2014 年第五届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类三、四年级）参考答案

一、【参考证明】：设 l 是过 P 点的抛物面 S 的一条切线，它的方向向量为 $V=\left(u,v,w\right)$，则切点可以表示为

$$Q=P+tV=\left(a+tu,b+tv,c+tw\right),$$

其中 t 是二次方程 $2\left(c+tw\right)=\left(a+tu\right)^2+\left(b+tv\right)^2$，也就是

$$\left(u^2+v^2\right)t^2+2\left(au+bv-w\right)t+\left(a^2+b^2-2c\right)=0$$

的唯一重根.

这时，$\left(au+bv-w\right)^2=\left(u^2+v^2\right)\left(a^2+b^2-2c\right)$，得 $t=\dfrac{w-au-bv}{u^2+v^2}=\dfrac{a^2+b^2-2c}{w-au-bv}$.

于是切点 $Q=\left(X,Y,Z\right)=\left(a+tu,b+tv,c+tw\right)$ 满足

$$aX+bY-Z=\left(a^2+b^2-c\right)+t\left(au+bv-w\right)=c.$$

于是所有切点 Q 落在平面 $ax+by-z=c$ 上.

二、【参考证明】：**(1)** 由于 $\mathrm{tr}(A)$ 是 A 的特征值之和，得 λ_1 的代数重数也是 3，而 A 的另一特征值 $\lambda_2=0$，且 $\lambda_2=0$ 的代数重数为 1. 结果 A 有四个线性无关的特征向量. 故 A 可对角化.

(2) 由于 $\lambda_1=2$ 的重数为 3，故有

$$rank(A-2E)=rank\begin{pmatrix}0&2&2&-2\\a&-2&b&c\\d&e&-2&f\\g&h&k&2\end{pmatrix}.$$

进而 $a/0=-2/2=b/2=c/-2$，得 $a=0,b=-2,c=2$;
$d/0=e/2=-2/2=f/-2$，得 $d=0,e=-2,f=2$;
$g/0=h/2=k/2=2/-2$，得 $g=0,h=-2,k=-2$，

于是 $A=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&-2&2\\0&-2&0&2\\0&-2&-2&4\end{pmatrix}$. 注意到 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x^TAx=x^TBx$，其中

$$B=\frac{A+A^T}{2},B=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&-2&0\\1&-2&0&0\\-1&0&0&4\end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1=2$（二重），$\lambda_{1,2}=1\pm 2\sqrt{3}$（一重）．故 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2+2y_2^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)y_3^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)y_4^2$.

三、【参考证明】: 令 $g(t)=\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^\beta-\int_0^t f^\alpha(x)\,\mathrm{d}\,x$，则 $g(t)$ 可导，

$$g'(t)=f\left(t\right)\left[\beta\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^{\beta-1}-f^{\alpha-1}(t)\right].$$

令 $h(t)=\beta^{\frac{1}{\beta-1}}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x-f^2(t)$，则有 $h'(t)=f\left(t\right)\left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}}-2f'(t)\right]$.

由于 $\beta>1,f'\left(x\right)\le\frac{1}{2}$，我们有 $h'(t)\ge 0$．这说明 $h\left(t\right)$ 单调递增，从 $h\left(0\right)=0$，得 $h\left(t\right)\ge 0$．因而 $g'\left(t\right)\ge 0$．从 $g\left(0\right)=0$，得 $g\left(t\right)\ge 0$，即

$$\int_0^t f^\alpha(x)\,\mathrm{d}\,x\le\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^\beta.$$

令 $t\to+\infty$，即得所证.

