

多重分形中的非线性相关：震级序列和符号序列的可视图

摘要

多重分形序列的相关性已经得到了广泛的研究。之前几乎所有的方法都试图找出给定时间序列的**标度特征**。然而，标度分析一直面临着一些困难。特别重要的是找到合适的**标度区域**，消除掉序列的概率分布函数对相关提取方法的影响。在这篇文章中，我们应用**水平可视图算法**将随机时间序列映射到网络中。通过研究多重分形时间序列的幅值和符号，表明我们可以检测出序列中的线性和非线性相关，甚至对于不相关的噪声，使用典型的方法，如**多重分形去趋势波动分析 (MFDFA)**。此外，我们引入了一个能够很好地测量**非线性相关强度的拓扑参数**。该参数**独立**于概率分布函数，计算时**不需要找到任何标度区域**。我们的研究结果可能为各种复杂系统中时间序列的多重分形分析提供了新的见解。

当我们试图研究一个复杂系统时，我们往往遇到的是不规则的时间序列。尽管这些序列具有不规则的性质，但人们发现它们通常以一些相关的模式进行变化。事实上，通过研究这种相关性，我们希望更好地理解系统的潜在动态，从而为我们提供充分的信息，用于建模、控制和预测系统的未来。我们引入了很多方法来研究时间序列中的相关性，其中**去趋势波动分析 (DFA)**技术尤为有效。然而，最近已经证明，在一些重要的情况下，它会**导致错误的结果**。为了解决这个问题，我们应用了**可视图算法**的概念，并证明了通过使用恰当的**拓扑特征**可以很好地检测线性和非线性相关。在这方面，我们还定义了一个**参数**，可以测量非线性相关的强度，而以前的方法发现不了。

总结：1. 之前的方法（DFA、MFDFA 等）可能会导致错误的结果；需要找到合适的标度区域以及要消除掉序列的概率分布函数（PDF）的影响。

2. 应用水平可视图算法将随机时间序列映射到网络中，通过分析可视图的拓扑特征来研究序列的线性和非线性相关。

3. 定义了一个拓扑参数（不依赖于序列的概率分布函数），可以测量非线性相关的强度，而以前的方法发现不了。

引言

许多生物、物理和社会系统表现出不规则的行为，这是它们众多组成部分之间在时间或空间中相互作用的结果。**标度不变特性**是这种复杂系统的常见结果，在这种情况下，如果系统的尺度乘以一个公共因子，系统的某些特性就不会改变。这些概念通常用临界现象理论来描述，该理论研究发生在临界点附近的事件。分形几何是一个重要的框架来分析各个研究领

域的标度行为，如物理，化学，生物学，地质学，神经科学，工程学，金融，气象学等。

总的来说，分形分析有助于我们更好地理解潜在的动力学，更精确地对各种复杂系统进行建模。如果时间序列 $\{X_t\}$ 在标度 s 上所有不同幅度的波动都具有相同的指数，并且系统的行为在从小到大的各种标度上都存在某种均匀性（线性），则该系统可以完全用一个称为赫斯特指数 H 的参数描述。该参数表征了线性相关的强度，在平稳序列中，它表示二阶相关函数 $C(s) = \langle x(t+s)x(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ 作为标度 s 的函数收敛的速度。任何高阶相关函数 (>2) 也可以由二阶相关函数得到。这种情况称为单分形。然而，这并不是许多观察到的现象的全部。通常需要一个以上的指数来完全描述一个复杂系统。这种系统的非均质性（非线性）导致不同量级的波动存在不同的标度行为，需要高阶相关函数来描述系统的特征。这定义了多重分形的概念。单分形和多重分形已经在大量的现象中被检测到，例如股票市场，湍流，地震和地震序列，人类心跳动力学，音乐，等等。

在众多被提出的分析多重分形特征的技术中，多重分形去趋势波动分析 (MFDFA) 被证明是相当成功的，在一维甚至更高维空间。的确，MFDFA 是针对单分形设计的去趋势波动分析 (DFA) 的泛化。在 DFA 方法中，通过从某阶多项式中减去原始序列，从而消除了大小为 s 的盒子的局部趋势之后，可以在所有标度 s 上获得所得序列的均方根（波动函数） F_2 。对于幂律相关的序列，我们有 $F_2(s) \sim s^{-\alpha}$ ， α 描述序列线性相关的强度。事实上，对于平稳 ($\alpha < 1$) 和非平稳 ($\alpha > 1$) 线性相关序列， $\alpha = H, H+1$ 。一般来说， $\alpha < 1/2$ 的值表示负相关序列，对于 $\alpha > 1/2$ ，序列是正相关的。在 $\alpha = 1/2$ 时，序列不相关。这里值得一提的是，平稳正线性相关序列 (即 $1/2 < \alpha < 1$)，二阶相关函数为 $C(s) \sim s^{-\gamma}$ ，其中 $\gamma = 2 - 2\alpha$ 。

