

2019 年第十届全国大学生数学竞赛决赛 (数学类, 三、四年级) 参考解答

一、填空题

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) -\pi \quad (3) \frac{\sqrt{\pi}}{8} \quad (4) 0$$

二、【参考解析】: (1) 【思路一】直线 l_1 的参数方程为 $x = 0, y = 0, z = s$; l_2 的参数方程为

$$x = -1 + t, y = t, z = t$$

设动直线 l 与 l_1, l_2 分别交于点 $(0, 0, s)$ 与 $(-1 + t, t, t)$, 则的 l 方向为 $(-1 + t, t, t - s)$.

由于 l 与平面 $z = 0$ 平行, 故 $t = s$, 从而动直线 l 的方程为:

$$x = (t - 1)u, \quad y = tu, \quad z = t$$

消去 t, u 得动直线构成的曲面 S 的方程为 $xz - yz + y = 0$.

【思路二】过直线 l_1 的平面簇为 $\pi_1: (1 - \lambda)x + \lambda y = 0$, 这里 λ 为参数; 同理过直线 l_2 的平面簇为

$$\pi_2: (1 - \mu)(x - y + 1) + \mu(y - z) = 0, \mu \text{ 为参数}$$

动直线 l 是平面簇 π_1 与 π_2 的交线, 故直线 l 的方向为

$$\begin{aligned} n &= (1 - \lambda, \lambda, 0) \times (1 - \mu, 2\mu - 1, -\mu) \\ &= (-\lambda\mu, \mu(1 - \lambda), -1 + 2\mu - \lambda\mu) \end{aligned}$$

由直线 l 与平面 $z = 0$ 平行, 故 $-1 + 2\mu - \lambda\mu = 0$. 由 π_1 与 π_2 的方程知

$$\lambda = \frac{x}{x - y}, \quad \mu = \frac{x - y + 1}{x - 2y + z + 1}$$

将上式代入 $-1 + 2\mu - \lambda\mu = 0$, 即得动直线 l 生成的曲面的方程为 $xz - yz + y = 0$.

$$(2) \text{ 做可逆线性变换 } \begin{cases} x = x' - y' - z' \\ y = -z' \\ z = x' + y' \end{cases} \quad \text{曲面 } S \text{ 的原方程化为 } z' = x'^2 - y'^2. \text{ 因此, } S \text{ 为马鞍面.}$$

三、【参考解析】: 先证明一个引理.

引理 设 A 是 n 阶实方阵且满足 $\text{tr}(A) = 0$, 则存在可逆实方阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0.

对 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (0)$, 结论显然成立. 下设 $n \geq 2$, 考虑两种情形.

情形一: \mathbb{R}^n 中的所有非零向量都是 A 的特征向量. 由所有基本向量 $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ 都是特征向量可知, 存在特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ 使得 $Ae_i = \lambda_i e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 因此, $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 再由所有 $e_i + e_j$ 都是特征向量有, 存在 μ_{ij} 使得

$$A(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \mu_{ij}(e_i + e_j)$$

于是 $\mu_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$ ，因此 A 为纯量方阵. 由 $\text{tr}(A) = 0$ 知 $A = 0$.

情形二： 存在 \mathbb{R}^n 中的非零向量 α 不是 A 的特征向量. 则 $\alpha, A\alpha$ 线性无关，因而存在可逆实方阵

$$Q = (\alpha, A\alpha, *, \dots, *) \text{ 满足 } AQ = Q \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix},$$

或者等价地

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}, \text{ 其中 } B \text{ 为 } n-1 \text{ 阶实方阵.}$$

由 $\text{tr}(A) = 0$ ，得 $\text{tr}(B) = 0$. 由归纳假设，存在可逆实方阵 R ，使得 $R^{-1}BR$ 的对角元素都是 0. 令 $P = Q \text{diag}(1, R)$ ，则 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0. 引理获证.

