

2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类) 参考答案

一、【参考证明】：将双曲线图形进行 45 度旋转，可以假定双曲线方程为 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$. 设直线 l 交双曲线于 $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(ta, \frac{1}{ta}\right), (t > 1)$, 与双曲线所围的面积为 A , 则有

线于 $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(ta, \frac{1}{ta}\right), (t > 1)$, 与双曲线所围的面积为 A , 则有

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t}\right) (t-1) - \int_a^{ta} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t}\right) (t-1) - \ln t = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) - \ln t.$$

令 $f(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) - \ln t$. 由

$$f(1) = 0, f(+\infty) = +\infty, f'(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) > 0 (t > 1)$$

所以对于常数 A , 存在唯一常数 t , 使得 $A = f(t)$. l 与双曲线的截线段中点坐标为

$$x = \frac{1}{2} (1+t)a, y = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{a}.$$

于是, 中点的轨迹曲线为 $xy = \frac{1}{4} (1+t) \left(1 + \frac{1}{t}\right)$. 故终点轨迹为双曲线, 也就是函数

$$y = \frac{1}{4} (1+t) \left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{x}$$

给出的曲线. 该曲线在上述终点处的切线的斜率为

$$k = -\frac{1}{4} (1+t) \left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{ta^2},$$

它恰好等于过两交点 $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(ta, \frac{1}{ta}\right)$ 的直线 l 的斜率:

$$\frac{\frac{1}{ta} - \frac{1}{a}}{ta - a} = -\frac{1}{ta^2}.$$

故 l 为轨迹曲线的切线.

二、【参考证明】：由题设 $x_1 \in [a, b], f(x) \in [a, b], x_2 = \frac{1}{2} (x_1 + f(x_1)) \in [a, b], \dots$ 继续下去, 对于任意 $n \geq 1$, 有 $a \leq x_n \leq b$, 所以 x_n 对任意 $n \geq 1$ 有意义. 由条件(ii), 有

$$\begin{aligned} |x_3 - x_2| &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))| \leq \frac{1}{2} (|x_2 - x_1| + |f(x_2) - f(x_1)|) \\ &\leq \frac{1}{2} (|x_2 - x_1| + L|x_2 - x_1|) = \frac{1}{2} (1 + L) |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

类似可以推出 $|x_4 - x_3| \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^2 |x_2 - x_1|$. 继续下去, 有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|, \forall n \geq 3.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+L}{2}\right)^k$ 收敛, 从而 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$ 收敛, 当然 $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ 也收敛. 故其前 n 项部

分和 $\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时极限存在, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda, a \leq \lambda \leq b.$$

由条件(2)可知, $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 从而是连续的. 在 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 中令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + f(\lambda))$, 即 $f(\lambda) = \lambda$.

三、【参考证明】: 1) 首先, $|A| = 2^n |A_1|$, 其中 $A_1 = \frac{1}{2}A$, 它的所有元素为 1 或 -1.

$$\begin{aligned} 2) \text{ 当 } n=3 \text{ 时, } |A_1| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &\triangleq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6. \end{aligned}$$

上式 b_i 每项为 ± 1 , 且六项的乘积为 -1 , 至少有一个 b_i 为 -1 . 从而这六项中至少有两项抵消, 故有

$$|A_1| \leq \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3!. \text{ 于是命题对于 } n=3 \text{ 成立.}$$

3) 设此命题对于一切这样的 $(n-1)$ 阶方阵成立, 那么对于 n 阶矩阵的情形, 将 $|A|$ 按第一行展开, 记 1 行 k 列的代数余子式为 M_{1k} , 便有

$$\begin{aligned} |A| &= \pm 2M_{11} \pm 2M_{12} + \cdots \pm 2M_{1n} \leq 2(|M_{11}| + |M_{12}| + \cdots + |M_{1n}|) \\ &\leq 2n \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^n \cdot (n-1)! = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} \cdot n!. \end{aligned}$$

四、【参考证明】: 因为 $f(x)$ 不是一次函数, 故存在 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 使得三点

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$$

不共线. 不妨设 $f(x_2) - \left(f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)\right) > 0$. 令

$$g(x) = -\varepsilon(x - x_2)^2 + f(x_2) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_2).$$