四、【参考证明】: $C_{\max}=\sqrt{1-\frac{2}{n}}$.不妨设 $f(x)$ 的最小实根为 0，最大实根为 a．设

$$f\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_n\right),$$
$$0=x_1\le x_2\le\cdots\le x_n=a.$$

先证以下引理：

引理: 若存在 $2\le k,m\le n-1$ 使得 $x_k<x_m$，
令 $x_k<x_k'\le x_m'<x_m$ 满足 $x_k+x_m=x_k'+x_m'$，令

$$f_1\left(x\right)=\left(x-x_1'\right)\left(x-x_2'\right)\cdots\left(x-x_n'\right),x_i'=x_i,i\ne k,m.$$

则 $\mathrm{d}\left(f_1'\right)\le\mathrm{d}\left(f'\right)$.

证明: 注意到 $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)-\delta F(x)$，其中

$$F(x)=\frac{f_1\left(x\right)}{\left(x-x_k'\right)\left(x-x_m'\right)},\delta=x_k'x_m'-x_kx_m>0.$$

设 α,β 分别为 $f_1'(x)$ 的最大最小实根，则有 $f_1\left(\alpha\right)\le 0,f_1\left(\beta\right)\left(-1\right)^n\le 0.$ 由罗尔定理 $\alpha\ge x_m,\beta\le x_k$，并且

$$f'(\alpha)=\delta\frac{\left(2\alpha-x_k'-x_m'\right)}{\left(\alpha-x_k'\right)^2\left(\alpha-x_m'\right)^2}f_1(\alpha).$$

则 $f'(\alpha)f_1(\alpha)\ge 0$，故 $f'(\alpha)\le 0$．这表明 $f'(x)=0$ 的最大实根大于或等于 α. 同理，$f'(x)=0$ 最

小实根小于或等于β. 引理证毕. 令

$$g(x)=x(x-a)(x-b)^{n-2},b=\frac{x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到$\mathrm{d}(f')\geq \mathrm{d}(g')$. 由于

$$g'(x)=(x-b)^{n-3}\left(nx^2-\left((n-1)a+2b\right)x+ab\right),$$

$$\mathrm{d}(g')=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{n}+\left(\frac{a-2b}{n}\right)^2}\geq\sqrt{1-\frac{2}{n}}a.$$

于是C的最大值$C_{\max}\geq\sqrt{1-\frac{2}{n}}$, 且当$f(x)=x(x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)^{n-2}$时,

$$\mathrm{d}(f')=\sqrt{1-\frac{2}{n}}\,\mathrm{d}(f).$$

五、【参考证明】: 用反证法. 设存在$x_0\in[a,b]$使得$z(x_0)>y(x_0)$.

令$M=\{x\in[a,b]\mid z(x)>y(x)\}$,则$M$为$[a,b]$的非空开子集. 故存在开区间$(\alpha,\beta)\subset M$满足

$$y(\alpha)=z(\alpha),z(x)>y(x),x\in(\alpha,\beta).$$

这推出$z(x)-y(x)$单调不增，故$z(x)-y(x)\leq z(a)-y(a)=0$. 矛盾.

六、【参考证明】: 因为当$|z|=1$时, $|f(z)|=1$, 所以根据极大模原理, 在D上$|f(z)|<1$, 即$f(D)\subset D$.

若存在$a\in D$使得$a\notin f(D)$，则函数$g(z)=\dfrac{1-\bar{a}f(z)}{f(z)-a}$以及$1/g(z)$在$D$上解析，并容易验证当$|z|=1$时，$|g(z)|=1$. 因此，根据极大模原理，在$D$上有$|g(z)|\leq 1,|1/g(z)|\leq 1,$ 这说明在D上有$|g(z)|=1$. 因为模为常数的解析函数是常数，所以$g(z)$在D上为常数，从而$f(z)$在D上为常数，这与题设矛盾. 这就证明了$f(D)=D$.

七、【证明】: 1) $A=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$. 其中$F_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$，则

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset F_{n+1}\supset\cdots$$

因为$f\in L_{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)}\Rightarrow f\in L_{F_n},\forall n\geq 1\Rightarrow f\in L_A$. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x),x\in F_n,\\0,x\notin F_n.\end{cases}$$

i) $f_n(x)$可测，$\forall n\geq 1;$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x),x\in R;$ $x\in R$，若$x\in A$，则$f(x)\chi_A(x)=f(x)$，又

$$x\in A=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n,\forall n\geq 1,f_n(x)=f(x).$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x)$.

