

从时间序列上统计区分相干和非相干混沌动力学是非线性科学中的一个当代问题。在这项工作中，我们基于记录的轨迹的递归特性提出了不同的措施，这些措施从几何和动态的角度描述了基础系统。讨论了区分相位相干和非相干混沌振荡的各种措施的潜力。对混沌Rossler系统进行了详细的数值分析，当一个控制参数发生变化时，它会显示两种类型的混沌，而Mackey-Glass系统则是具有非相干混沌的时滞系统的一个示例。我们的结果表明，特别是来自递归网络分析的几何度量非常适合跟踪螺旋型和螺旋型混沌之间的过渡，螺旋型和螺旋型混沌是在其他非线性振荡子中也发现的从相干混沌到非相干混沌的常见路径。给出了根据吸引子几何形状观察到的行为的详细解释。

VC 2012美国物理研究所。

在自然和技术系统中经常会出现振荡过程。通常，相应的动力学不是严格地周期性的，而是表现出更复杂的时间变异性模式，其特征是在初始条件任意接近的情况下轨迹快速发散。[1-3]有很多此类混沌振荡器的例子，可以对其进行长期预测。放大器和相位是不可能的。因此，研究它们的相位动力学最近引起了极大的关注，例如，关于不同耦合系统之间的相位同步过程。[4,5]然而，大多数适用于此目的的现有方法都需要明确定义适当的相位变量在非相干混沌振荡的情况下，这可能会成为一个不平凡的问题。因此，研究混沌系统的相干特性已成为理论研究和实验研究中的重要问题。[6]在这项工作中，我们基于相空间递归的概念提出了一些方法，从而可以研究互补方面。与吸引子的几何结构和动力学有关的混沌振荡器。具体来说，我们得出了具有变化的控制参数的，相空间中复杂系统几何结构变化的详细表征，这些变化伴随着从相干动力学到非相干动力学的过渡。

## I .介绍

在过去的几十年中，混沌振荡器的复杂性已广泛地受到非线性动力学系统理论的启发而表征为各种不同的数量。[7,8]Lyapunov指数[9,10]描述了与有限时间指数散度相关的特征时标。混沌轨道的位置，因此直接关系到动力学的可预测性范围。分形维数和熵通常根据信息论的概念来衡量潜在吸引子的结构复杂性。

与前述概念相反，在许多情况下，人们有兴趣明确地表征所记录的非线性振荡的相位动力学。但是，根据所研究的混沌振荡的结构特性，可能很难为观察到的动力学分配明确定义的相位变量。这个问题主要发生在有噪声振荡的情况下。然而，同样在完全确定性的情况下，人们经常观察到振荡在相空间中没有明显的旋转中心，例如在Rossler系统的漏斗状态下（见图1 (b)）[11]。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 8.5).\end{aligned}\tag{1}$$

在这种非相干振荡的情况下，对相位动力学的适当定义和分析就变得很困难。因此，鉴于现实世界中的混沌振荡器的例子数量不断增加，自动区分相位相干（PC）和非相干（NPC）混沌的问题具有实际意义。传统上，这个问题是通过研究被研究系统的相扩散特性来考虑的。[5]但是，为了应用这一概念，必须事先定义适当的相变。

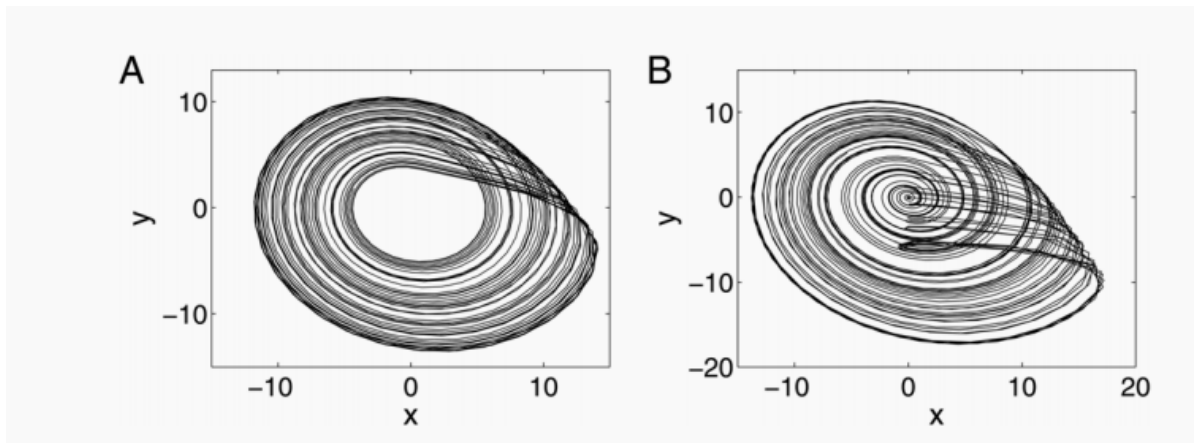


图1. Rossler系统轨迹的一部分的二维投影[公式 (1)]在 (a) PC ( $a=0.165$ ) 和 (b) NPC (漏斗) 方案 ( $a=0.265$ ) 中。

page three

在这项工作中，我们提出了一种基于动力学系统在相空间中的轨迹的递归特性的替代方法，用于定量表征观察到的混沌动力学是否是相干的。与对相位扩散的显式研究相反，相应的概念不依赖于对相位变量的显式定义。我们强调，这一事实已被基于递归的属性用于研究耦合的NPC振荡器的同步过程[12,13]和时滞系统[14,15]。

通常，可以通过使用递归图 (RPs) [13]方便地分析递归属性。Eckmann等人[16]在开创性工作中介绍了这些方法，这些方法提供了对下层时态结构的直观可视化。为此目的，将递归矩阵 $R_{i,j}$ 定义为相同轨迹上的观察状态向量对在相空间中是否彼此接近的二进制表示。给定两个状态向量 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ （其中 $i$ 和 $j$ 是时间索引），这种邻近性最常见的特征是将 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ 之间的差分向量的长度与规定的最大距离 $\epsilon$ 相比较，即

$$R_{i,j}(\epsilon) = \Theta(\epsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (2)$$

其中 $\Theta(-)$ 是Heaviside函数， $\|\cdot\|$ 规范（例如，欧几里得，曼哈顿或最高规范）。在这项工作中，我们将特别选择最大范数来定义相空间中的距离，因为它比其他范本具有较低的计算要求。但是，选择其他规范不会从质上改变呈现的结果。RPs的性质已针对各种动力学进行了深入研究，[13]包括周期性，准周期，[17-19]混沌和随机动力学[20,21]

除其他特征外，还显示了对角线和垂直结构的长度分布 RP中的RP可用于定义各种复杂性度量，这些度量描述了诸如确定性或系统层级之类的特性。[22-25]所产生的递归量化分析 (RQA) 工具箱已被广泛应用于研究来自各种科学学科。[13,26]然而，在这项工作中，我们将基于RPs使用一些互补的概念方法，这些方法不属于一组经典的RQA措施。

基于公式 (2)，我们将基于递归时间 (RT) 统计信息和所谓的电子递归网络 (RN) 讨论属性。基本的方法学概念在第二节中进行了简要描述。II，随后分别应用于PC和NPC体制下Rossler系统的两种实现。继本示例获得的结果之后，在第二节中介绍了基于基础系统的重复特性的潜在新的相位相干统计指标。III，并分别与其他基于相扩散和Poincare返回时间的既定方法以及新颖方法进行了比较。适用于Rossler系统的完整分叉序列。IV证明了基于递归的方法的可行性。讨论了从PC（螺旋型）到NPC（螺旋型）混沌过渡的几何后果及其对递归特性的影响。作为第二个例子，说明了Mackey-Glass系统[27]在包括周期性和NPC混沌行为之间转换的参数范围内基于递归的度量的行为[28]。

## II 方法

### A.重复时间统计

作为RQA的补充，表征相空间中动力学系统的递归性质的另一种自然方法是对RT的分布进行统计评估，该方法已应用于混沌和随机系统。[29-32]与相对于返回时间的比较 在固定的Poincare表面上，重复时间是指轨迹进入相空间中先前访问的点的电子邻域之后的时间间隔。 Gao等[33]证明，类似于某些基于行的RQA测量，基于RT分布 $p(s)$ 的特征可用于检测细微的动态过渡，这是通过使用相应的方法来测试平稳性的结果。[34, 35]除了对极端事件的研究具有直接重要性外，[36]的复发时间还证明了其在估计信息量[30]和Kolmogorov Sinai熵等动态不变量方面的潜力。[37]

给定一个RP，可以将RT标识为不包含任何重复项（即，没有一对相互靠近的状态向量）的不间断的垂直（或水平，因为递归矩阵是对称的）“白线”的长度。

更确切地说，长度为 $\tau$ 的白线从RP的位置 $(i, j)$ 开始 如果 [38]

$$R_{i,j+m} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = -1, \\ 0 & \text{for } m \in \{0, \dots, \tau - 1\}, \\ 1 & \text{if } m = \tau. \end{cases} \quad (3)$$

