

2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类, 一、二年级) 参考解答

一、填空题

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) -\pi \quad (3) \frac{\sqrt{\pi}}{8} \quad (4) 0$$

二、【参考解析】: (1) 【思路一】直线 l_1 的参数方程为 $x = 0, y = 0, z = s$; l_2 的参数方程为

$$x = -1 + t, y = t, z = t$$

设动直线 l 与 l_1, l_2 分别交于点 $(0, 0, s)$ 与 $(-1 + t, t, t)$, 则的 l 方向为 $(-1 + t, t, t - s)$.

由于 l 与平面 $z = 0$ 平行, 故 $t = s$, 从而动直线 l 的方程为:

$$x = (t - 1)u, \quad y = tu, \quad z = t$$

消去 t, u 得动直线构成的曲面 S 的方程为 $xz - yz + y = 0$.

【思路二】过直线 l_1 的平面簇为 $\pi_1: (1 - \lambda)x + \lambda y = 0$, 这里 λ 为参数; 同理过直线 l_2 的平面簇为

$$\pi_2: (1 - \mu)(x - y + 1) + \mu(y - z) = 0, \mu \text{ 为参数}$$

动直线 l 是平面簇 π_1 与 π_2 的交线, 故直线 l 的方向为

$$\begin{aligned} n &= (1 - \lambda, \lambda, 0) \times (1 - \mu, 2\mu - 1, -\mu) \\ &= (-\lambda\mu, \mu(1 - \lambda), -1 + 2\mu - \lambda\mu) \end{aligned}$$

由直线 l 与平面 $z = 0$ 平行, 故 $-1 + 2\mu - \lambda\mu = 0$. 由 π_1 与 π_2 的方程知

$$\lambda = \frac{x}{x - y}, \quad \mu = \frac{x - y + 1}{x - 2y + z + 1}$$

将上式代入 $-1 + 2\mu - \lambda\mu = 0$, 即得动直线 l 生成的曲面的方程为 $xz - yz + y = 0$.

$$(2) \text{ 做可逆线性变换 } \begin{cases} x = x' - y' - z' \\ y = -z' \\ z = x' + y' \end{cases} \quad \text{曲面 } S \text{ 的原方程化为 } z' = x'^2 - y'^2. \text{ 因此, } S \text{ 为马鞍面.}$$

三、【参考解析】: 先证明一个引理.

引理 设 A 是 n 阶实方阵且满足 $\text{tr}(A) = 0$, 则存在可逆实方阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0.

对 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (0)$, 结论显然成立. 下设 $n \geq 2$, 考虑两种情形.

情形一: \mathbb{R}^n 中的所有非零向量都是 A 的特征向量. 由所有基本向量 $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ 都是特征向量可知, 存在特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 使得 $Ae_i = \lambda_i e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 因此, $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 再由所有 $e_i + e_j$ 都是特征向量有, 存在 μ_{ij} 使得

$$A(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \mu_{ij}(e_i + e_j)$$

于是 $\mu_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$, 因此 A 为纯量方阵. 由 $\text{tr}(A) = 0$ 知 $A = 0$.

情形二：存在 \mathbb{R}^n 中的非零向量 α 不是 A 的特征向量. 则 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 因而存在可逆实方阵

$$Q = (\alpha, A\alpha, *, \dots, *) \text{ 满足 } AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix},$$

或者等价地

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}, \text{ 其中 } B \text{ 为 } n-1 \text{ 阶实方阵.}$$

由 $\text{tr}(A) = 0$, 得 $\text{tr}(B) = 0$. 由归纳假设, 存在可逆实方阵 R , 使得 $R^{-1}BR$ 的对角元素都是 0. 令 $P = Q \text{diag}(1, R)$, 则 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0. 引理获证.

现在对于任意 n 阶实方阵 A , 令 $A_0 = \frac{\text{tr}(A)}{n}I$, 则 $\text{tr}(A - A_0) = 0$.

根据引理, 存在可逆实方阵 P , 使得 $B = P^{-1}(A - A_0)P$ 的对角元素都是 0. 设 $B = L + U$, L, U 分别是严格下、上三角方阵, 则 L, U 都是幂零方阵. 于是 $A = A_0 + PBP^{-1} = A_0 + A_1 + A_2$, 其中 A_0 是纯量方阵, $A_1 = PLP^{-1}$ 和 $A_2 = PUP^{-1}$ 都是幂零方阵. 证毕.

四、【参考解析】：(1) 由 $f^{(n)}(0) = 0 (\forall n \geq 0)$ 以及 Taylor 展式可得, 对于任何固定的 k , 成立 $f(x) = o(x^k)$, $x \rightarrow 0^+$. 特别 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2C}} = 0$.

另一方面, 由假设可得 $\forall x \in (0, 1]$,

$$(x^{-2C}f^2(x))' = 2x^{-2C-1}(xf(x)f'(x) - Cf^2(x)) \leq 0,$$

从而 $x^{-2C}f^2(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少. 因此

$$x^{-2C}f^2(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-2C}f^2(t) = 0, \quad \forall x \in (0, 1]$$

因此, 在 $[0, 1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$

(2) 取 $f(x) := \begin{cases} e^{-x^{1-\alpha}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则容易验证 $f(x)$ 满足假设条件, 但 $f(x) \neq 0$.

