

2010 年第一届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学专业) 参考答案

一、计算下列各题

(1) 【参考解答】：记 $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{k}{n}) \sin \frac{k\pi}{n^2}$ ，则

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \left(\frac{k\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

(2) 【参考解答】：将 Σ (或分片后) 投影到相应坐标平面上化为二重积分逐块计算.

$$I_1 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} ax \, dy \, dz = -2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - (y^2 + z^2)} \, dy \, dz$$

其中 D_{yz} 为 yOz 面上的半圆 $y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0$. 用极坐标, 得

$$I_1 = -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr = -\frac{2}{3} \pi a^3.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} [a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}]^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

其中 D_{xy} 为 xOy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$. 由极坐标, 得

$$I_2 = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2 \right) r \, dr = \frac{\pi}{6} a^3$$

因此, $I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} a^3$.

(3) 【参考解答】：设圆柱容器的高为 h , 上下底的径为 r , 则有 $\pi r^2 h = V$ 或 $h = \frac{V}{\pi r^2}$. 所需费用为

$$F(r) = 2a\pi r^2 + 2b\pi r h = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}.$$

显然, $F'(r) = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2}$.

令 $F'(r) = 0$, 也即 $r^3 = \frac{bV}{2a\pi}$; 这时高与底的直径之比为

$$\frac{h}{2r} = \frac{V}{2\pi r^3} = \frac{a}{b}.$$

(4) 【参考解答】： 由

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) [1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)],$$

$$\text{得 } I = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) [1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)]},$$

令 $u = \frac{\pi}{4} - x$, 得

$$\begin{aligned} I &= -\sqrt{2} \int \frac{du}{\cos u (1 + 2 \sin^2 u)} \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{d \sin u}{\cos^2 u (1 + 2 \sin^2 u)} \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = \sin u \Rightarrow \sqrt{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{2dt}{1+t^2} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \sqrt{2} \arctan \sqrt{2}t \right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{6} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \right| - \frac{2}{3} \arctan(\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)) + C$$

二、求下列极限：

$$(1) \text{ 【参考解答】: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - e$$

$$= e \left[e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right]$$

$$= e \left[\left\{ 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} - 1 \right] = e \left[-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\text{因此, } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] = -\frac{e}{2}.$$

(2) 【参考解答】：由泰勒公式有

$$a^{1/n} = e^{\frac{\ln a}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \ln a + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$b^{1/n} = e^{\frac{\ln b}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \ln b + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$c^{1/n} = e^{\frac{\ln c}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \ln c + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

因此,

$$\frac{1}{3} \left(a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n} \right) = 1 + \frac{1}{n} \ln \sqrt[3]{abc} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = \left[1 + \frac{1}{n} \ln \sqrt[3]{abc} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n.$$

令 $\alpha_n = \frac{1}{n} \ln \sqrt[3]{abc} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, 上式可改写成

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = \left[(1 + \alpha_n)^{1/\alpha_n} \right]^{n\alpha_n}$$

显然, $(1 + \alpha_n)^{1/\alpha_n} \rightarrow e \quad (n \rightarrow +\infty)$,

$n\alpha_n \rightarrow \ln \sqrt[3]{abc} \quad (n \rightarrow +\infty)$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = \sqrt[3]{abc}.$$

三、【参考解答】: 由题设可知:

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{y - 1} = f'(1) = 2.$$

令 $y = \sin^2 x + \cos x$, 那么当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$y = \sin^2 x + \cos x \rightarrow 1,$$

故由上式有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos x - 1} = 2$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \times \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2 + x \tan x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

【注】最后一步的极限可用常规的办法——洛比达法则或泰勒展开——求出.

四、【参考解答】: 设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = l$, 并令

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 则 } F'(x) = f(x),$$

并有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$.

对于任意的 $y > 0$, 有

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx &= \frac{1}{y} \int_0^y x dF(x) \\
 &= \frac{1}{y} x F(x) \Big|_{x=0}^{x=y} - \frac{1}{y} \int_0^y F(x) dx \\
 &= F(y) - \frac{1}{y} \int_0^y F(x) dx
 \end{aligned}$$

根据洛比达法则和变上限积分的求导公式，不难看出

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y F(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = l.$$

因此， $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx = l - l = 0$.