现在对于任意 n 阶实方阵 A ，令 $A_0 = \frac{\text{tr}(A)}{n}I$ ，则 $\text{tr}(A - A_0) = 0$. 根据引理，存在可逆实方阵 P ，使得 $B = P^{-1}(A - A_0)P$ 的对角元素都是 0. 设 $B = L + U$ ， L, U 分别是严格下、上三角方阵，则 L, U 都是幂零方阵. 于是

$$A = A_0 + PBP^{-1} = A_0 + A_1 + A_2,$$

其中 A_0 是纯量方阵， $A_1 = PLP^{-1}$ 和 $A_2 = PUP^{-1}$ 都是幂零方阵. 证毕.

四、【参考解析】： (1) 由 $f^{(n)}(0) = 0 (\forall n \geq 0)$ 以及 Taylor 展式可得，对于任何固定的 k ，成立 $f(x) = o(x^k)$ ， $x \rightarrow 0^+$. 特别 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2C}} = 0$.

另一方面，由假设可得 $\forall x \in (0, 1]$ ，

$$\left(x^{-2C}f^2(x)\right)' = 2x^{-2C-1}\left(xf(x)f'(x) - Cf^2(x)\right) \leq 0,$$

从而 $x^{-2C}f^2(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少. 因此

$$x^{-2C}f^2(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-2C}f^2(t) = 0, \quad \forall x \in (0, 1]$$

因此，在 $[0, 1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$

(2) 取 $f(x) := \begin{cases} e^{-x^{1-\alpha}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则容易验证 $f(x)$ 满足假设条件，但 $f(x) \not\equiv 0$.

五、【参考解析】： 1) 首先注意到

$$\begin{cases} x^2 - (ax^2 + x^2a) + ax^2a = 1 \\ x + a - (ax + xa) + axa = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x^2(1-a) = 1 \\ (1-a)x(1-a) = 1-a \end{cases}$$

结果有：

$$\begin{aligned} (1-a)x &= (1-a)x \left\{ (1-a)x^2(1-a) \right\} \\ &= (1-a)x(1-a)x^2(1-a) = (1-a)x^2(1-a) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(1-a) &= (1-a)x^2(1-a)x(1-a) \\ &= (1-a)x^2 \cdot (1-a)x(1-a) = (1-a)x^2(1-a) = 1 \end{aligned}$$

因此有 $1-a$ 可逆且 $(1-a)^{-1} = x$

2) 现在考虑 $(1-b)(1-a)$, 则有 $(1-b)(1-a) = 1-a-b+ba = 1$, 结合前面所证 $1-a$ 可逆, 因此得 $(1-a)^{-1} = 1-b$. 进而有 $1 = (1-a)(1-b) = 1-a-b+ab = 1-ba+ab$, 亦即 $ab = ba$.

六、【参考解析】: 固定 $k \geq 1$, 记 $A_k = [-k, k], G_k = \{(x, f(x)); x \in A_k, f(x) \in A_k\}$. 令

$$E_{n,k,i} = \left\{ x \in [-k, k]; f(x) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right\}.$$

因为 f 可测, 所以 $E_{n,k,i}$ 可测, 且 $\sum_{i=-nk}^{nk-1} m(E_{n,k,i}) \leq 2k$. 又

$$\{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} \subset E_{n,k,i} \times \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right],$$

则 $m\{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} \leq \frac{1}{n} mE_{n,k,i}$, 其中 m 为 Lebesgue 外测度.

$$\bigcup_{i=-nk}^{nk-1} \{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} = \{(x, f(x)); x \in A_k, f(x) \in A_k\} = G_k$$

$$mG_k \leq \sum_{i=-nk}^{nk-1} m\{(x, f(x)); x \in E_{n,k,i}\} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=-nk}^{nk-1} mE_{n,k,i} \leq \frac{2k}{n}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得 $mG_k = 0, \forall k \geq 1$, 又 $G = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} G_k$, 故 $mG = 0$, 所以 G 可测, 且 $L_2(G) = 0$

七、【参考解析】: $\gamma_u = (1, 0, 2u), \gamma_v = (0, 1, v)$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+v^2}} (-2u, -v, 1) \\ \gamma_{uu} &= (0, 0, 2), \gamma_{uv} = 0, \gamma_{vv} = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

于是曲面的第一基本型 $I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ 和第二基本型

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

为 $E = 1 + 4u^2, F = 2uv, G = 1 + v^2, L = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}, M = 0, N = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+v^2}}$.