在多重分形序列中，MFDFA 通过分析所有 q 阶波动的标度来推广 DFA 方法，其中 $q=2$ 就是 DFA。对于幂律相关序列，波动函数 $F_q(s) \sim s^{-H(q)}$ ， $H(q)$ 是广义赫斯特指数，我们可以找到标度函数 $\tau(q) = qH(q) - 1$ 。多重分形谱 $f(\alpha_q)$ 显示标度指数 ($\tau(q) = qH(q) - 1$) 的分布，并且可以由 $f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau(q)$ 得到。多重分形谱的宽度 $\Delta\alpha_q$ 可以被看作一个参数，用来衡量多重分形的强度。注意对于单分形线性序列， $H(q) = \alpha$ 独立于 q 并且多重分形谱变为脉冲函数 $f(\alpha_q) = \delta(\alpha_q - \alpha)$ ， $\Delta\alpha_q = 0$ 。

广泛研究相关过程的另一种重要方法是将一系列增量序列 ($x_i = X_{i+1} - X_i$) 分解为震级序列 ($X_i^{mag} = |X_i|$) 和符号序列 ($X_i^{sgn} = \text{sign}(X_i)$)，然后提取其标度特征。例如，通过使用 DFA 和 MFDFA 方法，表明震级和符号序列的相关性分别对应于原始序列的非线性和线性。这

种方法已应用于各个研究领域。

在 DFA 和 MFDFA 技术中,人们通常面临一些挑战,如为去趋势过程选择合适的多项式阶数,找到合适的尺度区域,以及检测可能受序列的概率分布函数(PDF)影响的正确相关性。最近,有研究表明,在某些条件下,DFA 和 MFDFA 不能提取时间序列的正确标度行为。在某一特定标度 s 上,标度行为中存在交叉以及该尺度 S_c 依赖于 q 是多重分形谱估计可能不准确的两个例子。另一方面,在某些情况下,DFA (MFDFA) 错误地预测非线性时间序列的线性;即将不相关行为分配给一个非线性多重分形过程的相关数量序列,这是由于一些技术问题而发生的。例如,Carpena 分析证明,对于具有 DFA 指数的相关序列,分别有 $F_2^{mag}(s) \sim (as + bs^{4\alpha-2})^{1/2}$ 和 $F_2^{sgn}(s) \sim (cs + ds^{2\alpha})^{1/2}$, 其中 a, b, c 和 d 与标度无关的系数。显然,对于 $\alpha \leq 3/4$, 有 $F_2^{mag}(s) \sim s^{1/2}$ 。类似地,对于 $\alpha \leq 1/2$, 有 $F_2^{sgn}(s) \sim s^{1/2}$ 。这意味着,当 $\alpha \leq 3/4$ 和 $\alpha \leq 1/2$ 时,DFA 或 MFDFA 会预测幅度和符号序列的不相关行为。但是,他们表明,通过应用二阶相关函数 $C(s)$,这种相关过程的幅度和符号系列实际上是线性相关的。Bernaola-Galván 等人使用这个想法,提出从序列期望中找到震级序列二阶相关函数 $C_{|x|}(s) = \langle |x(t+s)||x(t)| \rangle - \langle |x(t)| \rangle^2$ 的偏差,可以准确地发现给定时间序列中的非线性现象。他们认为,该方法可以用于短较的序列,甚至可以用于没有任何标度行为的序列。在高斯多重分形模型中,他们还表明非线性意味着多重分形,但反之则不成立。

为了寻找在时间序列中提取相关性的另一种可能的方法,Lacasa 等人引入了一种算法,称为可视图,它将时间序列映射到基于数据点的图中。在这种方法中,时间序列特征被认为是在结果图中继承的。例如,他们证明了线性时间序列的单分形指数 H 可以从映射图的度分布计算出来。因此,该算法可以与 DFA、MFDFA 等典型的分形分析方法结合起来,作为分析分形和多重分形现象的一种新方法。尽管在不同的系统和情况下探索了可视图算法的各个方面,令人惊讶的是,尚未出现具有非线性关联的多重分形序列的一般图像。

总结: 1. 赫斯特指数表征线性相关的强度;

多重分形: MFDFA 是一种有效的方法; 多重分形谱的宽度可以被看作一个参数,用来衡量多重分形的强度;

2. 将一系列增量序列分解为震级序列 ($X_i^{mag} = |X|$) 和符号序列 ($X_i^{sgn} = \text{sign}(X_i)$), 然后提取其标度特征。

3. DFA、MFDFA 的局限性: 为去趋势过程选择合适的多项式阶数,找到合适的尺度区域,以及检测可能受序列的概率分布函数(PDF)影响的正确相关性; 有时还会导致错误的结果。

4. 应用水平可视图算法将分形和多重分形时间序列映射到图中。通过研究结果图的拓扑特征，表明这种方法可以很好地检测线性和非线性相关性，即使是在 DFA 和 MFDFA 预测不相关的情况下。另一方面，由于水平可视图算法的独特特性，我们可以计算线性或非线性相关性，而不需要消除原序列的非高斯性的影响。最后，我们引入一个参数，可以测量非线性相关的强度，而多重分形谱的宽度无法发现现有的非线性。我们的结果与最近的研究结果是一致的。

