

多重分形中的非线性相关：幅度和符号序列的可见性图

摘要：

多重分形系列中的相关性已被广泛研究。几乎所有方法都试图找到给定时间序列的缩放特征。但是，缩放分析一直遇到一些困难。特别重要的是找到合适的缩放区域，并消除该序列的概率分布函数对相关提取方法的影响。在本文中，我们应用水平可见性图算法将随机时间序列映射到网络中。通过研究多重分形时间序列的幅度和符号，我们表明，即使对于被多重分形趋势分解分析等典型方法视为不相关噪声的情况，也可以检测线性和非线性相关性。此外，我们介绍了可以很好地测量非线性相关强度的拓扑参数。该参数独立于概率分布函数，无需查找任何缩放区域即可进行计算。我们的发现可能会提供有关各种复杂系统中时间序列的多重分形分析的新见解

当我们尝试研究复杂的系统时，不规则的时间序列几乎是我们的唯一资产。尽管该系列具有不规则的性质，但已发现它们通常以一些相关的模式进化，这些模式在大量的具有完全不同的微观元素的现象中观察到。实际上，通过研究这种相关性，我们希望更好地了解系统的基本动态，从而为我们提供足够的信息，可用于建模，控制和预测系统的未来。已经引入了许多方法来发现时间序列中的相关性，其中去趋势波动分析技术特别重要。但是，最近已证明它们可能在某些重要情况下导致错误的结果。为了解决这个问题，我们应用了可见性图算法的概念，并表明可以通过使用适当的拓扑特征很好地检测线性和非线性相关性。在这方面，我们还定义了一个可以测量非线性相关强度的参数，而以前的方法无法发现这种非线性。

1.介绍

许多生物，物理和社会系统表现出不规则的行为，这是它们众多组成部分之间时间或空间相互作用的结果。尺度不变属性的出现几乎是此类复杂系统的常见输出，如果系统的尺度乘以一个公因子，则系统的某些属性不会改变。[1] 这些概念通常由临界现象理论来描述，该理论研究临界点附近发生的事件。[1] 分形几何[2]本身已成为分析诸如物理，[3]化学，[4]生物学，[5]地质，[6]神经科学，[7]等各种研究领域中标度行为的重要框架。工程，[8]金融，[9]气象，[10]和水文学。[11]

总的来说，分形分析可以帮助我们更好地理解底层动力学，并更精确地为各种复杂系统建模。如果时间序列 $x(t)$ 中所有不同量级的波动具有相同的指数，并且系统的行为在从小到大的各种规模上都存在某种同质性（线性），则系统可以完全由一个称为赫斯特指数 H 的参数描述。[2] 此参数表征线性相关的强度，在平稳序列中，它指示二阶相关函数 $C(s) = \langle x(t+s)x(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ 有多快在图2中，衰减作为比例 s 的函数。任何高阶（ > 2 ）相关函数也可以通过二阶一获得。这种情况称为单形性。[12] 但是，对于许多观察到的现象来说，这还不是全部。即，通常需要一个以上的指数来完整描述一个复杂的系统。在此类系统中继承的异质性（非线性）会导致不同幅度的波动存在不同的缩放行为，并且需要更高阶的相关函数来描述系统的特征。这定义了多重分形的概念。

[13]已经在许多现象中探索了单形和多重分形，例如股市，[14]湍流，[15]地震和地震序列，[16,17]人类心跳动力学，[18]音乐，[19]仅举几例。

在已提出的用于分析多形特征的众多技术中，[20]多形去趋势波动分析（MFDFA）在一个[21]甚至更高维的空间中被证明是非常成功的。[22] 的确，MFDFA是为单分形设计的去趋势波动分析（DFA）的概括。[23] 在DFA方法中，通过从某一阶多项式中减去原始序列，从而消除了大小为 s 的框中的局部趋势之后，可以在所有尺度 s 上获得所得序列的均方根（波动函数） F_2 。对于幂律相关系列，我们有 $F_2(s) \sim s^{1-\alpha}$ ，其中 α 表示该系列中线性相关的强度。实际上，对于平稳（ $\alpha < 1$ ）和非平稳（ $\alpha > 1$ ）线性相关级数， $\alpha = H$ 和 $H + 1$ 。通常， $\alpha < 1/2$ 的值表示反相关的级数，而当 $\alpha > 1/2$ 时，该级数是正相关的。在 $\alpha = 1/2$ 时，级数不相关。这里值得一提的是，对于一个平稳且正相关的线性序列（即 $1/2 < \alpha < 1$ ），二阶相关函数的标度为 $C(s) \sim s^{-\gamma}$ ，其中 $\gamma = 2 - 2\alpha$ 。

