## 2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类三、四年级)参考答案

## 一、填空题

(1) 
$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$
. (2)  $\frac{3}{4}$  (3)  $8\pi$ 

## (4) 【参考解答】: (n-1)!

秩 $A = n - 1 \Rightarrow$  秩 $A^* = 1 \boxminus Ax = 0$  的解空间维数为 1.

$$A$$
 行和 $=0\Rightarrow Aegin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=0\Rightarrow Ax=0$  的一组基础解系为 $egin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ 

注意到  $AA^*=0$ ,从而  $A^*$ 的每一列均形如  $aegin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ ,又由于 A 为实对称矩阵,故  $A^*$  也为实对称矩阵,故

$$A^* = egin{pmatrix} a & \cdots & a \ dots & & dots \ a & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

即

考虑多项式 $fig(\lambdaig)=\mid \lambda I-A\mid=\lambdaig(\lambda-2ig)\cdotsig(\lambda-nig)$ ,其一次项系数为 $ig(-1ig)^{n-1}n!$  .

另一方面,由 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 又知,其一次项系数为 $\left(-1\right)^{n-1}\left(A_{11} + \cdots + A_{nn}\right)$ ,结果为 a = (n-1)!.

二、【参考解答】: 设l为z轴,以过点P且垂直于z轴的直线为x轴来建立直角坐标系,可以设 二、【参考解音】、炎、光、流、流、P:ig(p,0,0ig),l的参数方程为: l:x=0,y=0,z=t.

设球面C的球心为 $\left(x_{0},y_{0},z_{0}\right)$ ,由于C过点P,则

$$C: \left(x-x_{_{0}}\right)^{^{2}}+\left(y-y_{_{0}}\right)^{^{2}}+\left(z-z_{_{0}}\right)^{^{2}}=\left(p-x_{_{0}}\right)^{^{2}}+y_{_{0}}^{^{2}}+z_{_{0}}^{^{2}}.$$

求l与C的交点:将l的参数方程代入C,有

$$\begin{aligned} x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} + \left(t - z_0\right)^2 &= \left(p - x_0\right)^2 + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2}. \\ t^2 - 2z_0 t + \left(2px_0 - p^2\right) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

由此可得两解为  $t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-\left(2px_0-p^2\right)}$ . 故弦长

$$a = \left| t_1 - t_2 \right| = 2 \sqrt{z_0^2 - \left( 2 p x_0 - p^2 \right)},$$

从而

$$z_0^2 - 2px_0 + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0. (2)$$

反之,如果球面C的球心满足(2),如果C过点P,此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta = 4z_0^2 - 4ig(2px_0 - p^2ig) = a^2 \geq 0,$$

方程有两个实根  $t_{1,2}=z_0\pm \frac{a}{2}$ . 从而 C 和 l 相交,而且截出来弦长为 a . 所以所求轨迹方程为

$$z^2 - 2px + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

三、【参考证明】: 对
$$A=egin{pmatrix} z_1 & z_2 \ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$$
,且特征方程为

$$egin{aligned} 0 &= \left| \lambda I - A 
ight| = \lambda^2 - 2 \operatorname{Re} z_1 \lambda + \left| z_1 
ight|^2 + \left| z_2 
ight|^2 \ \Delta &= 4 igl( \operatorname{Re} z_1 igr)^2 - 4 igg( \left| z_1 
ight|^2 + \left| z_2 
ight|^2 igr) \leq 0 \end{aligned}$$

情形 1:  $\Delta=0$ . 此时, $z_2=0, z_1=\operatorname{Re} z_1$ ,从而  $A=egin{pmatrix}\operatorname{Re} z_1&0\\0&\operatorname{Re} z_1\end{pmatrix}=J_A\in\Gamma$ 

取P = I即有 $P^{-1}AP = J_A$ .

