

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C . 求该平面 P 的法线与 z -轴的夹角.

二、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 是否可以换成 a_{n+1} ?

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆的 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即 $\forall M, N \in \Gamma$, 有 $MN \in \Gamma$). 证明: $\sum_{i=1}^r W_i = 0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^r \operatorname{tr}(W_i) = 0$, 其中 $\operatorname{tr}(W_i)$ 表示 W_i 的迹.

四、(本题 20 分) 给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 A (即 A 的转置 A^T 等于 $-A$). 记矩阵有序对集合 T 为: $T = \{(X, Y) \mid X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, XY = aI + A\}$, 其中 I 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合. 证明: 任取 T 中的两元: (X, Y) 和 (M, N) , 必有 $XN + Y^T M^T \neq 0$.

五、(本题 15 分) 设 $f(x) = \arctan x$, A 为常数. 若 $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right)$ 存在, 求 A, B .

六、(本题 20 分) 设 $f(x) = 1 - x^2 + x^3$ ($x \in [0, 1]$), 计算以下极限并说明理由:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln(x+2) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx}.$$