

2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学专业) 试卷

一、填空题(满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \ln(1 + \sin^2 x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设一平面过原点和点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则此平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 满足 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$ 及 $f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 满足 $\frac{du(t)}{dt} = u(t) + \int_0^1 u(t) dt$ 及 $u(0) = 1$ 的可微函数 $u(t) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设 a, b, c, d 是互不相同的正实数, x, y, z, w 是实数, 满足

$$a^x = bcd, b^y = cda, e^z = dab, d^w = abc,$$

则行列式 $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、(本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内连续, 且存在两两互异的点

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, 1), \text{ 使得 } a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = \beta.$$

证明: 对任意 $\lambda \in (\alpha, \beta)$, 存在互异的点 $x_5, x_6 \in (0, 1)$, 使得 $\lambda = \frac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}.$

三、(本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$, 证明: 在区间 $[0, 1]$

上存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3 , 使得

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8} \int_0^1 f(x) dx &= \left[\frac{1}{1+x_1^2} \int_0^{x_1} f(t) dt + f(x_1) \arctan x_1 \right] x_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+x_2^2} \int_0^{x_2} f(t) dt + f(x_2) \arctan x_2 \right] (1-x_3). \end{aligned}$$

四、(本题满分 12 分) 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n+1 \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right].$

五、(本题满分 12 分) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, 定义

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}, n \geq 2.$$

(1)证明：对任一非零 $x \in R^n, H(x) > 0$.

(2)求 $H(x)$ 满足条件 $x_n = 1$ 的最小值.

六、(本题满分 12 分)设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 上具有一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = a^2 \text{ 以及 } \max_{(x,y) \in D} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = a^2,$$

其中 $a > 0$. 证明: $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{4}{3} \pi a^4$.

七、(本题满分 12 分)设 $0 < a_n < 1, n = 1, 2, \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = q$ (有限或 $+\infty$).

(1)证明: 当 $q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(2)讨论 $q = 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性并阐明理由.

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)