

2016 年第七届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类一、二年级) 试卷

一、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1, 则 $\sum_{A \in \Gamma} |A| =$ _____.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则 p 取值范围_____.

(3) 设 $D: x^2 + 2y^2 \leq 2x + 4y$, 则积分 $I = \iint_D (x + y) \, dx \, dy =$ _____.

(4) 若实向量 $X = (a, b, c)$ 的三个分量 a, b, c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$, 则 $X =$ _____或_____或_____.

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2 + 2y^2 = 1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集为一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

三、(本题 15 分) 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\operatorname{tr}((AB)^2) \leq \operatorname{tr}(A^2 B^2)$.

四、(本题 20 分) 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 B_1, B_2, \dots, B_n .

令 P_A, P_B 分别表示多边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 与 B_1, B_2, \dots, B_n 的周长. 求证: $P_A^{\frac{1}{3}} P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

五、(本题 15 分) 设 $a(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $a(x) > 0$. 已知

$$\int_0^{\infty} a(x) \, dx = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{a(x)} = 0, \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

六、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x) = 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) \, dt + \frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$.