

2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛

(数学三、四年级) 试卷

(前 4 大题为必答题, 从 5-10 大题中任选三题)

一、填空题:

(1) 设 $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 的 4 个根为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 则

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 设 a 为实数, 关于 x 的方程 $3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a = 0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足_____.

(3) 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{ax \, dy \, dz + (z + a)^2 \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ($a > 0$ 为常数), 其中

$S: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 取上侧, 则 $I = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 记两个特征值为 1, 2 的 2 阶实对称矩阵的全体为 Γ . $\forall A \in \Gamma, a_{12}$ 表示 A 的 $(2, 1)$ 位置元素, 则集合 $\bigcup_{A \in \Gamma} \{a_{21}\}$ 的最小元等于_____.

第二题: 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于交线 C . 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

第三题: 证明题: 设 n 阶方阵 A, B 满足: $\text{秩}(ABA) = \text{秩}(B)$. 证明: AB 与 BA 相似.

第四题: 对 \mathbb{R} 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi \in \mathcal{S}$, 如果 $\forall m, k \geq 0$ 成立

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(k)}(x)| < +\infty. \text{ 若 } f \in \mathcal{S}, \text{ 可定义 } \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i xy} \, dy \, (\forall x \in \mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f} \in \mathcal{S}$, 且 $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi i xy} \, dy \, (\forall x \in \mathbb{R}).$

第五题: (抽象代数) 设 $(F, +, \cdot)$ 是特征为 p ($p \neq 0$) 的域, 1 和 0 分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F, +)$ 到其乘法半群 (F, \cdot) 的同态, 即 $\forall x, y \in F$ 有 $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$. 证明: φ 要么将 F 的所有元映照为 0, 要么将 F 的所有元映照为 1.

第六题: (实变函数) (1) 设 E 是三分 Cantor 集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0, 1]$ 上的有界变差函数. (2) 设 $E \subset [0, 1]$, 证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界变差的充要条件是 E 的边界点集是有限集.

第七题: (微分几何) 设 S 为三维欧氏空间中一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上. 证明: S 是平面的一部分.

第八题: (数值分析) 考虑求解一阶常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的 Runge-Kutta 法。

(1) 确定下列三级三阶 Runge-Kutta 法中的所有特定参数化:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3),$$

其中 $K_1 = f(x_n, y_n)$, $K_2 = f(x_n + ah, y_n + b_{21}hK_1)$,

$$K_3 = f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)$$

(2) 讨论上述 Runge-Kutta 法格式的稳定性。

第九题: (复变函数) 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析, 并且 $|f(z)| \leq M (M > 0)$, M

为常数. 证明: $|f'(0)| \leq M - \frac{|f(0)|^2}{M}$.

第十题: (概率统计) 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且

$$P(X_n = 0) = P(X_n = a) = \frac{1}{2}$$

其中常数 $a > 0$. 记 $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$, 求 Y_n 的特征函数, 并证明其分布收敛于区间 $[0, a]$ 上的均匀分布。