在多重分形级数中，MFDFA通过分析所有 q 阶矩的波动比例来推广DFA方法，其中 $q = 2$ 导致DFA。对于幂律相关级数，波动函数 $F_q(s) \sim s^{-H(q)}$ ，其中 $H(q)$ 是广义的赫斯特指数，从中我们可以找到缩放函数 $\tau(q) = qH(q) - 1$ 。多重分形谱 $f(\alpha_q)$ 表示缩放指数 $\alpha_q = d\tau/dq$ 的分布，可以通过 $f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau(q)$ 来获得。 $f(\alpha_q)$ 的宽度 $\Delta\alpha_q$ 可以看作是衡量多重分形强度的参数。[21] 注意，对于单分形线性级数， $H(q) = \alpha$ 与 q 无关，并且多重分形谱成为德耳塔函数 $f(\alpha_q) = \delta(\alpha_q - \alpha)$ ；因此， $\Delta\alpha_q = 0$ 。

分析相关过程的另一种重要方法是将一系列增量 $(x_i = X_{i+1} - X_i)$ 分解为大小 $(x_i^{\max} = |x_i|)$ 并标记为 $[x_i^{\text{符号}} = \text{符号}(x_i)]$ 系列，然后提取其缩放特性。例如，通过使用DFA和MFDFA方法，已显示[24,25]，幅度和符号序列中相关性的存在分别对应于原始序列的非线性和线性。这种方法已应用于各个研究领域。[26-31]

在DFA和MFDFA技术中，通常会遇到一些挑战，例如为去趋势过程选择合适的多项式阶数，找到合适的缩放区域以及检测可能受到该序列的概率分布函数(PDF)影响的正确相关性。最近，研究表明，在某些情况下，DFA和MFDFA无法提取时间序列的正确缩放行为。[31-33]在某些特定缩放 s_c 和 q 上，缩放行为中存在交叉现象 s_c 的依赖性是多重分形频谱估计中可能存在误差的两个示例。另一方面，已经表明，在某些情况下，DFA(MFDFA)错误地预测了非线性时间序列中的线性。也就是说，他们将不相关的行为分配给非线性多重分形过程的相关幅度系列，这是由于某些技术问题而发生的。[31,32]例如，Carpena等。等已通过分析证明，对于具有DFA指数的相关序列，其大小的二阶涨落函数 $F_2^{\text{mag}}(s)$ 和符号 $F_2^{\text{sgn}}(s)$ 系列的缩放比例为 $(as + bs^{4\alpha-2})^{1/2}$ 和 $(cs + ds^{2\alpha})^{1/2}$ ，其中 a, b, c 和 d 是与比例无关的系数。显然，对于 $\alpha \leq 3/4$ ， $F_2^{\text{mag}}(s)$ 中的第一项占主导地位，因此，大 s ，因此 $F_2^{\text{mag}}(s) \sim s^{1/2}$ 。类似地，对于 $\alpha \leq 1/2$ ，对于大 s ， $F_2^{\text{sgn}}(s)$ 中的第一项再次占主导地位，因此，我们有 $F_2^{\text{sgn}}(s) \sim s^{1/2}$ 。这意味着，当 $\alpha \leq 3/4$ 和 $\alpha \leq 1/2$ 时，DFA或MFDFA会预测幅度和符号序列的不相关行为。但是，他们已经表明，通过应用二阶相关函数 $C(s)$ ，此类相关过程的大小和符号序列实际上是线性相关的。Bernaola-Galván等人使用这个想法。建议找到级数 $C_{|x|}(s) = \langle |x(t+s)| |x(t)| \rangle - \langle |x(t)| \rangle^2$ 的二阶相关函数的偏差从线性高斯级数的期望中正确发现给定时间序列中的非线性。[31]他们认为这种方法可以用于短序列，甚至可以用于没有任何缩放行为的序列。在高斯多重分形模型中，他们还表明非线性暗示多重分形，但反之则不成立。

