

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛

(数学类) 参考答案

一、【参考解答】: 设所求球面的球心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则有

$$\begin{aligned}(\bar{x}-1)^2 + (\bar{y}-2)^2 + (\bar{z}-7)^2 &= (\bar{x}-4)^2 + (\bar{y}-3)^2 + (\bar{z}-3)^2 \\&= (\bar{x}-5)^2 + (\bar{y}+1)^2 + (\bar{z}-6)^2 = (\bar{x}-\sqrt{7})^2 + (\bar{y}-\sqrt{7})^2 + (\bar{z})^2\end{aligned}$$

$$\text{即} \begin{cases} 3\bar{x} + \bar{y} - \bar{z} = -10, \\ 4\bar{x} - 3\bar{y} - \bar{z} = 4, \\ (\sqrt{7}-1)\bar{x} + (\sqrt{7}-2)\bar{y} - 7\bar{z} = -20. \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, -1, 3).$$

而 $(\bar{x}-1)^2 + (\bar{y}-2)^2 + (\bar{z}-7)^2 = 25$. 于是所求球面方程为

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

二、【参考证明】: 记 $a_k = \int_0^1 f_k(x) dx, \forall k = 1, 2, \dots, n$. 当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的.

下面设 $a_k > 0 (\forall k = 1, 2, \dots, n)$. 于是有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k} dx = 1.$$

由此立即可得存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1$. 结论得证.

三、【参考证明】: 设 σ 在 F^n 的标准基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B , 则

$$\sigma(\alpha) = B\alpha, (\forall \alpha \in F^n).$$

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in F^n)$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$.

故 $BA = AB (\forall A \in M_n(F))$.

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \text{diag}(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 则由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取

$$A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji},$$

这里 E_{st} 是 (s, t) 位置为 1, 其他位置为 0 的矩阵, 则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj} (\forall i, j)$.

取 $\lambda = a_{11}$, 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$.

四、【参考解答】: 三角形的三个角 A, B, C 的取值范围为

$$(A, B, C) \in D \equiv \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}$$

首先考虑 $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 在 D 的闭包

$$E = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$$

上的最大值. 有

$$\begin{aligned} & \max_{(A,B,C) \in E} (3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C) \\ &= \max_{\substack{A+C \leq \pi \\ A, C \geq 0}} (3 \sin A + 4 \sin(A+C) + 18 \sin C) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \max_{0 \leq A \leq \pi-C} ((3+4 \cos C) \sin A + 4 \sin C \cos A + 18 \sin C) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \left(\sqrt{(3+4 \cos C)^2 + 16 \sin^2 C} + 18 \sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \left(\sqrt{25 + 24 \cos C} + 18 \sin C \right) \end{aligned}$$

考虑 $f(C) = \sqrt{25 + 24 \cos C} + 18 \sin C, 0 \leq C \leq \pi$. 容易知道

$$f(C) \geq f(\pi - C), \forall C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

直接计算导数, 有

$$f'(C) = 18 \cos C - \frac{12 \sin C}{\sqrt{25 + 24 \cos C}}.$$

令 $f'(C) = 0$, 即 $(8 \cos C - 1)(27 \cos^2 C + 32 \cos C + 4) = 0$. 从而它在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 范围

内的解为 $C = \arccos \frac{1}{8}$. 于是

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq C \leq \pi} f(C) &= \max_{0 \leq C \leq \pi/2} f(C) = \max \left\{ f\left(\arccos \frac{1}{8}\right), f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{35\sqrt{7}}{4}, 7, 23 \right\} = \frac{35\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\max_{(A,B,C) \in E} (3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C) = \frac{35\sqrt{7}}{4}.$$

另一方面, 不难看到 $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 在 E 的边界上 (A, B, C 之一为 0) 的

最大值为 22. 所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$.

五、【参考证明】: 由泰勒展开式, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 存在 $\forall \xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 使得

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+\xi)^2}.$$

从而 $\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right| \leq x^2, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 于是当 $n \geq 2$ 时, 不管怎么选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 均有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} \right| &= \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + \frac{a_k}{n}} - \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_k}{2n}\right) \right| \\ &\leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

可以有很多种方法选取只取值为 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} = \alpha$. 此时成立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1 = 1$, 依次定义

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \sum_{k=1}^n a_k < 2\alpha\sqrt{n}, \\ -1, & \sum_{k=1}^n a_k \geq 2\alpha\sqrt{n}. \end{cases}$$

记 $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k, n = 1, 2, \dots$, 我们有 $-\sqrt{n} \leq y_n \leq \sqrt{n}$. 若 $y_n > 2\alpha$, 有

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n \sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1}} - y_n = -\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

这时 $-\frac{2}{\sqrt{n+1}} < y_{n+1} - y_n < 0$; 而当 $y_n < 2\alpha$ 时, 我们有

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} - y_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

这时 $0 < y_{n+1} - y_n < \frac{2}{\sqrt{n+1}}$; 于是当 $y_{n+1} - 2\alpha, y_n - 2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_n - 2\alpha|,$$

当 $y_{n+1} - 2\alpha, y_n - 2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_{n+1} - y_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有 $|y_{n+1} - 2\alpha| \leq \max \left(|y_n - 2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right)$.

