历年 CMC 与名校数学考研积分不等式真题解析

A.1 第十届 CMC

例题 1 (非数类初赛). 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$，证明：

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$$

证明. 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

再由条件 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$，则

$$\frac{[f(x)-1][f(x)-3]}{f(x)} \leqslant 0 \Rightarrow f(x) + \frac{3}{f(x)} \leqslant 4$$

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4$$

即可得

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$$

□

例题 2 (非数类初赛). 证明：对于连续函数 $f(x) > 0$，有

$$\ln \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令 $g(x) = \ln x$，则

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

即 $g(x)$ 为上凸函数，可由琴声不等式可得

$$\ln \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

或利用定积分定义，将 $[0, 1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x = \frac{1}{n}$，由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，即

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k), \quad x_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$$

由“算术平均数 $\geqslant$ 几何平均数”得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

根据 $\ln x$ 的连续性，两边取极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \exp \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

即有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

然后两边取对数即证. □

A.2　第九届 CMC

例题 3 (非数类初赛). 设 $f(x)>0$，$f(x)$ 连续，且对任意实数 t 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

试证：对于 $\forall a$，$b(a<b)$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+1$$

证明. 由于对 $\forall a$，$b(a<b)$ 有

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$$

因此

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant b-a$$

又有

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\left(\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t + \int_x^b \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t = 2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}$$

即有

$$\int_a^b f(x)\left(2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}\right)\mathrm{d}x \leqslant b-a \tag{A.1}$$

注意到

$$\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{-|a-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{x-b}\mathrm{d}x \leqslant 1$$

将其代入式 (A.1) 即证.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+1$$

□

A.3　第八届 CMC

例题 4 (非数类初赛). 设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 可导，且 $f(0)=0$，当 $x\in(0,\ 1)$，$0<f'(x)<1$，试证：当 $a\in(0,\ 1)$

有

$$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2 > \int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明. 设

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

则有 $F(0)=0$ 且要证明 $F'(x)>0$，可设

$$g(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)g(x)$$

由于 $f(0)=0$，$f'(x)>0$，故 $f(x)>0$，从而只需证明 $g(x)>0$，$x>0$，又有 $g(0)=0$，则只需证 $g'(x)>0$，$0<x<a$，而

$$g'(x) = 2f(x)\left[1-f'(x)\right] > 0$$

即证. □

例题 5 (非数类决赛). 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续的周期为 1 的周期函数，且满足

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

证明：当 $x\in[0,13]$ 时，则有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant 11$$

并给出取等号的条件.

证明. 由条件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

利用离散柯西不等式即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立，则有

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x} &= 1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\\ &\leqslant \sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)} = 11\end{aligned}$$

且等号成立的充要条件是

$$x = \frac{1}{2}(x+27) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)} \Rightarrow x = 9$$

即证

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant 11$$

当 $x=9$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^3 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^6 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

根据周期性以及 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ 有

$$\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^6 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 11\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 11$$

所以取等的充要条件是 $x = 9$. □

例题 6 (数学类初赛). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 区间上的单调增函数，满足

$$0 \leqslant f(x), \ g(x) \leqslant 1, \quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

试证：

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$$

证明. 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可用单调阶梯函数逼近，故可不妨设它们都是单调增的阶梯函数，令

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

则对 $\forall x, \ y \in [0, 1]$ 有 $|h(x) - h(y)| \leqslant 1$，而事实上有：

对 $x \geqslant y$ 有

$$\begin{aligned}-1 \leqslant -(g(x) - g(y)) \leqslant h(x) - h(y) &= f(x) - f(y) - (g(x) - g(y)) \\ &\leqslant f(x) - f(y) \leqslant 1\end{aligned}$$

对 $x < y$ 有

$$-1 \leqslant f(x) - f(y) \leqslant h(x) - h(y) \leqslant g(y) - g(x) \leqslant 1$$

记

$$w_1 = \{x \in [0, 1] | f(x) \geqslant g(x)\}, \quad w_2 = \{x \in [0, 1] | f(x) < g(x)\}$$

则 w_1 与 w_2 分别为有限个互不相交区间的并，且由 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，有

$$\int_{w_1} h(x)\mathrm{d}x = -\int_{w_2} h(x)\mathrm{d}x$$

记 $|w_i| (i = 1, 2)$ 表示 w_i 所含的那些区间的长度之和，则

$$w_1 + w_2 = 1$$

于是

$$\begin{aligned}2\int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x &= 2\left(\int_{w_1} h(x)\mathrm{d}x - \int_{w_2} h(x)\mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant \left(\frac{|w_2|}{|w_1|}\int_{w_1} h(x)\mathrm{d}x + \frac{|w_1|}{|w_2|}\int_{w_2} (-h(x))\mathrm{d}x\right) + \int_{w_1} h(x)\mathrm{d}x - \int_{w_2} h(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{|w_1|}\int_{w_1} h(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{|w_2|}\int_{w_2} (-h(x))\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sup_{w_1} h(x) + \sup_{w_2} (-h(x)) \leqslant 1\end{aligned}$$

注上式中最后一个不等式来自有 $|h(x) - h(y)| \leqslant 1$. □

A.4 第七届 CMC

例题 7 (非数类初赛). 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$$

试证：

(1) $\exists x_0 \in [0, 1]$ 使得 $|f(x_0)| > 4$;

(2) $\exists x_1 \in [0, 1]$ 使得 $|f(x_1)| = 4$.

证明. (1) 若 $\forall x \in [0, 1]$，$|f(x)| > 4$，则

$$1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \mathrm{d}x = 1$$

因此

$$\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)|\mathrm{d}x = 1$$

而 $4\displaystyle\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \mathrm{d}x = 1$，即

$$\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| (4 - |f(x)|)\mathrm{d}x = 0$$

所以对 $\forall x \in [0, 1]$，$|f(x)| = 4$，由 $f(x)$ 的连续性 $f(x) \equiv 4$ 或 $f(x) \equiv -4$，这与条件 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾，故 $\exists x_0 \in [0, 1]$ 使得 $|f(x_0)| > 4$;

(2) 先证 $\exists x_2 \in [0, 1]$ 使得 $|f(x_2)| < 4$；若不然，对 $\forall x \in [0, 1]$ 有 $|f(x)| \geqslant 4$ 成立，则 $f(x) \geqslant 4$ 恒成立，或者 $f(x) \leqslant -4$ 恒成立，与 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾，再由 $f(x)$ 的连续性及 (1) 的结果，利用介值定理 $\exists x_1 \in [0, 1]$ 使得 $|f(x_1)| = 4$.

□

A.5 第六届 CMC

例题 8 (数学类初赛). 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，试证：

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x - x^3)$ 时成立，其中 A 是常数.