为了寻找在时间序列中提取相关性的另一种可能的方法，Lacasa等人。引入了一种称为可见性图的算法[34,35]，该算法根据数据点彼此看到的能力将时间序列映射到图中。在这种方法中，时间序列特征被认为是结果图中继承的。例如，他们表明可以根据映射图的度分布来计算线性时间序列的单分形指数 H 。因此，该算法可以与其他典型方法（例如DFA和MFDFA）一起被视为分析分形和多重分形现象的新颖方法。尽管在不同的系统和情况下探索了可见性图算法的各个方面，[36-41]令人惊讶的是，对于具有非线性相关性的多重分形序列，尚未出现一般的图景。在本文中，我们应用水平可见性图算法将分形和多重分形时间序列映射到图中。通过研究结果图的拓扑特征，我们首先表明，即使由于上述技术问题[31-33]，DFA和MFDFA预测不相关的情况下，该方法也可以很好地检测线性和非线性相关。另一方面，我们指出，由于水平能见度图算法的独特特性，可以计算线性或非线性相关性，而无需消除原始序列的非高斯性的影响。最后，我们引入了一个可以很好地测量非线性相关强度的参数，其中分形谱宽度 $\Delta\alpha_q$ （即这种分析的一种典型且广泛使用的度量）无法发现现有的非线性。我们的结果与最近的研究结果一致。[31,32]

page four

二.定义：可见度图

为了从一个随机过程中提取相关信息，拉卡萨等人。引入了可见性图算法[34]，该算法根据数据点的可见性将时间序列映射到图中，并允许我们将复杂的网络理论应用于表征时间序列。之后，他们还定义了该算法的另一个版本，称为水平可见性图[35] (HVG)，与(正常)可见性图(NVG)相比，它具有一些优势。例如，HVG是比原始NVG在几何上更简单，计算速度更快的算法。另一方面，与NVG相比，HVG的独特之处在于该算法独立于原始系列的PDF。[41]这里值得一提的是，由于PDF会影响时间序列中的相关估计，因此通常需要逐级替换高斯序列中的原始非高斯序列，以消除这种分布效应。

[42,43]但是，它会已经表明，该方法仅在数据线性不相关的情况下才能很好地运行。44我们注意到，与以前的方法相比，HVG没有这种局限性，因此在提取时间序列的相关方面具有特殊优势。在这方面，我们在这里应用水平可见性算法。令 x_i 为一系列 N 数据 ($i = 1, 2, \dots, N$)。通过将每个数据点分配给图中的一个节点，可以将大小为 N 的时间序列映射到具有 N 个节点的图中。如果可以在连接 x_i 和 x_j 的时间序列中画一条不与任何中间数据高度相交的水平线，则两个节点 i 和 j 连接在一起，即两个任意点 (t_i, x_i) 和 (t_j, x_j) 成为两个连接的节点，如果放置在它们之间的任何其他数据点 (t_q, x_q) 对于所有 q 都满足 $x_i, x_j > x_q$ ，则 $t_i < t_q < t_j$ 。已经表明，由于映射方法，HVG总是按定义连接，并且在仿射变换下也是不变的。另一方面，有序和随机序列分别映射到规则和随机指数图中。

为了分析映射图的拓扑特征，我们首先需要构造相应的邻接矩阵 A ，如果节点 i 和 j 连接，则 $A_{ij} = 1$ ，否则， $A_{ij} = 0$ 。可以通过 $k_i = \sum_j A_{ij}$ 获得任意节点 i 的度 k_i 。然后，可以从度数分布 p_k 计算平均度数 $= \sum_k k p_k$ 和度数 $\sigma_k^2 = \sum_k k^2 p_k - (\sum_k k p_k)^2$ 的标准偏差，定义为找到 a 的概率 网络中度为 k 的节点。同样，可以从 A_{ij} 获得邻接矩阵的最大特征值 e_{\max} ，该值测量复杂网络中信息流的强度，并且与最大程度成正比。[45]