为了看到这一点，对于所有时间， $k = j-1, \dots, j+\tau$ ，将轨迹上的值 $x_k$ 与 $x_i$ 进行比较。然后，由等式给出的结构。（3）可以解释如下：在时间 $k = j-1$ 时，轨迹落入 $x_i$ 的电子邻域。然后，对于 $k = j, \dots, j+\tau-1$ ，它离开 $x_i$ 的距离比距离 $e$ 更远；直到在 $k = j+\tau$ 时，它再次返回到 $x_i$ 的电子邻域。因此，给定轨迹在时域中的均匀采样，线的长度与轨迹需要使 $e$ -close返回 $x_i$ 的时间成比例。超出首次返回时间的概念，所有重复出现到 $x_i$ 的电子邻域都会引起该特定点的RT分布。结合给定时间序列中所有可用点 $x_i$ 的信息（即考虑RP中所有白线的长度），可以获得与相空间中观察到的（采样的）轨迹相关的RT分布 $p(\tau)$ 。因此，不包含任何重复的观测状态向量对的RP中“白色”垂直线 $l$ 的长度分布 $p(l)$ 提供了所考虑轨道上RT分布的经验估计，其中包含有关轨道动力学的重要信息。正在调查的系统。

page four

## B.递归网络分析

最近，已经提出了从复杂网络的角度研究时间序列的基本属性的不同方法。[39-44]许多将时间序列转换为网络表示形式的现有方法都有一个共同点，即它们定义了复杂网络的连通性，类似于 时空情况-通过单个轨迹的不同部分（例如，各个状态，状态向量或循环）的相互接近[44,45]在其他相关方法中，已经发现e-RN及其定量分析可以识别 [43,44,46,47,50]为了构造RN，我们重新解释递归矩阵 $R_{i,j}$ 。为了方便起见，移除了其主要对角线，作为与记录的轨迹关联的无向复杂网络的邻接矩阵 $A_{i,j}$ ，即

$$A_{i,j} = R_{i,j}(\varepsilon) - \delta_{i,j}, \quad (4)$$

其中 $\sigma_{i,j}$ 是克罗内克三角洲。该网络的顶点由轨迹上的各个采样状态向量给出，而连通性是根据它们在相空间中的相互接近性而建立的。这种复杂网络的定义提供了一种从网络拓扑角度分析混沌吸引子的相空间属性的通用方法。[45,50]然而，由于网络拓扑在顶点置换下是不变的，因此RN的统计属性无法捕获动态变化。在吸引子上，但其几何结构基于适当的采样。在这方面,我们强调,由于单个有限时间轨迹不一定代表底层系统的典型长期行为，因此，所得网络特性（其中包括）取决于所考虑时间序列的长度 $N$ （即,网络大小），数据的概率分布，嵌入，[51]采样,[44,52]等。我们选择阈值 $e$ 的方式是使所得的RN的固定边缘密度（递归率）为 $RR=0.03$ ，除非另有说明 明确说明。

尽管它们主要描述几何方面，但RN的拓扑特征与基础动力系统的不变性质密切相关。[43,45,50,53]在模型系统（例如，Rossler和Lorenz系统）中，本地和全局网络 属性已被详细研究过。[44,45,50,51]其中，有两个特别有趣的局部度量是

（1）局部聚类系数 $C_v$ ，它量化以给定顶点 $v$ 为中心（即在相空间中的关联点 $x_v$ 处）的闭合三角形的相对数量，并给出有关 $e$ -内吸引子的几何结构的重要信息  $v$ 在相空间[50]中的 $v$ 邻域和

(2) 中间性中心 $b_v$ ，它量化了网络中包含给定顶点 $v$ 的所有最短路径的比例。[54]在RN中， $b_v$ 较高的顶点对应于相空间密度较低的区域，这些区域位于较高密度的区域之间。因此， $b_v$ 产生有关吸引子局部破裂的信息。[45,51]由于在复杂的网络中， $b_v$ 的值可能跨越几个数量级；在下文中，我们将考虑 $\log b_v$ 作为网络拓扑的特征量度。

在RN中， $C_v$ 和 $b_v$ 都对不稳定周期轨道（UPOs）的存在很敏感，但是可以解决互补方面。[51]特别是，在连续系统中，众所周知，如果混沌轨迹进入UPO的附近，因此，状态会沿着该UPO累积一段时间，而不是均匀地填充相应邻域中的相空间（特别是如果我们考虑使用较低周期的UPO）[55]，结果导致局部降低的有效状态 [50]可以用 $C_v$ 和从该数量得出的度量来定量表征的维度。[50]

除了上述顶点特征外，业已证明，有几种全局网络度量可以区分离散系统和连续时间系统在性质上不同的行为类型。[43,47-49]将这些先前的结果扩展到混沌动力学的不同表现形式，我们将考虑四种特殊的措施[56-58]作为po 歧视性统计的潜在候选人：

- (1) 全局聚类系数 $C$ , [59]给出了所有顶点 $v$ 上局部聚类系数 $C_v$ 的算术平均值，
- (2) 网络传递性 $T$ , [60,61]与 $C$ 密切相关（但对较差的权重较小 连接顶点[50]）并全局表征复杂网络中三重顶点之间的链接关系（即，假设已知另外两个边存在，则三个顶点集合中的第三个边的概率），[89]
- (3) 平均路径长度 $L$ ，它量化了所有成对顶点之间的平均测地线（图形）距离，以及
- (4) 分类系数 $R$ , [62]表征了网络中所有边缘两端的连通性的相似性（即，即所有相连顶点对的度之间的相关系数）。

在罗斯勒系统的两参数分叉情况下，网络的传递性和平均路径长度已被证明可以很好地区分复杂的周期性轨道和混沌轨道。[47]一种用于根据已知不变密度 $p$ 计算 $T$ 值的分析理论。 $p(x)$ 揭示了与广义分形维数某个概念的密切关系。[50]在这方面， $T$ 的高值表明相空间中存在维数较低的结构，这与更规则的动力学相对应。相反，对于离散和连续时间动力系统，平均路径长度表现出不同的行为：对于地图为 [43、45、47]更规则的动力表现为 $L$ 值低，而相反的情况适用于混沌振荡器。

---

page five

### C. 相干和非相干Rossler系统的递归性质

作为展示PC和NPC混沌动力学的简单连续时间确定性动力学系统，我们首先研究Secs中描述的基于RP的概念的行为。罗斯勒系统的II A和II B [公式 (1)]。在下文中，我们将使用该系统对各种参数 $a$ 的数值模拟，这些参数是通过步长为 $h = 0.01$ 的四阶Runge-Kutta积分器获得的。生成的轨迹已被下采样到 $N = 10,000$ 个数据点，采样间隔为 $\Delta t = 0.2$ ，避免了琐碎的时间相关性的强烈影响。

为了说明PC和NPC动力学基于RP的指标的行为在质上的差异，我们分别考虑个别情况 $a = 0.165$  (PC) 和 $a = 0.265$  (NPC)。结果轨迹的一部分（投影到 $(x, y)$ 平面上）如图1所示。人们清楚地意识到，系统的振荡在PC机壳中有一个明确定义的中心，但对于NPC混沌却没有唯一的中心。。

从两个示例获得的RT分布在质量上都不同（见图2）。具体而言，在PC体制中，没有任何重复发生的时间间隔的长度在基本振荡周期的倍数附近达到峰值，在系统的三个完整周期内达到最大值[38]（请注意图2中的对数单位）。这表明，在这种情况下，一个独特的时标支配着系统的动力。相反，在NPC情况下，分布变得更加不规则，这表明在所观察到的混沌动力学中有多个时间尺度是相关的。但是，由于在先前的工作中尚未明确研究RT分布中的复杂结构，因此无法先验地确定哪种统计属性（例如平均重复时间或相应的标准差）可用于区分两者。案件。具体地，由于重复时间与振荡的平均周期有关，因此随着参数 $a$ 的改变，其平均值在不同的动态范围内变化很大。



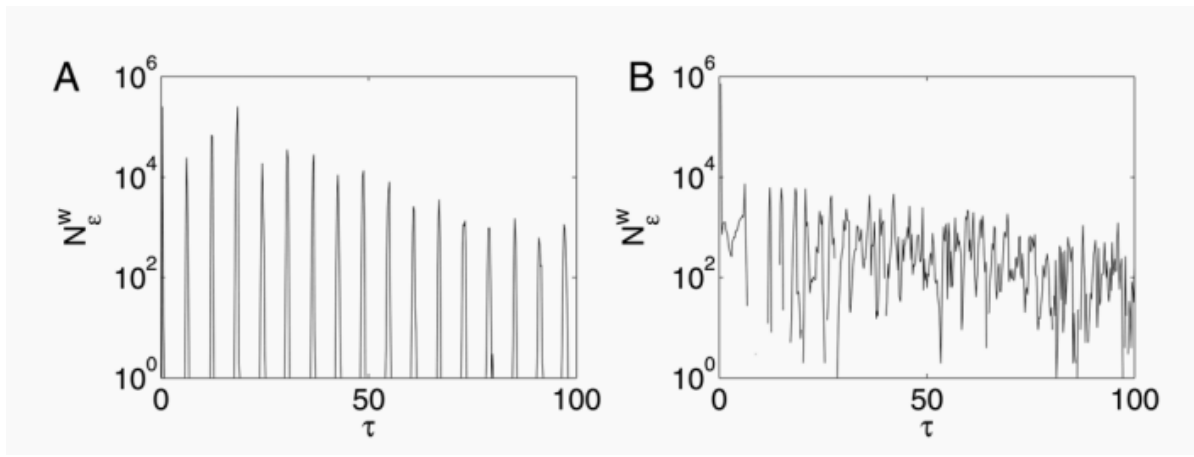


图.2.对于具有 (a) PC和 (b) NPC混沌的Rossler系统的一种实现，RT分布 $p(\tau)$ 的 $\tau = l\Delta t$ （短时间缩放）。选择阈值 $\epsilon$ 以产生复发率 $RR = 0.03$ 。

与RT统计数据相比，局部RN属性在相空间而非动态方面表征了吸引子几何的高阶特征。**[45]**尽管最近已将全局网络属性应用于在复杂的两阶段自动区分混沌和周期动力学。Rossler系统的参数分叉情况**[47]**，我们认为局部特性能够表征系统的更细微的结构变化。对于两个考虑的测试案例，图3显示了相空间中局部聚类系数 $C_v$ 和中间性中心 $b_v$ 的模式。可以清楚地看到，这两种措施都表征了吸引子几何形状的不同方面**[51]**，这导致相关系数仍然很大，但不是很大（图4）。具体地说，这两种措施都对UPOs的存在有些敏感，这些UPOs紧密地嵌入在混沌吸引子中。但是，尽管到目前为止，就吸引子的有效局部尺寸而言，理论上仅对 $C_v$ 建立了相应的直接关系，但**[50]**  $b_v$ 并不是UPOs的直接指标。