证明. 考虑到

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

即有

$$6\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - 3x^2\right) f'(x)\mathrm{d}x$$

对上面等式两边平方再柯西不等式

$$\begin{aligned}36\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 \left(1 - 3x^2\right) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 \left(1 - 3x^2\right)^2 \mathrm{d}x \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{5}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $f'(x)=A(x-x^3)$，即并由 $f(0)=f(1)=0$，即

$$f(x)=Ax(1-x)(1+x)=A\left(x-x^3\right)$$

□

A.6 第五届 CMC

例题 9 (非数类初赛). 设 $|f(x)|\leqslant\pi$，$f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$，试证：

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$$

证明. 由条件 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$，且根据 $f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，从而反函数 $g(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上单调递增可微，可设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，g 是 f 的反函数，即有

$$0<g'(y)=\frac{1}{f'(x)}\leqslant\frac{1}{m}$$

又由题设 $|f(x)|\leqslant\pi$，则有 $-\pi\leqslant A<B\leqslant\pi$，即

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right| \xlongequal{x=g(y)} \left|\int_A^B g'(y)\sin y\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin y}{m}\mathrm{d}y=\frac{2}{m}$$

□

点评

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减，$f'(x)$ 存在，且 $[f(a),f(b))]\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且 $|f'(x)|\geqslant m>0$，试证：

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$$

例题 10 (数学类初赛). 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数，f 在 $[0,1]$ 上单调递增，又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数，即对任意的 x，$y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y)$$

求证：

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x$$

证明. 由于 f 为偶函数，即有

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)g(-x)\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1 f(x)(g(x)+g(-x))\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 f(x)(g(x)+g(-x))\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{A.2}$$

因为 $g(x)$ 为凸函数，即函数 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0，1]$ 递增，故对任意 $x，y\in[0，1]$ 有

$$(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\geqslant 0$$

因而

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}2\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x&\geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1 h(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合 (A.2) 即得结论

□

例题 11 (数学类决赛). 设 $f(x)$ 是 $[0，+\infty)$ 上非负可导函数，$f(0)=0$，$f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$，若 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证：对 $\forall\alpha>1$，$\int_0^{+\infty}f^\alpha(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_0^{+\infty}f^\alpha(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

证明. 令

$$g(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^\beta-\int_0^t f^\alpha(x)\mathrm{d}x$$

则 $g(t)$ 可导，且

$$g'(t)=f(t)\left[\beta\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta-1}-f^{\alpha-1}(t)\right]$$

令

$$h(t)=\beta^{\frac{1}{\beta-1}}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-f^2(t)$$

则有

$$h'(t)=f(t)\left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}}-2f'(t)\right]$$

由于 $\beta>1$，$f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$，即 $h'(t)\geqslant 0$，也就说明 $h(t)$ 单调递增，从而 $h(0)=0$，得 $h(t)\geqslant 0$，因此 $g'(t)\geqslant 0$，再从 $g(0)=0$，可得 $g(t)\geqslant 0$，即

$$\int_0^t f^\alpha(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^t f(x)\right)^\beta$$

令 $t\to+\infty$ 即证.

□

A.7　第四届 CMC

例题 12 (非数类初赛). 试求最小实数 C，使得满足

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$$

的连续函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x \leqslant C$$

证明. 由于

$$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(t)|2t\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = 2$$

取 $f_n(x) = (n+1)x^n$，则有

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$$

又有

$$\int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \to 2\,(n\to\infty)$$

因此最小实数为 $C = 2$. □

例题 13 (数学类初赛). 设 $f \in C^1[0,\ +\infty)$，$f(0) > 0$，$f'(x) \geqslant 0$，对 $\forall x \in [0,\ +\infty)$，已知

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x < +\infty$$

求证：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x < +\infty$$

证明. 由于 $f'(x) \geqslant 0$，即

$$0 \leqslant \int_0^N \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x - \int_0^N \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x = \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\mathrm{d}x$$

取极限

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\mathrm{d}x \leqslant \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2}\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_0^N \leqslant \frac{1}{f(0)}$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

□

A.8 第三届 CMC

例题 14 (数学类初赛). 设 f_1，f_2，$\cdots$，f_n 为 $[0,\ 1]$ 上的非负连续函数，证明：存在 $\xi \in [0,\ 1]$，有

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$$

证明. 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x,\quad \forall k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

当有某个 $a_k = 0$ 时，则结论是成立的.

设 $a_k>0(k=1,2,\ldots,n)$，由平均值不等式则有

$$\int_0^1\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k(x)}{a_k}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x)}{a_k}\mathrm{d}x=1$$

再由积分中值定理，存在 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k(\xi)}{a_k}}\leqslant 1$$

结论即证. □

A.9　第二届 CMC

例题 15 (数学类初赛). 已知 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数，满足

$$\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=+\infty$$

若

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\mathrm{d}t=a<+\infty$$

其中 φ^{-1} 表示为 φ 的反函数，试证：

$$\int_0^{+\infty}[\varphi(t)]^2\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\left[\varphi^{-1}(t)\right]^2\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}$$

证明. 令

$$P=\int_p^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t,\ Q=\int_q^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\mathrm{d}t,\ I=a-P-Q$$

其中 $a=pq$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2\mathrm{d}t&\geqslant\int_0^{q}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{q}\left(\int_0^{q}\varphi^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)^2\\&=\frac{1}{q}(a-Q)^2=\frac{1}{q}(I+P)^2\\\int_0^{+\infty}(\varphi(t))^2\mathrm{d}t&\geqslant\int_0^{p}(\varphi(t))^2\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{p}\left(\int_0^{p}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)^2\\&=\frac{1}{p}(a-P)^2=\frac{1}{p}(I+Q)^2\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(\varphi(t))^2\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2\mathrm{d}t&\geqslant\frac{1}{p}(I+Q)^2+\frac{1}{q}(I+P)^2\\&\geqslant\frac{2}{\sqrt{pq}}(I+P)(I+Q)=\frac{2}{\sqrt{a}}(QP+aI)\end{aligned}$$

易知可取适当的 p,q 满足 $P=Q=\dfrac{a-I}{2}$ 有

$$\int_0^{+\infty}(\varphi(t))^2\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{a}\left(\frac{(a-I)^2}{4}I+aI\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(a+I)^2}{4}\geqslant\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}$$

证毕. □

例题 16 (数学类决赛). 设 $0<f(x)<1$，若无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证：

$$\int_0^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明. 令 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=a$，则 $a\in(0,\ +\infty)$，根据题设条件可知 $0<f(x)<1$，得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x>\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x+a\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x+a\left(a-\int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x+a\int_0^{a}(1-f(x))\mathrm{d}x\\&>\int_0^{a} xf(x)\mathrm{d}x+\int_0^{a} x(1-f(x))\mathrm{d}x\\&=\int_0^{a} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

即证

$$\int_0^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

□

A.10 名校数学考研真题应用

习 题 A.10

1. (2020. 北京大学) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续单调增加，且 $f(x)\geqslant 0$，记

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明：$s\geqslant\frac{1}{2}$，并比较 $\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的大小 (可以用物理或几何直觉).