根据定义，原始序列的时间顺序 $x(t)$ 保持在所得的度数序列 $k(t) = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ 。这使我们发现 $x(t)$ 和 $k(t)$ 之间存在任何可能的相关性。在这方面，我们选择Spearman相关系数[46]来衡量单调关系船的强度，而Pearson相关系数则只能找到两个量之间的线性关系。[46] 将 x_r 和 k_r 分别作为 $x(t)$ 和 $k(t)$ 的等级，将Spearman相关系数定义为

$$S = \frac{\langle [x_r - \langle x_r \rangle][k_r - \langle k_r \rangle] \rangle}{\sigma_{x_r} \sigma_{k_r}}, \quad (1)$$

其中 $S \in [-1, 1]$ ，并且 σ_{x_r} 和 σ_{k_r} 分别是 x_r 和 k_r 的标准偏差。我们注意到，肯德尔系数是另一种广泛使用的单调相关性度量，[46]在这里产生的结果与斯皮尔曼系数相似。

在为更好地描述复杂网络而引入的大量拓扑特征中，[47]我们选择了两个经过广泛研究的量，即分类度 r 和聚类系数 Cl ，可以测量节点度之间是否存在任何相关性。在无向网络中按节点度进行混合的分类系数为

$$r = \frac{\sum_{j,l} j l (e_{jl} - q_j q_l)}{\sigma_q^2}, \quad (2)$$

其中 e_{jl} 是连接度为 j 和 l 的节点的边的分数， $q_k = (k+1) p_{k+1} / \sum_k p_k$ 是定义为边数的节点的多余度剩下的节点不是我们到达的那个节点，而 σ_q 是分布 q_k 的标准偏差。通常，我们具有 $-1 \leq r \leq 1$ 。 r 的正

(负)值表示相似(不同)度的节点之间的相关性。实际上，当 $r = 0$ 时，网络是非分类的，对于 $r = 1$ 或 $r = -1$ ，网络分别称为完全分类或非分类的。聚类系数 Cl 是复杂网络中重要的(三点)相关性度量，可以视为网络中节点连接的三联体的密度。48任意节点 i 的局部聚类定义为 $c_i = n_e / n_p$ ，其中 n_e 和 n_p 分别代表共享节点 i 的现有三合会的数目和可能的三合会的总数。因此，网络的平均聚类系数为

$$Cl = \frac{\sum c_i}{N}. \quad (3)$$

在这里我们应该注意，当然可以考虑任何其他拓扑属性，并进行相同的分析，以便研究序列特征对结果图的潜在影响。

三.定义：模拟系列

我们打算研究线性和非线性相关性以及一系列PDF对所得可见度图的拓扑特征的影响。在这方面，我们生成具有可调三个特征的序列。

引入分数布朗运动 (fBm) 来模拟湍流[49]，并广泛用于各种领域，包括物理学，统计学，水文学，经济学，生物学等[50-52]。具有平稳增量的高斯单分形过程称为分数高斯噪声 (fGn)，并且具有较长的记忆力，这取决于Hurst指数H， $0 < H < 1$ 。[2] 实际上， $H = 1/2$ 对应于普通布朗运动，其中连续的增量在统计上是独立的。对于 $H > 1/2$ ，增量是正相关的；对于 $H < 1/2$ ，连续增量更可能具有相反的符号并且是反相关的。可以使用称为傅立叶滤波方法 (FFM) 的算法来生成这样的相关序列，53如下：将生成的白噪声的傅立叶变换乘以 $f^{-\beta}$ 形式的幂律，然后进行傅立叶变换 为了回到时域再次进行序列化。

