'(0)M}{M^2 - |f(0)|^2}$$

则 $\left|\frac{f'(0)M}{M^2 - |f(0)|^2}\right| \leq 1, |f'(0)|M \leq |M^2 - |f(0)|^2|$ 。由于在单位圆 $|z| < 1$ 内

$$|f(z)| \leq M (M > 0),$$

特别地有 $|f(0)| \leq M$ 。

于是 $|M^2 - |f(0)|^2| = M^2 - |f(0)|^2$ ，即 $|f'(0)|M \leq M^2 - |f(0)|^2$ 。

第十题：【参考解答】 X_k 的特征函数为

$$f_{X_k}(t) = Ee^{itX_k} = \frac{1}{2}(e^{iat} + 1) = \exp\left\{\frac{iat}{2}\right\} \cos \frac{at}{2} (k = 1, 2, \dots)$$

所以 $X_k / 2^k$ 的特征函数为

$$f_{X_k/2^k}(t) = f_{X_k}(t/2^k) = \exp\left\{\frac{iat}{2^{k+1}}\right\} \cos \frac{at}{2^{k+1}}$$

于是应用 $\cos \frac{at}{2^2} \cos \frac{at}{2^3} \cdots \cos \frac{at}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \frac{at}{2}}{\sin \frac{at}{2^{n+1}}}$ 得 Y_n 的特征函数为

$$f_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^n f_{X_k/2^k}(t) = f_{X_k}\left(t/2^k\right) = \cos \frac{at}{2^2} \cos \frac{at}{2^3} \cdots \cos \frac{at}{2^{n+1}} \exp \left\{ iat \left[\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\sin \frac{at}{2}}{\sin \frac{at}{2^{n+1}}} \exp \left\{ \frac{iat}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \right\}$$

应用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{at}{2^{n+1}}}{\frac{at}{2^{n+1}}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, 以及

$$\exp \left(\frac{iat}{2} \right) - \exp \left(-\frac{iat}{2} \right) = 2i \sin \frac{at}{2}$$

得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{Y_n}(t) = \frac{2}{at} \exp \left(\frac{iat}{2} \right) \sin \frac{at}{2} = \frac{1}{iat} [\exp(iat) - 1]$

由于在区间 $[0, a]$ 上均匀分布随机变量的特征函数

$$\varphi(t) = \frac{1}{iat} [\exp(iat) - 1]$$

所以 Y_n 的分布收敛于区间 $[0, a]$ 上均匀分布.



考研竞赛数学(ID:xwmath)

一个专注于大学数学公共基础课
资源分享的微信公众平台

高等数学, 线性代数

概率论与数理统计

考研数学, 竞赛数学

数学文化, 实验与建模

大学学习、生活历程

因为专业, 所以精彩