情形 2:  $\Delta < 0$ . 此时 A 的特征值为

$$\begin{split} &\lambda_1 = \operatorname{Re} z_1 + i \sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - \left(\operatorname{Re} z_1\right)^2} \\ &\lambda_2 = \operatorname{Re} z_1 - i \sqrt{\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - \left(\operatorname{Re} z_1\right)^2} \\ &\lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 \neq \lambda_1 \end{split}$$

从而
$$J_A = egin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

现取A关于 $oldsymbol{\lambda}_1$ 的一个非零特征向量 $egin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix}$ ,则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_1 x} + \overline{z_2 y} = \overline{\lambda_1} \overline{x} \\ -\overline{z_2 x} - \overline{z_1 y} = -\overline{\lambda_1} \overline{y} \end{cases}$$

直接检验知  $Aigg(rac{-ar{y}}{x}igg) = ar{\lambda}_1igg(rac{-ar{y}}{x}igg)$ ,因此 $igg(rac{-ar{y}}{x}igg)$ 为 A 关于 $ar{\lambda}_1$  的一个非零特征向量. 令  $P = igg(x - ar{y}igg)$ ,则有

P可逆,且 $P \in \Gamma, P^{-1}AP = J_A$ .

四、【参考证明】:  $\alpha$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ .

若 
$$lpha > rac{1}{2}$$
 ,取  $x_n = \left(n\pi\right)^{-1}, y_n = \left(\left(n+rac{1}{2}
ight)\pi\right)^{-1}$  ,则 
$$\frac{\left|f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right|}{\left|x_n - y_n\right|^{\alpha}} = 2^{\alpha}\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1+rac{1}{2n}\right)^{\alpha-1} o \infty.$$

下面证明  $\sup_{x \neq y} \frac{\left| f\left(x\right) - f\left(y\right) \right|}{\left| x - y \right|^{\frac{1}{2}}} < +\infty.$ 

由于f(x)为偶函数,不妨设 $0 \le x < y$ ,令

$$z = \sup ig\{ u \leq y \mid fig(uig) = fig(xig) ig\}$$
 ,

则 $z^{-1} \leq y^{-1} + 2\pi$ .

$$\begin{split} & \left| f(x) - f(y) \right| = \left| f(z) - f(y) \right| \leq \int_{z}^{y} \left| f'(t) \right| \mathrm{d}\,t \leq \left| y - z \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{z}^{y} f'(t)^{2} \, \mathrm{d}\,t \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{z}^{y} \left( \sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} \right)^{2} \, \mathrm{d}\,t \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \frac{1}{t} \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{y^{-1}}^{z^{-1}} \left( \frac{\sin s}{s} - \cos s \right)^{2} \, \mathrm{d}\,s \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{y^{-1}}^{y^{-1} + 2\pi} 4 \, \mathrm{d}\,s \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8\pi} \left| x - y \right|^{\frac{1}{2}}. \end{split}$$

五、【参考证明】:由 $x''(t) \le -a(t)f(x(t)) < 0$ . 故x(t)是上凸的. 故 $\lim_{t \to \infty} x'(t)$ 存在或为 $-\infty$ .

若
$$\overline{\lim}_{t o\infty}xig(tig)=+\infty$$
,则 $x'ig(tig)>0$ , $\lim_{t o\infty}xig(tig)=+\infty$ .故 $x'ig(tig)fig(xig(tig)ig)\leq aig(tig)x'ig(tig)fig(xig(tig)ig)\leq -x'ig(tig)x''ig(tig),$ 

积分得

$$\int_0^t f(x(s)) dx(s) \le \frac{x'(0)^2 - x'(t)^2}{2} \le \frac{x'(0)^2}{2}.$$

令
$$t \to \infty$$
得 $\int_0^{+\infty} f(x) dx \le \frac{x'(0)^2}{2}$ 矛盾.

六、【参考解答】: 由(1)可得
$$\left(f'-f+\frac{a+b}{2}\right)\left(f'+f-\frac{a+b}{2}\right)=-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
 (2)

由此可知 $f'-f+rac{a+b}{2}$ 是无零点的整函数. 可设

$$f' - f + \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}e^{\alpha},\tag{3}$$

其中 $\alpha$ 是一个整函数,由(2)得

$$f' + f - \frac{a+b}{2} = -\frac{a-b}{2}e^{-\alpha}. (4)$$

由(3)(4)可得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}.$$
 (5)

$$f' = \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}.$$
 (6)

对(5)求导得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}.$$
 (7)

由(6)(7)可得

$$(\alpha'+1)(e^{\alpha}-1)(e^{\alpha}+1)=0,$$

因此 $e^{\alpha} - 1 = 0$ 或者 $e^{\alpha} + 1 = 0$  或者 $\alpha' + 1 = 0$ .

