

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛 (数学类) 试卷

一、(本题 15 分) 已知空间的两条直线：

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}, l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1},$$

- 1) 证明 l_1 和 l_2 异面；
- 2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程；
- 3) 求连接 l_1 上任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

二、(本题 15 分) 设 $f \in C[0, 1]$ 是非负严格单调增函数。

- 1) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，存在唯一的 $x_n \in [0, 1]$ ，使得 $(f(x_n))^n = \int_0^1 (f(x))^n dx$ 。
- 2) 证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

三、(本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0, 1]$ 上全体实函数构成的实向量空间，其中向量加法和纯量乘法均为通常的。 $f_1, \dots, f_n \in V$ 。证明以下两条等价：

- 1) f_1, \dots, f_n 线性无关；
- 2) $\exists a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ 使得 $\det[f_i(a_j)] \neq 0$ ， \det 为求行列式。

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有二阶导函数， $f(x), f'(x), f''(x)$ 均大于零，假设存在正数 a, b ，使得 $f''(x) \leq af(x) + bf'(x)$ 对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立。

- (1) 求证： $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ ；
- (2) 求证：存在常数 c 使得 $f'(x) \leq cf(x)$ 。
- (3) 求使上面不等式成立的最小常数 c 。

五、(本题 20 分) 设 m 为给定的正整数。证明：对任何的正整数 n, l ，存在 m 阶方阵 X 使

$$\text{得 } X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0, 1)$ ， $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证： $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$ ，其中 $k > 0$ 。