证明. 由 $f(x)$ 递增，根据 chebyshev 不等式知

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即有 $s\geqslant\frac{1}{2}$，于是知 $s\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$.

令

$$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

则 $g(x)$ 为 $[0,\ 1]$ 上单调递增的下凸函数，对 $[0,\ 1]$ 作 n 等分，其中 $x_i=\frac{i}{n}(0\leqslant i\leqslant n)$，并由 Jensen 不等式

$$g\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)}\right)=g\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f\left(\frac{i}{n}\right)}{\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)}\frac{i}{n}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{f\left(\frac{i}{n}\right)}{\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)}g\left(\frac{i}{n}\right)$$

令 $n \to \infty$ 可得

$$g\left(\frac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_0^1 g(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

即有

$$g(s) \leqslant \frac{\int_0^1 g(x)g'(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}g^2(1)}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{2}$$

于是

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{2}$$

即证

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\mathrm{d}x$$

这题如果要证

$$\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$$

注意到

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = xg(x)|_0^1 - \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x(1-s)$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x &= \int_0^s g(x)\mathrm{d}x + \int_s^1 g(x)\mathrm{d}x \\
&= s\int_0^1 g(st)\mathrm{d}t + (1-s)\int_0^1 g(t+(1-t)s)\mathrm{d}t \\
&\leq s\int_0^1 (1-t)g(0) + tg(s)\mathrm{d}t + (1-s)\int_0^1 tg(1) + (1-t)g(s)\mathrm{d}t \\
&= \frac{sg(s)}{2} + \frac{(1-s)(g(s)+g(1))}{2} \\
&= \frac{(1-s)g(1)+g(s)}{2}
\end{aligned}$$

从而

$$(1-s)g(1) \leqslant \frac{(1-s)g(1)+g(s)}{2}$$

即

$$(1-s)g(1) \leqslant g(s) \Rightarrow (1-s)\left(\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x + g(s)\right) \leqslant g(s)$$

因而

$$(1-s)\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant sg(s) = s\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$$

整理可得证得

$$\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$$

综上所述

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$$

□

2. (2020. 中国科学院) 证明：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}}\mathrm{d}x < \pi$$

证明. 由于对 $x \in [0,1]$ 有

$$\frac{3}{4} \le x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \le 1$$

即

$$\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{x - x^2}} \leqslant \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x - x^2}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{x - x^2}}$$

根据积分单调性得到

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{x - x^2}} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x - x^2}} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x - x^2}} \mathrm{d}x$$

由于

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{x - x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x - x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \bigg|_0^1 = \pi$$

即证

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{2} < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x - x^2}} \mathrm{d}x < \pi$$

□

3. (2020. 中国科学院) 证明：

$$\left| \int_{100}^{200} \frac{x^3}{x^4 + x - 1} \mathrm{d}x - \ln 2 \right| < \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$$

证明. 考虑到

$$\begin{aligned}
\left| \int_{100}^{200} \frac{x^3}{x^4 + x - 1} \mathrm{d}x - \ln 2 \right| &= \left| \int_{100}^{200} \left(\frac{x^3}{x^4 + x - 1} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \right| \\
&= \int_{100}^{200} \frac{x - 1}{x\left(x^4 + x - 1\right)} \mathrm{d}x \\
&< \int_{100}^{200} \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} x^{-3} \bigg|_{100}^{200} \\
&= \frac{1}{3} 100^{-3} - \frac{1}{3} 200^{-3} < \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}
\end{aligned}$$

□

4. (2020. 兰州大学) 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且二次可微，且 $M = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$，$f(0) = 0$，试证：

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{M}{3}$$

证明. 由题设可知，利用泰勒展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2} x^2, \quad x \in [-1,1]$$

即

$$\int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f'(0) x \mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \mathrm{d}x$$

因此

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_{-1}^1 \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \mathrm{d}x \right| \le \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} \left| f''(\xi) \right| \mathrm{d}x \\
&\le M \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} M
\end{aligned}$$

□

5. (2020. 中国科学技术大学) 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 连续，并且满足

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-x^2}{2} \quad \forall x \in [0，1]$$

证明

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}$$

证明. 由题设易知

$$\int_0^1 (f(t)-t)^2\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

即

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 2\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}$$

另一种做法利用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 t^2\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

根据题设满足的不等式可得到

$$\int_0^1\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}$$

因此

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}$$

□

6. (2020. 华南理工大学) 设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上可微且导函数连续，并有 $f(a)=0$，试证：

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

其中 $M = \sup\limits_{x\in[a，b]} |f(x)|$.

证明. 当 $M=0$ 时，结论显然成立；当 $M>0$ 时，设 $M=|f(x_0)|$，$a<x_0\leqslant b$，且由

$$\int_a^{x_0}\left(f'(x)-\frac{f(x_0)}{x_0-a}\right)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

可得

$$\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x - \frac{2f(x_0)}{x_0-a}\int_a^{x_0} f'(x)\mathrm{d}x + \frac{f^2(x_0)}{x_0-a} \geqslant 0$$

由题意 $f(a)=0$，即

$$\frac{f^2(x_0)}{x_0-a} \leqslant \int_a^{x_0}(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

因此

$$M^2 \leqslant (x_0-a)\int_a^{x_0}(f'(x))^2\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

即证

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

□

7. (2020. 湖南大学) 若 $f(x)\in C[a，b]$，且 $f(x)$ 单调递增，证明：

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明. **法一.** 令

$$F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

即

$$F'(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}t\geqslant 0$$

可知 $F(x)$ 单调递增，即 $F(1)\geqslant F(0)$，则原不等式成立.

法二. 积分第一中值定理

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(1-x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)(f(x)-f(1-x))\mathrm{d}x\\
&=(f(\xi)-f(1-\xi))\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{8}(f(\xi)-f(1-\xi))\geqslant 0\qquad\left(0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

法三. 积分第二中值定理

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\\
&=f(0)\int_0^{\xi}\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+f(1)\int_{\xi}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=f(0)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+(f(1)-f(0))\int_{\xi}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=(f(1)-f(0))\frac{\xi(1-\xi)}{2}\geqslant 0\qquad(0\leqslant\xi\leqslant 1)
\end{aligned}$$

法四. 积分保号序

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由于 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\geqslant 0$，即

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

法五. 令

$$g(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

则有 $g(0)=0$，由 Lagrange 定理得

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(\xi)\Rightarrow g(1)=g'(\xi)\,(0<\xi<1)$$

又有

$$g'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}f(x)$$

即

$$\begin{aligned}g'(\xi)&=\xi f(\xi)-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{\xi}{2}f(\xi)\\&=\frac{\xi}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\xi}(f(x)-f(t))\mathrm{d}t\geqslant 0\end{aligned}$$

故 $g(1)\geqslant 0$，即证. □

推广： 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调递增，试证 >

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 本题有多种证法，我大概写以下六种供同学们学习：

法一. 利用变易常数法，就是将某个常数化为变量，从而化为一个函数不等式，再利用微分学证明，这里可将这里的两个参数 a，b 中 b 换成 x，欲证

$$\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

利用导数去证明其单调性即可，可令

$$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

则 $F(a)=0$，且

$$F'(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0$$

从而 $F(x)\geqslant F(a)=0$，$x\in[a, b]$，取 $x=b$，则有 $F(b)\geqslant 0$，即证.