若  $e^{\alpha}-1=0$  ,则由(5)得到 f=b 是一个常数;同理,若  $e^{\alpha}+1=0$  ,则 f=a ,也是一个常数;若  $\alpha'+1=0$  ,则

 $\alpha(z) = -z + C$  , 其中C 是任意常数, 再由(5)可得

$$f\!\left(z\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4} \, e^{-z+C} - \frac{a-b}{4} \, e^{z-C} = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \operatorname{ch}\!\left(z-C\right).$$

七、【参考证明】:【思路一】:1)在题设条件下,对任何可测集E,有 $m^*ig(fig(Eig)ig) \leq K\cdot mig(Eig)$ .

- (1) 若E为区间,由f的连续性知:fig(Eig)为区间.又fig(xig)是 Lipschitz 函数,有 $\Big|fig(Eig)\Big| \leq K\Big|E\Big|$ ,即 $m\Big(fig(Eig)\Big) \leq K \cdot m\Big(Eig)$ .
- (2) 若 E 为开集,由开集的构造知:  $E=\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)$ ,其中  $\left\{\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right\}$  互不相交. 由(1)得:

$$\begin{split} m^*\left(f\left(E\right)\right) &= m^*\left(f\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right)\right) = m^*\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*f\left(\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) \\ &\leq K \sum_{n\geq 1} m\left(\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) = K \cdot m\left(\bigcup_{n\geq 1}\left(\alpha_n,\beta_n\right)\right) = K \cdot m\left(E\right). \end{split}$$

(3) 若E为可测,则 $\forall arepsilon > 0, \exists$  开集 $G \supset E$ ,使得mig(G - Eig) < arepsilon .

由(2)及 $f(G) \supset f(E)$  知

$$m^*ig(fig(Eig)ig) \le m^*ig(fig(Gig)ig) \le K\cdot mig(Gig) = K\cdot mig(E\cupig(G-Eig)ig) \ \le K\cdot mig(Eig) + K\cdot mig(G-Eig) < K\cdot mig(Eig) + K\cdot arepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知:  $m^*(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ .

2) 在题设条件下,若E可测,则f(E)可测. E可测

$$\Rightarrow \exists F_{\sigma} - \mathbb{Q} \notin A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, F_n \text{ 闭集}, \quad A \subset E, m\left(E - A\right) = 0. \quad \mathbb{Q} f\left(A\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f\left(F_n\right), \quad \text{the } f\left(x\right)$$
 的

连续性知, $fig(F_nig)$ 闭. 那么fig(Aig)是 $F_\sigma$  —型集且fig(Aig) $\subset$  fig(Eig). 由 1)知:

$$m^*ig(fig(E-Aig)ig) \leq K\cdot mig(E-Aig) = 0.$$

即  $m\left(f\left(E-A\right)\right)=0$ . 而  $f\left(E-A\right)\supset f\left(E\right)-f\left(A\right)$ ,从而有  $m\left(f\left(E\right)-f\left(A\right)\right)=0$ .故  $f\left(E\right)$ 可 测.

综合 1), 2)可得:对任意的可测集 E ,均有 f(E) 可测且  $m(f(E)) \leq K \cdot m(E)$  .

