2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、简答下列各题(本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n!\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

2．求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $\left(4,-3,1\right)$.

3．已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

4．设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int\limits_L\left(x+2y\right)u\,\mathrm{d}\,x+\left(x+u^3\right)u\,\mathrm{d}\,y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

5．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}\,t.$

第二题：(10 分)计算 $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,|\sin x\,|\,\mathrm{d}\,x.$

第三题：(10 分)求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 $0.001.$

第四题：(12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

第五题：(12 分)求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}\,x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\,x\le C.$$

第六题：(12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0.$ Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，求 $F'(t)$.

第七题：(14 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.