法二. 将积分区间进行二等分，有

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$$

由积分第一中值定理可得，分别存在 $\xi_1\in\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ 使得

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x&=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x&=f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=-f(\xi_1)\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+f(\xi_2)\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{8}(f(\xi_2)-f(\xi_1))$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递增，且 $0<\xi_1<\xi_2<1$，即 $f(\xi_2)-f(\xi_1)\geqslant 0$，从而

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

这里也可以这里做

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$$
$$=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(b-a)^2}{8}\left(f(\xi_2)-f(\xi_1)\right)\geqslant 0$$

法三. 根据积分第二中值定理可得，存在 $\xi\in(a，b)$，则有

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+[f(b)-f(a)]\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=[f(b)-f(a)]\left[\frac{b^2-\xi^2}{2}-\frac{a+b}{2}(b-\xi)\right]$$
$$=[f(b)-f(a)]\frac{(b-\xi)(\xi-a)}{2}\geqslant 0$$

由 $f(x)$ 单调递增以及 $\xi\in(a，b)$ 可知

$$f(a)-f(b)<0，\xi-a>0，\xi-b<0$$

故

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

法四. 将所证恒等式进行变形

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)+\left(a+b-x-\frac{a+b}{2}\right)f(a+b-x)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f(a+b-x)\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

其中被积函数 $\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$ 关于积分区间中点具有其对称性，而 $f(x)$ 又单调递增，即证

法五. 由于

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$$

即

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0\Leftrightarrow\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

法六. 由条件 $f(x)$ 单调递增得

$$[f(x)-f(y)](x-y)\geqslant 0，\forall x，y\in[a，b]$$

即

$$(b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\int_a^b 1\mathrm{d}x\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b x\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即证.

事实上本题即为 Chebyshev 不等式的一个特殊情况. □

8. (2020. 厦门大学) 若 $f(x)\in\mathbb{C}^2(0，1)$，且 $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in(0，1)$ 时 $f(x)\neq 0$，证明：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$$

证明. 假设 $f(x_0)=y_0=\max\limits_{x\in[0,\ 1]} f(x)$，则由 Lagrange 中值定理有

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=f'(\xi),\ \xi\in(0,\ x_0)$$
$$\frac{-y_0}{1-x_0}=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\eta),\ \eta\in(x_0,\ 1)$$

因此可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx&\geqslant\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{y_0}\right|dx\geqslant\int_\xi^\eta\left|\frac{f''(x)}{y_0}\right|dx\\&\geqslant\frac{|f'(\eta)-f'(\xi)|}{y_0}=\frac{1}{\frac14-\left(x_0-\frac12\right)^2}\geqslant 4\end{aligned}$$

□

9. (2020. 厦门大学) 证明不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right)}\leqslant\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-u^2}\right)}\quad(u>0)$$

证明. 利用化定积分为二重积分再极坐标代换即有

$$\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}dy}=\sqrt{\iint\limits_{[0,\ u]\times[0,\ u]}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy}$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx&\geqslant\sqrt{\frac14\iint\limits_{x^2+y^2\leq u^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy}=\sqrt{\frac14\int_0^{2\pi}\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}rdr}=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx&\leqslant\sqrt{\frac14\iint\limits_{x^2+y^2\leq(\sqrt2u)^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy}=\sqrt{\frac14\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt2u}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt2u}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}rdr}=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-u^2}\right)}\end{aligned}$$

即证

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right)}\leqslant\int_0^u\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-u^2}\right)}\quad(u>0)$$

□

10. (2019. 南开大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续可微且不恒等于 0，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，证明：

$$\int_0^1|f(x)|dx\cdot\int_0^1|f'(x)|dx>2\int_0^1 f^2(x)dx$$

证明. 由题意显然有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2dx&=\int_0^1 f(x)f(x)dx=\frac12\int_0^1 f(x)[2f(x)-f(0)-f(1)]dx\\&=\frac12\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x f'(t)dt-\int_x^1 f'(t)dt\right)dx\\&\leqslant\frac12\int_0^1|f(x)|\left(\int_0^x|f'(t)|dt+\int_x^1|f'(t)|dt\right)dx\\&=\frac12\int_0^1|f(x)|dx\int_0^1|f'(x)|dx\end{aligned}$$

即证. □

11. (2019. 兰州大学) 若 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上单调递减，对 $\forall a \in (0，1)$，试证：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明. (法一) 构造函数，求最值问题. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 故

$$F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(x)-f(\xi)(\text{积分中值定理})$$

又 f 单调减少, 所以 $F(x)$ 在 $(0，\xi)$ 上单调增加, 在 $(\xi，1)$ 上单调减少. 又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in(0，1)$ 时,$F(x)>0$. 即对任给 $\alpha\in(0，1)$，有 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(法二) 利用定积分性质.

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\left[\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\ &=(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=(1-\alpha)\alpha f(\xi)-(1-\alpha)\alpha f(\eta)\geqslant 0\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(0，\alpha)$，$\eta\in(\alpha，1)$，即证.

(法三) 利用单调性，设 $F(\alpha)=\dfrac{\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x}{\alpha}$，即

$$F'(\alpha)=\frac{\alpha f(\alpha)-\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x}{\alpha^2}=\frac{\alpha f(\alpha)-\alpha f(\xi)}{\alpha^2}=\frac{f(\alpha)-f(\xi)}{\alpha}\leqslant 0$$

其中 $\xi\in(0，\alpha)$，$\eta\in(\alpha，1)$，即 $F(\alpha)$ 单调递减，$F(\alpha)\geqslant F(1)$，即证.

(法四) 换元，令 $x=\alpha t$，可得

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)\,\mathrm{d}t\geqslant\alpha\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

其中因 $f(x)$ 单减，$f(\alpha t)\geqslant f(t)$.