定义：可视图

为了从一个随机过程中提取相关信息，Lacasa 等人引入了可视图算法，该算法根据数据点的可视性将时间序列映射到图中，并允许我们将复杂网络理论应用于表征时间序列。之后，他们还定义了另一种算法，称为水平可视图（HVG），与（正常）可视图（NVG）相比，它具有一些优势。例如，HVG 是比原始 NVG 在几何上更简单，计算速度更快的算法。另一方面，HVG 的独特之处在于，与 NVG 相比，该算法独立于原始序列的 PDF。这里值得一提的是，由于 PDF 会影响时间序列中的相关估计，因此通常需要逐级地用高斯序列替换原始的非高斯序列，以消除这种分布效应。然而，已经证明，该方法仅在数据线性不相关的情况下才能表现良好。与以前的方法相比，HVG 没有这种限制，因此在提取时间序列的相关方面时具有特殊优势。在这方面，我们在这里应用水平可视图算法。令 x_i 为序列的 N 个数据 ($i=1, 2, \dots, N$)。通过将每个数据点分配给图中的一个节点，可以将大小为 N 的时间序列映射到具有 N 个节点的图中。如果一个节点可以在连接 x_i 和 x_j 的时间序列中画一条不与任何中间数据高度相交的水平线，则两个节点 i 和 j 连接，即，两个任意点 (t_i, x_i) 和 (t_j, x_j) 是两个连接的节点，如果放置在它们之间的任何其他数据点 (t_q, x_q) ，则对于所有 $t_i < t_q < t_j$ 满足 $x_i, x_j > x_q$ 。由于映射的方法，证明了 HVG 总是由定义连接的，并且在仿射变换下是不变的。另一方面，将有序序列和随机序列分别映射为正则指数图和随机指数图。

为了分析映射图的拓扑特征，我们首先需要构造相应的邻接矩阵 A ，如果节点 i 和 j 连接，则 $A_{ij} = 1$ ，否则， $A_{ij} = 0$ 。可以通过 $k_i = \sum_j A_{ij}$ 获得任意节点 i 的度 k_i 。之后，可以根据 $\langle k \rangle = \sum_k k p_k$ 计算平均度，根据 $\sigma_k^2 = \sum_k k^2 p_k - (\sum_k k p_k)^2$ 计算标准差。 p_k 是度分布，定义为在网络中找到度为 k 的节点的概率。同样，可以从 A_{ij} 获得邻接矩阵的最大特征值 e_{\max} ，用来测量复杂网络中信息流的强度并与最大度成正比。

根据定义，原始序列的时间顺序 $x(t)$ 和节点度的顺序 $k(t)$ 相同。这使我们发现 $x(t)$ 和 $k(t)$ 之间可能存在某种相关性。在这方面，我们选择 Spearman 相关系数来衡量单调关系的强度，而 Pearson 相关系数则只能找到两个量之间的线性关系。考虑 x_r 和 k_r 作为 $x(t)$ 和 $k(t)$ 的秩次（序数），Spearman 相关系数定义为

$$S = \frac{\langle [x_r - \langle x_r \rangle][k_r - \langle k_r \rangle] \rangle}{\sigma_{x_r} \sigma_{k_r}} \quad (1)$$

$S \in [-1, 1]$ 以及 σ_{x_r} 和 σ_{k_r} 分别是 x_r 和 k_r 的标准偏差。我们注意到，另一种广泛使用的测量单调相关的是 Kendall 系数，与 Spearman 系数在这里得到相似的结果。

在引入大量拓扑特征以更好地表征复杂网络时，我们选择了两个经过广泛研究的度量，即同配性系数（度度相关性） r 和聚类系数 $C1$ ，可以衡量节点度之间是否存在任何相关性。在无向网络中按节点度进行混合的同配性系数为

$$r = \frac{\sum_{jl} j l (e_{jl} - q_j q_l)}{\sigma_q^2}, \quad (2)$$

其中 $e_{jl} = p(j, l)$ ， $q_k = (k+1)p_{k+1}/\langle k \rangle$ 是一个节点的出度，定义为离开节点的边数，而 σ_q 是分布 q_k 的标准偏差。通常，我们有 $-1 \leq r \leq 1$ 。 r 的正（负）值表示相似（不同）度的节点之间的相关性。实际上，当 $r = 0$ 时，网络是不相关的，对于 $r = 1$ 或 $r = -1$ ，则说该网络分别是完全正相关或负相关的。聚类系数 $C1$ 是复杂网络中的重要（三点）相关性度量，可以视为网络中相连接的节点的三元组的密度。任意节点 i 的局部聚类定义为 $c_i = n_e/n_p$ ，其中 n_e 和 n_p 分别代表共享节点 i 的现有三元组的数目和可能的三元组的总数。因此，网络的平均聚类系数为

$$C1 = \frac{\sum c_i}{N}. \quad (3)$$

在这里我们应该注意，可以考虑任何其他拓扑特性，并进行相同的分析，以便研究序列特征对结果图的潜在影响。

总结：1. HVG 比原始 NVG 在几何上更简单，计算速度更快，该算法独立于原始序列的 PDF。

2. 应用水平可视图算法，将大小为 N 的时间序列映射到具有 N 个节点的图中，构造相应的邻接矩阵，计算平均度，标准差，最大特征值以及 Spearman 相关系数，同配性系数（度度相关性） r 和平均聚类系数 $C1$ ，衡量节点度之间是否存在任何相关性。