若 $x\notin A, f(x)\chi_A(x)=0$. 而

$$x\notin A=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n, \exists n_0, x\notin F_{n_0},\quad \{F_n\}\downarrow, \forall n\ge n_0, x\notin F_n,$$

$$f_n(x)=0,\ \text{即}\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x)$.

iii) $|f_n(x)|\le|f(x)|\chi_{F_1}(x), \forall n\ge 1$，且 $|f(x)|\chi_{F_1}(x)\in L_R$.

由控制收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_R f_n(x)\,\mathrm{d}m=\int_R\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}m$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}f(x)\,\mathrm{d}m$$
$$=\int_R f(x)\chi_A(x)\,\mathrm{d}m=\int_A f(x)\,\mathrm{d}m$$

2) $B=\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 其中 $F_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k$，则

$$F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset F_{n+1}\subset\cdots f\in L_{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)}$$
$$\Rightarrow f\in L_{F_n}, \forall n\ge 1\Rightarrow f\in L_B.$$

令 $f_n(x)=\begin{cases}f(x), x\in F_n,\\ 0, x\notin F_n.\end{cases}$

i) $f_n(x)$ 可测，$\forall n\ge 1$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), x\in B$;

iii) $|f_n(x)|\le|f(x)|, x\in B$ 且 $|f(x)|\chi_{F_1}(x)\in L_R$.

由控制收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_B f_n(x)\,\mathrm{d}m=\int_B f(x)\,\mathrm{d}m$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}f(x)\,\mathrm{d}m$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_B f_n(x)\,\mathrm{d}m=\int_B f(x)\,\mathrm{d}m.$$

3) 若 $\{E_k\}\uparrow\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\varlimsup\limits_{k\to\infty}E_k=\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E$. 由 2)，$F_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k=E_n$，

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}m.$$

若 $\{E_k\}\downarrow\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\varlimsup\limits_{k\to\infty}E_k=\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=E$. 由 1) $F_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k=E_n$，

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}m.$$

八、【参考解答】：在空间选取坐标系，使得准线 l 为 z-轴，抛物线 Γ 落在 Oxz 平面上，且抛下顶点为 $P=(p,0,0)$，焦点为 $F=(2p,0,0)$. 由于抛物线上的任意点 $X=(x,0,z)$ 满足 $|XF|=x$，我们得到 $(x-2p)^2+z^2=x^2$. 故抛物线方程为 $x=p+\frac{1}{4p}z^2$. 记 $f(z)=p+\frac{1}{4p}z^2$，这是旋转面 S 的方程

可表示为

$$\gamma=\gamma(z,\theta)=\left(f(z)\cos\theta,f(z)\sin\theta,z\right),\theta\in[0,2\pi],z\in R$$
$$\gamma_\theta=\left(-f(z)\sin\theta,f(z)\cos\theta,0\right),$$
$$\gamma_z=\left(f'(z)\cos\theta,f'(z)\sin\theta,1\right),$$

则 S 的单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{f'(z)^2+1}}\left(\cos\theta,\sin\theta,-f'(z)\right),$$
$$\gamma_{\theta\theta}=\left(-f(z)\cos\theta,-f(z)\sin\theta,0\right),$$
$$\gamma_{\theta z}=\left(-f'(z)\sin\theta,f'(z)\cos\theta,0\right),$$
$$\gamma_{zz}=\left(f''(z)\cos\theta,f''(z)\sin\theta,0\right),$$