五、【参考证明】：记 $f(x) = c(1 - x^2)$ ($x \in [0, 1]$), 则 $f(x) \in [0, 1]$. 所以在题设条件下 $\{x_n\}$ 有界. 另

一方面, $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 内只有唯一解 $\bar{x} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c^2}}{2c}$.

进一步, 由于 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调递减, 因此 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上只有唯一解 \bar{x} , 所以题设条件下 $x_n \neq \bar{x} (n \geq 1)$.

【思路一】 设 $L = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}, \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, 则 $L = c(1 - \ell^2), \ell = c(1 - L^2)$. 从而 $L - \ell = c(L - \ell)(L + \ell)$.

当 $c \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 时，若 $\{x_n\}$ 发散，则 $L \neq \ell$ ，则 $L + \ell = \frac{1}{c}$ ，从而 $s = L, \ell$ 是满足方程 $cs^2 - s + \frac{1}{c} - c = 0$ 的两个不同的实根，所以 $1 - 4c\left(\frac{1}{c} - c\right) > 0$ ，即 $4c^2 > 3$ ，矛盾。因此 $\{x_n\}$ 收敛。

当 $c \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 时，若 $\{x_n\}$ 收敛，则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ 。由于 $f'(\bar{x}) = -2c\bar{x} = 1 - \sqrt{1 + 4c^2} < -1$ 。

因此存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - \bar{x}| < \delta$ 时，成立 $|f'(x)| > 1$ ，而对上述 $\delta > 0$ ，有 $N \geq 1$ ，使得当 $n \geq N$ 时， $|x_n - \bar{x}| < \delta$ 。于是由微分中值定理，可得

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq |x_n - \bar{x}|$$

结合 $x_n \neq \bar{x}$ 知 $\{x_n\}$ 不可能收敛到 \bar{x} 。因此， $\{x_n\}$ 发散。

【思路二】考虑 $g(x) = f(f(x))$ ，有

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) = 4c^3x(1 - x^2)$$

当 $c \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时，若 $x \in [0, 1]$ ，则 $0 \leq g'(x) \leq r_c \equiv \frac{8c^3\sqrt{3}}{9} < 1$ ，从而

$$|x_{n+2} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| \leq r |x_n - \bar{x}|$$

由此立即得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ 。

当 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，若 $x \in [0, 1]$ ，且 $x \neq \bar{x}$ ，则 $0 \leq g'(x) < 1$ ，从而

$$|x_{n+2} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| < |x_n - \bar{x}|$$

由此可得 $\{x_{2n} - \bar{x}\}$ 和 $\{x_{2n+1} - \bar{x}\}$ 收敛。设极限为 d 和 t 。由致密性定理，存在 $\{x_{2n}\}$ 的子列 $\{x_{2n_k}\}$ 收敛。设极限为 ξ ，此时 $\{g(x_{2n_k})\}$ 收敛于 $g(\xi)$ 。从而

$$|g(\xi) - \bar{x}| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n_k+2} - \bar{x}| = d = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{2n_k} - \bar{x}| = |\xi - \bar{x}|$$

因此 $\xi = \bar{x}$ ，即 $d = 0$ 。同理， $t = 0$ 。因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ 。

当 $c \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 时，若 $\{x_n\}$ 收敛，则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ 。由于

$$f'(\bar{x}) = -2c\bar{x} = 1 - \sqrt{1 + 4c^2} < -1$$

因此存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - \bar{x}| < \delta$ 时，成立 $|f'(x)| > 1$ ，而对上述 $\delta > 0$ ，有 $N \geq 1$ ，使得当 $n \geq N$ 时， $|x_n - \bar{x}| < \delta$ 。于是由微分中值定理，可得

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq |x_n - \bar{x}|$$

结合 $x_n \neq \bar{x}$ 知 $\{x_n\}$ 不可能收敛到 \bar{x} . 因此, $\{x_n\}$ 发散.

六、【参考解析】: 至多两个 2π 周期解. 例如 $a(x) \equiv b(x) \equiv 1, c(x) = 0$, 方程只有两个 2π 周期解 $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv -1$.

现设 $y_1(x), y_2(x)$ 是两个 2π 周期解, 则由存在唯一性定理 $y_1(x) \neq y_2(x), \forall x \in R$.

令 $y = (y_1(x) - y_2(x))z + y_2(x)$, 则 $\frac{dz}{dx} = a(x)(y_1(x) - y_2(x))z(z-1)$

若方程除了两个 2π 周期解 $z \equiv 0, z \equiv 1$ 外还有一个 2π 周期解 $z = z_1(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x a(x)(y_1(x) - y_2(x))x \\ &= \int_0^x \frac{dz_1(x)}{z_1(x)(z_1(x) - 1)} = \ln \left| \frac{z_1(x) - 1}{z_1(x)} \right| \Big|_0^x \end{aligned}$$

是 x 的 2π 周期函数. 由方程通解表达式得 $z(x) = \frac{1}{1 - Ce^{F(x)}}$ 得到方程有无穷多个解是 2π 周期的, 矛盾.



考研竞赛数学(ID:xwmath)
 一个专注于大学数学公共基础课
 资源分享的微信公众平台
 高等数学, 线性代数
 概率论与数理统计
 考研数学, 竞赛数学
 数学文化, 实验与建模
 大学学习、生活历程
因为专业,所以精彩