

## 2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 参考答案

一、【参考证明】: 以  $C_1$  为圆心,  $O$  为原点建立直角坐标系, 使得初始切点  $P = (0, r)$ . 将圆  $C_2$  沿  $C_1$  的圆周滚动到  $Q$  点, 记角  $\angle POQ = \theta$ , 则  $Q = (r \sin \theta, r \cos \theta)$ . 令  $l_Q$  为  $C_1$  在  $Q$  点的切线, 它的单位法向量为  $\vec{n} = (\sin \theta, \cos \theta)$ . 这时,  $P$  点运动到  $P$  关于直线  $l_Q$  的对称点  $P' = P(\theta)$  处.

于是, 有  $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n})\vec{n}$ . 故  $P$  点的运动轨迹曲线 (心脏线) 为

$$P(\theta) = P' = (2r(1 - \cos \theta) \sin \theta, r + 2r(1 - \cos \theta) \cos \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

容易得到, 圆  $C$  的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, r) + \frac{R^2}{x^2 + (y - r)^2} (x, y - r).$$

将  $(x, y) = P(\theta)$  代入, 得到

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left( \frac{R^2 \sin \theta}{2r(1 - \cos \theta)}, \frac{R^2 \cos \theta}{2r(1 - \cos \theta)} + r \right).$$

直接计算, 得到抛物线方程为

$$\tilde{y} = \frac{r}{R^2} \tilde{x}^2 + \left( r - \frac{R^2}{4r} \right).$$

二、【参考证明】: 设  $B(t)$  的第  $i$  列为  $B_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ .

断言:  $t - t_0$  是  $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$  的公因式.

反证. 不失一般性, 设  $d_1(t_0) \neq 0$ , 于是

$$\text{秩}[B(t_0), b(t_0)] = n, \text{ 因为 } d_1(t_0) \neq 0.$$

注意到秩  $B(t_0) \leq n - 1$ , 结果

$$\text{增广阵}[B(t_0), b(t_0)] \text{ 的秩} \neq B(t_0) \text{ 的秩},$$

从而  $B(t_0)X = b(t_0)$  不相容. 矛盾.

三、【参考证明】: (1) 由条件  $0 < x_2 = f(x_1) < x_1$ , 归纳可证得  $0 < x_{n+1} < x_n$ , 于是  $\{x_n\}$  有极限, 设为  $x_0$ . 由  $f$  的连续性及  $x_{n+1} = f(x_n)$ , 得  $x_0 = f(x_0)$ . 又因为当  $x > 0$  时,  $f(x) > x$ , 所以只有  $x_0 = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)} = -\frac{2}{f''(0)}. \end{aligned}$$

四、【参考证明】: 若结论不对, 则存在  $x_0 > 0$  使得当  $x \geq x_0$  时, 有

$$f'(x) \geq f(ax) > 0.$$

于是当  $x > x_0$  时,  $f(x)$  严格递增, 且由微分中值定理, 有

$$f(ax) - f(x) = f'(\xi)(a-1)x \geq f(a\xi)(a-1)x > f(ax)(a-1)x.$$

但这对于  $x > \frac{1}{a-1}$  是不能成立的.

五、【参考证明】: 由于  $f$  为偶函数, 可得  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)dx$ . 因而

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx &= \int_{-1}^1 f(x)(g(x) + g(-x))dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x)(g(x) + g(-x))dx. \end{aligned} \quad (1)$$

因为  $g$  是  $[-1, 1]$  上的凸函数, 所以函数  $h(x) = g(x) + g(-x)$  在  $[0, 1]$  上递增, 故对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 有  $(f(x) - f(y))(h(x) - h(y)) \geq 0$ . 因而

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))(h(x) - h(y))dx dy \geq 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 f(x)h(x)dx &\geq 2 \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 h(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx \cdot \int_{-1}^1 h(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx \cdot \int_{-1}^1 g(x)dx. \end{aligned}$$

结合(1)即得结论.

六、【参考证明】: (1)  $\forall A, B \in \Gamma_r$  表明  $A$  可以表示为  $A = PBQ$ , 其中  $P, Q$  可逆. 结果  $\phi(A) = \phi(P)\phi(B)\phi(Q)$ , 从而秩  $\phi(A) \leq \text{秩} \phi(B)$ ; 对称地有, 秩  $\phi(B) \leq \text{秩} \phi(A)$ ; 即有秩  $\phi(A) = \text{秩} \phi(B)$  成立.

(2) 考察矩阵集合  $\{\phi(E_{ij}) \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$ . 考察  $\phi(E_{11}), \dots, \phi(E_{nn})$ . 由(1)知  $\phi(E_{ij})$  为非零阵, 特别地,  $\phi(E_{ii})$  为非零幂等阵, 故存在单位特征向量  $w_i$  使得

$$\phi(E_{ii})w_i = w_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

从而得向量值  $w_1, w_2, \dots, w_n$ .

此向量组有如下性质:

$$a) \phi(E_{ii})w_k = \begin{cases} \phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k = \phi(E_{ii}E_{kk})w_k = 0, k \neq i \\ w_i, k = i \end{cases}$$

b)  $w_1, w_2, \dots, w_n$  线性无关, 从而构成  $R^n$  的基, 矩阵  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  为可逆矩阵.

事实上,  $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n = 0$ , 则在两边用  $\phi(E_{ii})$  作用之, 得

$$x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

c) 当  $k \neq j$  时,  $\phi(E_{ij})w_k = \phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k = \phi(E_{ij}E_{kk})w_k = 0$ ;

当  $k = j$  时,  $\phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1 + \dots + b_{ij}w_i + \dots + b_{nj}w_n$ .

两边分别用  $\phi(E_{11}), \dots, \phi(E_{i-1,i-1}), \phi(E_{i+1,i+1}), \dots, \phi(E_{nn})$  作用, 得

$$0 = \phi(E_{11}E_{ij})w_j = \phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1, \dots,$$

$$0 = \phi(E_{nn}E_{ij})w_j = \phi(E_{nn})(b_{1j}w_1 + \dots + b_{ij}w_i + \dots + b_{nj}w_n) = b_{nj}w_n,$$

即有  $b_{1j} = \dots = b_{i-1,j} = b_{i+1,j} = \dots = b_{nj} = 0$ . 从而  $\phi(E_{ij})w_j = b_{ij}w_i$ .

进一步,  $b_{ij} \neq 0$ , 否则有  $\phi(E_{ij})[w_1, w_2, \dots, w_n] = 0$ , 导致  $\phi(E_{ij})$  为零阵, 不可能.

这样通过计算  $\phi(E_{ij})w_j, i, j = 1, 2, \dots, n$ , 我们得到  $n^2$  个非零的实数:

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

注意到  $E_{mr}E_{rs} = E_{ms}$ , 从而有

$$b_{ms}w_m = \phi(E_{ms})w_s = \phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s = \phi(E_{mr})b_{rs}w_r = b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有  $b_{mr}b_{rs} = b_{ms}$ .

最后, 令  $v_i = b_{i1}w_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 则有

$$\phi(E_{ij})v_k = \begin{cases} \phi(E_{ij})b_{j1}w_j = b_{j1}b_{ij}w_i = b_{i1}w_i = v_i, k = j \\ 0, k \neq j. \end{cases}$$

令  $R = [v_1, \dots, v_n]$ , 则  $R = [w_1, \dots, w_n] \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1} \end{pmatrix}$  为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R = \phi(E_{ij})[v_1, \dots, v_n] = [0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0] = [v_1, \dots, v_n]E_{ij}$$

即  $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$ .