

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类) 试卷

一、填空题(共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该微分方程是_____.

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi: 2x + 2y + z = 0$, 则与 π 平行的 S 的切平面方程是_____.

(3) 设 $y = y(x)$ 由 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$ 所确定, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ _____.

(4) 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

(5) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ _____.

第二题: (12 分) 设 n 为正整数, 计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| dx$.

第三题: (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且有正常数 A, B 使得 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$, 证明: 对于任意 $x \in [0, 1]$, 有 $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}$.

第四题: (14 分) (1) 设一球缺高为 h , 所在球半径为 R . 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R - h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$ 被平面 $P: x + y + z = 6$ 所截的小球缺为 Ω . 记球缺上的球冠为 Σ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

第五题: (15 分) 设 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n \in [a, b]$ 使得

$$\left[f(x_n)\right]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

第六题: (15 分) 设 $A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - A_n \right)$.