更详细地研究两种本地网络测度的全部概率分布（图5），我们观察到PC和NPC动态之间的明显差异。具体而言，所有分布至少都是双峰分布的（这部分与导致局部聚类系数增加的UPO的存在有关），而双峰分布在相位相干的情况下表现得更多。再加上一般的发现，即各个分布的最大值相差不大，这一结果促使人们考虑 $C_v$ 和 $\log b_v$ 分布的简单统计特性，以得出相位相干性的新指标。我们将在第二节中回到这个想法。**III**，

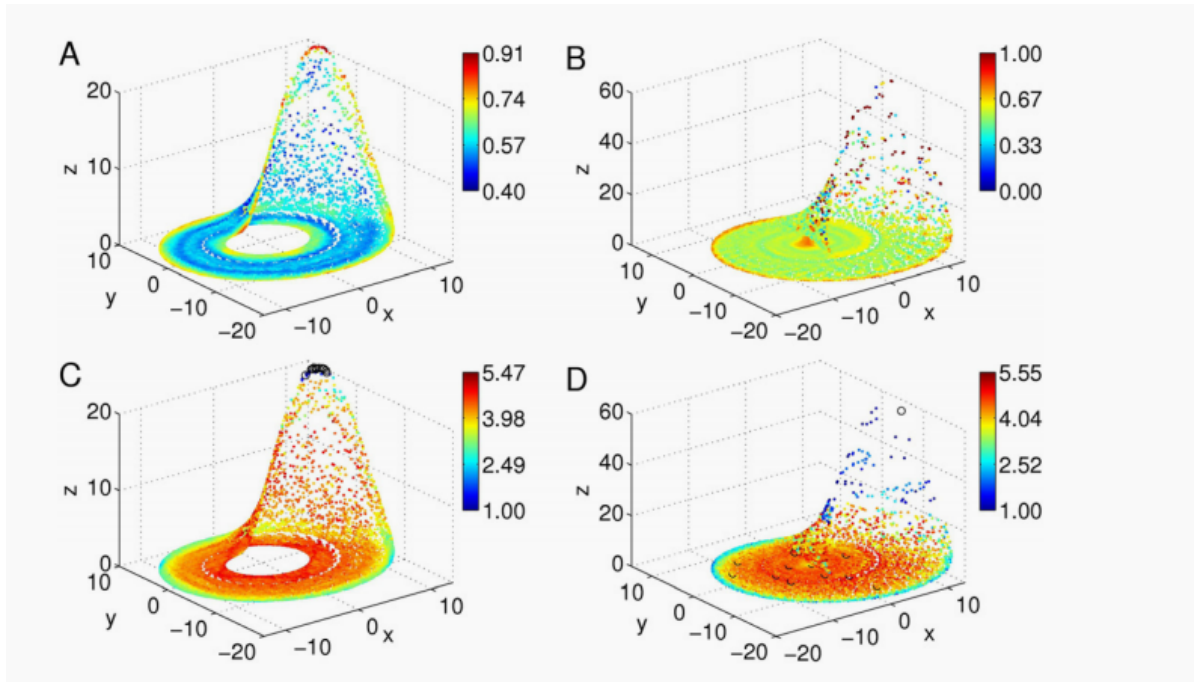


图. (在线彩色) 使用 $C_v$  (a) 和 (b) 局部聚类系数 $C_v$ ，(c) 和 (d) 中间性对数 $\log b_v$ 的对数的局部RN属性的彩色编码表示。a) 和 (c) ] PC以及[ (b) 和 (d) ] NPC混沌 ( $RR = 0.03$ )。在 (c) 和 (d) 中，黑圈表示 $b_v < 1$ 的相空间的人口稠密区域中的顶点。

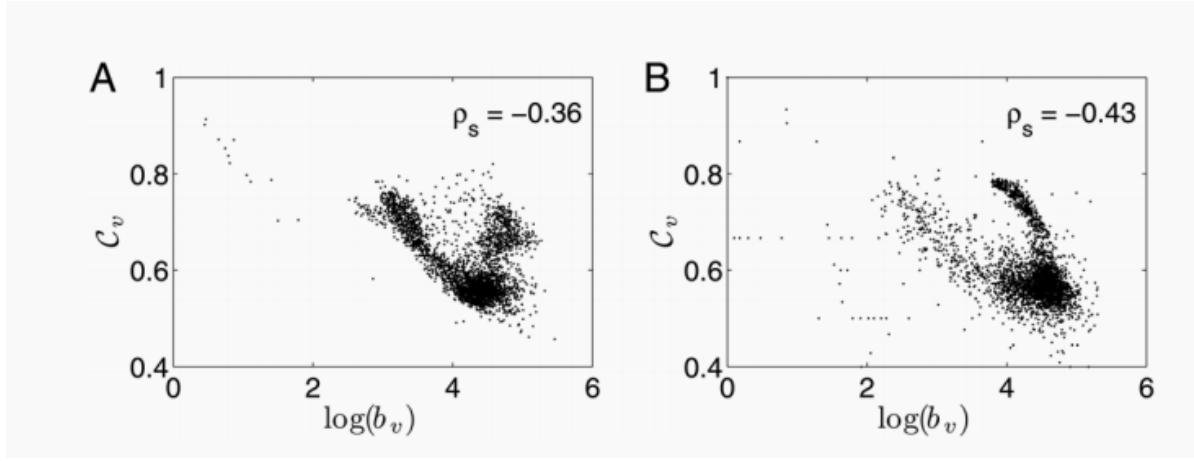


图. 3. (在线彩色) 使用[(a) 和 (b) 局部聚类系数 $C_v$ , (c) 和 (d) 中间性对数 $\log b_v$ 的对数]的局部RN属性的彩色编码表示。(a) 和 (c) ] PC以及[(b) 和 (d) ] NPC混乱 ( $RR = 0.03$ )。在 (c) 和 (d) 中, 黑圈表示 $b_v < 1$ 的相空间的人口稠密区域中的顶点。

### III, 量化混沌振荡器的相干

#### A.混沌振荡器的相位和频率

为了从数值上研究混沌振荡器的相位相干性, 通常首先需要合理定义相位变量。虽然最近已经引起了对最佳相位变量的推崇, [63-66]但我们在这项工作中的注意力仅限于标准分析信号方法。在此, 使用希尔伯特变换将标量信号 $x(t)$ 扩展到复平面,

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s) - \langle x \rangle}{t - s} ds, \quad (5)$$

其中P.V.表示柯西积分的主值, 产生相位

$$\phi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}. \quad (6)$$

我们强调, 此定义适用于以  $(x, y)$  平面原点为中心明确定义的振荡。具体而言, 对于PC动力学, 可以找到 $x$ 和 $y$ 的简单(线性)变换(例如, 减去平均值), 从而使振荡围绕原点集中。相反, NPC动力学的特征是相空间中不存在这种独特的中心点[cf. 图1 (b)]。结果, 以上述方式定义相位导致变量不会随时间单调增加。因此, 在相位同步分析的框架内, 根据分析信号的局部曲率特性[67-69]提出了另一种相位定义。

$$\tilde{\phi}(t) = \arctan \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}. \quad (7)$$

我们注意到, 对后一个方程式中的导数进行正确的评估可能会带来实质性的数值挑战, 尤其是在(嘈杂的)实验数据的情况下。

混沌振荡器的瞬时频率定义为相位变量相对于时间的导数。随时间对该属性进行平均可以得出平均频率,

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt} \right\rangle. \quad (8)$$

由于在标准的基于希尔伯特变换的定义中，相位变量 $\phi(t)$ 不一定在时间上单调增加，因此我们对这一单调性进行了量化，以便获得用于相位相干的简单启发式阶参数，我们将其称为相干指数

$$CI = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Theta(-\dot{\phi}(t)) dt, \quad (9)$$

with  $\dot{\phi}(t) = d\phi(t)/dt$ .

## B. 相位相干的传统措施

表征混沌振荡相位相干性的经典方法是基于去趋势相 $\phi(t) = \phi(t) - 2\pi\omega t$ 的二阶结构函数（变异函数），

$$D_\phi^2(s) = \left\langle [\Phi(t+s) - \Phi(t)]^2 \right\rangle. \quad (10)$$

在同一过程的不同实现上平均此属性（或者，在同一轨迹所捕获的不同时间间隔内平均）（请注意，只要所研究的系统可以认为是遍历的，这两种选择都可以视为等效），人们可以近似地将相位增量的动力学描述为一个扩散过程。[\[5,6,70-72\]](#)在这种情况下，

$$D_\phi^2(s) = B_1 s + B_0. \quad (11)$$

将其与经典（随机）扩散过程进行比较可得出相位扩散系数 $D = B_1 / 2$ 。我们注意到，从单个轨迹正确估计此数量可能具有挑战性，因为检测其中具有上述线性关系的合适缩放窗口可能不是一件容易的事。对于NPC动力学尤其如此，其中相位变量的适当定义至关重要。我们注意到D的数值取决于Sec中的哪个相位定义。使用[IIIA](#)。

作为一种替代方法，在最近对相干共振现象的研究中[\[73,74\]](#)，有人建议使用相干因子

$$CF = \langle T \rangle / \sigma_T \quad (12)$$

（即，庞加莱返回时间 $T_i$ 的变化系数，其中 $i$ 和 $\sigma_T$ 表示T的均值和标准差），作为衡量噪声引起的振荡的相干性的量度。如果在相空间中选择了适当的庞加莱截面，则该方法可以直接应用于区分PC和NPC确定性混沌振荡的问题[\[70\]](#)。但是，我们强调指出，在NPC混沌振荡的情况下，选择这样的Poincare´部分本身可能是一项困难的任务。

