2013 年第四届全国大学生数学竞赛决赛、(非数学类）参考答案

一、简答下列各题

1、【参考解答】：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0+}\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}2\ln a\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}=\lim_{x\to 0+}\ln e^{\ln a^2}=2\ln a.$$

2、【参考解答】： 由复合函数求导法则，对 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 两端求导，得

$$y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f_u(x,x)+e^{-2x}f_v(x,x)=-2y+x^2e^{-2x}.$$

因此，所求一阶微分方程为 $y'+2y=x^2e^{-2x}$．该微分方程为一阶线性微分方程，所以由通解公式，有

$$y=e^{-\int 2dx}\left[\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C\right]=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}.$$

3、【参考解答】： 由题意，有 $e^{-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}=f(x)$，即

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\ln f(x)$$

两边求导可得 $f'(x)=-f^2(x)$，并且 $f(0)=e^0=1$，可得 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

4、【参考解答】： 由于

$$\int x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac12\int\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)=\frac12\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-\frac12x^2+C.$$

则原式 $=\displaystyle\int\arctan x\,\mathrm{d}\left[\frac12\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{2}\right]$

$$=\frac12\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2\right]\arctan x-\frac12\int\left[\ln\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac12\arctan x\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)-x^2-3\right]-\frac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac32x+C.$$

5、【参考解答】： 设 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$，则曲面法向量为

$$\vec{n}_1=\left(F_x,F_y,F_z\right)=2\left(3x,y,-z\right).$$

过直线的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0,$$

即 $(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0$．其法向量为 $\vec{n}_2=\left(10+\lambda,2+\lambda,-(2+\lambda)\right)$.

设所求切点的坐标为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\begin{cases}(10+\lambda)/3x_0=(2+\lambda)/y_0=(2+\lambda)/z_0\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27,\\(10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0.\end{cases}$$

解得 $x_0=3,y_0=1,z_0=1,\lambda=-1$，或 $x_0=-3,y_0=-17,z_0=-17,\lambda=-19$. 所求切平面方程为 $9x+y-z-27=0$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

二、【参考解答】：设引力 $\vec{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$. 由对称性记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，从原点出发过点 (x,y,z) 的射线与 z 轴的夹角为 θ. 则有 $\cos\theta=\dfrac{z}{r}$. 质点和面积微元之间的引力为 $\mathrm{d}S$ 之间的引力为 $\mathrm{d}F=G\dfrac{\rho\,\mathrm{d}S}{r^2}$，而 $\mathrm{d}F_z=G\dfrac{\rho\,\mathrm{d}S}{r^2}\cos\theta=G\rho\dfrac{z}{r^3}\mathrm{d}S$，所以

$$F_z=\iint_{\Sigma}G\rho\frac{z}{r^3}\mathrm{d}S.$$

在 z 轴上的区间 $[1,2]$ 上取小区间 $[z,z+\mathrm{d}z]$，相应于该小区间有 $\mathrm{d}S=2\pi z\sqrt{2}\,\mathrm{d}z$. 而 $r=\sqrt{2z^2}=\sqrt{2}z$，就有

$$F_z=\iint_{\Sigma}G\rho\frac{z}{r^3}\mathrm{d}S=\int_1^2G\rho\frac{2\sqrt{2}\pi z^2}{2\sqrt{2}z^3}\mathrm{d}z=G\rho\pi\int_1^2\frac{1}{z}\mathrm{d}z=G\rho\pi\ln 2.$$

三、【参考证明】：当 $t>0$ 时，对函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0,t]$ 上用拉格朗日中值定理，有

$$\ln(1+t)=\frac{t}{1+\xi},0<\xi<t.$$

由此可得 $\dfrac{t}{1+t}<\ln(1+t)<t$. 取 $t=\dfrac{1}{x}$，有

$$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}.$$

当 $x\ge1$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加. 又

$$f'(x)\le\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\le\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\le\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

故 $\displaystyle\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t\le\int_1^x\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t$，所以 $f(x)-f(1)\le1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le1$. 即 $f(x)\le f(1)+1$，$f(x)$ 有上界.

