

2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛

(数学类三、四年级) 试卷

(前 4 大题为必答题, 从 5-10 大题中任选三题)

一、填空题 (本题满分 20 分, 每小题 5 分)

(1) 设实方阵 $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & I \\ I & H_n \end{pmatrix}, n \geq 1$, 其中 I 是与 H_n 同阶的单位

方阵, 则 $\text{rank}(H_4) =$ _____

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{x^3} =$ _____

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x = \pi \sin(t/2) \\ y = t - \sin t \\ z = \sin 2t \end{cases}, t: 0 \rightarrow \pi$, 则第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} e^{\sin x} (\cos x \cos y dx - \sin y dy) + \cos z dz$$

则为 _____

(4) 设二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$, 其中

$n > 1, a \in \mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 _____

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下, 设有椭球面

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

及 S 外部一点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ . 证明: 存在平面 Π , 使得交线 $S \cap \Sigma = S \cap \Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

三、(本题 15 分) 设 A, B, C 均为 n 阶复方阵, 且满足

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB$$

- (1) 证明: C 是幂零方阵;
- (2) 证明: A, B, C 同时相似于上三角阵;
- (3) 若 $C \neq 0$, 求 n 的最小值.

四、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geq 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

五、(本题 10 分) (抽象代数) 设 G 为群, 且满足: $\forall x, y \in G, (xy)^2 = (yx)^2$. 证明:

$\forall x, y \in G$, 元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过 2.

六、(本题 10 分) (实变函数) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集满足 $m(E) < \infty$. 设 $f, f_k \in L^2(E)$, 在 E 上几乎处处有 $f_k \rightarrow f$, 且

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(t)|^2 dt \leq \int_E |f(t)|^2 dt < \infty$$

求证:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(t) - f(t)|^2 dt = 0$$

七、(本题 10 分) (微分几何) 已知椭圆柱面 S :

$$r(u, v) = \{a \cos u, b \sin u, v\}, \quad -\pi \leq u \leq \pi, \quad -\infty < v < +\infty$$

(1) 求 S 上任意测地线的方程;

(2) 设 $a = b$. 取

$$P = (a, 0, 0), Q = (a \cos u_0, a \sin u_0, v_0) (-\pi < u_0 < \pi, -\infty < v_0 < +\infty).$$

写出 S 上连接 P, Q 两点的最短曲线的方程.

八、(本题 10 分) (数值分析) 推导求解线性方程组的共梯度法的计算格式, 并证明该格式经有限步迭代后收敛.

九、(本题 10 分) (复变函数) 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析, 在其边界上连续. 若在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| = 1$. 证明 $f(z)$ 为有理函数.

十、(本题 10 分) (概率统计) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立同分布的随机变量, 其有共同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$. 现对随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 按大小顺序重新排列为 $X_{n1} \leq X_{n2} \leq \dots \leq X_{nn}$

(1) 求随机变量 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合概率密度函数 $f_{1n}(x, y)$;

(2) 如果 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 求随机变量 $U = X_{nn} + X_{n1}$ 的密度函数 $f_U(u)$.