定义：模拟系列

我们打算研究线性和非线性相关性以及序列的 PDF 对所得可见度图的拓扑特征的影响。在这方面，我们生成了三个序列。

分形布朗运动 (fBm) 被引入到湍流模型中，并广泛用于物理，统计，水文学，经济学，生物学等许多领域。分形高斯噪声是分形布朗运动的增量过程，具有较长的记忆力，取决于 Hurst 指数 H ($0 < H < 1$)。 $H=1/2$ ，是普通的布朗运动，增量是独立的；对于 $H>1/2$ ，增量是正相关的；对于 $H<1/2$ ，增量可能是负相关的。可以使用称为傅立叶滤波方法 (FFM) 的算法来生成此类相关序列，如下：将生成的白噪声的傅立叶变换乘以 $f^{-\beta}$ 形式的幂律，然后再次对所得序列进行傅立叶变换以回到时域。最后，我们生成具有 $S(f) \sim f^{-\beta}$ 功率谱的相关序列。请注意 $\beta = 2\alpha - 1$ ，其中 α 是 DFA 指数。

fGn 和 fBm 序列的 PDF 都服从高斯分布。但是，各种各样的自然和社会现象都显示出具有无限方差的厚尾分布。为了研究这种性质，已经提出了各种模型。其中，Lévy 稳定分布 (LSD) 已得到广泛考虑。LSD 是由独立同分布的随机变量的标准化和组成的所有吸引子。对称分布的 LSD，稳定性参数 $\lambda \in [0, 2]$ 。对于 $0 < \lambda \leq 1$ ，分布具有不确定的均值和方差；对于 $1 < \lambda \leq 2$ ，分布具有确定的均值但方差是无限的。最著名的 LSD 函数是 $\lambda=1$ 的柯西分布和 $\lambda=2$ 的高斯分布函数。因此，对于不同的 $\lambda < 2$ ，可以构造具有非高斯分布的各种不相关序列。

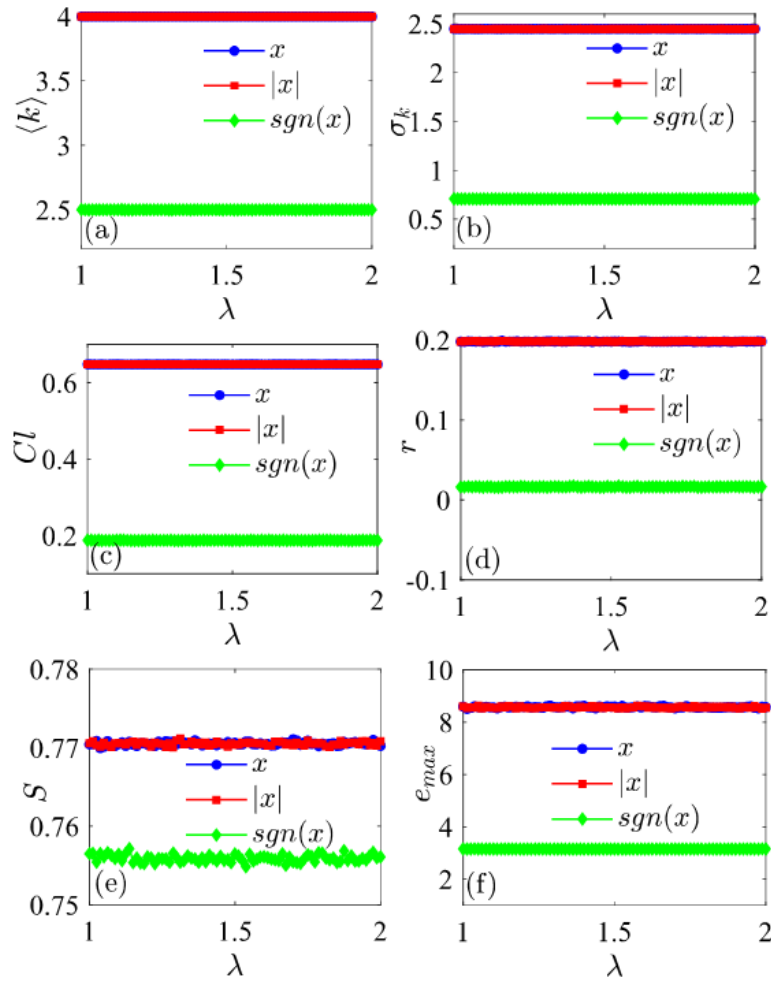
上面定义的所有时间序列都是线性相关 (fBm 和 fGn) 或完全不相关的 (Lévy)。为了研究非线性相关性的影响，Kalisky 等人提出了乘法多重分形序列，并且可以生成它。

$$x_{mult} = |f_{\alpha_1}| \text{sgn}(f_{\alpha_2}), \quad (4)$$

f_{α_1} 和 f_{α_2} 是由傅立叶滤波方法生成的两个独立的线性相关的时间序列，具有 DFA 指数。我们可以通过使用不同的 α_1 和 α_2 来控制线性和非线性相关的强度。

