

2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛 (数学专业) 参考答案

一、填空题

(1) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 12

二、【参考解答】: 根据题目假设和泰勒公式, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \alpha(x)x,$$

其中 $\alpha(x)$ 是 x 的函数, $\alpha(0) = 0$ 且 $\alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$. 因此, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|x| < \delta$ 时, $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

对于任意自然数 n 和 $k \leq n$, 总有

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} + \alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\frac{k}{n^2}.$$

取 $N > \delta^{-1}$, 对上述给定的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N, k \leq n$, $\left|\alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \varepsilon$. 于是当 $n > N$ 时,

$$\left|\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

改写该式得当 $n > N$ 时,

$$\left|\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2}f'(0)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 对上式取极限即得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) &\leq \frac{1}{2}f'(0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) &\geq \frac{1}{2}f'(0) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}f'(0).$$

三、【参考证明】: 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 当

$$|x_1 - x_2| < \delta (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

时, 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$

取一个充分大的自然数 m , 使得 $m > \delta^{-1}$, 并在 $[0, 1]$ 中取 m 个点:

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_m = 1,$$

其中 $x_j = \frac{j}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). 这样, 对于每一个 j , $|x_{j+1} - x_j| = \frac{1}{m} < \delta$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, 故对每一 x_j , 存在一个 N_j , 当 $n > N_j$ 时, 使得

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

这里的 ε 是前面给定的. 令 $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, 那么当 $n > N$ 时,

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 其中 } j = 1, 2, \dots, m.$$

设 $x \in [0, 1]$ 是任意一点, 这时总有一个 x_j 使得 $x \in [x_j, x_{j+1}]$.

由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续性及 $|x - x_j| < \delta$ 可知,

$$|f(x_j + n) - f(x + n)| < \frac{\varepsilon}{2} (\forall n = 1, 2, \dots).$$

另一方面, 已经知道当 $n > N$ 时, $|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 这样, 由后面证得的两个式子就得, 当 $n > N, x \in [0, 1]$ 时, $|f(x + n)| < \varepsilon$.

注意到这里的 N 的选取与点 x 无关, 这就证实了函数序列 $\{f(x+n) : n = 1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.

四、【参考证明】: 用反证法. 假定该不等式在某一点不成立. 令 $F(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$. 那么, 根据题目假设, 当 $x^2 + y^2 \rightarrow 1$ 时, $F(x, y) \rightarrow +\infty$. 这样, $F(x, y)$ 在 D 内必然有最小值. 设最小值在 $(x_0, y_0) \in D$ 达到. 根据反证法假设, 有

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) < 0. \quad (i)$$

另一方面, 根据题目假设, 又有

$$\Delta F = \Delta f - \Delta g \leq e^{f(x,y)} - e^{g(x,y)}, \quad (ii)$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子: $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. 式子 (ii) 在 D 中处处成立, 特别地在 (x_0, y_0) 成立:

$$\begin{aligned} \Delta F|_{(x_0, y_0)} &= \Delta f|_{(x_0, y_0)} - \Delta g|_{(x_0, y_0)} \\ &\leq e^{f(x_0, y_0)} - e^{g(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (iii)$$

由(i)与(iii)可知, $\Delta F|_{(x_0, y_0)} < 0$. (iv)

但是, (x_0, y_0) 是 $F(x, y)$ 的极小值点, 应该有

$$F_{xx}(x_0, y_0) \geq 0; F_{yy} \geq 0,$$

并因此 $\Delta F|_{(x_0, y_0)} \geq 0$, 这与 (iv) 矛盾. 此矛盾证明了题目中的结论成立.

五、【参考证明】: 显然, $I_\varepsilon = \iint_{R_\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dx dy$.

注意到上述级数在 R_ε 上的一致收敛性, 则有

$$I_{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} x^n dx \int_0^{1-\varepsilon} y^n dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^{2n}}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$ 在点 $x=1$ 收敛，故有 $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

下面证明 $I = \frac{\pi^2}{6}$. 在给定的变换下，

$$x = u - v, y = u + v,$$

那么 $\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}$, 变换的雅可比行列式，

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 2.$$

假定正方形 R 在给定变换下的像为 \tilde{R} , 那么根据 \tilde{R} 的图象以及被积函数的特征，我们有

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{\tilde{R}} \frac{1}{1-u^2+v^2} du dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du \end{aligned}$$

利用 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ ($a > 0$), 又得

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right)}{\sqrt{1-u^2}} du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arctan \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right)}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

令 $g(u) = \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$;

$$h(u) = \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}},$$

那么 $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; $h'(u) = -\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}$. 最后，得到

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} g'(u)g(u) du - 8 \int_{\frac{1}{2}}^1 h'(u)h(u) du \\ &= 2[g(u)]^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 4[h(u)]^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

六、【参考解答】: (1) L, L' 的方向向量分别为

$$\vec{n} = (1, 1, 1), \vec{n}' = (1, a, 1).$$

分别取 L, L' 上的点 $O(0, 0, 0), P(0, 0, b)$. L 与 L' 是异面直线当且仅当向量 $\vec{n}, \vec{n}', \overrightarrow{OP}$ 不共面, 即它们的混合积不为零:

$$(\vec{n}, \vec{n}', \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (a-1)b \neq 0,$$

所以, L 与 L' 是异面直线当且仅当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$.

