

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 参考答案

一、(1) 【参考证明】: l_1 上有点 $r_1 = (4, 3, 8)$, 方向向量为 $v_1 = (1, -2, 1)$;
 l_2 上有点 $r_2 = (-1, -1, -1)$, 方向向量为 $v_2 = (7, -6, 1)$. 又

$$(r_1 - r_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 l_1 和 l_2 异面.

(2) 【参考解答】: l_1 上任一点 $P_1 = r_1 + t_1 v_1$ 与 l_2 上的任一点 $P_2 = r_2 + t_2 v_2$ 的连线的方向向量为

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = r_2 - r_1 + t_2 v_2 - t_1 v_1 = (-5 + 7t_2 - t_1, -4 - 6t_2 + 2t_1, -9 + t_2 - t_1).$$

公垂线的方向向量为

$$v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (4, 6, 8).$$

由于 $\overrightarrow{P_1 P_2} \perp v$, 所以 $(-5 + 7t_2 - t_1) : (-4 - 6t_2 + 2t_1) : (-9 + t_2 - t_1) = 4 : 6 : 8$,
得 $t_1 = -1, t_2 = 0$, 故 $r_2 + 0v_2 = (-1, -1, -1)$ 在公垂线上, 从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+1}{8}.$$

(3) 【参考解答】: $P_1 = r_1 + t_1 v_1, P_2 = r_2 + t_2 v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(3 + t_1 + 7t_2, 2 - 2t_1 - 6t_2, 7 + t_1 + t_2).$$

因此中点的轨迹为一个平面, 平面的法向量为 $v = v_1 \times v_2 = (4, 6, 8)$. 又 $\frac{1}{2}(3, 2, 7)$ 在平面上, 故轨迹的方程为 $4x + 6y + 8z - 40 = 0$.

二、【参考证明】: 1) $f(0)^n \leq \int_0^1 (f(x))^n dx \leq f(1)^n$, 由连续函数的介值性质得到 x_n 的存在性. 由于 f 是严格单调函数, 所以 x_n 是唯一的.

2) 对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 由于 f 的非负性和单调性,

$$(f(x_n))^n \geq \int_{1-\varepsilon}^1 (f(x))^n dx = \varepsilon (f(1-\varepsilon))^n,$$

故 $f(x_n) \geq \sqrt[n]{\varepsilon} f(1-\varepsilon)$, 从而 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(1-\varepsilon)$.

由 f 的单调性, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 1-\varepsilon$. 由 ε 的任意性, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

三、【参考证明】: 2) \Rightarrow 1).

考虑方程 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. 将 a_1, \dots, a_n 分别代入, 得

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \cdots + \lambda_n f_n(a_1) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1 f_1(a_n) + \cdots + \lambda_n f_n(a_n) = 0. \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为 $(f_i(a_j))^T$, 因此 $\det[f_i(a_j)] \neq 0$ 直接知道

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

1) \Rightarrow 2). 用归纳法. 首先, $n = 1$ 时显然成立;

其次, 设 $n = k$ 时结论成立, 则 $n = k + 1$ 时, 由 f_1, \dots, f_{k+1} 线性无关知, f_1, \dots, f_k 线性无关. 因此 $\exists a_1, \dots, a_k \in [0, 1]$ 使得 $\det[f_i(a_j)]_{k \times k} \neq 0$. 观察函数

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x) \\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix}$$

按最后一列展开得 $F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ 均为常量. 注意到 $\lambda_{k+1} \neq 0$, 由 f_1, \dots, f_{k+1} 线性无关知 $F(x)$ 不恒为 0, 从而 $\exists a_{k+1} \in [0, 1]$ 使得 $F(a_{k+1}) \neq 0$. 亦即 $a_1, \dots, a_{k+1} \in [0, 1]$, $\det[f_i(a_j)] \neq 0$. 证毕.

四、【参考证明】: 由条件知 f, f' 是单调递增的正函数, 因此 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ 都存在. 根据微分中值定理, 对任意的 x , 存在 $\theta_x \in (0, 1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(x + \theta_x) > f'(x) > 0.$$

上式左边当 $x \rightarrow -\infty$ 时极限为 0, 因而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$.

$$\text{设 } c = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \text{ 则 } c > b > 0, \text{ 且 } \frac{a}{b-c} = -c.$$

于是根据条件有

$$f''(x) - cf'(x) \leq (b-c)f'(x) + af(x) = (b-c)(f'(x) - cf(x)).$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x) - cf(x))$ 是单调递减的. 注意到该函数当 $x \rightarrow -\infty$ 时极限为 0, 因此 $f'(x) - cf(x) \leq 0$, 即 $f'(x) \leq cf(x)$.

常数 c 是最佳的, 这是因为对函数 $f(x) = e^{cx}$ 有 $f''(x) = af(x) + bf'(x)$.

五、【参考证明】: (1) 令 $H = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则所求的方程变为

$$X^n + X^l = 2I + 2H + 3H^2 + \cdots + mH^{m-1}.$$

(2) 考察形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩阵 X , 则有

$$X = I + a_1 H + a_2 H^2 + \cdots + a_m H^{m-1}.$$

$$\begin{aligned} X^n &= \left(I + a_1 H + a_2 H^2 + \cdots + a_m H^{m-1} \right)^n \\ &= I + (na_1)H + (na_2 + f_1(a_1))H^2 + \cdots + (na_m + f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}, \end{aligned}$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 a_1 确定, \cdots , $f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})$ 由 a_1, \cdots, a_{m-1} 确定.

类似地, 有

$$X^l = I + (la_1)H + (la_2 + g_1(a_1))H^2 + \cdots + (la_m + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}.$$

(3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} (n+l)a_1 = 2, \\ (n+l)a_2 + (f_1(a_1) + g_1(a_1)) = 3, \\ \cdots \cdots \\ (n+l)a_m + (f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}) + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解. 命题得证.

六、【参考证明】: 由条件可知从某项开始 $\{a_n\}$ 单调递减. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$.

若 $a > 0$, 则当 n 充分大时, $\frac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) a_{n+1} = \frac{\lambda a}{2} > 0$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 也发散. 但此级数显然收敛到 $a_1 - a$. 这是矛盾!

所以应有 $a = 0$.

令 $b_n = n^k a_n$, 则有

$$n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \left[n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k - 1 \right) \right]$$

因为 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k - 1 \sim \frac{k}{n} (n \rightarrow \infty)$. 所以由上式及条件可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lambda (n \rightarrow \infty).$$

因此由开始所证, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$.