【思路 2】: i) 若f(x)为 $R^1$ 上的绝对连续函数, $A\subset R, m(A)=0$ ,则m(f(A))=0.

$$f\in A\,C\left(R^1
ight) \Rightarrow orall arepsilon >0, \exists \delta>0,$$

对任意至多可数个互不相交的开区间  $\left\{\left(a_i,b_i\right)\right\}_{i\geq 1}$  , 当  $\sum_{i>1}\left(b_i-a_i\right)<\delta$  时,有

$$\sum_{i\geq 1} \left( f\left(b_i\right) - f\left(a_i\right) \right) < \varepsilon \; .$$

由mig(Aig)=0,对上 $\delta>0,$ ∃开集 $G\supset A,mig(Gig)<\delta$  .

$$\Leftrightarrow G = \bigcup_{k \geq 1} \left( c_k, d_k \right), m_k = \min_{x \in [c_k, d_k]} f \left( x \right) = f \left( \alpha_k \right), \quad M_k = \min_{x \in [c_k, d_k]} f \left( x \right) = f \left( \beta_k \right).$$

因为 
$$\sum_{k>1} \left( eta_k - lpha_k 
ight) \leq \sum_{k>1} \left( d_k - c_k 
ight) < \delta$$
 ,所以  $\sum_{k>1} \left( f\left(eta_k 
ight) - f\left(lpha_k 
ight) 
ight) < arepsilon$ . 而

$$m^*f\!\left(G\!\right) = m^*\!\left(\bigcup_{k \geq 1} f\!\left(\!\left(c_k, d_k\right)\!\right)\right) \leq \sum_{k \geq 1} \!\!\left|f\!\left(\beta_k\right) - f\!\left(\alpha_k\right)\right| < \varepsilon.$$

又因为fig(Gig)  $\supset fig(Aig)$  ,所以 $m^*fig(Aig)$  < arepsilon ,由arepsilon 的任意性知 $m^*fig(Aig) = 0$  .

ii) 若f(x)为 $R^1$ 上的绝对连续函数,A可测,则f(A)可测

$$A$$
可测 $\Rightarrow$   $\exists F_{\sigma} -$ 型集 $B = igcup_{n=1}^{\infty} F_n, F_n$ 闭集,

$$B\subset A, mig(A-Big)=0 \Rightarrow fig(Big)=igcup_{n=1}^{\infty}fig(F_nig),$$

由f的连续性知, $f\left(F_n\right)$ 闭.那么 $f\left(B\right)$ 是 $F_\sigma$  —型集, $f\left(B\right)$  —  $f\left(A\right)$  — 由i)知: $m\left(f\left(A-B\right)\right)=0$ .

又因为 $fig(A-Big)\supset fig(Aig)-fig(Big)$ ,从而有mig(fig(Aig)-fig(Big)ig)=0.故fig(Aig)可测.

iii)不妨设E测度有限。f为 $R^1$ 上的 Lipschitz 函数  $\Rightarrow f\left(x\right)$ 为 $R^1$ 上的绝对连续函数  $\Rightarrow f'\left(x\right)$ 在 $R^1$ 上几乎处处存在且 $\left|f'\left(x\right)\right| \leq K, f'$ 在E上是L一可积,即习 $Z \subset R^1, m\left(Z\right) = 0, f'\left(x\right)$ 存在且

$$\left|f'(x)\right| \leq K, \forall x \in E - Z.$$

由 i)知: mf(Z) = 0. 于是

$$egin{aligned} mig(fig(Eig)ig) &\leq mig(fig(E-Zig)ig) + mig(fig(Zig)ig) = mig(fig(E-Zig)ig) \leq \int_{E-Z}ig|f'ig(xig)\mathrm{d}\,m \ &\leq \int_{E-Z}K\,\mathrm{d}\,m \leq K\cdot mig(Eig). \end{aligned}$$

【注】: 上式的第二个不等式的证明如下:

若f在 $R^1$ 上上绝对连续,f在A上的存在积分,则 $mf(A) \leq \int_A |f'| dm$ .

【证明】(1)对任何区间I,  $mf(I) \leq \int_{I} |f'| \,\mathrm{d}\, m$ . 令

$$\max_{x\in ar{I}}fig(xig)=fig(big), \min_{x\in ar{I}}fig(xig)=fig(aig), a,b\in ar{I}.$$

则 
$$mfig(Iig) = fig(big) - fig(aig) = \left|\int_{(a,b)} f' \;\mathrm{d}\, m
ight| \leq \int_{(a,b)} \mid f' \mid \mathrm{d}\, m \leq \int_{I} \mid f' \mid \mathrm{d}\, m$$
 .

