2015 年第六届全国大学生数学竞赛决赛
（数学类一、二年级）试卷

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为________.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的和为__________.

(3) 计算 $I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right)\mathrm{d}\,S =$________.

(4) $A = \left(a_{ij}\right)$ 为 n 阶实对称矩阵 $\left(n > 1\right)$，$rank\left(A\right) = n - 1, A$ 的每行元素之和均为 0. 设 $2, 3, \cdots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式，则有 $A_{11} =$__________.

二、（本题 15 分） 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p . 一族球面中的每个球面都过点 P ，且截直线 l 得到的弦长都是定值 a . 求该球面族的球心的轨迹.

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in C\right\}$，其中 C 表示复数域. 试证明：$\forall A \in \Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ；进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

四、（本题 20 分） 设 $f\left(x\right) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$ 求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|f\left(x\right) - f\left(y\right)\right|}{\left|x - y\right|^{\alpha}} < +\infty.$$

五、（本题 15 分） $a\left(t\right), f\left(t\right)$ 为实连续函数，$\forall t \in R$，有

$$f\left(t\right) > 0, a\left(t\right) \geq 1, \int_0^{\infty} f\left(t\right)\mathrm{d}\,t = +\infty.$$

已知 $x\left(t\right)$ 满足 $x''\left(t\right) + a\left(t\right)f\left(x\left(t\right)\right) \leq 0, \forall t \in R$. 求证：$x\left(t\right)$ 在 $[0, +\infty)$ 有上界.

六、（本题 15 分） 设 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0, 1\right]$ 上连续可导，且 $f\left(0\right) = f\left(1\right) = 0$. 求证：

$$\left[\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right]^2 \leq \frac{1}{45}\int_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x,$$

等号当且仅当 $f\left(x\right) = A\left(x - x^3\right)$ 时成立，其中 A 是常数.