(法五) 定积分定义

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{\alpha i}{n}\right)\geqslant\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)=\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

(法六) 微分中值定理，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[0，1]$，则 $F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$，即

$$\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha-0}=f(\xi),\quad \xi\in(0，\alpha)$$
$$\frac{F(1)-F(\alpha)}{1-\alpha}=f(\eta),\quad \eta\in(\alpha，1)$$

因 $f(x)$ 单减，即 $f(\xi)\geqslant f(\eta)$，即

$$\frac{F(\alpha)}{\alpha}\geqslant\frac{F(1)-F(\alpha)}{1-\alpha}$$

所以 $F(\alpha)\geqslant\alpha F(1)$，即证. □

12. (2019. 华东师范大学) 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0(x\in(0，1))$ 且 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 存在. 试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$$

证明. 同第 4 题，2020 年兰州大学 □

13. (2018. 中国科学院) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二次连续可微，$f(0)=0$，证明：

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{3}, \quad \text{其中} M=\max_{x\in[-1,1]}\left|f''(x)\right|.$$

证明. 同第 8 题，2020 年厦门大学 □

14. (2018. 中国科学院) 证明

$$\frac{1}{5}<\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\mathrm{d}x<\frac{2\sqrt{11}}{33}.$$

证明. 由于对 $x\in[0, 1]$，有

$$\frac{99}{4}\leqslant x^2-x+25\leqslant 25 \Rightarrow \frac{3\sqrt{11}}{2}\leqslant\sqrt{x^2-x+25}\leqslant 5$$

于是

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3\sqrt{11}}\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{11}}{33}$$

即证

$$\frac{1}{5}<\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\mathrm{d}x<\frac{2\sqrt{11}}{33}.$$

□

15. (2018. 天津大学) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，证明：对任意的 $\alpha\in(0, 1)$ 都有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 利用定积分性质.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\left[\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\
&=(1-\alpha)\alpha f(\xi)-(1-\alpha)\alpha f(\eta)\geqslant 0
\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(0, \alpha)$，$\eta\in(\alpha, 1)$，即证 □

16. (2018. 华东师范大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$0\leqslant f'(x)\leqslant 1$，试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

即

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left(2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)\right)$$

由 $x\in(0, 1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，即 $f(x)>0$.

记

$$G(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)$$

则 $G(0)=0$，有

$$G'(x)=2f(x)\left(1-f'(x)\right)>0$$

所以 $G(x)>0$，因此当 $x\in(0, 1)$ 时，$F'(x)>0$.

另解： 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2,\quad G(x)=\int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$$

由柯西中值定理得

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x}&=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F(\xi)}{G(\xi)}=\frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t}{f^3(\xi)}\quad(0<\xi<1)\\&=\frac{2\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t}{f^2(\xi)-f^2(0)}\\&=\frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)}=\frac{1}{f'(\eta)}>1\quad(0<\eta<\xi<1)\end{aligned}$$

即证. □

变式： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且当 $x\in(a,b)$ 时，$0<f'(x)<\dfrac{2}{n+1}$，$f(a)=0$，试证：

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_a^b f^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令

$$F(x)=\left(\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\int_a^x f^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$$

即

$$F'(x)=2f^n(x)\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t-f^{2n+1}(x)=f^n(x)\left(2\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t-f^{n+1}(x)\right)$$

由 $f(a)=0$，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 严格单调递增，且 $f(x)>f(a)=0$，$x\in[a,b]$，即 $f^n(x)>0$，记

$$G(x)=2\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t-f^{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow G'(x)=2f^n(x)-(n+1)f^n(x)f'(x)=2f^n(x)\left(1-\frac{n+1}{2}f'(x)\right)$$

因为 $0<f'(x)<\dfrac{2}{n+1}$，即 $G'(x)>0$，可得 $G(x)>G(a)=0$，所以当 $x\in(a,b)$ 时，$F'(x)>0$. □

17. (2018. 大连理工大学) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续凸函数，试证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

证明. 由函数的凹凸性和连续性可得

$$f(x)=f\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right)\le\frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

另解： 利用凸函数定义，对 $\forall t\in[0,1]$ 以及 x_1，$x_2\in[a,b]$ 满足

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{x=(1-t)a+tb} \int_0^1 f((1-t)a+tb)(b-a)\mathrm{d}t\\ &\leqslant (b-a)\int_0^1[(1-t)f(a)+tf(b)]\mathrm{d}t\\ &=(b-a)\left[f(a)\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t+f(b)\int_0^1 t\mathrm{d}t\right]\\ &=(b-a)\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]\\ &=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\end{aligned}$$

这题如果证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

令 $x=\dfrac{a+b}{2}+t$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left(f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t\\ &\geqslant\int_0^{\frac{b-a}{2}}2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

另解： 记 $c=\dfrac{a+b}{2}$，由 $f''(x)\geqslant 0$，即

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2\geqslant f(c)+f'(c)(x-c)$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant(b-a)f(c)+\int_a^b f'(c)(x-c)\mathrm{d}x=(b-a)f(c)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

综上所述，这也被称为 Hadamard 不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

□

18. (2016. 山东大学) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为似序，即对 $\forall x$，y 都成立

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geqslant 0$$

试证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

分析： 左端出现了两个积分，若将两个积分的积分变量换成不同符号则可化为二重积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而右端也可化为二重积分

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明. 对 x，$y\in[a,b]$，则 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$，即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)f(y)g(y)\geqslant g(y)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,b]$ 上积分得

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\geqslant\int_a^b g(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

将上式中 y 改为 x 即证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

>Chebyshev 不等式更一般的不等式形式为:若函数 $f(x)$，$g(x)$，$p(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且 $\forall x\in[a,b]$，$p(x)\geqslant 0$，而 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致，则有 >

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 单调性不一致，则不等式变号；
2. 此不等式成立的条件可适当减弱，$f(x)$，$g(x)$，$p(x)$ 的连续性可弱化为可积. □

19. (2011. 山东大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且满足 $|f(x)|\leqslant 1$，并有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，试证：对 $\forall a, b\in[0,1]$ 都有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

证明. 构造函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{M}{2}x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$$

有

$$\begin{cases}F'(x)=f(x)+Mx\\ F''(x)=f'(x)+M\geqslant 0\end{cases},\ x\in[0,1]$$

即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为下凸函数，则有

$$F(x)\leqslant(1-x)F(0)+xF(1)(0\leqslant x\leqslant 1)$$

于是

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{M}{2}x^2\leqslant 0+x\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\frac{M}{2}\right)=x\left(0+\frac{M}{2}\right)=\frac{M}{2}x$$

因此

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{2}\left(x-x^2\right)\leqslant\frac{M}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

□

20. (2013. 大连理工大学) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微，且 $f''(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$，若 $f(0)=0$，试明：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用凹函数性质得到

$$F(x)=x\int_0^1 f[ux+(1-u)\cdot 0]\mathrm{d}u\geqslant x\int_0^1[uf(x)+(1-u)]\mathrm{d}u=\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}$$

考虑

$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,\ U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即原命题等价于证明：$2U^2-3I\geqslant 0$

又有

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant U-\int_0^1\left(\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4}$$

因此 $3I\leqslant 2U-\frac{1}{2}$，也就是

$$2U^2-3I\geqslant 2U^2-\left(2U-\frac{1}{2}\right)=2\left(U-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$$

即证.

