2009年第一届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、填空题(本题共4个小题，每题5分，共20分)：

(1) 计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ =__________，其中区域D由直线$x+y=1$与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$是连续函数，满足$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则$f(x)$=______.

(3) 曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$的切平面方程是__________.

(4) 设 $y=y(x)$由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$确定，其中 f具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$=__________.

第二题：(5分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n是给定的正整数.

第三题：(15 分)设函数 $f\left(x\right)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

第四题：(15分)已知平面区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,0\le y\le \pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证：(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\ge \dfrac{5}{2}\pi^2$.

第五题：(10 分)已知$y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

第六题：(10分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$过原点，当 $0\le x\le 1$时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与x轴及直线$x=1$所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定a,b,c 使此图形绕 x轴旋转一周而成的旋转体的体积V最小.

第七题：(15分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$为正整数)，且$u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$之和.

第八题：(10分)求$x\to 1-$ 时，与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.