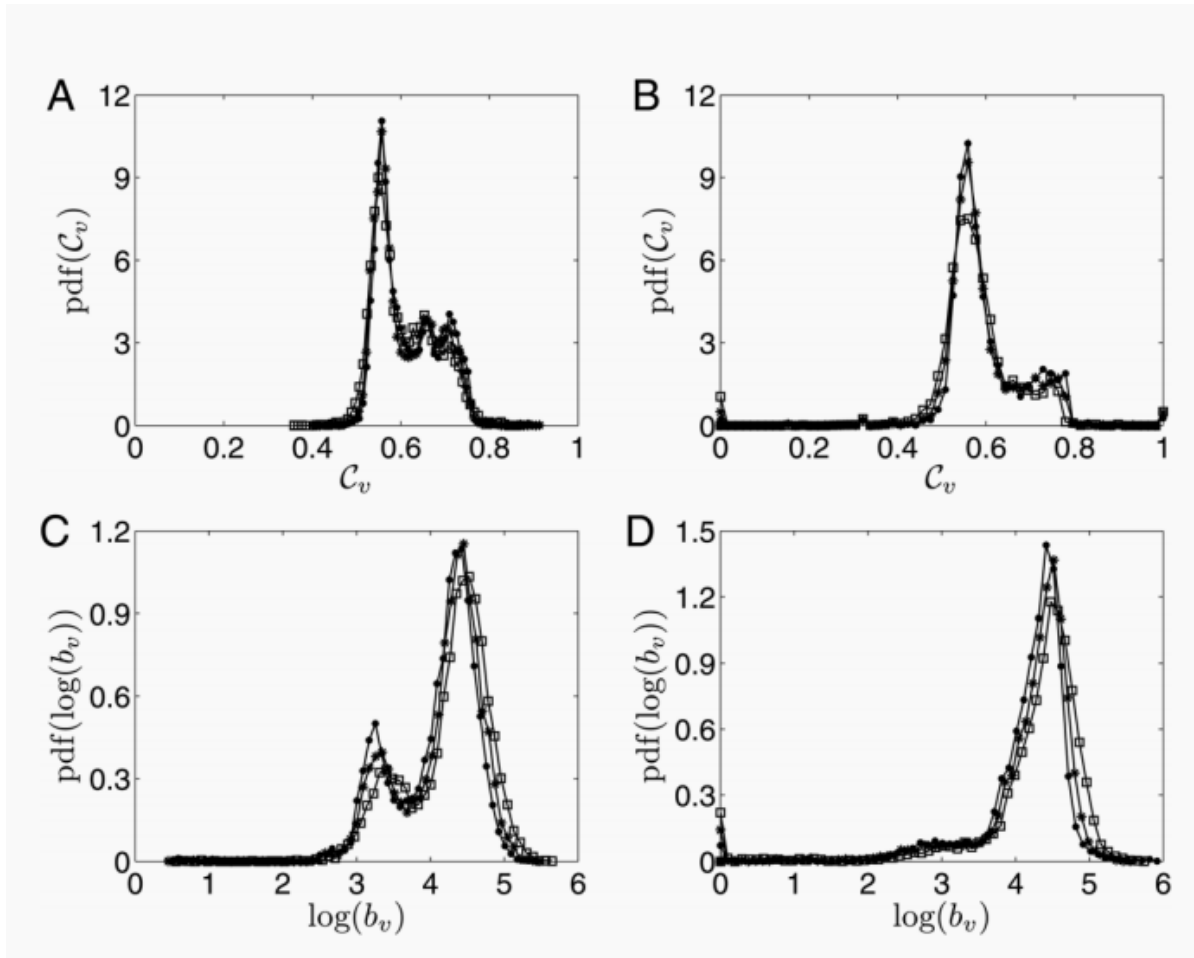


图. 5.对于具有[(a)和 (c) ] PC和[(b)和 (d) ] NPC混沌, RN的概率密度函数测量[(a) 和 (b) ]  $C_v$ 和[(c) 和 (d) ]  $\log b_v$  (b) 和 (d) ] NPC混沌。不同的符号代表在相同的轨迹上选择不同的复发率所获得的结果 (RR = 0.02 ( $\square$ ), 0.03 ( $*$ ) 和 0.04 ( $\cdot$ ))。

page seven

### C. 基于相位的相干性指标

由于对相位扩散系数  $D$  和相干因子  $CF$  的正确估计可能具有挑战性, 因此下面我们将使用 Sec 中的结果。IIC 用于定义一些基于 RP 的混沌振荡相位相干性的新指标。正如我们已经观察到的, 对于 PC 和 NPC 混沌, RT 分布  $p(s)$  的外观是不同的。由于分别考虑平均 RT  $\langle \tau \rangle = \langle \tau \rangle$  和相应的标准偏差  $\sigma_\tau$  (e) 并不能提供足够的结果, 因此建议改用变异系数。这个想法将相干因子  $CF$  (基于相对于固定的 Poincare 部分的返回时间) 的简单概括概括为基于相空间中先前访问点的任意电子邻域的递归时间的可比较度量。因此, 我们将此措施称为广义相干因子,

$$GCF = GCF(\varepsilon) = \frac{\langle \tau \rangle(\varepsilon)}{\sigma_\tau(\varepsilon)}. \quad (13)$$

作为此方法的补充, 我们还考虑了表征相关 RN 属性的措施。一方面, 我们建议某些全球网络特征可能有助于区分 PC 和 NPC 混沌, 因为它们已被证明可用于区分复杂的周期性轨道和混沌轨道。[47,50] 另一方面, 由于经验分布 当比较 PC 和 NPC 混沌时, 局部 RN 量度  $C_v$  和  $\log b_v$  的差异主要是在方差方面不同 (图 5), 我们建议使用标准偏差  $\sigma C_v$  和  $\sigma \log b_v$  作为相位相干性的另外两个替代量度。此外, 考虑相应经验分布函数的高阶统计量 (例如, 它们的偏度  $Y_C$  和  $Y_{\log b}$ ) 也可能会有所帮助。

### IV. 例I: ROSSLER系统的分叉场景



为了系统地评估已建立的以及潜在的基于RP的混沌振荡器相位相干性指标的性能，我们研究了Rossler系统分叉场景的一部分。[公式 (1)]，其中参数 $a$ 在 $[0.15, 0.3]$ 范围内系统变化。该参数范围包括不同种类的动力学，包括周期性窗口和PC以及NPC混沌振荡。PC和NPC混沌之间的过渡发生在 $a_c \approx 0.2$ ，这与先前使用稍微不同的参数设置的研究（例如，参考文献68）合理地一致。具体来说，对于 $a < a_c$ ，观察到的混沌吸引子始终是PC，而对于 $a > a_c$ ，它们是NPC。为了在比较PC和NPC混沌的度量值时正确检测周期性窗口的位置并系统地排除它们，我们另外计算了系统的最大Lyapunov指数 $\lambda_{1,2}$ 。[9]

### A.传统和基于复发时间的措施

图6显示了当参数 $a$ 改变时Lyapunov指数 $\lambda_{1,2}$ ，相扩散系数 $D$ ，相干指数 $CI$ 和广义相干因子 $GCF$ 的变化。一个人清楚地观察到，在 $a = 0.21$ 时，不同的测量方法能够检测PC和NPC振荡之间的过渡，但是在存在周期性窗口时显示出不同的特征。具体而言，在周期和PC混沌窗口中，相位扩散系数 $D$ 都接近零（ $D < 10^{-3}$ ），而在NPC混沌状态下，相扩散系数 $D$ 更大。[图6 (b)]。后一个观察结果与NPC混沌动力学的较高变化吻合，这主要是由于选择等式中获得线性回归参数的缩放窗口时的主观性。公式(11)。相干指数 $CI$  [图6 (c)]对于 $\leq 0.2$ 为零，但对于较高的值（包括周期性窗口中明显的局部最大值）严格为正（表示这些窗口中的周期性振荡在 $(x, y)$ 中没有唯一的原点，飞机）。相比之下，基于递归时间分布的广义相干因子对于NPC混沌具有非常低的值，而对于周期性和PC混沌窗口则具有较高的值[图6 (d)]