(2) f' 可积  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall e \subset E$  ,若  $me < \delta$  ,有  $\int_e |f'| \, \mathrm{d} \, m < \varepsilon$ .

$$A$$
可测 $\Rightarrow$ 对上 $\delta>0,\exists$ 开集 $G\supset A,mig(G-Aig)<\delta$  ,

于是
$$\int_{G-A} \mid f' \mid \mathrm{d}\, m < arepsilon$$
. 令 $G = igcup_{k > 1} \left( lpha_k, eta_k 
ight)$ ,则

$$\begin{split} & m \Big( f \Big( A \Big) \Big) \leq m \Big( f \Big( G \Big) \Big) \leq \sum_{k \geq 1} m \Big( f \Big( \Big( \alpha_k, \beta_k \Big) \Big) \Big) \\ & \leq \sum_{k \geq 1} \int_{\left( \alpha_k, \beta_k \right)} \! \left| f' \right| \mathrm{d} \, m = \int_G \! \left| f' \right| \mathrm{d} \, m = \int_G \! \left| f' \right| \mathrm{d} \, m - \varepsilon + \varepsilon \\ & \leq \int_G \! \left| f' \right| \mathrm{d} \, m - \int_{G - A} \! \left| f' \right| \mathrm{d} \, m + \varepsilon = \int_A \! \left| f' \right| \mathrm{d} \, m + \varepsilon \end{split}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性得 $mf(A) \leq \int_A |f'| dm$ .

八、【参考证明】: 在  $P_0$  附近取曲率线坐标 $\left(u,v
ight)$ ,曲面的参数方程设为  $\mathbf{r}\left(u,v
ight)$ .不妨设  $\mathbf{r}\left(0,0
ight)=P_0$ .

用E,F,G,L,M,N分别表示曲面 $\mathbf{r}ig(u,vig)$ 的第一基本型、第二基本型系数,则F=M=0.

令
$$fig(u,vig)=<\mathbf{r}ig(u,vig),\mathbf{r}ig(u,vig)>$$
,则 $fig(u,vig)$ 在 $ig(0,0ig)$ 点取极大值 1. 于是

$$f_u\left(0,0
ight)=2<\mathrm{r}_u\left(0,0
ight),\mathrm{r}\left(0,0
ight)>=0,$$

$$f_v\left(0,0
ight) = 2 < \mathrm{r}_v\left(0,0
ight), \mathrm{r}\left(0,0
ight) > = 0.$$

从而曲面S在 $P_0$ 的法向 $\vec{n}(0,0) = \mathbf{r}(0,0)$ . 又由于

$$egin{aligned} f_{uu}\left(0,0
ight) &= 2igl(Eigl(0,0igr) + Ligl(0,0igr)igr), f_{uv}igl(0,0igr) &= 0, \ f_{vv}igl(0,0igr) &= 2igl(Gigl(0,0igr) + Nigl(0,0igr)igr). \end{aligned}$$

根据f(u,v)在(0,0)点取极大值, $f_{uu}(0,0) \leq 0, f_{vv}(0,0) \leq 0$ . 于是

$$0 < E\left(0,0
ight) \le -L\left(0,0
ight), 0 < G\left(0,0
ight) \le -N\left(0,0
ight),$$

从而S在 $P_0$ 的 Gauss 曲率

$$Kig(P_0ig) = rac{Lig(0,0ig)Nig(0,0ig)}{Eig(0,0ig)Gig(0,0ig)} \geq 1.$$

九、【参考证明】: 令  $G=\left(\alpha D-C\right)^{-1}\left(\left(\alpha-1\right)D+C^T\right), \lambda$  为 G 的特征值, x 是对应的特征向量,  $y=\left(I-G\right)x$  ,则

$$\begin{split} \left(\alpha D - C\right)y &= \left(\alpha D - C\right)x - \left(\left(\alpha - 1\right)D + C^T\right)x = \left(D - C - C^T\right)x = Ax\\ \left(\alpha D - D + C^T\right)y &= \left(\alpha D - C - A\right)y = \left(\alpha D - C - A\right)x - \left(\alpha D - C - A\right)Gx\\ &= \left(\alpha D - C - A\right)x - \left(\left(\alpha - 1\right)D + C^T\right)x + AGx = AGx = \lambda Ax. \end{split}$$