于是，旋转面的第一基本形式 $I=E\,\mathrm{d}\theta^2+2F\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z+G\,\mathrm{d}z^2$ 和第二基本形式 $II=L\,\mathrm{d}\theta^2+2M\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z+N\,\mathrm{d}z^2$ 为

$$E=f(x)^2,F=0,G=f'(z)^2+1$$
$$L=-\frac{f(z)}{\sqrt{f'(z)^2+1}},M=0,N=\frac{f''(z)}{\sqrt{f'(z)^2+1}}$$

因为 $k_1=L/E,k_2=N/G$，我们得到

$$\frac{k_1}{k_2}=LG/EN=-\frac{f'(z)^2+1}{f(z)f''(z)}=-2.$$

【注】根据 k_1,k_2 的不同排序，也可以是 $\dfrac{k_1}{k_2}=-\dfrac{1}{2}$.

九、【参考解答】：这个问题可以看作是一种等待时间问题. 我们等待第 r 张新票券出现. 以 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 依次表示对一张新票券的等待时间. 因为第一次抽到的总是新的，所以 $\xi_1=1$. 于是 ξ_2 就是抽到任一张不同于第一张抽出的那张票券的等待时间. 由于这次抽时仍有 N 张票券，但新的只有 $N-1$ 张，因此成功的概率为 $p=\dfrac{N-1}{N}$. 于是 ξ_2 的分布列为

$$P(\xi_2=n)=\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1},n=1,2,\cdots$$

从而 $E\xi_2=\sum_{n=1}^{\infty}n\dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^2}=\dfrac{N}{N-1}$.

在收集到这两张不同的票券之后，对第三张新票券的等待时间其成功的概率为 $p=\dfrac{N-2}{N}$. 因此

$E\xi_3=\dfrac{N}{N-2}$.

以此类推，对$1\le r\le N$，有

$$\begin{aligned}E\left(\xi_1+\cdots+\xi_r\right)&=\frac{N}{N}+\frac{N}{N-1}+\cdots+\frac{N}{N-r+1}\\&=N\left(\frac{1}{N}+\cdots+\frac{1}{N-r+1}\right).\end{aligned}$$

特别，若$r=N$时，则

$$E\left(\xi_1+\cdots+\xi_N\right)=N\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$$

当N时偶数，$r=N/2$时，则

$$E\left(\xi_1+\cdots+\xi_{\frac{N}{2}}\right)=N\left(\frac{1}{\frac{N}{2}+1}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$$

由欧拉公式$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{N}=\ln N+C+\varepsilon_N$，其中$C$是欧拉常数，$\varepsilon_N$为$N$趋于无穷时的无穷小量. 由于$\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{\ln N}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{N}\right)=1$. 于是当$N$充分大时，我们可以近似公式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\approx\ln N.$$

因而$E\left(\xi_1+\cdots+\xi_N\right)=N\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{N}\right)\approx N\ln N.$

$$\begin{aligned}E\left(\xi_1+\cdots+\xi_{\frac{N}{2}}\right)&=N\left(\frac{1}{\frac{N}{2}+1}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\\&=2r\left(\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{2r}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right)-2r\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right)\\&\approx 2r\ln 2r-2r\ln r=N\ln 2,\end{aligned}$$

即$E\left(\xi_1+\cdots+\xi_{\frac{N}{2}}\right)\approx N\ln 2\approx 0.69315N$. 这说明如果只要收集一半票券，或只要稍多于票半数的抽取次数即可.

十、【参考证明】: (a) 在(a)的条件下，要证明结论，既要证明

$$x^{-1}y^{-1}xyaba^{-1}b^{-1}y^{-1}x^{-1}yx=aba^{-1}b^{-1}.$$

由已知$AB=BA$可得，存在A中的元素a^*,x^*，B中的元素b^*,y^*使得$ya=a^*y^*,xb=b^*x^*$. 于是有

(1) $yaba^{-1}b^{-1}y^{-1}=a^*y^*ba^{-1}b^{-1}y^{-1}$ （由 $ya=a^*y^*$ ）

$=a^*by^*a^{-1}b^{-1}y^{-1}=a^*ba^{*-1}yb^{-1}y^{-1}$ （由 $y^*a^{-1}=a^{*-1}y$ ）

$=a^*ba^{*-1}b^{-1}=\left[a^*,b\right].$

(2) 类似可证： $x\left[a^*,b\right]x^{-1}=\left[a^*,b^*\right]$， $y^{-1}\left[a^*,b^*\right]y=\left[a,b^*\right]$, $x^{-1}\left[a,b^*\right]x=\left[a,b\right]$. 如所需(a)获证.