(2) 假设 $P(x, y, z)$ 是 π 上任一点, 于是 P 必定是 L' 上一点 $P'(x', y', z')$ 绕 L 旋转所生成的. 由于 $\overrightarrow{P'P}$ 与 L 垂直, 所以,

$$(x - x') + (y - y') + (z - z') = 0 \quad ①$$

又由于 P' 在 L' 上, 所以, $\frac{x'}{1} = \frac{y'}{a} = \frac{z' - b}{1}$, ②

因为 L 经过坐标原点, 所以, P, P' 到原点的距离相等, 故,

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad ③$$

将①, ②, ③联立, 消去其中的 x', y', z' :

令 $\frac{x'}{1} = \frac{y'}{a} = \frac{z' - b}{1} = t$, 将 x', y', z' 用 t 表示:

$$x' = t, y' = at, z' = t + b, \quad ④$$

将④代入①, 得

$$(a+2)t = x + y + z - b, \quad ⑤$$

当 $a \neq -2$, 即 L 与 L' 不垂直时, 解得

$$t = \frac{1}{a+2}(x + y + z - b),$$

据此, 再将④代入③, 得到 π 的方程:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a^2 + 2}{(a+2)^2}(x + y + z - b)^2 - \frac{2b}{a+2}(x + y + z - b) - b^2 = 0$$

当 $a = -2$ 时, 由⑤得, $x + y + z = b$, 这表明, π 在这个平面上. 同时, 将④代入③, 有

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6t^2 + 2bt + b^2 = 6\left(t + \frac{1}{6}b\right)^2 + \frac{5}{6}b^2.$$

由于 t 可以是任意的, 所以, 这时, π 的方程为:

$$\begin{cases} x + y + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{5}{6}b^2 \end{cases}$$

π 的类型: $a = 1$ 且 $b \neq 0$ 时, L 与 L' 平行, π 是一柱面; $a \neq 1$ 且 $b = 0$ 时, L 与 L' 相交, π 是一锥面 ($a = -2$ 时 π 是平面); 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时, π 是单叶双曲面 ($a = -2$ 时, π 是去掉一个圆

盘后的平面) .

七、【参考证明】：(1) A 的秩为 n 的情形：此时， A 为正定阵. 于是存在可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = E$. 因为 $P^T B P$ 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T (P^T B P) Q = \Lambda$ 是对角矩阵. 令 $C = P Q$ ，则有 $C^T A C = E, C^T B C = \Lambda$ 都是对角阵.

(2) A 的秩为 $n - 1$ 的情形：此时，存在实可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 因为 $P^T B P$

是实对称矩阵，所以，可以假定 $P^T B P = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$ ，其中 B_{n-1} 是 $n - 1$ 阶实对称矩阵.

因为 B_{n-1} 是 $n - 1$ 阶实对称矩阵，所以存在 $n - 1$ 阶正交矩阵 Q_{n-1} ，使得

$$Q_{n-1}^T B_{n-1} Q_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \Lambda_{n-1}$$

为对角阵. 令 $Q = \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $C = P Q$ ，则 $C^T A C, C^T B C$ 可以表示为

$$C^T A C = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C^T B C = \begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix},$$

其中 $\eta = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})^T$ 是 $n - 1$ 维列向量.

为简化记号，不妨假定

$$A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix}.$$

如果 $d = 0$ ，由于 B 是半正定的， B 的各个主子式均 ≥ 0 . 考虑 B 的含 d 的各个 2 阶主子式，容易知道， $\eta = 0$. 此时 B 已经是对角阵了，如所需.

现假设 $d \neq 0$. 显然，对于任意实数 k ， A, B 可以通过合同变换同时化成对角阵当且仅当同一合同变换可以将 $A, kA + B$ 同时化成对角阵. 由于 $k \geq 0$ 时， $kA + B$ 仍然是半正定矩阵，由 (1)，我们只需要证明：存在 $k \geq 0$ ， $kA + B$ 是可逆矩阵即可.

注意到，当 $k + \lambda_i$ 都不是 0 时，行列式

$$\begin{aligned} |kA + B| &= \begin{vmatrix} k + \lambda_1 & & & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & k + \lambda_{n-1} & d_{n-1} \\ d_1 & \cdots & d_{n-1} & d \end{vmatrix} \\ &= \left(d - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i^2}{k + \lambda_i} \right) \prod_{j=1}^{n-1} (k + \lambda_j) \end{aligned}$$

故只要 k 足够大就能保证 $kA + B$ 是可逆矩阵. 从而 A, B 可以通过合同变换同时化成对角阵.

八、【参考证明】：记 $E_j = \text{Ker } f_j, j = 1, 2$. 由 $f_j \neq 0$ 知 $\dim E_j = n - 1, j = 1, 2$. 不失一般性，可令

$$V = \mathbb{C}^n = \{\alpha = (x_1, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$$

$$f_j(\alpha) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n, j = 1, 2$$

由 $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0, f_1 \neq cf_2, \forall c \in \mathbb{C}$, 知

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵之秩为 2. 因此其解空间维数为 $n - 2$, 即 $\dim(E_1 \cap E_2) = n - 2$. 但

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2),$$

故有 $\dim(E_1 + E_2) = n$, 即 $E_1 + E_2 = V$.

现在, 任意的 $\alpha \in V$ 都可表为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in E_1, \alpha_2 \in E_2$. 注意到 $f_1(\alpha_1) = 0, f_2(\alpha_2) = 0$, 因此

$$f_1(\alpha) = f_1(\alpha_2), f_2(\alpha) = f_2(\alpha_1).$$



考研竞赛数学(ID:xwmath)

一个专注于大学数学公共基础课

资源分享的微信公众平台

高等数学, 线性代数

概率论与数理统计

考研数学, 竞赛数学

数学文化, 实验与建模

大学学习、生活历程

精彩体验从这里开始