

2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

数学专业竞赛 (B 卷) 试题

一、(本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线, 点 B 是它们公垂线段的中点. 点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动, 使得 $A_1B \perp A_2B$. 证明直线 A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面.

二、(本题 10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$.

三、(本题 15 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1+x_n), n = 1, 2, \dots$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限值.

四、(本题 15 分) 设 $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基, 令

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1} = 0$$

证明: (1) 对 $i = 1, 2, \dots, n+1, \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}\}$ 都构成 V 的基;

(2) $\forall \alpha \in V$, 在 (1) 中的 $n+1$ 组基中, 必存在一组基使 α 在此基下的坐标分量均非负;

(3) 若 $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \dots + a_n\epsilon_n$, 且 $|a_i| (i = 1, 2, \dots, n)$ 互不相同, 则在 (1) 中的 $n+1$ 组基中, 满足 (2) 中非负坐标表示的基是唯一的.

五、(本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 若 $A^2 = I_n$ (I_n 表示单位矩阵), 则称 A 为对合矩阵. 试证:

(1) 若 A 是 n 阶对合矩阵, 则

$$\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) = n;$$

(2) n 阶对合矩阵 A 一定可以对角化, 其相似对角形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中

$$r = \text{rank}(I_n + A);$$

(3) 若 A, B 均是 n 阶对合矩阵, 且 $AB = BA$, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

六、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续凹函数, 满足 $f(a) = 0, f(b) > 0$ 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处存在非零的右导数. 对 $n \geq 2$, 记

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^n kx_k : \sum_{k=1}^n kf(x_k) = f(b), x_k \in [a, b] \right\}$$

(1) 证明对 $\forall \alpha \in (0, f(b))$, 存在唯一 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) = \alpha$;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup S_n - \inf S_n)$.

七、(本题 10 分) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{S_n^2}$ 收敛, 其中 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)