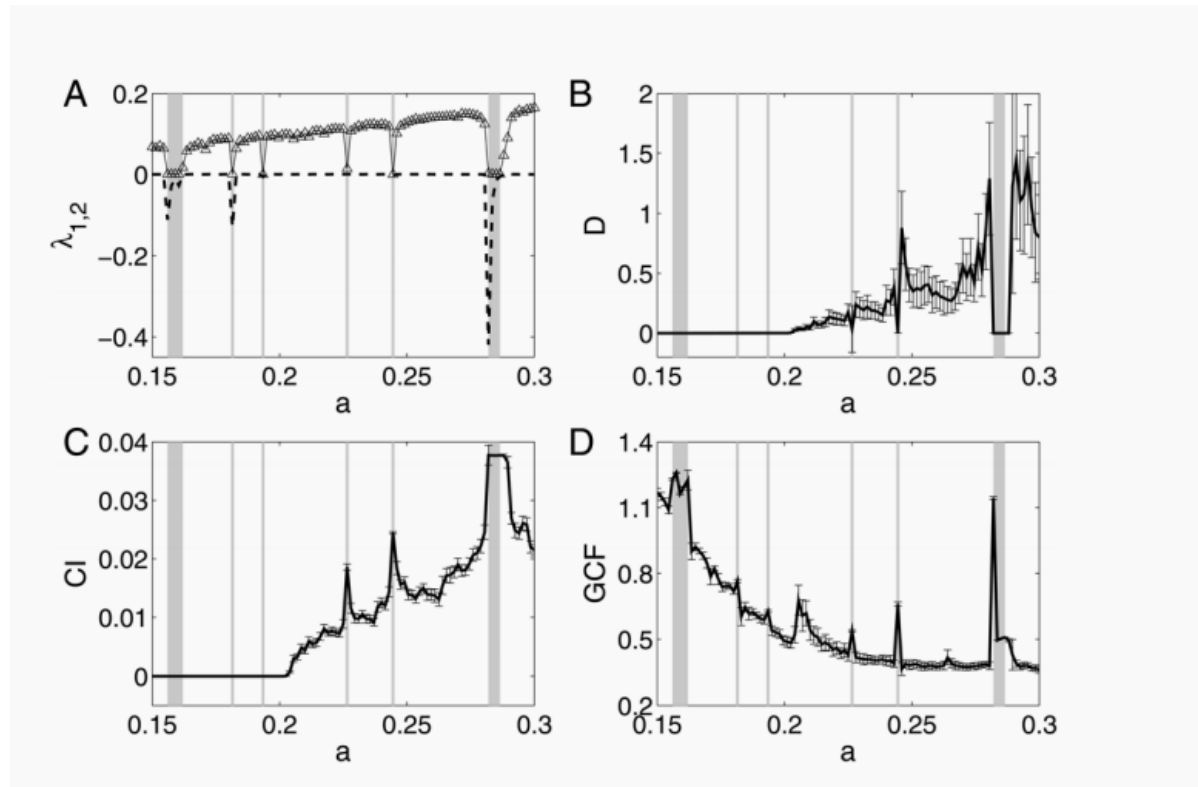


图 6.依赖参数 $a$ 的Rossler系统相位相干性的不同度量的行为（误差线表示从系统的100个独立实现针对 $a$ 的每个值获得的标准偏差）：（a）最大Lyapunov指数 $\lambda_1$ （由动力学方程式计算得到的实线 $\Delta$ ）和 $\lambda_2$ （虚线），表示周期窗口的位置，（b）相扩散系数 $D$ ，（c）相干指数 $CI$ ，以及（d）广义相干因子 $GCF$ （ $RR = 0.03$ ）。阴影区域表示存在通过最大Lyapunov指数评估的周期性窗口。

page eight

### B.递归网络措施

以如上所述的类似方式，已经计算了局部RN度量和全局RN度量的值，以实现针对 $a$ 的不同值的系统。图7显示了相应的结果。关于全局网络特性，我们发现与相位相干混沌相比，传递性 $T$ 在NPC体制中具有明显更高的值。相反，分类系数 $R$ 显然不能区分两种类型的混沌，而对 $C$ 和 $L$ 的相应评估则需要更详细的统计分析（请参见下文）。关于两个局部RN度量 $C_v$ 和 $\log b_v$ ，这两个量的标准偏差和偏度都显示出比PC情况高得多的NPC混沌值，这是由于相空间中吸引子的结构更加复杂而可以预期的。通常，在

NPC机制中，对于相同值的 $a$ 获得的不同实现之间的RN度量值的波动要比PC混乱大得多。对于周期性窗口， $T$ 、 $C$ 和 $L$ 显示出明显的最大值（与之前的发现[47,50]一致），而 $\sigma_C$ 则清楚地显示出局部最小值。相反， $R$ 中的签名和基于中介性的度量 $\sigma_{\log b}$ 比较复杂。

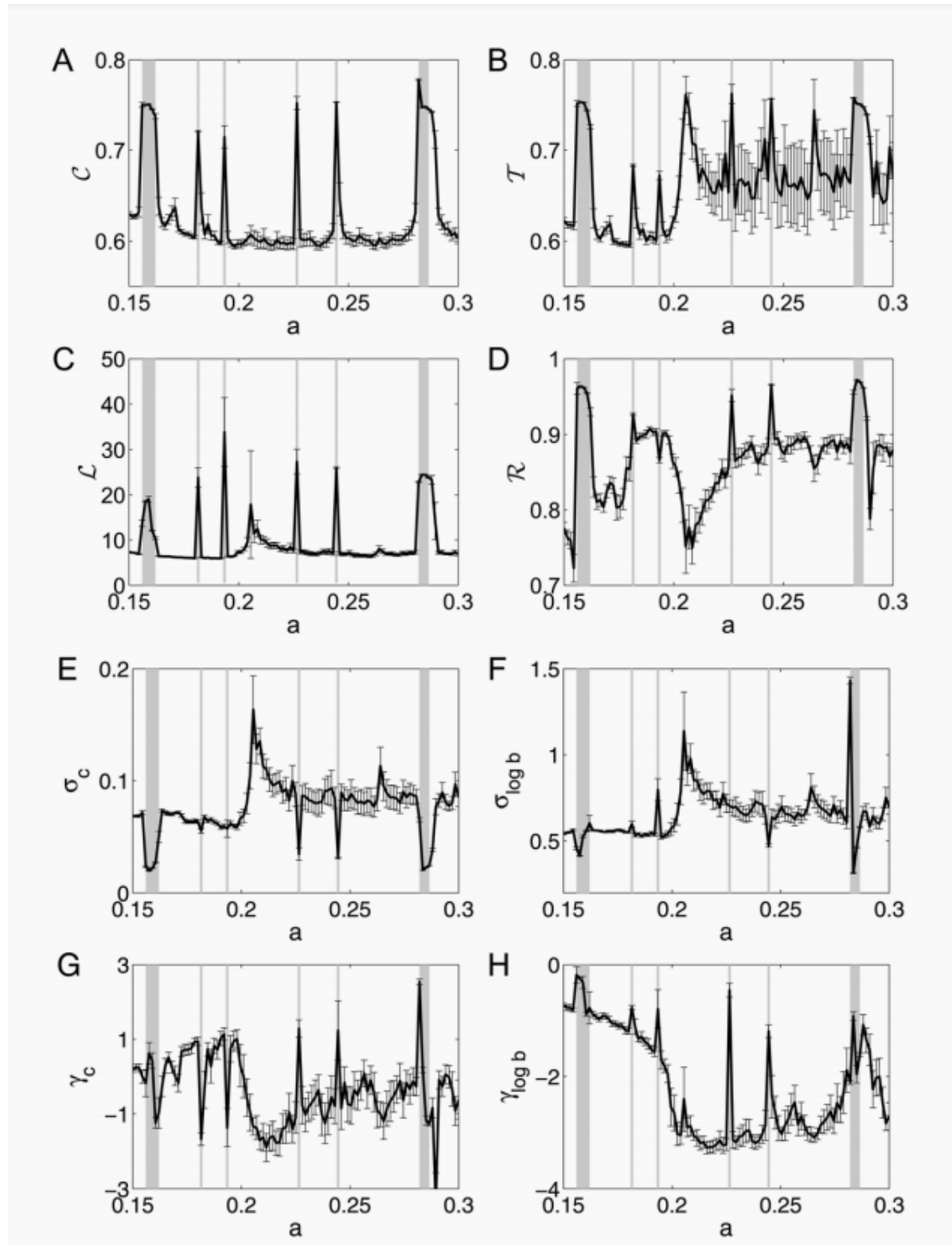


图7.取决于参数 $a$ 的Rossler系统基于RN的特性的行为（ $RR = 0.03$ ，误差线表示对于 $a$ 的每个值，从系统的100个独立实现中获得的标准偏差）：(a) 全局聚类系数 $C$ ，(b) 网络传递性 $T$ ，(c) 平均路径长度 $L$ ，(d) 分类系数 $R$ ，以及[(e) 和 (f)]标准偏差以及[(g) 和 (h)]偏度 局部聚类系数和对数中心度（分别为 $\sigma_C$ ， $\sigma_{\log b}$ ， $\gamma_C$ 和 $\gamma_{\log b}$ ）的大小。

### C.基于RP的相位一致性指标的歧视性技能

为了系统地比较所有建议的基于RP的措施相对于PC和NPC混沌的区分技巧，我们将控制参数 $a$ 的考虑值集合分为三组：一组 $S_0$ 代表周期窗口（以 $a$ 为特征 最大Lyapunov指数 $k_1$ 在数值范围内不显著不同于零（即 $\lambda_1 < \lambda^* = 0.02$ ），并且两组 $S_1$ 和 $S_2$ 通过相干指数 $CI$  [公式 (9)]的不同来区分 不同于零（即PC混乱的 $CI(a) < CI^* = 0.001$ ，NPC混乱的 $CI(a) \geq CI^*$ ）。基于此初始判别，我们可以统计评估主要统计特征是否 对于两组 $S_1$ 和 $S_2$ 获得的不同度量 $x$ 的分布 $p(x | S_i)$ 的显著不同，可以通过单因素方差分析（ANOVA）[75]解决此问题，该因子由两类决定  $CI$ 值的顺序 为了评估集合 $S_1$ 和 $S_2$ 中某些特征参数的中位数是否存在显著差异（根据经验观察到的分布函数的方差），我们执行了Mann-Whitney U检验 [76,77]，该检验可以看作是 F-test[78]在等级数集上。

表I总结了我们的相应分析的结果，并证实了我们的定性说明。具体而言，我们观察到 $C_v$ 和 $\log b_v$ 的分布的标准偏差和偏斜度可以非常高的置信度对两种混沌状态进行统计区分。对于全球RN措施，只有网络可传递性 $T$ 表现良好。平均路径长度 $L$ 还确保了可靠的区分，而全局聚类系数 $C$ 和分类系数 $R$ 显然表现较差。最后，我们发现广义相干因子 $GCF$ 基于 $RT$ 分布可以区分为PC和NPC动态，但是意义要低得多。

	PC	NPC	$P$	
$GCF$	1.16 (0.02)	1.17 (0.02)	0.0177	*
$C$	0.61 (0.01)	0.61 (0.02)	0.0064	**
$T$	0.61 (0.02)	0.67 (0.03)	$2.08 \times 10^{-12}$	***
$L$	6.56 (0.78)	8.12 (2.83)	$1.59 \times 10^{-7}$	***
$R$	0.84 (0.05)	0.86 (0.04)	0.2435	—
$\sigma_C$	0.07 (0.01)	0.09 (0.02)	$5.31 \times 10^{-12}$	***
$\sigma_{\log b}$	0.56 (0.04)	0.71 (0.09)	$1.18 \times 10^{-12}$	***
$\gamma_C$	0.39 (0.52)	-0.82 (0.62)	$1.33 \times 10^{-11}$	***
$\gamma_{\log b}$	-1.39 (0.65)	-2.76 (0.48)	$8.47 \times 10^{-11}$	***