注意到对任何 $N > 0$, 总有 $m \geq N$, 使得 $y_{m+1} - 2\alpha, y_m - 2\alpha$ 异号. 由上面的讨

论可以得到

$$|y_k - 2\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{m+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \forall k = m+1, m+2, \dots$$

因此, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2\alpha$.

六、【参考证明】: 设 V 是 F 上 n 维线性空间, σ 是 V 上的线性变换, 它在 V 的一组基下的矩阵为 A . 下面证明存在 σ -不变子空间 V_1, V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构, $\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链: $\text{Ker}\sigma \subseteq \text{Ker}\sigma^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker}\sigma^k$, 从而存在正整数 m 使得 $\text{Ker}\sigma^m = \text{Ker}\sigma^{m+i}$ ($i = 1, 2, \dots$). 进而有 $\text{Ker}\sigma^m = \text{Ker}\sigma^{2m}$.

下面证明 $V = \text{Ker}\sigma^m \oplus \text{Im}\sigma^m$.

$\forall \alpha \in \text{Ker}\sigma^m \cap \text{Im}\sigma^m$, 由 $\alpha \in \text{Im}\sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \text{Ker}\sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in \text{Ker}\sigma^m = \text{Ker}\sigma^{2m}$. 故

$$\alpha = \sigma^m(\beta) = 0, \text{Ker}\sigma^m \cap \text{Im}\sigma^m = (0),$$

从而 $V = \text{Ker}\sigma^m \oplus \text{Im}\sigma^m$.

由 $\sigma(\text{Ker}\sigma^m) \subseteq \text{Ker}\sigma^m, \sigma(\text{Im}\sigma^m) \subseteq \text{Im}\sigma^m$, 知 $\text{Ker}\sigma^m, \text{Im}\sigma^m$ 是 σ -不变子空间. 又由 $\sigma^m(\text{Ker}\sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\text{Ker}\sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\text{Im}\sigma^m) \subseteq \text{Im}\sigma^m$ 知 $\sigma|_{\text{Im}\sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆.

从 $V_1 = \text{Im}\sigma^m, V_2 = \text{Ker}\sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_t$, 合并成 V 的一组基, σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; C 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 β_1, \dots, β_t 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵.

【注】 如果视 F 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可给 10 分:

存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \dots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \dots, J(0, m_t))$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若当块, $\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 是特征值为 0 的阶为 m_j 的若当块. 令

$$B = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \dots, J(\lambda_s, n_s)), C = \text{diag}(J(0, m_1), \dots, J(0, m_t))$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

七、【参考证明】: 首先对于任何 $x \in R$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到

$\int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt$ 收敛. 记

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于 F 单调下降,

$$\begin{aligned} & \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt) \sin(t) dt \\ &= \int_0^\pi (F(2nk\pi + nt) - F(2nk\pi + 2n\pi - nt)) \sin(t) dt \geq 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = \int_0^{+\infty} nF(nt) \sin t dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt) \sin(t) dt \\ &\geq \int_0^{2\pi} nF(nt) \sin(t) dt = \int_0^\pi n(F(nt) - F(2n\pi - nt)) \sin(t) dt \\ &\geq \int_0^{\pi/2} n(F(nt) - F(2n\pi - nt)) \sin(t) dt \\ &\geq n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

结合 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] = 0$.

这样, 任取 $\delta > 0$, 有 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$n \left| F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right| \leq \delta.$$

从而对于任何 $m > 0, n > N$ 有

$$\begin{aligned} 0 \leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) &\leq \sum_{k=0}^m n \left| F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3^{k+1} n\pi}{2}\right) \right| + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m \frac{\delta}{3^k} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \leq \frac{3\delta}{2} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

上式中令 $m \rightarrow +\infty$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ 得到

$$0 \leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq \frac{3\delta}{2}, \forall n > N.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$. 进一步利用单调性, 当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0 \leq xF(x) \leq \pi \left[\frac{2x}{\pi} \right] F\left(\left[\frac{2x}{\pi} \right] \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分. 于是可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$.

从而又知 $x f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$. $\forall \varepsilon \in (0, \pi)$, 当 $x > 0$ 时有

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) &= \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1}t) \sin t \, dt \leq \int_0^{\pi} x^{-1} t H(x^{-1}t) \frac{\sin t}{t} \, dt \\ &\leq x^{-1} \varepsilon H(x^{-1} \varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt + M \varepsilon, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

于是 $0 \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq M \varepsilon$. 由 $\varepsilon \in (0, \pi)$ 的任意性, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. 进而因 f 是奇函数推得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)