(b) 任取 G 的一个换位子 $\left[a_1b_1,b_2a_2\right],a_i\in A,b_i\in B,i=1,2$，有

$$\left[a_1b_1,b_2a_2\right]=a_1b_1b_2a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}=a_1b_1\underbrace{a_1^{-1}b_1^{-1}}\underbrace{b_1a_1}b_2a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$$

$$=\left[a_1,b_1\right]b_1a_1b_2\underbrace{a_1^{-1}b_2^{-1}b_2a_1}a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$$

$$=\left[a_1,b_1\right]b_1a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1}\underbrace{b_1^{-1}b_1}b_2a_1a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$$

$$=\left[a_1,b_1\right]\left[a_1^*,b_2\right]\underbrace{b_1b_2a_1a_2b_1^{-1}}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}=\left[a_1,b_1\right]\left[a_1^*,b_2\right]\underbrace{b_1b_2a_1a_2b_1^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1}b_1b_1^{-1}b_2^{-1}}$$

$$=\left[a_1,b_1\right]\left[a_1^*,b_2\right]\left[\left(a_1a_2\right)^*,b_1^{-1}\right]$$

其中 $\left(a_1a_2\right)^*$ 为 A 中的某元. 这样，$G'=<\left\{\left[a,b\right]:a\in A,b\in B\right\}>$，从而由(a)可知，$G'$ 为 Abel 群.

十一、【参考证明】：(1) 用归纳法. 当 $n=0,1$ 时，结论显然成立.

设 $n\le k$ 时，$T_n\left(x\right)=\cos\left(n\arccos x\right)$. 当 $n=k+1$ 时，令 $x=\cos\theta$，则

$$T_{k+1}\left(x\right)=2xT_k\left(x\right)-T_{k-1}\left(x\right)=2\cos\theta\cos\left(k\theta\right)-\cos\left(\left(k-1\right)\theta\right)$$
$$=\cos\left(\left(k+1\right)\theta\right)=\cos\left(\left(k+1\right)\arccos x\right)$$

(2) $<T_n(x),T_m(x)>=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$. 令 $x=\cos\theta$，上述积分化为

$$\int_{\pi}^{0}\frac{\cos\left(n\theta\right)\cos\left(m\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\left(\cos\theta\right)=\int_0^{\pi}\cos\left(n\theta\right)\cos\left(m\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

当 $n\ne m$ 时，上述积分为 0.

(3) 注意以下事实：$T_n\left(x\right)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的 n 次多项式，$\|T_n\left(x\right)\|_\infty=1$，且 $T_n\left(x\right)$ 在 $x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ 处达到极值，即 $T_n\left(x_k\right)=\left(-1\right)^k,k=0,1,\cdots,n.$

现假设 $\|p\left(x\right)\|_\infty<\frac{1}{2^{n-1}}$，考虑函数 $q\left(x\right)=p\left(x\right)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n\left(x\right)$，则 $q\left(x\right)$ 在 x_k 处的符号与 $T_n\left(x\right)$ 在 x_k 处的符号相反，即为 $\left(-1\right)^{k+1},k=0,1,\cdots,n.$ 于是 $q\left(x\right)$ 至少有 n 个零点. 但 $q\left(x\right)$ 次数小于 n，这是不可能的！因此，

$$\|p(x)\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

当$\|p(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$时，可证$q(z)$至少有$n$个零点，从而$q(x) \equiv 0$，即

$$p(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$