最后，我们得到一个具有 $S(f) \sim f^{-\beta}$ 功率谱的相关序列。请注意， $\beta = 2\alpha - 1$ ，其中 α 是DFA指数。

fGn和fBm系列都具有高斯PDF。但是，各种各样的自然和社会现象都显示出具有无限方差的重尾PDF。为了研究这样的重尾巴，已经提出了各种模型。其中，Lévy稳定分布 (LSD) 已被广泛考虑。[54] LSD是独立和相同分布的随机变量的归一化和的所有吸引子的族。对称LSD的特征在于稳定性参数 $\lambda \in (0, 2]$ 。对于 $0 < \lambda \leq 1$ ，分布具有不确定的均值和方差值；对于 $1 < \lambda \leq 2$ ，分布具有定义的均值但方差无穷。最著名的LSD函数是 $\lambda = 1$ 的柯西分布和 $\lambda = 2$ 的高斯分布函数。因此，对于不同的 $\lambda < 2$ ，人们可以构造具有非高斯分布的各种不相关序列。

上面定义的所有时间序列都是线性相关的 (fBm和fGn) 或完全不相关的 (Lévy稳定)。为了研究非线性相关性的影响，Kalisky等人[25]提出了一个乘法多重分形级数。可以通过将两个独立的线性相关时间序列的大小和符号乘以不同的DFA指数 α_1 和 α_2 来生成，如下所示：

$$x_{mult} = |f_{\alpha_1}| \text{sgn}(f_{\alpha_2}), \quad (4)$$

在哪里 $|\dots|$ 和 $\text{sgn}(\dots)$ 表示幅度和符号运算符。另外， f_α 表示通过上述的傅立叶滤波方法以 $\alpha = (\beta + 1) / 2$ 生成的相关序列。可以分别使用参数 α_2 和 α_1 控制 x_{mult} 中线性和非线性相关的强度。[25]