结果

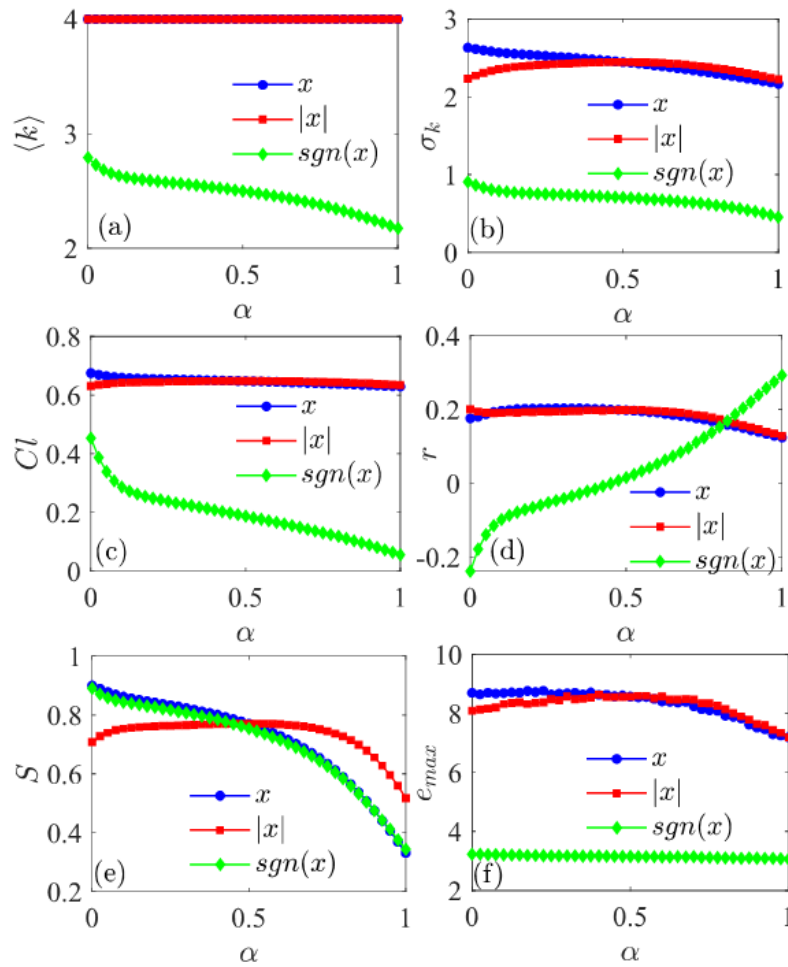
为了表明水平可视图算法不依赖于 PDF，我们在图 1 中绘制了本节中描述的六个拓扑特性。



(分别对应于 LSD 过程的原始序列 x , magnitude $|x|$, 以及 sign $\text{sgn}(x)$)

我们注意到 λ 从 1 增加到 2, PDF 从柯西 (非高斯) 转换为正态 (高斯) 函数形式。可以看出, 非高斯性不会影响 HVG, 并且所有图对于各种值都是常数。在这里, 我们认为 HVG 算法的这种独特特性表明, 无需任何其他操作, 就可以消除 PDF 对给定时间序列的相关性的影响。因此, 我们总是可以将这种技术应用于以相关性的精确估计为主要目标的情况。

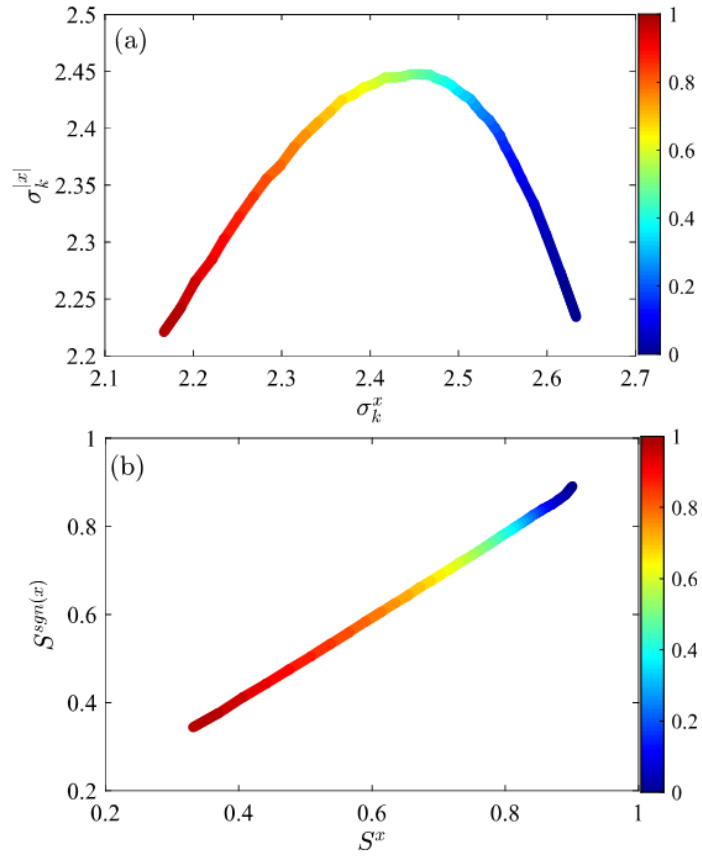
为了研究线性相关对 HVG 的影响, 我们将用 FFM 方法 ($0 \leq \alpha \leq 1$) 生成的线性相关的分形序列映射到图中。拓扑特征如图 2 所示, 与图 1 相似。



