

2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学类) 参考答案

一、解答下列各题

1. 【参考解答】：【解法一】：

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \int_0^t x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

【解法二】：令 $f(x) = \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ ，则 $f'(x) = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 且 $f(2\pi) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 f(x) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x^2 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{【参考解答】：} I &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &\leq \left(\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/2} \\ \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx &\geq \frac{4}{\pi}, \text{ 取 } f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)} \text{ 即可.} \end{aligned}$$

3. 【参考解答】：由两方程定义的曲面在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切面分别为

$$\begin{aligned} F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) &= 0, \\ G_x(P_0)(x-x_0) + G_y(P_0)(y-y_0) + G_z(P_0)(z-z_0) &= 0. \end{aligned}$$

上述两切面的交线就是 Γ 在 P_0 点的切线，该切线在 xOy 面上的投影就是 S 过 (x_0, y_0) 的切线。消去 $z - z_0$ ，有

$$(F_x G_z - G_x F_z)_{P_0} (x - x_0) + (F_y G_z - G_y F_z)_{P_0} (y - y_0) = 0.$$

这里 $x - x_0$ 的系数 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$ ，故上式是一条直线的方程，就是所求的切线。

4. 【参考解答】：由关系式

$$AB = A - B + E \Rightarrow (A + E)(B - E) = 0.$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A + E) + \text{rank}(B - E) \leq 3$$

因为 $\text{rank}(A + B) = 3$ ，所以

$$\text{rank}(A + E) + \text{rank}(B - E) = 3.$$

又 $\text{rank}(A + E) \geq 2$, 考虑到 B 非单位, 所以 $\text{rank}(B - E) \geq 1$, 只有 $\text{rank}(A + E) = 2$.

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & a-9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13-2a \\ 0 & -1 & a-9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

从而 $a = \frac{13}{2}$.

二、【参考证明】: 由泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}h^4 \quad (1)$$

$$f''(x+\theta h) = f''(x) + f'''(x)\theta h + \frac{f^{(4)}(\eta)}{2}\theta^2 h^2 \quad (2)$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间, η 介于 x 与 $x+\theta h$ 之间, 由(1)(2)式和已知条件

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2$$

可得 $4(1-3\theta)f'''(x) = [6f^{(4)}(\eta)\theta^2 - f^{(4)}(\xi)]h$.

当 $\theta \neq \frac{1}{3}$ 时, 令 $h \rightarrow 0$ 得 $f'''(x) = 0$, 此时 f 是不超过二次的多项式;

当 $\theta = \frac{1}{3}$ 时, 有 $\frac{2}{3}f^{(4)}(\eta) = f^{(4)}(\xi)$. 令 $h \rightarrow 0$, 注意到 $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow x$, 有 $f^{(4)}(x) = 0$, 此时 f 是不超过三次多项式.

三、【参考证明】: 由题设可知 $f'(0) = -1$, 则所给方程可变形为

$(1+x)f'(x) + (1+x)f(x) - \int_0^x f(t)dt = 0$, 两端关于 x 求导并整理得

$$(1+x)f''(x) + (2+x)f'(x) = 0$$

这是一个可降阶的二阶微分方程, 可用分离变量法求得 $f'(x) = \frac{Ce^{-x}}{1+x}$.

由 $f'(0) = -1$ 得 $C = -1$, 即 $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+x} < 0$. 函数 $f(x)$ 单调递减. 而 $f(0) = 1$, 所以当 $x \geq 0$, $f(x) \leq 1$.

对 $f'(t) = -\frac{e^{-t}}{1+t} < 0$ 在 $[0, x]$ 上进行积分, 得

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t} dt \geq 1 - \int_0^x e^{-t} dt = e^{-x}.$$

四、【参考证明】: $I = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = -\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) d(1-x)$

对于固定 y , $(1-x)f(x, y)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0$, 由分部积分法可得

$$\int_0^1 f(x, y) \mathrm{d}(1-x) = -\int_0^1 (1-x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \mathrm{d}x$$

交换积分次序后可得 $I = \int_0^1 (1-x) \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \mathrm{d}y$. 因为 $f(x, 0) = 0$, 所以 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$; 从

而 $(1-y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0}^{y=1} = 0$. 再由分部积分法得

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \mathrm{d}(1-y) = \int_0^1 (1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \mathrm{d}y.$$

$$I = \int_0^1 (1-x) \mathrm{d}x \int_0^1 (1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \mathrm{d}y = \iint_D (1-x)(1-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leq A$, 且 $(1-x)(1-y)$ 在 D 上非负, 故

$$I \leq A \iint_D (1-x)(1-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{A}{4}.$$

五、【参考解答】: 由高斯公式, 有

$$I_t = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}V = \iiint_V (2xz + 2yz + x^2 + y^2) f'((x^2 + y^2)z) \mathrm{d}V$$

由对称性, 有 $\iiint_V (2xz + 2yz) f'((x^2 + y^2)z) \mathrm{d}V = 0$. 从而

$$\begin{aligned} I_t &= \iiint_V (x^2 + y^2) f'((x^2 + y^2)z) \mathrm{d}V = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^t f'(r^2 z) r^3 \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\int_0^t f'(r^2 z) r^3 \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{I_t}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2\pi \int_0^1 \left[\int_0^t f'(r^2 z) r^3 \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}z}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2\pi \int_0^1 f'(t^2 z) t^3 \mathrm{d}z}{4t^3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\pi}{2} \int_0^1 f'(t^2 z) \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} f'(0).$$

六、【参考证明】: (必要性) 设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵, 从而为对称矩阵, 即

$$(AB)^T = AB.$$

又 $A^T = A, B^T = B$, 所以 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 所以 $AB = BA$.

(充分性) 因为 $AB = BA$. 则 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 所以 AB 为实对称矩阵. 因为 A, B 是正定矩阵, 存在可逆矩阵 P, Q , 使得

$$A = P^T P, B = Q^T Q \Rightarrow AB = P^T P Q^T Q.$$

所以 $(P^T)^{-1}ABP^T = PQ^TQP^T = (QP^T)^T(QP^T)$, 即 $(P^T)^{-1}ABP^T$ 是正定矩阵. 所以矩阵 $(P^T)^{-1}ABP^T$ 的特征值全为正实数, 而 AB 相似于 $(P^T)^{-1}ABP^T$, 所以 AB 的特征值全为正实数, 所以 AB 为正定矩阵.

七、【参考证明】: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} = 0$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 , 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 所以存在 $\delta > 0$, 当 $1 - \delta < x < 1$ 时,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 N_2 , 使得当 $n > N_2$ 时, $\frac{1}{n} < \delta$, 从而 $1 - \delta < 1 - \frac{1}{n}$, 取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 则

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k - A \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^n a_k (1 - x^k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| \end{aligned}$$

取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 则有

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k (1 - x^k) \right| = \left| \sum_{k=0}^n a_k (1 - x) (1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^n |a_k| (1 - x) k = \frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| x^k < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \leq \frac{\varepsilon}{3n} \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3}$$

又因为 $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, 则 $\left| \sum_{k=0}^n a_k - A \right| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.



考研竞赛数学(ID:xwmath)
一个专注于大学数学公共基础课
资源分享的微信公众平台
高等数学, 线性代数
概率论与数理统计
考研数学, 竞赛数学
数学文化, 实验与建模
大学学习、生活历程
因为专业, 所以精彩



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)