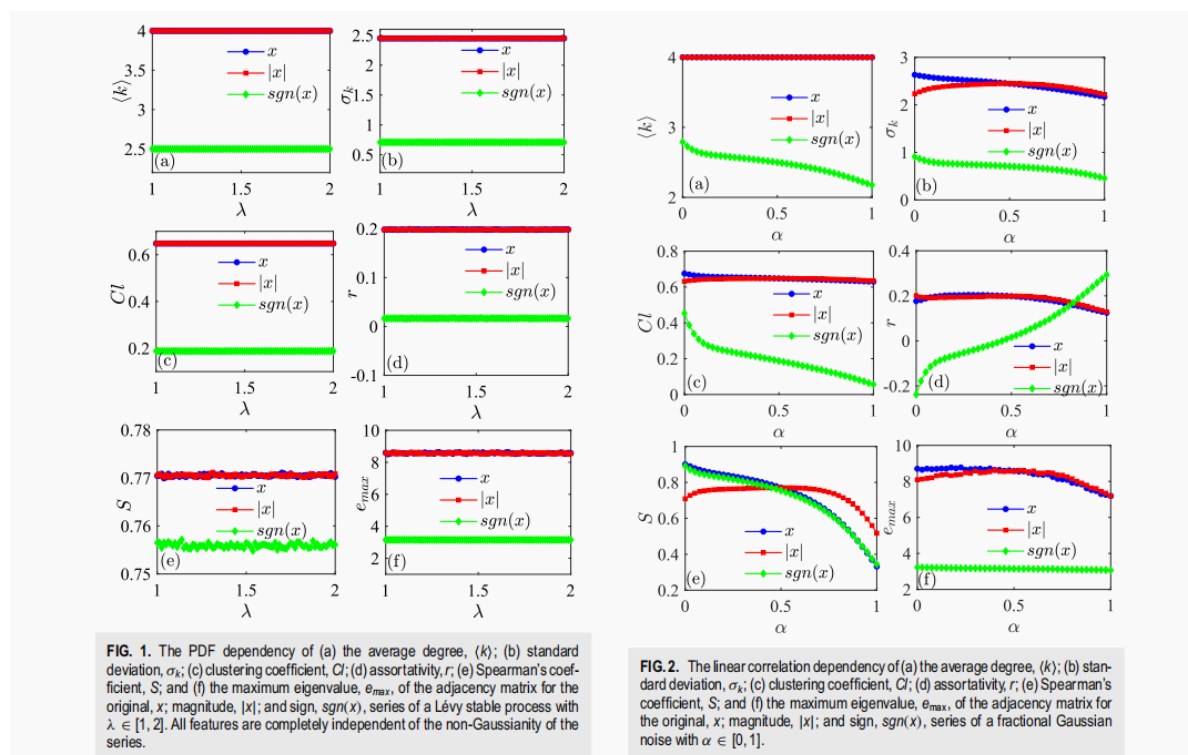


图1：PDF依赖度 (a) 平均度；(b) 标准偏差 σ_k ；(c) 聚类系数 Cl ；(d) 分类性 r ；(e) 斯皮尔曼系数 S ；(f) 原始矩阵 x 的邻接矩阵的最大特征值 e_{max} ；大小 $|x|$ ；以及 $\lambda \in [1, 2]$ 的Lévy稳定过程的符号 $\text{sgn}(x)$ 所有功能完全独立于非高斯性

图2：(a) 平均度；(b) 标准偏差 σ_k ；(c) 聚类系数 Cl ；(d) 分类性 r ；(e) 斯皮尔曼系数 S ；(f) 原始矩阵 x 的邻接矩阵的最大特征值 e_{max} ；大小 $|x|$ ；和符号 $\text{sgn}(x)$ ，分数为 $\alpha \in [0, 1]$ 的分数高斯噪声的级数。

IV. 结果

首先，为了表明水平能见度图算法与系列PDF无关，我们在图1中绘制了Sec.6中描述的六个拓扑属性。II对应于Lévy稳定过程的原始 x ，量级 $|x|$ 和符号 $\text{sgn}(x)$ ，其中 $1 \leq \lambda \leq 2$ 。图1 (a) - (f) 表示平均度 $\langle k \rangle$ ，标准偏差 σ_k ，聚类系数 Cl ，分类性 r ，Spearman系数 S 和邻接矩阵的最大特征值 e_{\max} 。我们注意到，通过将 λ 从1增加到2，PDF从柯西（非高斯）转换为正态（高斯）功能形式。可以看出，非高斯性不会影响HVG，并且所有图对于各种 λ 值都是常数。在这里，我们认为HVG算法的这种独特特性表明，无需任何其他操作，就可以消除PDF对给定时间序列的相关属性的影响。因此，我们总是可以将这种技术应用于以相关性的精确估计为主要目标的情况。

为了研究线性相关性对HVG的影响，我们将分形级数与FFM方法生成的线性相关性映射为不同的 $0 \leq \alpha \leq 1$ （请参见第III节）。与图1相似，在图2中绘制了所得的拓扑特征。我们发现，幅度和原始序列的平均度相同，无法区分具有不同线性相关性的序列。但是，某些参数（例如 σ_k ， Cl 和 e_{\max} ）可以很好地区分幅度和原始序列的正相关和负相关。此外，符号和原始序列的Spearman系数相同，现在可以在所有 α 值之间进行区分。正如我们之前提到的，DFA无法检测到分别在 $\alpha \leq 3/4$ 和 $\alpha \leq 1/2$ 的幅度和符号序列上的任何相关性³³，并且这些区域被错误地分类为不相关的白噪声。该结果导致另一个错误的结论，即幅度的相关性的存在是原始序列非线性的指标。这实际上是DFA和MFDFA的虚假结果，[31,32]，我们的发现证实了此类研究；即，这里的原始序列是线性随机过程，而其量级序列也相关。

根据图2所示的结果，有趣的是找到 $\sigma_k \propto |x|^\alpha$ 的函数形式。vs $\sigma_k \propto x$ 以及 $S \propto \text{sgn}(x)$ vs $S \propto x$ 。图3表示了各种 α 值（彩条）的这种关系。在图3 (a) 中，我们观察到 $\alpha = 1/2$ 附近的对称行为，这表明负相关系列的幅度序列也正相关。最近，已经显示[31]，对于线性相关的高斯级数，在大小为 $C \propto |x|$ 的二阶相关函数的行为中也观察到这种对称关系。（s）与原始系列C（s）。我们认为该工作中使用的方法在很大程度上取决于原始序列 x 的PDF，因此，在进行这种分析之前，需要先用高斯值逐级替换序列值；但是，在我们的方法中，不需要这种替换。图3 (b) 还显示了 $S \propto \text{sgn}(x)$ 与 $S \propto x$ 的关系，并指出了几乎完整的线性关系，显示了原始序列和符号序列中线性相关之间的——对应关系。这一结果与最近的研究完全吻合。[33] 我们还注意到，图3的结果表明，对于 $\alpha < 3/4$ 和 $\alpha < 1/2$ 的区域，幅度和符号序列也分别相关，而DFA或MFDFA无法发现任何相关性，如 I 。