五、【参考证明】：(1) 令 $F(x) = f(x) - x$ ，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ ， $F(1) = -1 < 0$ ，所以，存在一个 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，使得 $F(\xi) = 0$ ，即 $f(\xi) = \xi$ 。

(2) 令 $G(x) = e^{-x}[f(x) - x]$ ，那么 $G(0) = G(\xi) = 0$ 。这样，存在一个 $\eta \in (0, \xi)$ ，使得 $G'(\eta) = 0$ ，即

$$G'(\eta) = e^{-\eta}[f'(\eta) - 1] - e^{-\eta}[f(\eta) - \eta] = 0.$$

也即 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$ 。

六、【参考证明】：因为

$$e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) < 1, \quad \forall t > 0,$$

$$\text{故有 } F\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{\frac{n}{2}} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt < \frac{n}{2}.$$

下面只需证明 $F(n) > \frac{n}{2}$ 即可。由于

$$\begin{aligned}
 F(n) &= \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt \\
 &= - \int_0^n \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) d e^{-t} \\
 &= 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) \\
 &\quad + \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt
 \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_0^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt \\ &= 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) \\ &\quad + 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &\quad + \dots + 1 - e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} \right) + 1 - e^{-n} \end{aligned}$$

记 $a_i = \frac{n^i}{i!}$ ，那么 $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。观察下面的方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_0 & 2a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & 2a_n \end{pmatrix}$$

整个矩阵的所有元素之和为

$$\begin{aligned} &(n+2)(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= (n+2) \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

基于上述观察，由 (*) 式我们便得到

$$\begin{aligned} F(n) &> n+1 - \frac{(n+2)}{2} e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) \\ &> n+1 - \frac{(n+2)}{2} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

七、【参考解答】：【思路一】：不存在. 假设存在 \mathbb{R}^1 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5.$$

考虑方程 $f(f(x)) = x$ ，即

$$1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5 = x, \text{ 或 } (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = 0.$$

此方程有惟一实数根 $x = 1$ ，即 $f(f(x))$ 有惟一不动点 $x = 1$ 。

下面说明 $x = 1$ 也是 $f(x)$ 的不动点。

事实上，令 $f(1) = t$ ，则

$$f(t) = f(f(1)) = 1, \quad f(f(t)) = f(1) = t,$$

因此 $t = 1$. 如所需. 记 $g(x) = f(f(x))$, 则一方面,

$$[g(x)]' = [f(f(x))]' \Rightarrow g'(1) = (f'(1))^2 \geq 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5)' \\ &= 2x + 4x^3 - 3x^2 - 5x^4 \end{aligned}$$

从而 $g'(1) = -2$. 矛盾. 所以, 不存在 \mathbb{R}^1 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5.$$

【思路二】: 满足条件的函数不存在. 理由如下:

首先, 不存在 $x_k \rightarrow +\infty$, 使 $f(x_k)$ 有界, 否则

$$f(f(x_k)) = 1 + x_k^2 + x_k^4 - x_k^3 - x_k^5$$

有界, 矛盾. 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. 从而由连续函数的介值性有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 或

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = -\infty, \text{ 矛盾.}$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = +\infty, \text{ 矛盾.}$$

因此, 无论哪种情况都不可能.

八、【参考证明】: 由于 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 只要 } |x_1 - x_2| < \delta \ (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0).$$

取一个充分大的自然数 m , 使得 $m > \delta^{-1}$, 并在 $[0, 1]$ 中取 m 个点:

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_m = 1,$$

其中 $x_j = \frac{j}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). 这样, 对于每一个 j ,

$$|x_{j+1} - x_j| = \frac{1}{m} < \delta.$$

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + n) = 0$, 故对于每一个 x_j , 存在一个 N_j 使得 $|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 只要 $n > N_j$, 这里的 ε 是前面给定的.

令 $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, 那么只要 $n > N$, 则

$$|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $j = 1, 2, \dots, m$. 设 $x \in [0, 1]$ 是任意一点, 这时总有一个 x_j 使得 $x \in [x_j, x_{j+1}]$.

由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续性及 $|x - x_j| < \delta$, 可知,

$$|f(x_j + n) - f(x + n)| < \frac{\varepsilon}{2} (\forall n = 1, 2, \dots);$$

另一方面, 只要 $n > N$, 则 $|f(x_j + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

这样, 由后面证得的两个式子就得到: 只要

$$n > N, x \in [0, 1], \text{ 则 } |f(x + n)| < \varepsilon,$$

注意到这里的 N 的选取与点 x 无关, 这就证实了函数序列 $\{f(x + n) : n = 1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.



考研竞赛数学(ID:xwmath)
一个专注于大学数学公共基础课
资源分享的微信公众平台
高等数学, 线性代数
概率论与数理统计
考研数学, 竞赛数学
数学文化, 实验与建模
大学学习、生活历程
因为专业, 所以精彩

考研竞赛数学(xwmath)