以上两个方程两边分别与y作内积,得

$$lpha \left\langle Dy,y \right
angle - \left\langle Cy,y 
ight
angle = \left\langle Ax,y 
ight
angle. \ lpha \left\langle y,Dy 
ight
angle - \left\langle y,Dy 
ight
angle + \left\langle y,C^Ty 
ight
angle = \left\langle y,\lambda Ax 
ight
angle.$$

以上两式相加得

$$egin{aligned} ig(2lpha-1ig)ig\langle Dy,yig
angle &=ig\langle Ax,yig
angle +ig\langle y,\lambda Axig
angle \\ &=ig(1-ar{\lambda}ig)ig\langle Ax,xig
angle +ar{\lambda}ig(1-\lambdaig)ig\langle x,Axig
angle &=ig(1-\mid\lambda\mid^2ig)ig\langle Ax,xig
angle. \end{aligned}$$

由于 $lpha>rac{1}{2},ig\langle Dy,yig
angle\geq 0,ig\langle Ax,xig
angle>0$ ,则必有 $|\lambda|\leq 1$ ,若 $|\lambda|=1$ ,则 y=0,从而Ax=ig(lpha D-Cig)y=0,

进而x=0,矛盾. 因此 $|\lambda|<1$ ,即ho(G)<1. 故迭代收敛.

十、【参考证明】: 若f,g在 $\left[0,1\right]$ 上无公共零点,则连续函数 $\left|f\right|^{2}+\left|g\right|^{2}$ 在 $\left[0,1\right]$ 上恒大于0,结果

$$rac{1}{\leftert f
ightert ^{2}+\leftert g
ightert ^{2}}\in R.$$

注意到 I 为左理想,  $f\in I, \overline{f}\in R$  ,从而  $\left|f\right|^2=\overline{f}$   $f\in I$  ,同样  $\left|g\right|^2\in I$  ,故  $\left|f\right|^2+\left|g\right|^2\in I$  ,进 而  $\dfrac{1}{\left|f\right|^2+\left|g\right|^2}\Big(\left|f\right|^2+\left|g\right|^2\Big)=1\in R,$ 矛盾与 I 为 R 的一个极大左理想.

十一、【参考解答】: 设需要组织 t 吨货源预备出口,则国家收益 Y (单位:万元)是随机变量 X 的函数 Y=g(X),表达式为

$$gig(Xig) = egin{cases} 3t, X \geq t \ 3X - ig(t-Xig), X < t \end{cases}$$

显然, $100 \le t \le 200$ ,由已知条件,知X的概率密度函数为

$$f\left(x
ight) = egin{cases} rac{1}{100}, x \in \left[100, 200
ight] \ 0, x 
ot \in \left[100, 200
ight] \end{cases}$$

由于Y 是随机变量,因此,题中所指的国家收益最大可理解为均值最大,因而问题转化为求Y 的均值,即求 $E\left[g\left(X\right)\right]$ 的均值。简单计算可得

$$egin{split} Eigg[gig(Xig)ig] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = rac{1}{100}\int_{100}^{200} g(x)\,\mathrm{d}\,x \ &= rac{1}{100}\int_{100}^{t} ig[3x - ig(t-xig)ig]\mathrm{d}\,x + rac{1}{100}\int_{t}^{200} 3t\,\mathrm{d}\,x = rac{1}{50}ig[-t^2 + 350t - 10000ig]. \end{split}$$

 $idh(t) = -t^2 + 350t - 10000.$  令h'(t) = 0, 得t = 175. 而h''(t) = -2 < 0.

因此,当t=175 时函数 $h\left(t\right)$ 达到最大值,亦即 $E\left[g\left(X\right)\right]$ 达到最大,故应组织 175 吨这种商品,能使国家获得收益均值最大.



## 考研竞赛数学(ID:xwmath)

个专注于大学数学公共基础课资源分享的微信公众平台高等数学,线性代数概率论与数理统计考研数学,竞赛数学数学文化,实验与建模大学学习、生活历程因为专业,所以精彩