表I.在考虑了所有参数的情况下，考虑到的罗斯勒系统的实现（针对 $a$ 的每个值，平均超过100个独立实现，固定 $RR = 0.03$ ），用于相位相干性的不同度量的平均值和标准偏差（在方括号中） PC和NPC体制中的值以及相关U检验的P值：广义相干因子 $GCF$ ，全局RN度量 $C$ ， $T$ ， $L$ 和 $R$ ，以及局部RN分布的标准差 $\sigma$ 和偏度 $\gamma$  测量 $C_v$ 和 $\log b_v$ （从上到下）。符号表示作为区分统计的不同参数的重要性（-：不重要，\*：5%显著，\*\*：1%显著，\*\*\*：0.1%显著）。

page nine

## D.同宿点对RN措施的影响

对前面描述的发现进行的详细检查揭示了两个有趣的方面：首先，我们观察到几乎所有基于RN的度量在PC和NPC混沌之间的过渡附近都显示出过冲现象（见图7）。进一步的研究表明，这种影响不是由特定的采样选择或系统考虑的实现的有限长度（即可能存在瞬时行为）引起的，而是普遍的。其次，网络可传递性 $T$ 的行为似乎与最近关于可传递性与有效吸引子维度之间关系的一般发现相矛盾：[50]有效维度越高，RN传递性越低。具体来说，NPC机制的维度要比PC混沌的机制高（这可以通过Kaplan-Yorke猜想从更高的最大Lyapunov指数推断出更高的Lyapunov维度来推断）。因此，人们必须期望 $T$ 在PC体制中比NPC混沌具有更高的价值，而图7 (b) 显示了相反的行为。（以类似的方式，鉴于已知的事实，对于 $e$ 的可比较值，由于形成几何“捷径”，周期轨道的平均路径长度通常比混沌轨道的平均路径长度长，[45]人们也期望 $L$ 为 NPC体制比PC混沌体制更短，这与表I的结果不一致。）正如我们将在下面讨论的那样，这些观察结果可以用Rossler系统的特定吸引子几何来解释，这由考虑的RN特性来表征。

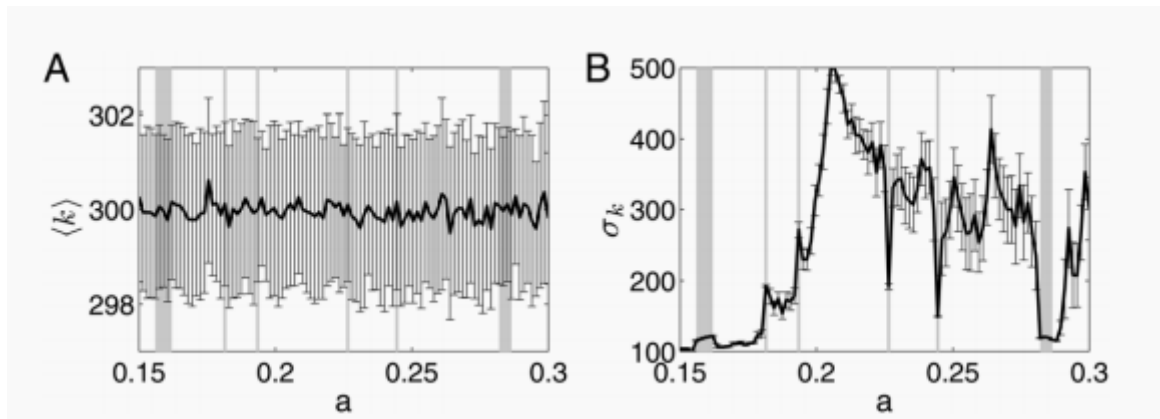
为了理解RN度量的上述过调以及反直觉行为，请记住，罗斯勒系统的混沌吸引子的特征是在原点存在同斜点。实际上，相关的同斜向轨道对于螺旋型（PC）和螺旋型（NPC）混沌振荡之间的过渡的重要性已为Rossler系统以及其他具有类似过渡的混沌振荡器广泛认可。[79-83]一方面，随着PC混沌状态下控制参数 $a$ 的增加，吸引子连续增长，并最终在过渡到漏斗状态之前延伸到原点附近。

另一方面，每当混沌吸引子上的轨迹接近均斜点时， $(x, y)$ 平面中的动力学就会变得非常慢，然后才

沿着相关的不稳定歧管的方向迅速“弹出”该平面。因此，混沌吸引子向原点的增长有两个结果：首先，相对于  $(x, y)$  平面，射出和再注入“事件”的分布的统计特性随着向过渡点的增加而显著变化。PC和渠道方案之间的差异，这对系统的整体递归特性有明显影响。这反映在以下事实上：对于螺旋型混沌，第一个返回图显示一个不同的极值，而对于螺旋型混沌，则显示几个[83]。其次，由于靠近同斜点的缓慢动力学，在原点附近的轨迹上存在高密度的采样点，这是因为在相变点之前不久在相空间的此部分中的驻留概率会急剧增加。

在RNs的框架内，根据中心度  $k_v = \sum_j \neq v A_{vj}$ ， $j$  的分布，起源周围的累积效应变得很好表达，这是另一种重要的本地网络度量。具体地说，当保持重复率（边缘密度）固定时，平均度数  $= (N-1) \times \text{PRR}$  是恒定的。[图8 (a)]，在两个混沌状态之间过渡之前不久，标准偏差就大大增加了。[图8 (b)]，这意味着存在许多具有高度的顶点，即存在具有高概率密度的吸引子的相空间区域。结果，此不同区域中的本地网络传递性显著提高：由于许多顶点的邻域（在我们的示例中，是邻近原点的顶点）人口稠密（高度），因此它们也显示出高（局部）聚类系数  $[C_v \leq 1]$ ，参见图3 (b)]。这种局部行为转化为更高的全局网络可传递性  $T$  [图7 (b)] 以及更高的  $\sigma_C$  [图7 (e)]。以类似的方式，我们可以解释接近过渡点的  $T$  和  $\sigma_C$  的过调，其中中心度的方差（以及因此接近原点的点的密度）的变化最大。

关于对基于路径的测度  $L$  和  $\sigma_{\log b}$  的影响，我们注意到，如果当  $a$  改变时考虑  $e$  的固定值（而不是固定的RR），则在PC和NPC混沌之间的过渡附近不会发现过冲。[见图9 (c) 和9 (f)]（以类似的方式，对于  $\sigma_{\log b}$  也明显降低了相应的效果）。回顾  $L$ ，[45] 的含义，该观察清楚地表明，吸引子的总大小在过渡点附近没有明显变化。此外，与NPC机制相比， $L$  对PC混沌的取值更大（表II），这反映出吸引子的几何复杂性不断提高。与基于路径的度量相反，对基于传递性的度量  $T$  和  $\sigma_C$  的超调效应持续存在，并且对于全局度量  $T$  和  $C$  甚至变得更大，而对于  $\sigma_C$  和  $Y_C$  则减小。我们强调，在  $e$  固定的情况下，由于靠近原点的顶点的积累，当增加到过渡点附近时，递归率RR会变大，这可以解释上述行为。



图。 8.从Rossler系统的100个独立实现（误差线表示整体均值和标准偏差）获得的RN的度中心度  $k_v$  的平均值 (a) 和标准偏差  $\sigma_k$  (b) ( $N = 10000$ )。通过基于距轨迹的点间距离的蒙特卡洛采样来选择阈值  $e$ ，从而逼近了期望的重复率  $RR = \langle k \rangle / (N-1) \approx 0.03$ ，从而提高了计算效率。