取定 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得

$$g(x_1) > f(x_1), g(x_3) > f(x_3).$$

令 $h(x) = g(x) - f(x)$ ，则

$$h(x_1) > 0, h(x_3) > 0 \text{ 且 } h(x_2) = 0.$$

令 $h(\xi) = \min_{x \in [x_1, x_3]} h(x)$ ，则 $h(\xi) \leq 0, \xi \in (x_1, x_3)$ ，且 $f'(\xi) = g'(\xi)$ 。故

$$f(x) \leq g(x) - h(\xi), x \in (x_1, x_3).$$

注意到 $g(x) - h(\xi)$ 的图像是一个开口向下的抛物线，故对 $x \neq \xi$ 有

$$g(x) - h(\xi) < g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) - h(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi),$$

即 $f(x) < f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi), x \in (x_1, x_3) \setminus \{\xi\}$ 。

五、【参考解答】：首先

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 |A| - x_2 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{12} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -12x_1^2 + (x_1, x_3, x_4) A^* \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 为关于 x_1, x_2, x_3, x_4 的二次型。

其次，由 $(A^* - 4I)x = 0$ 得 $(|A|I - 4A)x = 0$ ，即 $(A + 3I)x = 0$ 。

故由 $(1, 0, -2)^T$ 为 $(A^* - 4I)x = 0$ 的一个解知， A 有特征值 -3 。现在设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, -3$ ，于是由 $|A| = -12$ 及 A 的特征值之和为 1 ，得方程组

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 3 = 1, 3\lambda_1\lambda_2 = -12,$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 。所以 A 的特征值为 $2, 2, -3$ 。结果，对应特征值 -3 的特征空间 V_{-3} 的维数为 1 ，对应特征值 2 的特征空间的维数 V_2 为 2 。注意到 $(1, 0, -2)^T$ 是 A 对应于特征值 -3 的一个特征向量，因此它是 V_{-3} 的基。求解下列现象方程组的基础解系： $t_1 - 2t_3 = 0$ ，得到正交基础解：

$$\alpha = (0, 1, 0)^T, \beta = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T,$$

且令 $\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^T$ ，则 α, β 为 V_2 的标准正交基， α, β, γ 为 R^3 的标准正交基。

事实上，因为 A 为实对称矩阵， $V_2 = V_3^\perp$ ，它是唯一的，维数为 2 。现在 A 可写成

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1},$$

其中 $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. 从而得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} P^T,$$

$$A^* = |A| A^{-1} = -12P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T.$$

令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 则由 P 为正交矩阵知 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 为正交变换, 其中

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

它使得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -12x_1^2 + (x_1, x_3, x_4) P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= -12y_1^2 - 6y_2^2 - 6y_3^2 + 4y_4^2. \end{aligned}$$

为 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准型.

六、【参考证明】: 我们证明对任意 n 次首一实系数多项式, 都有 $\int_b^{b+a} |P(x)| dx \geq c_n a^{n+1}$, 其中 c_n 满

足 $c_0 = 1, c_n = \frac{n}{2^{n+1}} c_{n-1}, n \geq 1$. 对 n 用数学归纳法. $n = 0, P(x) = 1$, 则

$$\int_b^{b+a} |P(x)| dx = a \geq c_0 a,$$

结论成立. 设结论在 $k \leq n-1$ 时成立. 设 $P(x)$ 是 n 次首一实系数多项式, 则对任意给定的 $a > 0$,

$$Q(x) = \frac{2}{na} \left(P\left(x + \frac{a}{2}\right) - P(x) \right)$$

是一个 $(n-1)$ 次首一多项式, 由归纳法假设, 有 $\int_b^{b+a/2} |Q(x)| dx \geq \frac{c_{n-1}}{2^n} a^n$. 由此推出

$$\begin{aligned} \int_b^{b+a} |P(x)| dx &= \int_b^{b+a/2} \left| P(x) + \left(P\left(x + \frac{a}{2}\right) - P(x) \right) \right| dx \\ &\geq \int_b^{b+a/2} \left| P\left(x + \frac{a}{2}\right) - P(x) \right| dx = \frac{na}{2} \int_b^{b+a/2} |Q(x)| dx \geq \frac{na}{2} c_{n-1} \left(\frac{a}{2}\right)^n = c_n a^{n+1}. \end{aligned}$$



考研竞赛数学(ID:xwmath)

一个专注于大学数学公共基础课

资源分享的微信公众平台

高等数学, 线性代数

概率论与数理统计

考研数学, 竞赛数学

数学文化, 实验与建模

大学学习、生活历程

因为专业, 所以精彩

考研竞赛数学(xwmath)