湖南农业大学数学竞赛 (2019 年) 解析

19 级统计一班

更新：2020 年 8 月 27 日

目录

1 试题

1.1 填空题

1. $\iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ _____, 其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的区域
2. 设 $a_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}(a>0)$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ _____
3. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)\mathrm{d}t =$ _____
4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=2$ 发散，则该幂级数收敛域为 _____

5. 直线 $L:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 ______

1.2 计算题

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数
2. 计算 $I=\oint\limits_C(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$, 其中 a,b 为正整数，C 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧
3. 设 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\right\}$, $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint_D xy\left[1+x^2+y^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
4. 设 $y(x)(x\geq 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过 $y=y(x)$ 上任意点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述二直线与 x 轴所围三角形面积记为 S_1, 区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1-S_2=1$, 求 $y(x)$

1.3 证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，单调递增。求证：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $f_y'\neq 0$, 证明：对任意常数 c，$f(x,y)=c$ 为一条直线的充分必要条件是 $(f_y)^2f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(f_x)^2=0$
3. 设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),(n=1,2,\cdots)$, 证明
   - $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在
   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛

2 试题解析 pdf 全文获取

2.1 本试题参考解析 pdf 文档获取：请在公众号：追梦日记 2020 的后台回复 008

2 试题解析

2.1 填空题

1. $\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______, 其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的区域 (全国第一届初赛 (非数) 题 (1))

解. (法一) 令 $\sqrt{1-x-y}=u, 1+\frac{y}{x}=v$, 解得 $x=\frac{1-u^2}{v}, y=\frac{(1-u^2)(v-1)}{v}$ 且 $D_{uv}=\{(u,v)|0<v\leq 1, 1\leq v<+\infty\}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{2u}{v} & -\frac{1-u^2}{v^2}\\ -\frac{2u(v-1)}{v} & \frac{1-u^2}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{2u(u^2-1)}{v^2}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{2u(1-u^2)}{v^2}, \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}=\frac{(1-u^2)\ln v}{u}$$

所以由二重积分换元法的积分变换公式，原积分也就等于

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\iint\limits_{D_{uv}}(1-u^2)^2\cdot\frac{\ln v}{v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=2\int_0^1(1-u^2)^2\mathrm{d}u\int_1^{+\infty}\frac{\ln v}{v^2}\mathrm{d}v=\frac{16}{15}\end{aligned}$$

(法二) 设 $u=x+y, v=\frac{y}{x}$, 其雅可比行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2}\\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^2}$$

区域 D 变为 D', 即

图 1: **本试题参考解析 pdf 文档获取**：请在公众号：追梦日记 2020 的后台回复 008