2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛
(数学类一、二年级) 参考答案

一、填空题

(1) $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.　(2) $\frac{3}{4}$　(3) 8π

(4) $(n-1)!$，【参考解答】:

秩 $A=n-1\Rightarrow$ 秩 $A^*=1$ 且 $Ax=0$ 的解空间维数为 1.

A 行和$=0\Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=0\Rightarrow Ax=0$ 的一组基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

注意到 $AA^*=0$，从而 A^* 的每一列均形如 $a\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，又由于 A 为实对称矩阵，故 A^* 也为实对称矩阵，故

$A^*=\begin{pmatrix}a&\cdots&a\\\vdots&&\vdots\\a&\cdots&a\end{pmatrix}$.

考虑多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n)$，其一次项系数为 $(-1)^{n-1}n!$.

另一方面，由 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 又知，其一次项系数为 $(-1)^{n-1}(A_{11}+\cdots+A_{nn})$，结果为 $a=(n-1)!$.

二、【参考解答】：设 l 为 z 轴，以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系，可以设 $P:(p,0,0)$，l 的参数方程为：$l:x=0,y=0,z=t$.

设球面 C 的球心为 (x_0,y_0,z_0)，由于 C 过点 P，则

$$C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(p-x_0)^2+y_0{}^2+z_0{}^2.$$

求 l 与 C 的交点：将 l 的参数方程代入 C，有

$$x_0{}^2+y_0{}^2+(t-z_0)^2=(p-x_0)^2+y_0{}^2+z_0{}^2.$$

即
$$t^2-2z_0t+(2px_0-p^2)=0.\qquad(1)$$

由此可得两个解为 $t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$. 故弦长 $a=|t_1-t_2|=2\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$，从而

$$z_0^2-2px_0+p^2-\frac{a^2}{4}=0.\qquad(2)$$

反之，如果球面 C 的球心满足(2)，如果 C 过点 P，此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta=4z_0^2-4\left(2px_0-p^2\right)=a^2\geq 0,$$

方程有两个实根$t_{1,2}=z_0\pm\frac{a}{2}$. 从而$C$和$l$相交，而且截出来弦长为$a$. 所以所求轨迹方程为

$$z^2-2px\ +p^2-\frac{a^2}{4}=0.$$

三、【参考证明】: 对$A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$，且特征方程为

$$0=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^2-2\operatorname{Re}z_1\lambda+\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$$
$$\Delta=4\left(\operatorname{Re}z_1\right)^2-4\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)\leq 0$$

情形 1: $\Delta=0$. 此时，$z_2=0,z_1=\operatorname{Re}z_1$，从而$A=\begin{pmatrix} \operatorname{Re}z_1 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}z_1 \end{pmatrix}=J_A\in\Gamma$.

取$P=I$即有$P^{-1}AP=J_A$.

情形 2: $\Delta<0$. 此时A的特征值为

$$\lambda_1=\operatorname{Re}z_1+i\sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left(\operatorname{Re}z_1\right)^2}$$
$$\lambda_2=\operatorname{Re}z_1-i\sqrt{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left(\operatorname{Re}z_1\right)^2}$$
$$\lambda_2=\bar{\lambda}_1,\lambda_2\neq\lambda_1$$

从而$J_A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\in\Gamma$.

现取A关于λ_1的一个非零特征向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} \overline{z_1x}+\overline{z_2y}=\overline{\lambda_1\bar{x}} \\ z_2\bar{x}-z_1\bar{y}=-\lambda_1\bar{y} \end{cases}$$

直接检验知$A\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}=\bar{\lambda}_1\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$为$A$关于$\bar{\lambda}_1$的一个非零特征向量. 令$P=\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$，则有$P$可逆，且$P\in\Gamma,P^{-1}AP=J_A$.

四、【参考证明】: α的最大值为$\frac{1}{2}$.

若$\alpha>\frac{1}{2}$，取$x_n=\left(n\pi\right)^{-1},y_n=\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-1}$，则

$$\frac{\left|f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right|}{\left|x_n-y_n\right|^\alpha}=2^\alpha\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1}\to\infty.$$

下面证明$\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|}{\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}}<+\infty$.

由于$f\left(x\right)$为偶函数，不妨设$0\leq x<y$，令

$$z=\sup\left\{u\leq y\mid f\left(u\right)=f\left(x\right)\right\}$$

则$z^{-1}\leq y^{-1}+2\pi$.

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|=\left|f\left(z\right)-f\left(y\right)\right|\leq\int_z^y\left|f'\left(t\right)\right|\mathrm{d}\,t\leq\left|y-z\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y f'\left(t\right)^2\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y\left(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)^2\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{s=\frac{1}{t}}}\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{z^{-1}}\left(\frac{\sin s}{s}-\cos s\right)^2\mathrm{d}\,s\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}\,s\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\pi}\left|x-y\right|^{\frac{1}{2}}.$$

五、【参考证明】：由$x''\left(t\right)\leq-a\left(t\right)f\left(x\left(t\right)\right)<0$. 故$x\left(t\right)$是上凸的. 故$\lim\limits_{t\to\infty}x'\left(t\right)$存在或为$-\infty$.
若$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,x\left(t\right)=+\infty$，则$x'\left(t\right)>0$，$\lim\limits_{t\to\infty}x\left(t\right)=+\infty$. 故

$$x'\left(t\right)f\left(x\left(t\right)\right)\leq a\left(t\right)x'\left(t\right)f\left(x\left(t\right)\right)\leq-x'\left(t\right)x''\left(t\right),$$

积分得

$$\int_0^t f\left(x\left(s\right)\right)\mathrm{d}\,x\left(s\right)\leq\frac{x'\left(0\right)^2-x'\left(t\right)^2}{2}\leq\frac{x'\left(0\right)^2}{2}$$

令$t\to\infty$得$\int_0^{+\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\leq\dfrac{x'\left(0\right)^2}{2}$矛盾.

六、【参考证明】：分部积分可得

$$\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}x^2f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}\,x$$

因此，根据牛顿-莱布尼兹公式，得

$$6\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^1\left(1-3x^2\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}\,x$$

再根据 Cauchy 积分不等式，得

$$36\left(\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right)^2\leq\int_0^1\left(1-3x^2\right)^2\mathrm{d}\,x\int_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x=\frac{4}{5}\int_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x$$

由此可得$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$ ，等号成立当且仅当$f'(x)=A\left(1-3x^2\right)$，积分并由$f(0)=f(1)=0$，即得$f(x)=A\left(x-x^3\right)$.

考研竞赛数学(ID:xwmath)
一个专注于大学数学公共基础课
资源分享的微信公众平台
高等数学，线性代数
概率论与数理统计
考研数学，竞赛数学
数学文化,实验与建模
大学学习、生活历程
因为专业,所以精彩

xwmath
微信公众号:
考研竞赛数学(xwmath)