(分别对应于 FFM 过程的原始序列 X , magnitude $|x|$, 以及 sign $sgn(x)$)

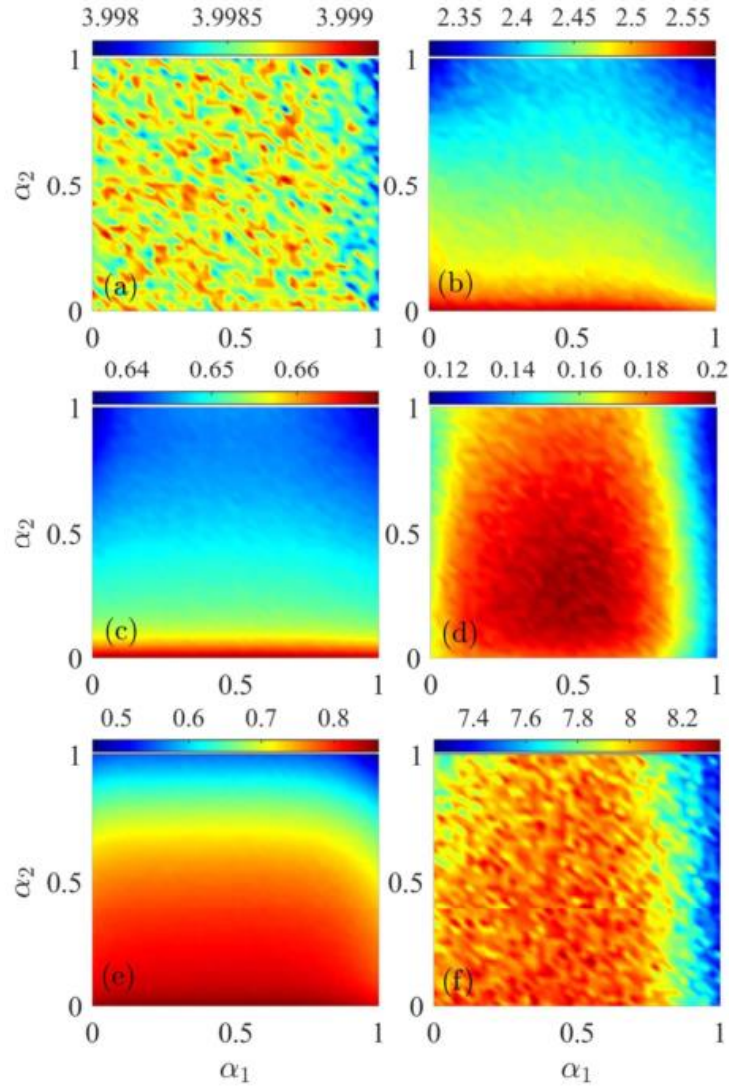
我们发现，震级序列和原始序列的平均度 $\langle k \rangle$ 是相同的，无法区分具有不同线性关系的序列。但是，某些参数（例如 σ_k , Cl , and e_{max} ）可以很好地区分震级和原始序列中的正相关和负相关。而且，符号和原始序列的 Spearman 系数相同，可以区分不同 α 的序列。如前面所述，当 $\alpha \leq 3/4$ 和 $\alpha \leq 1/2$, DFA 认为是不相关的。并且这些区域被错误地认为是不相关的白噪声。这会导致另外一个错误的结论：震级序列相关可以说明原始序列是非线性的。这实际上是 DFA 和 MFDFA 的虚假结果，我们的发现证实了此类研究；即，这里的原始序列是线性随机过程，而其震级序列也相关。