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加且有上界，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

四、【参考证明】：在 $[-2,0]$ 与 $[0,2]$ 上分别对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，可知存在 $\xi_1\in(-2,0),\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'\left(\xi_1\right)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}, f'\left(\xi_2\right)=\frac{f(2)-f(0)}{2}.$$

由于$|f(x)|<1$，所以$\left|f'\left(\xi_1\right)\right|\leq 1,\left|f'\left(\xi_2\right)\right|\leq 1.$

设$F(x)=f^2(x)+\left[f'(x)\right]^2$，则

$$\left|F\left(\xi_1\right)\right|\leq 2,\left|F\left(\xi_2\right)\right|\leq 2 \qquad (*)$$

由于$F(0)=f^2(0)+\left[f'(0)\right]^2=4$，且$F(x)$在$\left[\xi_1,\xi_2\right]$上的连续函数，应用闭区间上连续函数的最大值定理，$F(x)$在$\left[\xi_1,\xi_2\right]$上必定能够取得最大值，设为$M$．则当$\xi$为$F(x)$的最大值点时，$M=F(\xi)\geq 4$，由（*）式知$\xi\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$．所以$\xi$必是$F(x)$的极大值点．注意到$F(x)$可导，由极值的必要条件可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)\left[f(\xi)+f''(\xi)\right]=0.$$

由于$F(\xi)=f^2(\xi)+\left[f'(\xi)\right]^2\geq 4,|f(\xi)|\leq 1$，可知$f'(\xi)\neq 0$．由上式知

$$f(\xi)+f''\left(\xi\right)=0.$$

五、【参考解答】：由对称性，可以只考虑区域$y\geq x$，由极坐标变换得

$$I=2\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left|r-\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right|r^2\,\mathrm{d}r=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right|r^2\,\mathrm{d}r$$

后一个积分里，$\left(\varphi,r\right)$所在的区域为矩形：

$$D:0\leq\varphi\leq\pi,0\leq r\leq 1.$$

把 D 分解为 $D_1\cup D_2$，其中 $D_1:0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},0\leq r\leq 1,D_2:\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi,0\leq r\leq 1.$ 又记 $D_3:\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\sqrt{2}\cos\varphi\leq r\leq 1.$ 这里D_3是D_1的子集，且记

$$I_i=\iint\limits_{D_i}\left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right|r^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r,\left(i=1,2,3\right),$$

则$I=2\left(I_1+I_2\right)$．注意到$\left(r-\sqrt{2}\cos\varphi\right)r^2$在$D_1\setminus D_3,D_2,D_3$的符号分别为负、正、正，则

$$I_3=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_{\sqrt{2}\cos\varphi}^1\left(r-\sqrt{2}\cos\varphi\right)r^2\,\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$I_1=\iint\limits_{D_1}\left(\sqrt{2}\cos\varphi-r\right)r^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r+2I_3=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}\left(r-\sqrt{2}\cos\varphi\right)r^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

所以就有$I=2\left(I_1+I_2\right)=1+\dfrac{3\pi}{8}.$

六、【参考证明】：反证法. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，必有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$,则存在自然数$m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$,

使得

$$\sum_{i=1}^{m_1}|a_i|\geq 1,\ \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_i|\geq k\left(k=2,3,\cdots\right)$$

取$x_i=\dfrac{1}{k}\operatorname{sgn}a_i\left(m_{k-1}\leq i\leq m_k\right)$，则

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}a_ix_i=\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}\frac{\left|a_i\right|}{k}\geq 1.$$

由此可知，存在数列$\left\{x_n\right\}\to 0\left(n\to\infty\right)$，使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$发散，矛盾. 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.