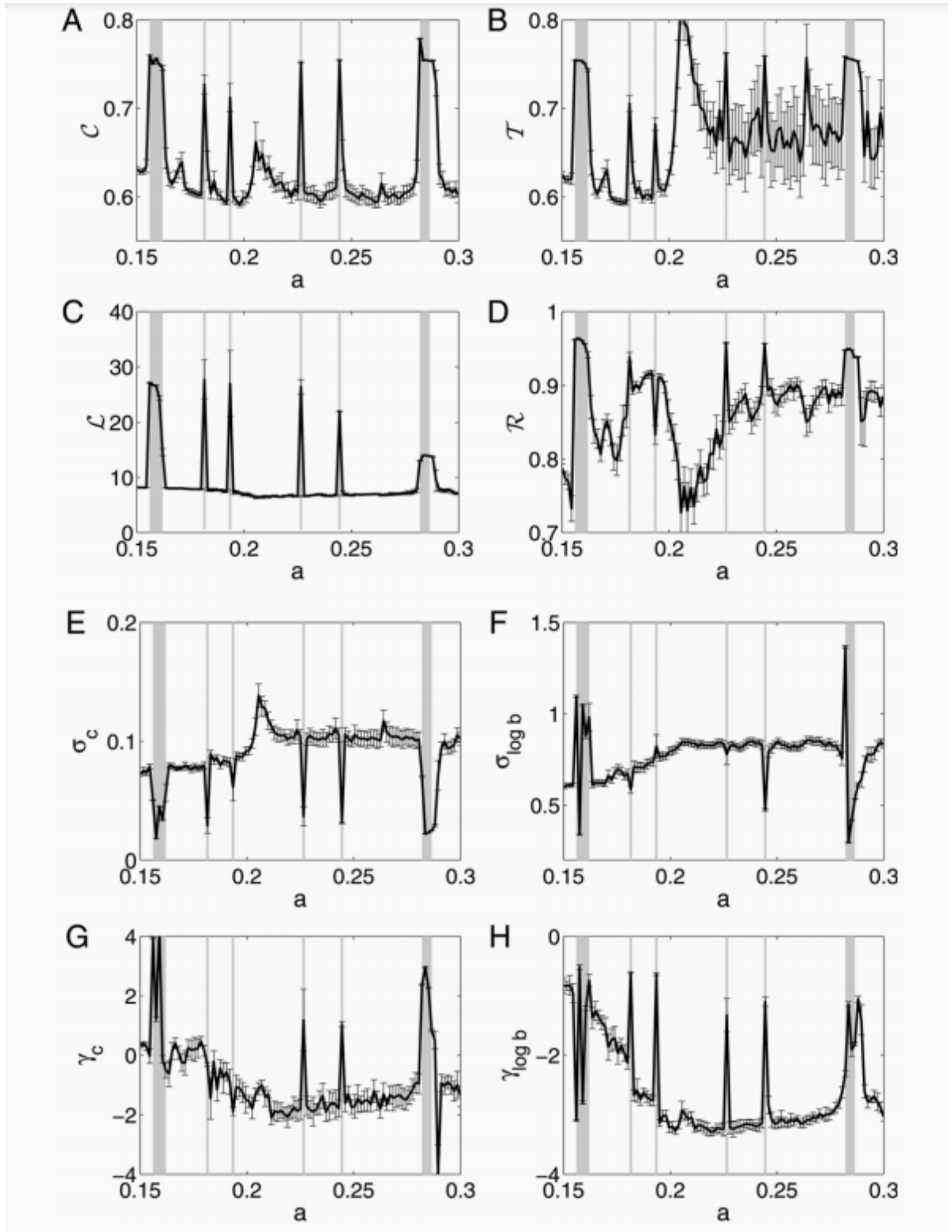


图 9.对于固定的复发阈值，如图7所示， $e = 0.2776$ （对应于 $a = 0.15$ 时 $RR = 0.03$ ）。

#### V.实例二：麦克玻璃系统的分叉场景

从螺旋型（PC）到螺旋型（NPC）混沌的过渡情况是几种非线性振荡器所共有的（例如，参见参考文献[84和85]）。但是，在其他类型的复杂系统中，尤其是在延时系统中，还有NPC混乱的例子。为了说明的目的，在下面，我们重新检查Mackey-Glass方程的分叉情形的一部分，[27]

$$\dot{x}(t) = \frac{0.2x(t - \tau)}{1 + [x(t - \tau)]^{10}} - 0.1x(t), \quad (14)$$



$\tau$ 属于 $[10, 20]$ 的一种经过充分研究的时间延迟系统。在这个参数范围内，已知系统在周期和NPC混沌解之间经历了几次转换[28]（见图10）。注意，与Rossler系统不同，Mackey-Glass方程描述了一个时滞系统，即无限维动力系统。

图11 (a) 显示了随着控制参数 $\tau$ 的变化，最大李雅普诺夫指数的行为。对于 $\tau > 16$ ，Mackey-Glass系统在周期性极限周期振荡 ( $\lambda_1 = 0$ ) 和混沌解 ( $\lambda_1 > 0$ ) 之间来回切换。但是，相位扩散系数 $D$ 仅在稍大的 $\tau$ 时才开始从几乎为零增加到非零（但仍然很小）值。[图11 (b) ]，指出随着控制参数的增加，相位相干性逐渐消失。

我们注意到，这一发现与Rossler系统所做的发现截然不同，后者的系统经历了从PC到NPC混乱的急剧转变。相干指数 $CI$ 的行为[图。基于标准希尔伯特相位的[图11 (c) ]甚至显示出在建立第一个混沌解之前向明显正值的明显过渡。这个事实显然与吸引子的特定几何形状有关，该吸引子在  $(x(t), x(t-\tau))$  平面中大约 $\tau = 15$ 之后形成一个小次级回路结构[见图10 (c) ]。最后，GCF [图。图11 (d) ]显示了在 $\tau > 13$ 时突然下降（由于存在倍增的分叉[86]，导致周期解的RT分布发生显著变化），随后出现了明显的下降趋势，进一步增加了 $\tau$ 。

	PC	NPC	P	
$C$	0.61 (0.02)	0.61 (0.03)	0.6823	—
$T$	0.62 (0.03)	0.68 (0.02)	$5.31 \times 10^{-12}$	***
$\mathcal{L}$	7.70 (0.43)	7.05 (1.01)	$9.26 \times 10^{-9}$	***
$\mathcal{R}$	0.85 (0.05)	0.86 (0.05)	0.5465	—
$\sigma_C$	0.08 (0.01)	0.10 (0.01)	$3.29 \times 10^{-11}$	***
$\sigma_{\log b}$	0.69 (0.07)	0.82 (0.04)	$7.23 \times 10^{-12}$	***
$\gamma_C$	-0.44 (0.71)	-1.52 (0.53)	$3.99 \times 10^{-9}$	***
$\gamma_{\log b}$	-2.15 (0.81)	-3.00 (0.38)	$1.01 \times 10^{-6}$	***

表II。如表I所示，以固定的复发阈值 $e = 0.2776$ 获得的结果。

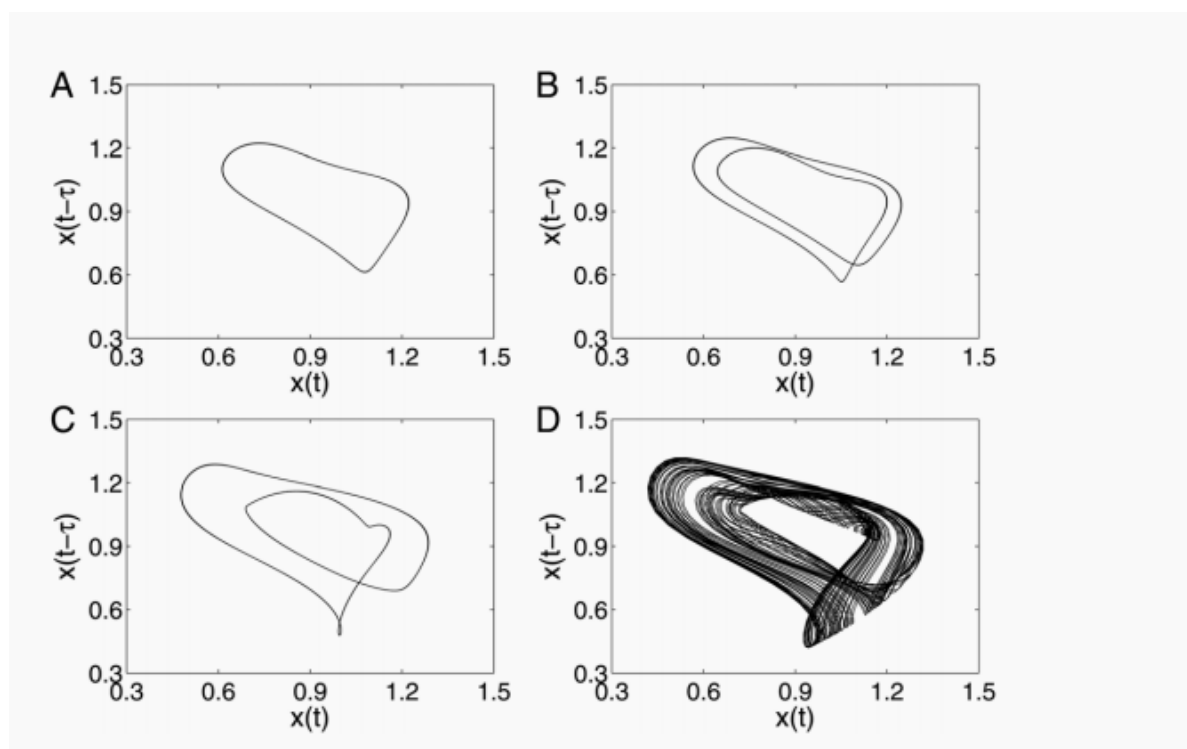


图 10. Mackey-Glass系统 (14) 的相图，其中 (a)  $\tau = 13$ ，(b)  $\tau = 13.5$ （在倍增分叉之后），(c)  $\tau = 15.5$ ，并且 (d)  $\tau = 17$ 。