另解： 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\int_0^x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\right)\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

□

21. (2013. 大连理工大学) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数，且满足

$$f(a)=f(b)=0,\quad\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$$

试证：

$$\int_a^b x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x>\frac{1}{4}$$

证明. 由分部积分得

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}xf^2(x)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$$

再利用柯西不等式得

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\left(xf'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{4}$$

但等号不能取到，是因为取等时 $f(x)=0$ 与 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$ 矛盾，即证

$$\int_a^b x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x>\frac{1}{4}$$

□

22. (2012. 电子科技大学) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，证明：对任意的 $\alpha\in(0,1)$ 都有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 利用微分中值定理，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[0,1]$，则 $F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$，即

$$\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha-0}=f(\xi),\ \xi\in(0,\alpha)$$

$$\frac{F(1)-F(\alpha)}{1-\alpha}=f(\eta),\ \eta\in(\alpha,\ 1)$$

因 $f(x)$ 单减，即 $f(\xi)\geqslant f(\eta)$，即

$$\frac{F(\alpha)}{\alpha}\geqslant\frac{F(1)-F(\alpha)}{1-\alpha}$$

所以 $F(\alpha)\geqslant\alpha F(1)$，即证. □

23. (2011. 东南大学) 试证：

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$$

证明. 对于左边，由于 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 有 $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{6}$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}$$

对于右边在 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 有 $\sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3\pi}$，这个等式成立你可以考虑 $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3\pi}$，则有

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3\pi}\Rightarrow f(0)\leqslant 0,\ f'(x)\leqslant 0$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{x^2}{3\pi}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{72}$$

因此

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{72}$$

□

24. (2017. 湖南大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上有一阶连续导数，且满足 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{4}$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[0,\ 1]}|f'(x)|$.

证明. 显然

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,|_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{M}{4}\end{aligned}$$

即证. □

25. (2011. 湖南大学) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上黎曼可积，且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=1$，$g(x)\geqslant 0$，$\varphi''(x)\geqslant 0$，试证：

$$\varphi\left(\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b g(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x$$

证明. 由题设可证

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

取划分

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$，由詹森不等式

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \leqslant \frac{1}{n}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

令 $n \to \infty$ 即证. □

26. (2009. 湖南大学) 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 连续，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0,\quad \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$$

试证：存在 $\xi \in [0，1]$ 使得 $|f(\xi)| > 4$;

证明. 若 $\forall x \in [0，1]$，$|f(x)| > 4$，则

$$1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \mathrm{d}x = 1$$

因此

$$\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)|\mathrm{d}x = 1$$

而 $4\displaystyle\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = 1$，即

$$\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| (4 - |f(x)|)\mathrm{d}x = 0$$

所以对 $\forall x \in [0，1]$，$|f(x)| = 4$，由 $f(x)$ 的连续性 $f(x) \equiv 4$ 或 $f(x) \equiv -4$，这与条件 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾，故 $\exists \xi \in [0，1]$ 使得 $|f(\xi)| > 4$; □

27. (2008. 湖南大学) 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 可微，且

$$\sup_{0<x<1} |f'(x)| = C < \infty$$

试证：对任意正整数 n 都有

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{C}{2n}$$

证明. 显然有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f\left(\frac{j}{n}\right)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \left(f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} |f'(\xi_j)| \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \left|\frac{j}{n} - x\right| \\
&\leq C\left(-\int_0^1 x\mathrm{d}x + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{C}{2n}
\end{aligned}$$

□

28. (2016. 华中科技大学) 设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 连续，且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，试证：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明. 由

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t，x\in(a，b)$$

即

$$|f(x)|\leqslant\int_a^x \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$$

于是

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\int_a^x \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$$

即证

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

□

29. (2013. 华中科技大学) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0，1]$ 上二阶连续可微，且在区间 $(0，1)$ 内存在极值，证明：

$$\max_{x\in[0，1]}\left|f'(x)\right|\leqslant\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明. 不妨设 $x_0\in(0，1)$ 使得 $f'(x_0)=0$，又 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上二阶连续可微，即当 $x\in[0，x_0]$ 时有

$$\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geq\int_x^{x_0}\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geq\left|\int_x^{x_0}f''(x)\mathrm{d}x\right|=\left|f'(x)\right|$$

因此对 $\forall x\in[0，1]$ 有

$$\left|f'(x)\right|\leq\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

即

$$\max_{x\in[0，1]}\left|f'(x)\right|\leqslant\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

□

30. (2012. 华中科技大学) 设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上二阶连续可导，试证：

$$\max_{x\in[0，1]}\left|f'(x)\right|\leqslant|f(1)-f(0)|+\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x$$

证明. 因为 $f'(x)$ 连续，所以 $\max\limits_{x\in[0，1]}|f'(x)$ 可取到.

设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[0，1]}|f'(x)|$，由拉格朗日中值定理得：

$$|f(1)-f(0)|=\left|\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\right|=f'(u)\quad u\in(0，1)$$

又由

$$\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_\xi^u\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_\xi^u f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|f'(u)-f'(\xi)\right|$$

所以就有：

$$\begin{aligned}|f(1)-f(0)|+\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x&\geqslant\left|f'(u)\right|+\left|f'(u)-f'(\xi)\right|\\&\geqslant f(\xi)=\max_{x\in[0，1]}\left|f'(x)\right|\end{aligned}$$

□

31. (2011. 华中科技大学) 设 $f(x)$ 在 [0，1] 上有二阶连续可微，证明：

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

证明. 对 $\forall x_1 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$，$x_2 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$，由拉格朗日中值定理得：

$$\left|f'(\xi)\right| = \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)|$$

因此对 $\forall x \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &= \left|f'(\xi) + \int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|f'(\xi)\right| + \int_\xi^x \left|f''(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)| + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x\end{aligned}$$

在上述不等式两端分别对 x_1，x_2 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 上进行积分得

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &\leqslant 9\int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)| \mathrm{d}x + 9\int_{\frac{2}{3}}^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant 9\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此对 x 在 [0，1] 上积分可得

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

□

32. (2016. 兰州大学) 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 [0，1] 上的连续函数，对 $\forall x \in [0, 1]$，有 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$，证明：

$$1 \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

证明. 由于 $(f(x) - m)(f(x) - M) \leqslant 0$，即

$$f^2(x) - (m+M)f(x) + mM \leqslant 0$$

同除 $f(x)$ 得

$$f(x) + \frac{mM}{f(x)} \leqslant m + M$$

由均值不等式得

$$\frac{1}{mM}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{4mM}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再代入原式得