曲面上点 $\gamma(u, v)$ 为脐点, 当且仅当存在 λ 使得 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. 因为 $\lambda \neq 0$, 得到 $F = 0$, 即

$u = 0$ 或 $v = 0$. 再由

$$\frac{L}{E} = \frac{N}{G}, \frac{2}{1+4u^2} = \frac{1}{1+v^2}$$

得到 $u = \pm \frac{1}{2}$ 和 $v = 0$. 求得曲面脐点为 $p_{\pm} = \left(\pm \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right)$.

在脐点 $p_+ = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right)$ 处, 切平面单位法向量 $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, 则与脐点 p_+ 处的切平面平行的平面

σ 方程可设为 $-x + z = a$, 其中 a 为常数. 记 σ 与 S 的截曲线 C 的参数方程为

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

则有 $z(t) = x(t) + a, z(t) = x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2$.

令 $q = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} + a \right)$ 为平面 σ 上一点, 则有

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - q|^2 &= \left(x(t) - \frac{1}{2} \right)^2 + y(t)^2 + \left(z(t) - \frac{1}{2} - a \right)^2 \\ &= 2 \left(x(t) - \frac{1}{2} \right)^2 + y(t)^2 = 2x(t)^2 + y(t)^2 - 2x(t) + \frac{1}{2} = 2a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

于是 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 是一个平面 σ 上圆心在 q 点的圆周.

对脐点 $p_- = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right)$ 可以同样证明.

八、【参考解析】: 1) 对区间 $[a, b]$ 的任意实函数 $f(x)$, 存在唯一的 $s(x) \in S[a, b]$ 满足:

$$s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n, s''(a) = s''(b) = 0$$

2) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 则对满足 1) 的函数 $s(x)$ 有

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx$$

且等号成立当且仅当 $s(x) = f(x)$.

(1) 记 $h_i = x_{i+1} - x_i, s_i(x) = s(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}$, 则 $s_i(x)$ 是一个三次多项式, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 记

$$M_i = s''(x_i), i = 0, 1, \dots, n,$$

则 $s_i''(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} M_i + \frac{x - x_i}{h_i} M_{i+1}$, 于是

$$s_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_{i+1} + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_i + A_i(x - x_i) + B_i$$

其中 A_i, B_i 为常数. 由 $s_i(x_i) = f(x_i), s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ 可得 $A_i = f(x_i) - M_i \frac{h_i^2}{6}$,

$$B_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

再由 $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} M_i + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} \\ &= -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} \end{aligned}$$

化简得

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

其中 $\lambda_i = h_{i-1} / (h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$,

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} \right)$$

再由 $M_0 = M_n = 0$, 得到关于 M_i 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

上述线性方程组的系数矩阵主对角占优, 因而可逆, 因此该线性方程组有唯一解, 即满足条件的 $s(x)$ 存在唯一.

【说明】: 也可建立关于 $m_i = s'(x_i)$ 的线性方程组, 并证明解存在唯一.

(2) 令 $g(x) = f(x) - s(x)$, 则 $f(x) = g(x) + s(x)$, 且 $g(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$, 于是

$$\int_a^b f''(x)^2 dx = \int_a^b g''(x)^2 dx + 2 \int_a^b g''(x)s''(x) dx + \int_a^b s''(x)^2 dx$$

下证: $\int_a^b g''(x)s''(x) dx = 0$, 从而

$$\int_a^b f''(x)^2 dx \geq \int_a^b s''(x)^2 dx$$

实际上,

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(x)s''(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x) dg'(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} s''(x)g'(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)s'''(x) dx \\ &= s''(x)g'(x) \Big|_a^b - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = 0 \end{aligned}$$

其中 $c_i = s'''(x)$ 是一个常数. 由于 $s''(a) = s''(b) = 0$, 上式最后一式中第一项为零; 由 $g(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$, 上式最后一式第二项也为零.