为了研究非线性对可见度图的影响，我们映射了一个非线性乘法级数 x_{mult} ，如第III节所述。将III转换为HVG，以获取各种值 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ 。我们计算了图4中各种 α_1 和 α_2 的六个拓扑特征，类似于图2和3。1和2。图中的色条。图4 (a) - (f) 分别显示， σ_k ， Cl ， r ， S 和 e_{\max} 的值。可以看出，和 e_{\max} 不依赖于线性相关，而对非线性相关的依赖性很小。另一方面，对于较大的 α_1 ， S 强烈依赖于线性，而对非线性相关的依赖则非常弱。 r 强烈依赖于非线性相关性，但与线性的相关性较弱，而 σ_k 依赖于线性以及非线性相关性。我们的结果表明，HVG结构继承了线性和非线性相关性。为了更好地理解这个问题，我们注意到在线性时间序列中，傅立叶相位是完全随机的。因此，一种消除任何非线性相关性的简单方法[42]是在对序列 x 进行傅立叶变换后，可以将其对应的傅立叶相位混洗，然后将其变换回时域以生成相位随机序列 $x \wedge \{RP\}$ 。在这方面，我们通过对乘积序列 x_{mult} 的傅里叶相位进行混洗，消除了非线性相关性，然后在图5中计算了映射序列 $x_{\text{mult}} \wedge \{RP\}$ 的拓扑特征。正如预期的那样，所有特征都不再依赖于非线性相关性（比较见图4）。该结果还证实了 x_{mult} 的非线性仅由 α_1 决定。

现在，我们寻求找到一个合适的参数，该参数可以很好地测量给定序列中非线性相关性的强度。在这些特征中，我们选择 σ_k ，因为它可以在原始序列和量级序列中发现正相关和负相关（请参见图3）。首先，我们使用MFDFA计算多重分形谱 $f(\alpha_q)$ 的宽度 $\Delta\alpha_q$ 。正如我们在第I节中讨论的那样。该量是用于测量一系列非线性强度的典型参数。在图6 (a) 中，我们绘制了一个具有各种 α_1 和 α_2 的乘法序列的 $\Delta\alpha_q$ 。我们观察到，该序列仅对于 $\alpha_1 > 3/4$ 的值是非线性的，并且随着 α_1 的增加而增加。然

而，正如我们之前所讨论的，这是MFDFA在最近的工作中广泛讨论的虚假结果[31,33]。为了解决这个问题，我们定义了一个新的拓扑参数来测量非线性强度，如下所示：

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_k^{|\alpha|} - \sigma_k^{|\alpha|RP}|}{\sigma_k^{|\alpha|RP}}, \quad (5)$$

其中 α^{RP} 显示级数 α ，其非线性已被相位随机化方法破坏。实际上，通过减去线性相关性的影响， $\Delta\sigma$ 仅包含非线性信息。

我们在图6(b)中绘制了具有各种 α_1 和 α_2 的乘积级数 $x = x_{\{mult\}}$ 的 $\Delta\sigma$ 。有趣的是，我们观察到该度量可以很好地发现多重分形序列的非线性特征，特别是对于MFDFA无法检测到任何相关性的区域（即，对于所有 $\alpha_1 \leq 3/4$ ）。另一方面，在 $\alpha_1 = 1/2$ 附近观察到几乎对称的行为，这意味着在该点以下和以上，该乘积级数中非线性相关的强度相同。我们的结果与最近的研究结果一致。[31,33]