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

□

33. (2016. 南京大学) 设 $f(x)$ 在 [0，1] 上连续可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，试证：存在常数 $c > 0$ 使得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant c\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

且最小系数为 $\frac{1}{\pi^2}$

证明. 将 $f(x)$ 在 [0，1] 上展开正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

则有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \cos n\pi x$$

由巴塞尔等式得

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 b_n^2 \geqslant \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2=\pi^2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x$$

即最小系数为 $\frac{1}{\pi^2}$，当且仅当 $f(x)=\sin\pi x$ 时取等号. □

34. (2016. 南京大学) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数，试证：f 为凸函数当且仅当对任意区间 $[a，b]\subset\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令 $x=\frac{a+b}{2}+t$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left(f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t=(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

另解：记 $c=\frac{a+b}{2}$，由 $f''(x)\geqslant 0$，即

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2\geqslant f(c)+f'(c)(x-c)$$

>

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant(b-a)\,f(c)+\int_a^b f'(c)(x-c)\,\mathrm{d}x=(b-a)\,f(c)=(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

□

35. (2011. 南开大学) 设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上有连续的导函数, 且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，证明:

$$\int_a^b |f(x)\,f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

证明. 注意到 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，即

$$f(x)=\int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)\,\mathrm{d}t\ \square\ x\in[a，b]$$

$$令\begin{cases}g_1(x)=\int_x^{\frac{a+b}{2}}|f'(t)|\mathrm{d}t\\ g_2(x)=\int_{\frac{a+b}{2}}^x|f'(t)|\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow|f(x)|\leq\begin{cases}g_1(x)，&x\in\left[a，\frac{a+b}{2}\right]\\ g_2(x)，&x\in\left[\frac{a+b}{2}，b\right]\end{cases}$$

故 $g_1(x), g_2(x)$ 分别在 $\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$ 上有连续导函数，则有

$$g_1\left(\frac{a+b}{2}\right)=g_2\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$$

且

$$|f'(x)|=\begin{cases}-g_1'(x), & x\in\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right]\\ g_2'(x), & x\in\left[\frac{a+b}{2},\ b\right]\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant-\int_a^{\frac{a+b}{2}}g_1(x)g_1'(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b g_2(x)g_2'(x)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{g_1\left(\frac{a+b}{2}\right)=g_2\left(\frac{a+b}{2}\right)=0}\frac{1}{2}g_1^2(a)+\frac{1}{2}g_2^2(b)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\int_a^{\frac{a+b}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x\int_{\frac{a+b}{2}}^b\mathrm{d}x\\&=\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

36. (2010. 南开大学) 设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上存在连续的二阶导数，且满足

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

试证：

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\sup_{x\in[a,\ b]}|f'(x)|+\frac{(b-a)^3}{6}\sup_{x\in[a,\ b]}|f''(x)|$$

证明. 记 $M_1=\sup\limits_{x\in[a,\ b]}|f'(x)|$，$M_2=\sup\limits_{x\in[a,\ b]}|f''(x)|$，由题设可知，$\exists c\in[a，b]$，s.t. $f(c)=0$，又

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi_x)}{2}(x-c)^2$$

即

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant M_1\left|\int_a^b(x-c)\mathrm{d}x\right|+\frac{M_2}{2}\int_a^b(x-c)^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{M_1}{2}\left|(b-c)^2-(a-c)^2\right|+\frac{M_2}{6}\left[(b-c)^3-(a-c)^3\right]\\&=\frac{M_1}{2}(b-a)|b+a-2c|+\frac{M_2}{6}\left[(b-c)^3+(c-a)^3\right]\\&\leqslant\frac{M_1}{2}(b-a)^2+\frac{M_2}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$

□

37. (2016. 厦门大学) 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $\forall x \in (a, b)$ 有 $f''(x) > 0$，证明：$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

证明. 考虑辅助函数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) - f(x_1),$$

显然有

$$g(x_1) = g(x_2) = 0, \quad x_1, x_2 \in (a, b)$$

由题设可知得 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$，即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right) - f(x_1) < 0$$

因此

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

□

38. (2016. 厦门大学) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且满足

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

试证：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

证明. 设

$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

由题设对 $x \in [a, b]$，有 $g(x) \geqslant 0$，由分部积分得

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}g(x) = xg(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

□

39. (2013. 厦门大学) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一阶连续可导，且 $\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$，$|f'(x)| \leqslant M$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}M$$

证明. 由于 $f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处的带 lagrange 余项的泰勒公式为

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) = f'(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

即对 $\forall x \in [a, b]$ 有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = |f'(\xi)|\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$\le \frac{(b-a)^2}{4}M \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}M$$

即证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}M$$

□

40. (2011. 厦门大学) 设函数 $f(x)\in C[0,1]$，试证：对 $\forall t>0$ 有

$$\left[\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$$

证明. 显然利用柯西施瓦次不等式

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}\frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}}\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

41. (2010. 厦门大学) 设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 试证：

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f[\varphi(t)]\mathrm{d}t$$

证明. 由泰勒中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.\quad \xi\in(x_0,x)$$

题设 $f''(x)>0$，即 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

令

$$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t,\ x=\varphi(t)$$

则有

$$f(\varphi(t))\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)+f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\left(\varphi(t)-\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)$$

对两边从 0 到 a 的积分有

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t &\geqslant af\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\left[\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right]\\ &= af\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

即证

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t$$

另解： 令

$$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

将 $f[g(t)]$ 在 x_0 处泰勒展开至二阶有

$$f[g(t)]=f(x_0)+f'(x_0)[\varphi(t)-x_0]+\frac{1}{2}f''(\xi)(\varphi(t)-x_0)^2$$

因 $f''(x)\geqslant 0$ 即

$$f(\varphi(t))\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(\varphi(t)-x_0)$$

两边在 $\left(\frac{k-1}{n}a,\ \frac{k}{n}a\right)$ 上积分. 则

$$\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geqslant \frac{a}{n}f(x_0)+f'(x_0)\left(\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a}\varphi(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)$$

求和

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \geqslant af(x_0)$$

即

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

□

42. (2010. 四川大学) 设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 内可导，且 $f(a)=0$，试证：

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$$

其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}$

证明. - 当 $M=0$ 时，结论显然成立；

- 当 $M>0$ 时，设 $M=|f(x_0)|$，$a<x_0\leqslant b$，且由

$$\int_a^{x_0}\left(f'(x)-\frac{f(x_0)}{x_0-a}\right)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$$

可得

$$\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x - \frac{2f(x_0)}{x_0-a}\int_a^{x_0} f'(x)\mathrm{d}x + \frac{f^2(x_0)}{x_0-a} \geqslant 0$$

