2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛
(数学专业一、二年级）试卷

一、填空题(满分 20 分，每小题 5 分)

(1) 设实方阵 $H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}, n\geq 1$，其中 I 是与 H_n 同阶的单位方阵，则 $\operatorname{rank}\left(H_4\right)=$__________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$______.

(3)设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases}x=\pi\sin\left(t/2\right)\\ y=t-\sin t\\ z=\sin 2t\end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的一段，则第二型曲线积分

$\int_\Gamma e^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}\,x-\sin y\,\mathrm{d}\,y)+\cos z\,\mathrm{d}\,z=$__________.

(4)设二次型 $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\left(x_1,\ldots,x_n\right)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 的矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&\cdots&a&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$$

其中 $n>1, a\in R$，则 f 在正交变换下的标准形为__________.

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0,y_0,z_0)$，过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ. 证明: 存在平面 Π，使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$；同时求出平面 Π 的方程.

三、(本题 15 分) 设 A,B,C 均为 n 阶复方阵，且满足

$$AB-BA=C,\quad AC=CA,\quad BC=CB$$

(1) 证明：C 是幂零方阵;

(2) 证明：A,B,C 同时相似于上三角阵;

(3) 若 $C\neq 0$，求 n 的最小值.

四、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数，且 $f(0)f(1)\geq 0$.求证:

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}\, x \le 2\int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}\, x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}\, x$$

五、(本题 15 分) 设 $\alpha \in (1,2)$, $(1-x)^{\alpha}$ 的麦克劳林级数为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵，I 为单位阵. 设矩阵值函数 $G\left(x\right)$ 定义为

$$G(x) \equiv \left(g_{ij}(x)\right) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, \quad 0 \le x < 1$$

试证对于 $1 \le i, j \le n$，积分 $\int_0^1 g_{ij}(x)\, \mathrm{d}\, x$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

六、(本题 15 分) 有界连续函数 $g(t): \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 满足 $1 < g(t) < 2.x(t), t \in \mathrm{R}$ 是方程 $\ddot{x}(t) = g(t)x$ 的单调正解. 求证：存在常数 $C_2 > C_1 > 0$ 满足

$$C_1 x(t) < |\, \dot{x}(t)\, | < C_2 x(t), t \in \mathbb{R}.$$