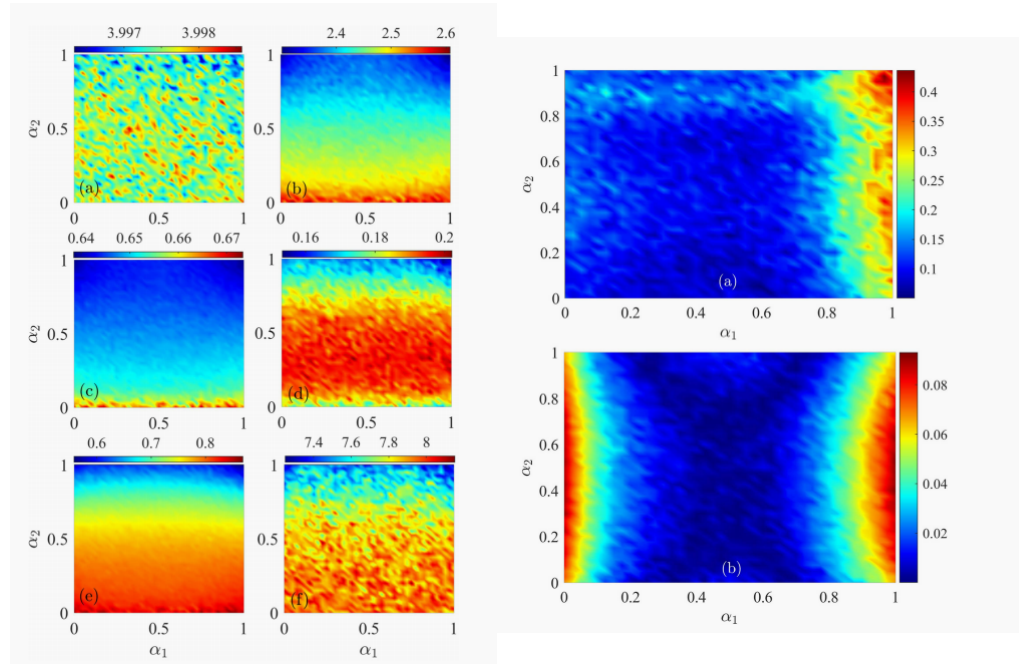


图 5. (a) 平均度的相关性；(b) 标准偏差 σ_k ；(c) 聚类系数 Cl ；(d) 分类性 r ；(e) 斯皮尔曼系数 S ；(f) 随机相位 (RP) 乘法过程 $x_{\{mult\}}^{RP}$ 的邻接矩阵的最大特征值 $e_{\{max\}}$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ 。

图6. (a) 通过MFDFA方法针对具有各种 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ 的乘法系列 $x_{\{mult\}}$ 计算出的多重分形宽度 $\Delta\alpha_q$ ，以及 (b) 引入方程式中的非线性度量 $\Delta\sigma$ 。(5) 对于与 (a) 类似的相同系列。

五.结论

随机时间序列中非线性相关性的测量通常是一项艰巨的任务。已经提出了许多提取这种信息的方法，其中DFA和MFDFA具有实际重要性。所有这些方法都面临一些挑战，例如找到合适的缩放区域以及消除PDF对正确估计相关性的影响。另一方面，由于某些技术问题，DFA和MFDFA可能会错误地预测给定的相关序列不相关。

因此，寻找可能能够更好地分析相关时间序列的新方法是必要的。在本文中，通过使用最近提出的称为水平能见度图 (HVG) 的算法，该算法将序列映射到图中，我们研究了分形和多重分形随机时间序列中的线性和非线性相关性。由于HVG不依赖于PDF系列，因此生成的图形仅包含原始系列的相关信息。我们证明了这一独特功能可以起到消除PDF影响的典型替代方法的作用，在该方法中，通常将序列值逐级替换为高斯值。我们注意到，这种替换方法仅适用于线性相关为零的序列。但是，对HVG算法没有这种限制，因此，当主要目的是估计相关性时，它表明了我们方法的优越性。此外，我们发现线性和非线性相关性在结果图的拓扑特征中得到了很好的继承。我们注意到，即使在DFA和MFDFA无法检测到任何相关性的时间序列中，也会发生这种情况。我们还表示，序列量级中存在相关性并不表示原始序列中存在非线性。最后，我们还介绍了可以很好地测量非线性强度的拓扑参数。无需找到任何缩放区域即可获得

所有这些结果，并通过HVG算法证明了相关分析的独特能力。因此，我们的方法可以被认为是一种新颖且精确的方法，可以估算各种复杂系统中的非线性相关性。