由题意 $f(a)=0$，即

$$\frac{f^2(x_0)}{x_0-a} \leqslant \int_a^{x_0}(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

因此

$$M^2 \leqslant (x_0-a)\int_a^{x_0}(f'(x))^2\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

□

43. (2009. 四川大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续可导，试证：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{(b-a)\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x，\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

证明. 分两种情况讨论：- 若 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上不变号，则有

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \max\left\{(b-a)\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x，\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}$$

- 若 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上变号，则 $\exists x_0 \in (a，b)$ 使得 $f(x_0)=0$，又因为 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，即存在 $\xi\in(a，b)$ 使得

$$|f(\xi)| = \max_{x\in(a，b)}|f(x)| > 0$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \max_{x\in(a，b)}|f(x)| = |f(\xi)-f(x_0)| \\ &= \left|\int_{x_0}^{\xi} f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \max\left\{(b-a)\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x，\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}\end{aligned}$$

□

44. (2012. 武汉大学) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上连续，且同为单调不减 (或同为单调不增) 函数，试证：

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

分析：左端出现了两个积分，若将两个积分的积分变量换成不同符号则可化为二重积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而右端也可化为二重积分

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明. 对 x，$y\in[a,\ b]$，则 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$，即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,\ b]$ 上积分得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)f(y)g(y)\geqslant g(y)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,\ b]$ 上积分得

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\geqslant\int_a^b g(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

将上式中 y 改为 x 即证

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\max\left\{(b-a)\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x,\ \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

Chebyshev 不等式更一般的不等式形式为:若函数 $f(x)$，$g(x)$，$p(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的连续函数且 $\forall x\in[a,\ b]$，$p(x)\geqslant 0$，而 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上单调性一致，则有 >

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 单调性不一致，则不等式变号；
2. 此不等式成立的条件可适当减弱，$f(x)$，$g(x)$，$p(x)$ 的连续性可弱化为可积. □

45. (2016. 浙江大学) 设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一阶连续可导，$A=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，证明：

$$\int_a^b (f(x)-A)^2\mathrm{d}x\leqslant(b-a)^2\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

证明. 利用积分第一中值定理以及柯西-施瓦茨不等式. 由于 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 连续，由积分第一中值定理，$\exists\xi\in(a,\ b)$ 有

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$$

因此

$$(f(x)-A)^2=(f(x)-f(\xi))^2=\left(\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

两边积分，即证.

另解：令 $g(x)=f(x)-A$，则 $\displaystyle\int_a^b g(x)=0$，且 $g'(x)=f'(x)$，于是要证的不等式转化为

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)^2\int_a^b\left|g'(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

这里只需要证明著名的 Poincare 不等式

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |g'(x)|^2\mathrm{d}x$$

其中 $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 为最佳系数.

证明过程利用 Fourier 级数以及 Parseval 等式即可. □

46. (2012. 浙江大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意 x，$y\in[0,1]$ 有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$，试证：

$$\int_0^1 f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

证明. 由题设可知在 $x=\frac{1}{2}$ 处泰勒展开得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi_x)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

根据

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}\Rightarrow f''(x)\leq 0$$

即

$$f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

然后两边从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leq\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

即证

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

□

47. (2009. 浙江大学) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降，$f'(b)>0$，试证：

$$\left|\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{f'(b)}$$

证明. 由条件 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$，且 $g(y)$ 在 $[f(b),f(a)]$ 上单调递减可微，且有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}$$

则有

$$\left|\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|-\int_{f(b)}^{f(a)}\cos y\frac{1}{f'(x)}\right|\leq\int_{f(b)}^{f(a)}\frac{\cos y}{f'(b)}\mathrm{d}x\leq\frac{2}{f'(b)}$$

变式： 设 $|f(x)|\leqslant\pi$，$f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$，试证：

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$$

由条件 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$，且根据 $f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，从而反函数 $g(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上单调递增可微，可设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，g 是 f 的反函数，即有

$$0<g'(y)=\frac{1}{f'(x)}\leqslant\frac{1}{m}$$

又由题设 $|f(x)|\leqslant\pi$，则有 $-\pi\leqslant A<B\leqslant\pi$，即

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\xlongequal{x=g(y)}\left|\int_A^B g'(y)\sin y\mathrm{d}y\right|\leq\int_0^\pi\frac{\sin y}{m}\mathrm{d}y=\frac{2}{m}$$

□

48. (2015. 中国科学技术大学) 设 $n>0$，证明不等式：

$$\frac{1}{2n+2}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x<\frac{1}{2n}$$

证明. 注意到 $0<x<\frac{\pi}{4}$，有 $0<\tan x<1$，即

$$\tan^{n+2}x<\tan^n x<\tan^{n-2}x$$

左边等式

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x\\&=\left.\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

右边等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x<\frac{1}{n-1}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$$

即证

$$\frac{1}{2n+2}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x<\frac{1}{2n}$$

□

49. (2015. 中国科学技术大学) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x$，试证：

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

并求使得上式成为等式的所有连续函数 $f(x)$.

证明. 令

$$g(x)=\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t-\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

则有

$$\begin{aligned}g'(x)=x^2 f(x)-2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=f(x)\left(x^2-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\\&\geqslant f(x)\left(x^2-2\int_0^x t\mathrm{d}t\right)=0\end{aligned}$$

于是有

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

等号成立当且仅当对 $\forall x\in(0,1)$ 有

$$f(x)\left(x^2-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=0$$

也就是等号成立当且仅当 $f(x)=0$ 或 $f(x)=x$.　□

50. (2016. 中山大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，试证：

$$\int_0^1 f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

证明. 由题设可知在 $x=\frac{1}{2}$ 处泰勒展开得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi_x)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

根据 $f''(x) \le 0$，即

$$f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

然后两边从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

即证

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

□

51. (2012. 中山大学) 设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上有二阶连续导数，且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$，试证：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

证明. 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处利用 taylor 公式展开，有

$$f(x) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{a}\right)^2 \quad \left(\xi \in \left(x，\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

两端积分，并注意到右端第一式积分值为 0，得

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''(\xi)|\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \le \frac{M}{6}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Big|_a^3 = \frac{M}{24}(b-a)^3$$

□

52. (2004. 中南大学) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t，\ x \in [a，b]，\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

又设 $h(x)$ 可微，非增，试证：

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)h(x)\mathrm{d}x$$

证明. 令

$$F(x) = f(x) - g(x)，\ G(x) = \int_a^x F(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\forall x \in [a，b]，\ G(x) \geqslant 0$$

且 $G(a) = G(b) = 0$，于是

$$\int_0^b h(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^b h(x)\mathrm{d}G(x) = h(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}h(x) = -\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}h(x) \le 0$$

即证.

□