

2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛 (数学专业一、二年级) 试卷

一、填空题(满分 20 分, 每小题 5 分)

(1) 设实方阵 $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & I \\ I & H_n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$, 其中 I 是与 H_n 同阶的单位方阵, 则 $\text{rank}(H_4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x = \pi \sin(t/2) \\ y = t - \sin t \\ z = \sin 2t \end{cases}$ 从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的一段, 则第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} e^{\sin x} (\cos x \cos y dx - \sin y dy) + \cos z dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 设二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $n > 1, a \in \mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下, 设有椭圆面

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

及 S 外部一点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ . 证明: 存在平面 Π , 使得交线 $S \cap \Sigma = S \cap \Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

三、(本题 15 分) 设 A, B, C 均为 n 阶复方阵, 且满足

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB$$

- (1) 证明: C 是幂零方阵;
- (2) 证明: A, B, C 同时相似于上三角阵;
- (3) 若 $C \neq 0$, 求 n 的最小值.

四、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geq 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

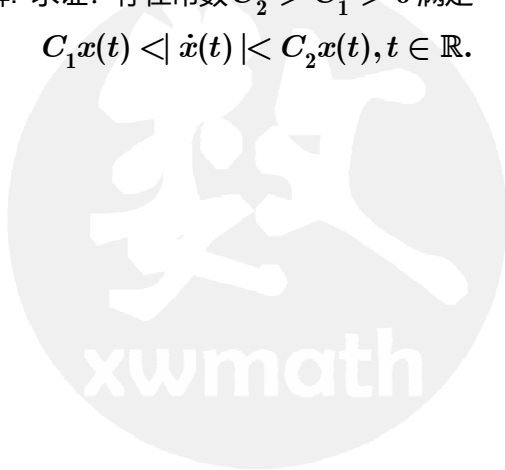
五、(本题 15 分) 设 $\alpha \in (1, 2)$, $(1-x)^\alpha$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵, I 为单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为

$$G(x) \equiv (g_{ij}(x)) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, \quad 0 \leq x < 1$$

试证对于 $1 \leq i, j \leq n$, 积分 $\int_0^1 g_{ij}(x) dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

六、(本题 15 分) 有界连续函数 $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $1 < g(t) < 2x(t), t \in \mathbb{R}$ 是方程 $\ddot{x}(t) = g(t)x$ 的单调正解. 求证: 存在常数 $C_2 > C_1 > 0$ 满足

$$C_1 x(t) < |\dot{x}(t)| < C_2 x(t), t \in \mathbb{R}.$$



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)