# 2017 年第八届全国大学生数学竞赛决赛
# （数学一、二年级）参考答案

**一、填空题：**

**(1)【参考解答】**：0.

因为该多项式无 3 次项，故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得到行列式的值为 0.

**(2)【参考解答】**：$a > 27$ 或 $a < -37$.

记 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a$，则

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)$$
$$= 12(x-1)(x-3)(x+2)$$

$f(x)$ 在 $-2$ 和 3 取得极小值 $-152 + a$ 和 $-27 + a$. $f(x)$ 在 $1$ 取得极大值 $37 + a$. 因此，当且仅当 $a > 27$ 或 $a < -37$ 时方程有虚根.

**(3)【参考解答】**：$-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

令曲面 $S_1:\begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 取下侧，则 $S_1 \cup S$ 为闭下半球面的内侧. 设其内部区域为 $\Omega$，令 $D$ 为 $xOy$ 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \le a^2$，则利用高斯公式，得

$$I = \frac{1}{a}\left\{\iint\limits_{S\cup S_1} - \iint\limits_{S_1}\left[ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{a}\left\{-\iiint\limits_{\Omega}(3a + 2z)\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{D} a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}$$
$$= \frac{1}{a}\left\{-2\pi a^4 - 2\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V + \pi a^4\right\}$$
$$= -\pi a^3 - \frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{2}a^3.$$

**(4)【参考解答】**：$-\dfrac{1}{2}$.

$A = Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}Q^T$，$Q$ 可以表示为 $\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}$，所以 $a_{21} = -\sin t\cos t$，立即得到结果.

**第二题：【参考解答】**：交线为抛物线或椭圆.

(1)如果平面 P 平行于 $z-$ 轴，则相交曲线 $C = \Gamma \cap P$ 可以经过以 $z-$ 为旋转轴的旋转，使得 P 平行于

$yz-$平面，C 的形式不变. 所以可不妨设 P 的方程为$x=c$，交线 C 的方程为

$$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right).$$

将 C 投影到$yz-$平面上，得到抛物线$z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于$yz-$平面，故交线为抛物线.

(2)如果平面 P 不平行于$z-$轴，设 P 的方程为$z=ax+by+c$. 代入$\Gamma$的方程$z=\frac{1}{2}\left(c^2+y^2\right)$，得

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=a^2+b^2+2c:=R^2$$

将$C=\Gamma\cap P$垂直投影到$xy-$平面，得到圆周

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$$

令 Q 是以这个圆为底的圆柱，则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体，它与平面 P 相切于$F_1,F_2$，与圆柱 Q 相交于圆$D_1,D_2$. 对$C=Q\cap P$上的任意一点 A，过 A 点的圆柱母线交圆$D_1$于$B_1$，交圆$D_2$于$B_2$，则线段$B_1B_2$为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到$\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=\left|AB_1\right|+\left|AB_2\right|=\left|B_1B_2\right|$为常数，故曲线 C 为椭圆.

**第三题:** **【参考证明】**: 设$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,B=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}P^{-1}$. 其中 P，Q 为可逆方阵，$B_1$为$r$阶方阵，则有

$$AB=P\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1},BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & O\end{pmatrix}Q，ABA=P\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

由$\operatorname{rank}ABA=\operatorname{rank}B_1=\operatorname{rank}B$可得，存在矩阵$X,Y$使得$B_2=B_1X,B_3=YB_1$，从而有

$$AB=P\begin{pmatrix}I & -X\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$BA=Q^{-1}\begin{pmatrix}I & O\\ Y & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -Y & I\end{pmatrix}Q$$

因此，$AB$与$BA$相似.

**第四题**: **【参考证明】**: 由于$f\in\mathscr{S}$，因此存在$M_1>0$使得

$$\left|2\pi ixf\left(x\right)\right|\le\frac{M_1}{x^2+1},\forall x\in R\qquad(1)$$

这样$\int_R\left(-2\pi iy\right)f\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$关于$x\in R$一致收敛，从而可得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}\left(x\right)}{\mathrm{d}x}=\int_R-2\pi iyf\left(y\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y.\quad(2)$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^n \hat{f}(x)}{\mathrm{d}x^n}=\int_R(-2\pi iy)^n f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y. \quad (3)$$

利用分部积分法可得

$$\left(f^{(n)}\right)^{\wedge}(x)=(2\pi ix)^n\hat{f}(x),\forall n\ge 0 \quad (4)$$