$$\text{等号成立} \Leftrightarrow g''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = s(x).$$

九、【参考解析】：由条件可设 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$ ，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，且 $\varphi(z_0) \neq 0$ 。从而存在 $\rho > 0$ ， $\varphi(z)$ 在 $|z - z_0| \leq \rho$ 内解析，且 $\varphi(z_0) \neq 0$ 。

$$\text{设 } R = \max_{|z - z_0| = \rho} \left| \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} \right|, \text{ 显然 } R > 0.$$

对任意 $w \in \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$ ，当 $|z - z_0| = \rho$ ，

$$\left| \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} \right| \leq R < |w|, \text{ 即 } |\varphi(z)| < |w(z - z_0)^n|.$$

由 Rouché 定理知

$$n = N\left(w(z - z_0)^n\right) = N\left(\varphi(z) - w(z - z_0)^n\right)$$

所以 $F(z) = \varphi(z) - w(z - z_0)^n$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 内有 n 个零点 $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ ，显然 $z_k \neq z_0$ ，否则 $\varphi(z_0) = F(z_0) = 0$ 矛盾。从而 $F(z_k) = \varphi(z_k) - w(z_k - z_0)^n = 0$ ，所以

$$\frac{\varphi(z_k)}{(z_k - z_0)^n} - w = 0$$

即 $f(z) - w$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中必有 n 个零点 z_k 。

十、【参考解析】：对于 $i \geq 1$ ， $EX_i = 0$ ， $EX_i^2 = i^{2\theta}$ ，则

$$ES_n = 0, \text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \sum_{i=1}^n i^{2\theta}$$

注意 $\int_0^n x^{2\theta} dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} x^{2\theta} dx$ 以及

$$\sum_{i=1}^n i^{2\theta} - n^{2\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{2\theta} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} x^{2\theta} dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^{2\theta} = \sum_{i=1}^n i^{2\theta}$$

得到

$$\frac{1}{2\theta+1} n^{2\theta+1} \leq \text{Var}(S_n) \leq \frac{1}{2\theta+1} n^{2\theta+1} + n^{2\theta}$$

(1) 由于

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{n^2 \epsilon^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{2\theta+1} n^{-(1-2\theta)} + n^{-2(1-\theta)} \right]$$

则当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = 0$, 即得 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0

(2) 【思路一】下面验证林德贝格 (Lindeberg) 条件成立, 即对任意 $\tau > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{i=1}^n EX_i^2 I(|X_i| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) \rightarrow 0$$

事实上, 由假设知, 对于 $1 \leq i \leq n$, $|X_i| \leq n^\theta$, 并且 $\frac{n^\theta}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq \sqrt{\frac{2\theta+1}{n}}$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\theta}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = 0$.

于是, 对较大的 n 以及 $1 \leq i \leq n$, $I(|X_i| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Var}(S_n)} \sum_{i=1}^n EX_i^2 I(|X_i| \geq \tau \sqrt{\text{Var}(S_n)}) = 0,$$

所以 $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

【思路二】下面验证李雅普诺夫 (Lyapunov) 条件成立, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^n EX_i^4 \rightarrow 0$

事实上, $\sum_{i=1}^n EX_i^4 = \sum_{i=1}^n i^{4\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{4\theta} + n^{4\theta} \leq \int_0^n x^{4\theta} dx + n^{4\theta} = \frac{1}{4\theta+1} n^{4\theta+1} + n^{4\theta}$, 于是,

$$\frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^n EX_i^4 \leq (2\theta+1)^2 \left[\frac{1}{4\theta+1} n^{-1} + n^{-2} \right]$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\text{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^n EX_i^4 = 0$, 所以 $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.



考研竞赛数学(ID:xwmath)

一个专注于大学数学公共基础课

资源分享的微信公众平台

高等数学, 线性代数

概率论与数理统计

考研数学, 竞赛数学

数学文化, 实验与建模

大学学习、生活历程

因为专业, 所以精彩