根据图 2 所示的结果，可以得到图 3。



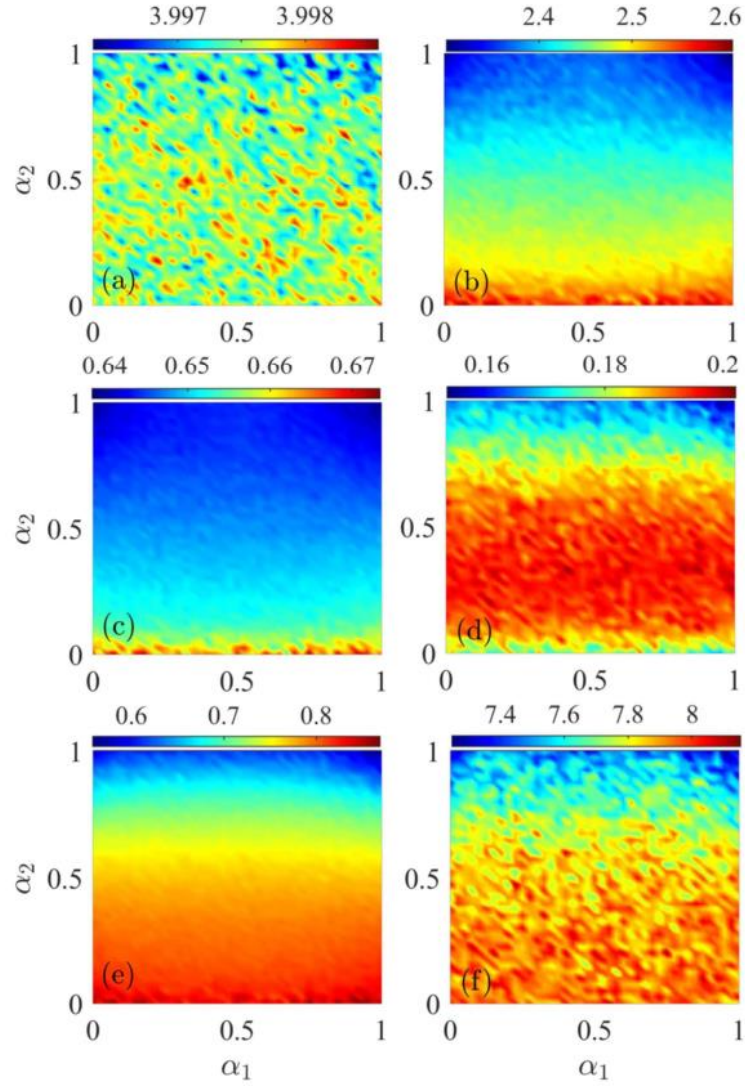
在图 3 (a) 中，我们观察到 $\alpha = 1/2$ 附近的对称行为，这表明负相关序列的震级序列是正相关。最近，已经证明，对于线性相关的高斯序列，原始序列和震级序列的二阶相关函数 $C(s)$ 和 $C_{|x|}(s)$ 也可以观察到这种对称关系。我们认为该工作中使用的方法在很大程度上取决于原始序列 x 的 PDF，因此，在进行此类分析之前，需要用高斯序列逐级替换原始序列；但是，在我们的方法中，不需要这种替换。图 3 (b) 还显示了 $S^{sgn(x)}$ vs S^x ，并指出了几乎完全的线性关系，显示了原始序列和符号序列中线性相关性之间的一一对应关系。这个结果与最近的研究完全吻合。我们还注意到，图 3 的结果表明，对于 $\alpha \leq 3/4$ 和 $\alpha \leq 1/2$ 的区域，震级和符号序列也分别相关，而 DFA 或 MFDFA 无法发现任何相关。

为了调查非线性对可视图的影响，我们绘制了一个非线性乘法序列 x_{mult} ，对于不同的 α_1 ， $\alpha_2 \in [0, 1]$ 。



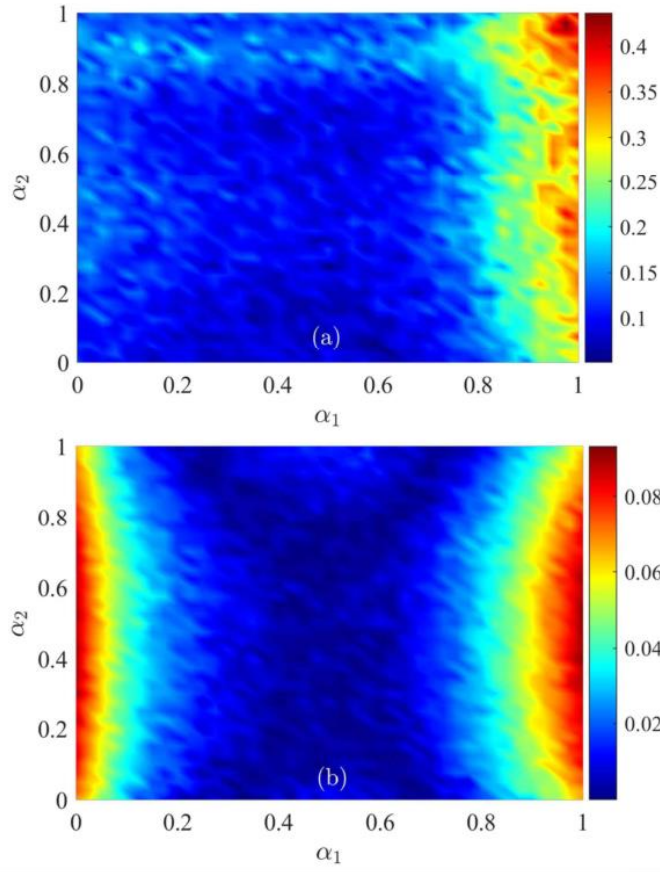
(分别对应于 $\langle k \rangle$, σ_k , Cl , r , S , 以及 e_{\max} .)

