2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛
(非数学类）参考答案

一、填空题

(1)【参考解答】:

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}\left(\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u\right)}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\left(\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u\right)}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$

(2)【参考解答】: 令 $p=y'$，则微分方程转换为 $p'-ap^2=0$，分离变量后有

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=a\,\mathrm{d}x\Rightarrow-\frac{1}{p}=ax+C_1.$$

由 $p(0)=-1\Rightarrow C_1=0$. 所以有 $y'=-\dfrac{1}{ax}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{a}\ln\left(ax+C_2\right)$.

由 $y(0)=0\Rightarrow C_2=1$，所以解为 $y=-\dfrac{1}{a}\ln\left(ax+1\right)$.

(3)【参考解答】: 记 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 B^2 为零矩阵，故有

$$A^{50}=\left(\lambda E+B\right)^{50}=\lambda^{50}E+50\lambda^{49}B=\begin{pmatrix}\lambda^{50}&0&0\\0&\lambda^{50}&0\\-50\lambda^{49}&50\lambda^{49}&\lambda^{50}\end{pmatrix}.$$

(4)【参考解答】: $I=\displaystyle\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C.$

或者 $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]+C.$

(5)【参考解答】: 曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，记该曲线所围区域为 D. 由格林公式，有

$$I=\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(1+1\right)\mathrm{d}\sigma=2\sigma\left(D\right)=4.$$

(6)【参考解答】: 设 $F\left(t\right)=\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D f^t\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma$，则

$$\lim_{n\to+\infty}J_n=\lim_{t\to0+}\left(F\left(t\right)\right)^{1/t}=\lim_{t\to0+}\exp\left[\frac{\ln F\left(t\right)}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln F\left(t\right)-\ln F\left(0\right)}{t-0}=\left(\ln F(t)\right)'\bigg|_{t=0}=\frac{F'\left(0\right)}{F\left(0\right)}=F'\left(0\right).$$

故有 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\exp\left(F'\left(0\right)\right)=\exp\left(\dfrac{1}{A}\iint\limits_D \ln f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma\right).$

二、【参考证明】：设 $\vec{l}_j, j=1,2,\cdots,n$ 都为单位向量，且设

$$\vec{l}_j=\left(\cos\left(\theta+\frac{j2\pi}{n}\right),\sin\left(\theta+\frac{j2\pi}{n}\right)\right),$$
$$\nabla f\left(P_0\right)=\left(\frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial x},\frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial y}\right),$$

则有 $\dfrac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial \vec{l}_i}=\nabla f\left(P_0\right)\cdot\vec{l}_j$. 因此

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial \vec{l}_i}=\sum_{j=1}^{n}\nabla f\left(P_0\right)\cdot\vec{l}_j=\nabla f\left(P_0\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\vec{l}_j=\nabla f\left(P_0\right)\cdot\vec{0}=0.$$

三、【参考证明】：若存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PA_iQ=B_i\left(i=1,2\right)$，则 $B_2^{-1}=Q^{-1}A_2^{-1}P^{-1}$，所以 $B_1B_2^{-1}=PA_1A_2^{-1}P^{-1}$，故 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似. 反之，若 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似，则存在可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}A_1A_2^{-1}C=B_1B_2^{-1}$. 于是 $C^{-1}A_1A_2^{-1}CB_2=B_1$. 令 $P=C^{-1}$，$Q=A_2^{-1}CB_2$，则 P,Q 可逆，且满足 $PA_iQ=B_i\left(i=1,2\right)$.

