2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类三、四年级）试卷

一、(本题 15 分) 设 S 为 R^3 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$，$P=\left(a,b,c\right)$ 为 S 外一固定点，满足 $a^2+b^2>2c$．过 P 作 S 的所有切线．证明：这些切线的切点落在同一张平面上．

二、（本题 15 分） 设实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x^TAx$，其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数．已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值．试回答以下问题：

(1) A 能否相似于对角矩阵；若能，请给出证明；若不能，请给出例子；

(2) 当 $a_0=2$ 时，试求 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 在正交变换下的标准型．

三、（本题 20 分） 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数，

$$f(0)=0,f'\left(x\right)\le\frac{1}{2}.$$

假设 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛．求证：对于任意 $\alpha>1$，$\int_0^{+\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛，并且

$$\int_0^{+\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\le\left(\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta},\beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

四、（本题 20 分） 对多项式 $f(x)$，记 $\mathrm{d}\left(f\right)$ 表示其最大和最小实根之间的距离．设 $n\ge2$ 为自然数．求最大实数 C，使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$，都有

$$\mathrm{d}\left(f'\right)\ge C\,\mathrm{d}\left(f\right).$$

五、（常微分方程 15 分） 设 $f\left(x,y\right)$ 为 $\left[a,b\right]\times R$ 上关于 y 单调下降的二元函数．设 $y=y\left(x\right),z=z\left(x\right)$ 是可微函数，且满足：

$$y'=f\left(x,y\right),z'\le f\left(x,z\right),x\in\left[a,b\right]$$

已知 $z\left(a\right)\le y\left(a\right)$．求证：$z\left(x\right)\le y\left(x\right),x\in\left[a,b\right]$．

六、(复变函数 15 分) 设 $D=\left\{z\in C:|z|<1\right\}$ 是单位圆盘，非常数函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，且当 $|z|=1$ 时，$\left|f(z)\right|=1$．证明：$f\left(D\right)=D$．

七、（实变函数 15 分） 设 E_k 是一列可测集，$f\in L_{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)}$．

1)令 $A=\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k$，证明 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)\,\mathrm{d}m$.

2)令 $B=\underline{\lim_{k\to\infty}}E_k$，证明 $\int_B f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)\,\mathrm{d}m$.

3)如果 $\left\{E_k\right\}$ 是单调的．求证：$\lim_{k\to\infty}E_k=E$ 存在，且有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,m=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}\,m.$$

八、(微分几何 15 分) 设Γ是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线，l是Γ的准线. 将Γ绕其准线l旋转一周，得到旋转曲面S. 求S的两个主曲率的比值.

九、(概率统计 15 分) 一只盒子中装有标上 1 到N的N张票券，有放回地一张一张的抽取，若我们想收集r张不同的票券，则要期望抽多少次才能得到它们？当然假设取得每张票券是等可能的，各次抽取是独立的.

十、(抽象代数 15 分) 设群$G=AB$，其中A,B均为G的 Abel 子群，且$AB=BA$. $\forall g_1,g_2\in G$，用$[g_1,g_2]$表示换位子，即$[g_1,g_2]=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$，$G'$表示$G$的换位子群（即由$G$的换位子所生成的子群）. 证明：

(a) $\forall a,x\in A,\forall b,y\in B$有下式成立：

$$[x^{-1},y^{-1}][a,b][x^{-1},y^{-1}]^{-1}=[a,b].$$

(b) G'为 Abel 群.

十一、(数值分析 15 分) 给定多项式序列

$$T_0(x)=1,T_1(x)=x,$$
$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),n=1,2,\cdots$$

求证：(1) 当$x\in[-1,1]$时，$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$.

(2) 设$C[-1,1]$是区间$[-1,1]$上连续函数构成的内积空间，其中内积定义为

$$<f,g>:=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x,$$

则$T_n(x)$是该内积空间的正交多项式，即当$n\neq m$时，$<T_n(x),T_m(x)>=0$.

(3) 设$P(x)$是次数为n的首项系数为 1 的多项式，求证：$\|P(x)\|_\infty\geq\dfrac{1}{2^{n-1}}$且等号成立当且仅当$P(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$，这里$\|P(x)\|_\infty=\max\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)|$.