可以看出, $\langle k \rangle$ 和 e_{\max} 不依赖于线性相关, 对非线性相关的依赖性较弱。另一方面, 对于较大的 α_1 , S 强烈依赖于线性, 而对非线性相关的依赖性非常弱。 r 强烈依赖于非线性相关性, 但与线性的依赖性弱, 而 σ_k 依赖于线性以及非线性相关性。我们的结果表明, HVG 结构继承了线性和非线性相关性。为了更好地理解这个问题, 我们注意到在线性时间序列中, 傅立叶相位是完全随机的。因此, 消除任何非线性相关性的一种直接方法是, 在对一个序列 x 进行傅立叶变换之后, 打乱其对应的傅立叶相位, 然后将其变换回时域以生成相位随机序列 x^{RP} 。在这方面, 我们通过打乱其对应的傅立叶相位消除了乘积序列 x_{mult} 中的非线性相关性, 然后在图 5 中计算了映射序列 $x_{\text{mult}}^{\text{RP}}$ 的拓扑特征。



如期望的那样，所有特征都失去了对非线性相关性的依赖。该结果还证实了 x_{mult} 的非线性仅由 α_1 决定。

现在，我们试图找到一个合适的参数，该参数可以很好地测量给定序列中非线性相关性的强度。在这些特征中，我们选择 σ_k 是因为它既可以发现正相关也可以发现原始序列和震级序列均呈负相关（见图 3）。首先，我们应用 MFDFA 来计算多重分形谱 $f(\alpha_q)$ 的宽度 $\Delta\alpha_q$ 。正如我们在第二节中讨论的那样，是一个用于测量非线性强度的典型参数。在图 6（a）中，我们绘制了 x_{mult} 的 $\Delta\alpha_q$ 。



我们观察到，该序列仅在 $\alpha_1 > 3/4$ 的情况下是非线性的，并且该非线性强度随 α_1 的增加而增加。我们之前讨论过，这是 MFDFA 在最近的著作中的虚假结果。为了解决这个问题，我们定义了一个新的拓扑参数来测量非线性强度，如下所示：

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_k^{[x]} - \sigma_k^{[x^{RP}]}|}{\sigma_k^{[x^{RP}]}} \quad (5)$$

其中， x^{RP} 表示非线性已被相位随机化方法破坏后的 x 。实际上，通过减去线性相关性的影响， $\Delta\sigma_q$ 仅包含非线性信息。

在图 6 (b) 中，我们绘制了 x_{mult} 的 $\Delta\sigma$ 。有趣的是，我们观察到此度量可以很好地发现多重分形序列的非线性特征，尤其是对于 MFDFA 无法检测到任何相关性的区域（即对于所有 $\alpha_1 \leq 3/4$ ）。另一方面，在 $\alpha_1 = 1/2$ 附近可以观察到几乎对称的行为，这意味着在此点上下，该序列中非线性相关的强度相同。我们的结果与最近的研究结果一致。

总结：生成三个序列，分别将其映射到图中，通过分析图的拓扑特性来分析序列的相关性。

1. LSD：非高斯性不会影响 HVG，无需任何其他操作，就可以消除 PDF 对给定时间序列的相关性的影响；
2. FFM：某些参数可以很好地区分震级和原始序列中的正相关和负相关。原始序列是线

性随机过程，其震级序列也可以是相关；

3. x_{mult} ：结果表明，HVG 结构继承了线性和非线性相关性；

4. x_{mult}^{RP} ：所有特征都失去了对非线性相关性的依赖；

5. 计算多重分形谱的宽度，在 $\alpha_1 > 3/4$ 的情况下是非线性的，并且该非线性强度随 α_1 的增加而增加；

6. 定义了一个新的拓扑参数，来测量非线性相关的强度。

结论

随机时间序列中非线性相关性的测量通常是一项艰巨的任务。已经提出了许多提取这种信息的方法，其中 DFA 和 MFDFA 具有实际重要性。所有这些方法都面临一些挑战，例如找到合适的缩放区域以及消除 PDF 对正确估计相关性的影响。另一方面，由于某些技术问题，DFA 和 MFDFA 可能会错误地预测给定的相关序列不相关。因此，有必要寻找可能更好地分析相关时间序列的新方法。在本文中，通过使用最近提出的称为水平可视图（HVG）的算法，该算法将序列映射到图中，我们研究了分形和多重分形随机时间序列中的线性和非线性相关性。由于 HVG 不依赖于系列 PDF，因此生成的图形仅包含原始系列的相关信息。我们证明了这一独特功能可以起到消除 PDF 影响的典型替代方法的作用，在该方法中，通常将序列值逐级替换为高斯值。我们注意到，这种替换方法仅适用于线性相关为零的序列。但是，HVG 算法没有这样的限制，因此，当主要目的是估计相关性时，这表明了我们方法的优越性。此外，我们发现线性和非线性相关性在结果图的拓扑特征中得到了很好的继承。我们注意到，即使在 DFA 和 MFDFA 无法检测到任何相关性的时间序列中，也会发生这种情况。我们也表示震级序列相关并不能够表明原始序列非线性相关。最后，我们还介绍了可以很好地测量非线性强度的拓扑参数。无需找到任何标度区域即可获得所有此类结果，并通过 HVG 算法证明了相关分析的独特能力。因此，我们的方法可以被认为是一种新颖且精确的方法，可以估算各种复杂系统中的非线性相关性。