四、【参考证明】：记 $y_n=x_n^p$，则由题设，有 $y_{n+1}=y_n+y_n^2$，$y_{n+1}-y_n=y_n^2\ge 0$，所以 $y_{n+1}\ge y_n$. 设 y_n 收敛，即有上界，记

$$A=\lim_{n\to\infty}y_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^p>0,$$

从而 $A=A+A^2$，所以 $A=0$. 矛盾. 故 $y_n\to+\infty$. 由 $y_{n+1}=y_n\left(1+y_n\right)$，即

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n+y_n^2}=\frac{1}{y_n}-\frac{1}{1+y_n},$$

于是可得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{y_k}-\frac{1}{y_{k+1}}\right)=\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{n+1}}\to\frac{1}{y_1}=4^p.$

五、【参考解答】：(1) $f\left(x\right)$ 为偶函数，其傅里叶级数是余弦级数. $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi.$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2}, n=1,3,\cdots\\ 0, n=2,4,\cdots\end{cases}$$

由于 $f\left(x\right)$ 连续，所以当 $x\in[-\pi,\pi)$ 时，有

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

令 $x=0$ 得到 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2k+1\right)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$. 记

$$s_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\ s_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}.$$

则 $s_1-s_2=\dfrac{1}{4}s_1$. 故 $s_1=\dfrac{4s_2}{3}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) 令 $g\left(u\right)=\dfrac{u}{1+e^u}$ ，则在 $[0,+\infty)$ 上成立

$$g\left(u\right)=\frac{ue^{-u}}{1+e^{-u}}=ue^{-u}-ue^{-2u}+ue^{-3u}-\cdots$$

记该级数的前 n 项和为 $S_n\left(u\right)$，余项为 $r_n\left(u\right)=g\left(u\right)-S_n\left(u\right)$，则由交错（单调）级数的性质 $\left|r_n\left(u\right)\right|\le ue^{-(n+1)u}$. 因为 $\int_0^{+\infty}ue^{-nu}\,\mathrm{d}\,u=\dfrac{1}{n^2}$，就有

$$\int_0^{+\infty}\left|r_n\left(u\right)\right|\mathrm{d}\,u\le\frac{1}{(n+1)^2},$$

于是有

$$\int_0^{+\infty}g\left(u\right)\mathrm{d}\,u=\int_0^{+\infty}S_n\left(u\right)\mathrm{d}\,u+\int_0^{+\infty}r_n\left(u\right)\mathrm{d}\,u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k^2}+\int_0^{+\infty}r_n\left(u\right)\mathrm{d}\,u$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}r_n\left(u\right)\mathrm{d}\,u=0$，故 $I=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots$，所以 $I+\dfrac{1}{2}s_1=s_1$. 再由(1)所证明的结果，得 $I=\dfrac{s_1}{2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

六、【参考证明】: (1) 由于 $f\left(x,y\right)$ 非负，所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma\le\iint\limits_{-t\le x,y\le t}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma\le\iint\limits_{x^2+y^2\le 2t^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\,\sigma$$

当 $t\to+\infty$，上式中左右两端极限都收敛于 I，故结论成立.

(2) 记 $I\left(t\right)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}e^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\,\sigma$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}I\left(t\right)=I$. 记 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$，则

$$ax^2+2bxy+cy^2=\left(x,y\right)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

因 A 实对称，存在正交矩阵 P 使得 $P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，其中 λ_1,λ_2 是 A 的特征值，也就是标准型的系数.

在变换 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ 下 $ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$. 又由于

$$u^2+v^2=(u,v)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=P(x,y)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}P^T=\left(x^2+y^2\right)PP^T=x^2+y^2,$$

故变换把圆盘 $x^2+y^2\le t^2$ 变为 $u^2+v^2\le t^2$，且

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=|P|=1,$$

$$I(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\le t^2} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{u^2+v^2\le t^2} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

由 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=I$ 和(1)所证的结果，得

$$\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\le u,v\le t} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=I.$$

在矩形上分离积分变量得

$$\iint\limits_{-t\le u,v\le t} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_{-t}^{t}e^{\lambda_1u^2}\,\mathrm{d}u\int_{-t}^{t}e^{\lambda_1v^2}\,\mathrm{d}v=I_1(t)I_2(t).$$

因为 $I_1(t),I_2(t)$ 都严格单增，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}e^{\lambda_1u^2}\,\mathrm{d}u$ 收敛，所以有 $\lambda_1<0$；同理有 $\lambda_2<0$.