

2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类, 一、二年级) 试题

一、填空题 (本题满分 20 分, 每小题 5 分)

(1) 设 A 为实对称方阵, $(1, 0, 1)$ 和 $(1, 2, 0)$ 构成共行向量的一个极大无关组, 则有 $A =$ ____

(2) 设 $y(x) \in C^1[0, 1]$ 满足 $y(x) \in [0, \pi]$ 及 $x = \begin{cases} \frac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0, \pi] \\ 1, & y = 0 \end{cases}$, 则 $y'(0) =$ ____

(3) 设 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, 则 $\int_0^{+\infty} xf(x) dx =$ ____

(4) 设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t , 则 t 最多为 ____

二、(本题 15 分) 给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1, 0, 0)$ 及 $(0, 1, 1)$ 两点. 动直线 l 分别与 l_1, l_2 共面, 且与平面 $z = 0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程;

(2) 确定 S 是什么曲面.

三、(满分 15 分) 证明: 任意 n 阶方阵 A 可以分解成 $A = A_0 + A_1 + A_2$, 其中 $A_0 = aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

四、(满分 20 分) 设 $\alpha > 0, f(x) \in C^1[0, 1]$, 且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C > 0$ 使得 $|x^\alpha f'(x)| \leq C |f(x)| (\forall x \in [0, 1])$. 证明:

(1) 若 $\alpha = 1$, 则 $[0, 1]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 若 $\alpha > 1$, 举例说明在 $[0, 1]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 可以不成立.

五、(满分 15 分) 设 $c \in (0, 1), x_1 \in (0, 1)$ 且 $x_1 \neq c(1 - x_1^2), x_{n+1} = c(1 - x_n^2) (n \geq 1)$.

证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $c \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

六、(满分 15 分) 已知 $a(x), b(x), c(x) \in C(R)$, 方程 $\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ 只

有有限个 2π 周期解. 求它的 2π 周期解个数的最大值.