结合(3)(4)并利用$f\in\mathscr{S}$，可得对任何$m,k\ge 0$，有

$$x^m\frac{\mathrm{d}^k\hat{f}(x)}{\mathrm{d}x^k}=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_R\frac{\mathrm{d}^m\left((-2\pi iy)^k f(y)\right)}{\mathrm{d}y^m}e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$$

在$R$上有界. 从而$\hat{f}\in\mathscr{S}$. 于是$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$收敛，

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{2\pi i(x-t)y}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-A}^{A}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-A}^{A}f(x-t)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\sin(2\pi At)\,\mathrm{d}t+f(x) \quad (5)
\end{aligned}$$

由于$f\in\mathscr{S}$易得积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\right|\mathrm{d}t$收敛，从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\sin(2\pi At)\,\mathrm{d}t=0.(6)$$

组合(5)(6)即得结论成立.

**第五题：【参考解答】**：1. 先证

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n<\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1},k=1,2,\cdots,n-1.$$

由均值不等式，有$k+1<\frac{k}{n}+\cdots+\frac{k}{n}+1>(n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{k}{n}\right)^n}$，因此，有

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n<\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1},k=1,2,\cdots,n-1.$$

于是

$$S_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$>\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}>S_n$$

即$S_n$单调递增. 另一方面，$\frac{S_n}{n}<\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，故有$S_n<\frac{n}{n+1}<1$，即$S_n$有界. 所以$S_n$单调递增有上界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在.

2. 当$x\neq 0$时，$e^x>1+x$，则$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n<e^{n\cdot(-k/n)}=e^{-k}$，从而有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n<\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}<\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S\leq\frac{1}{e-1}$.

另外，对任意正整数$n>m$，则$S_n\geq\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$，令$n\to\infty$，则有

$$S\geq\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}e^{-k}\geq\frac{1}{e-1}.$$

所以可得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\frac{1}{e-1}$.

**第六题：【参考证明】**：令$y(x,y_0)$为方程满足初值条件$y(0,y_0)=y_0$的解. 由常微分方程解的存在唯一性定理，这样的解局部存在并且唯一. 首先证明：

引理：对任意$r\in R$函数$y(x,r)$在$x\in[0,2\pi]$上有定义，且对任意$r\geq 2$有

$$y(x,r)\leq r\text{和}y(x,-r)\geq -r.$$

引理的证明：反证法. 设存在$x_0\in[0,2\pi]$，$r\geq 2$使得$y(x_0,r)>r$，则$x_0>0$. 记

$$t=\inf\left\{s\in[0,x_0]\mid y(x,r)\geq r,\forall x\in[s,x_0]\right\}$$

则$y(t,r)=r,y_x'(t,r)\geq 0$.

但$y_x'(t,r)=-y(t,r)^3+\sin t<0$，矛盾. 同理可证，对于任意的$x\in[0,2\pi],r\geq 2$有

$$y(x,-r)\geq -r.$$

所以引理成立.

考虑函数$f(r)=y(2\pi,r),r\in R$，则连续函数$f$满足$f([-2,2])\subset[-2,2]$，故存在$y_0\in[-2,2]$，使得

$$f\left(y_0\right)=y_0\,.$$

对恒等式

$$\frac{\mathrm{d}\,y\left(x,r\right)}{\mathrm{d}\,x}=-y\left(x,r\right)^3+\sin x\,.$$

两边对 $r$ 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\partial y\left(x,r\right)}{\partial r}\right)=-3y\left(x,r\right)^2\frac{\partial y\left(x,r\right)}{\partial r}\,,$$

故有 $\dfrac{\partial y\left(x,r\right)}{\partial r}=e^{-3\int_0^x y\left(s,r\right)^2\,\mathrm{d}\,s}$ 于是有

$$f'\left(r\right)=e^{-3\int_0^{2\pi} y\left(s,r\right)^2\,\mathrm{d}\,s}<1.$$

所以 $f$ 至多只有一个不动点.

唯一性的另一种证明方法：设 $y_1\left(x\right),y_2\left(x\right)$ 是方程的两个满足边值条件的解．由存在唯一性定理，

$$y_1\left(x\right)\neq y_2\left(x\right),\forall x\in\left[0,2\pi\right]$$

不妨设 $y_1\left(x\right)>y_2\left(x\right),\forall x\in\left[0,2\pi\right]$.

令 $y=y_1-y_2>0$，则 $y\left(0\right)=y\left(2\pi\right)$，

$$\dot{y}=-\left(y_1^2+y_1y_2+y_2^2\right)y<0\Rightarrow y\left(0\right)<y\left(2\pi\right).$$

矛盾.