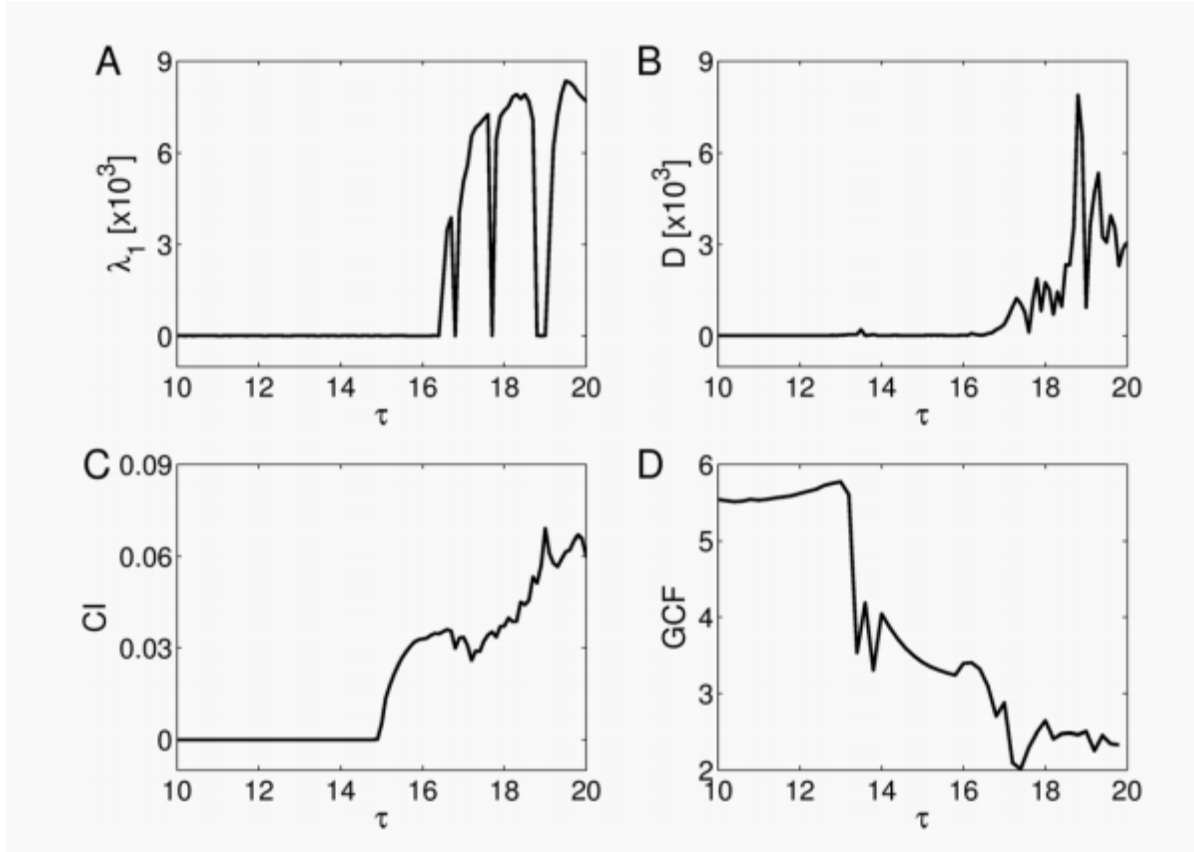


图 11. 根据参数 $\tau$ , 针对Mackey-Glass系统的单个实现的不同统计特性的行为: (a) 从系统离散化版本的变分方程估计的最大Lyapunov指数 $k_1$ , 该系统的离散变量表示为  $(x(t), x(t-\tau/9999), \dots, x(t-\tau))$ , (b) 通过 $x(t)$  的希尔伯特变换获得的相位扩散系数 $D$ 和 (c) 相干指数 (CI)。此外, (d) 表示从 $\tau$ 的每个值 ( $RR = 0.03$ , 嵌入维数3和延迟 $\tau/2$ ) 的100个实现中获得的平均广义相干因子 GCF, 即 $x_i = (x(t_i), x(t_i - \tau/2), x(t_i - \tau))$  )。

以上发现得到了由不同 $\tau$ 值获得的示例轨迹得到的RNs特性的进一步支持 (图12)。作为关注的第一个参数间隔, 我们考虑 $\tau$ 属于 $[13, 14]$ , 其特征在于 $\lambda_1 = 0$ , 即完全周期性的动力学。在这里, 所有网络度量都显示出明显的过渡, 表明底层吸引子的结构变化与周期倍增分叉相对应。具体而言,  $C$ 和 $T$ 与周期性动力学的预期值相比有明显下降 ( $C = T = 0.75$  (Ref.50)), 表明出现了具有更高几何复杂性的结构[cf. 无花果 10 (a) 和10 (b)]。用 $L$ 表示类似的明显下降, 这与建立周期轨道的第二圈后出现几何“捷径”有关。与 $C$ 和 $T$ 相比, 此特征在更高的 $\tau$ 时仍然存在。此外,  $R$ 在倍频分叉处突然减小。关于本地网络属性, 我们发现标准偏差急剧增加, 并且聚类系数和对数中间分布的偏度都减小了。我们通过以下事实来解释该观察结果: 在原始的单回路极限环 (具有相当均匀的密度) 上, 局部聚类系数变化不大 $\sigma_C \approx 0$ , 而由于第二主回路的存在, 存在一些状态向量的邻域内的“交叉区域”具有明显不同的形状, 因此在递归网络中具有聚类特性。有趣的是, 与此同时, 随着周期2轨道连续发展 ( $\tau < 14$ ), 相关的偏斜度会改变其符号, 然后返回到 $\tau > 14$ 的正值。

吸引子几何形状发生明显变化的第二个有趣的参数区间是 $\tau$ 属于 $[14, 16]$ , 它仍然是指Mackey-Glass系统的周期性状态 ( $\lambda_1 = 0$ )。如图11 (c) 所示, 在 $\tau \approx 15$ 时, 两环周期轨道开始在  $(x(t), x(t-\tau))$  平面上形成尖点, 随后又形成了一个附加的小环 结构[图.10 (c)], 因此关联的希尔伯特相位变量不再单调增加。与此平行的是, 对于 $\tau > 14$ , 尽管最大Lyapunov指数清楚地显示了极限环的存在, 但 $C$ 和 $T$ 都超过了周期性轨道的期望值。此行为是由于在接近尖端的轨迹上积累了概率而产生的[图 13 (c)]。由于这种累加具有与递归网络类似的固定点 ( $C_v = 1$ ) 效果, 因此基于传递性的量度的总值会增加。这同样适用于 $L$ , 其中积累区域的存在会导致有效 $e$ 值的总体下降, 从而保持相同的复发率 $RR$ 。类似的考虑也解释了对数中间分布相关的标准偏差和偏度绝对值的增加。

到目前为止, 虽然只讨论了不同周期性机制之间的分歧, 但对于更大的 $\tau$ 值, 我们观察到从周期性行为到混沌行为的转变的特征是所有四种被认为是全局递归网络度量的急剧下降[图12 (a) -12 (d)], 这与Rossler系统[47] (参见图7) 以及其他连续时间动力系统的结果一致。我们注意到, 与其他系统不同,

过渡点之前的周期性轨道和出现的混沌解都不是相干的（图10）。在这方面，Mackey-Glass系统不允许研究PC和NPC混沌解之间的几何和动态差异，但可以作为非相干（周期性和混沌）振荡及其对基于重复特征的影响的说明性示例。

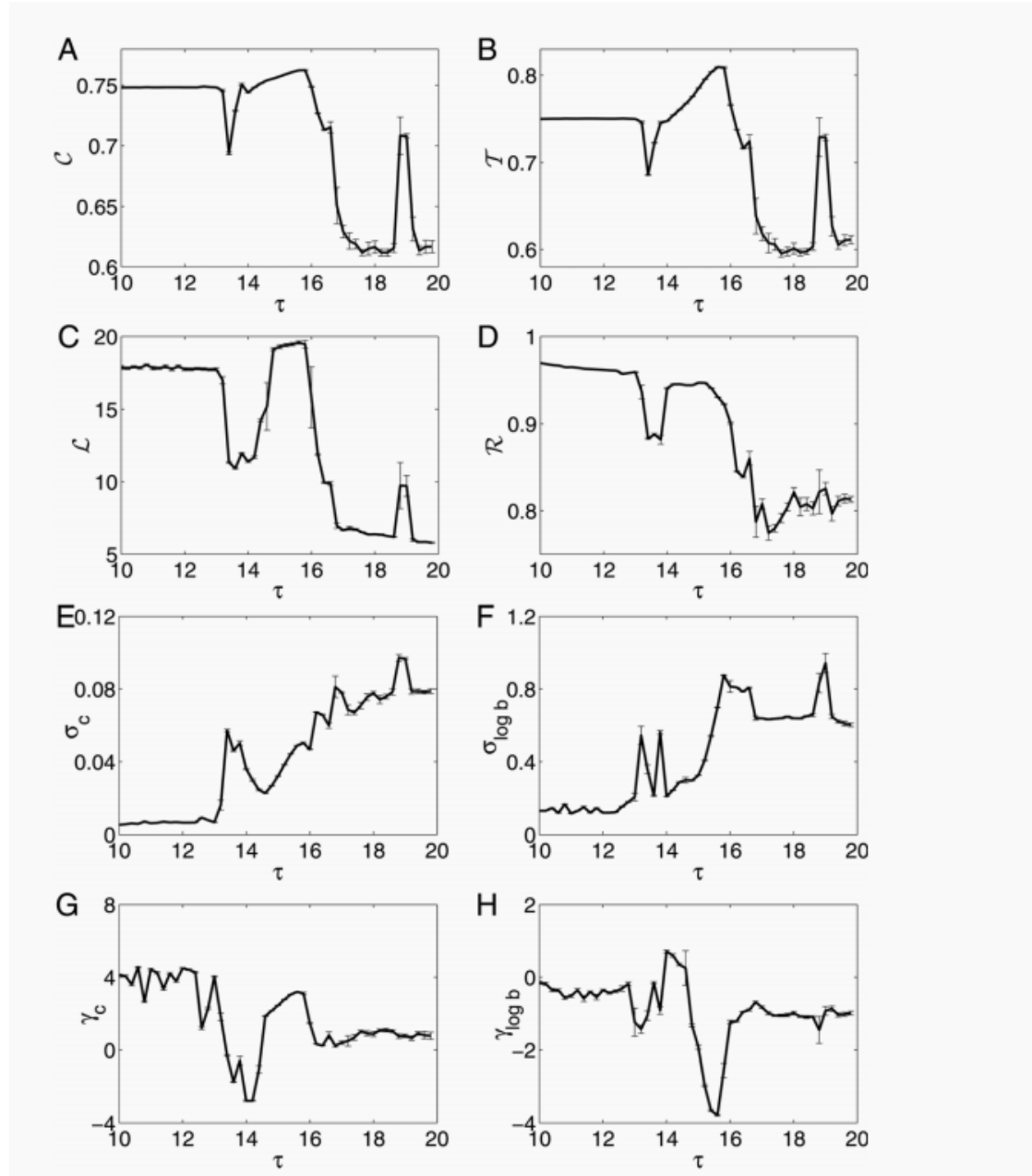


图 12. Mackey-Glass系统基于RN的特性依赖于参数 $\tau$ 的行为（RR = 0.03，嵌入参数如图11 (d) 所示，误差线表示从系统的100个独立实现中获得的标准差，用于 a) 的每个值：(a) 全局聚类系数C，(b) 网络可传递性T，(c) 平均路径长度L，(d) 分类系数R，以及[ (e) 和 (f) ]标准偏差和[ (g) 和 (h) ]局部聚类系数的偏度和对数中间性中心点（分别为 $\sigma_C$ ， $\sigma_{\log b}$ ， $\gamma_C$ 和 $\gamma_{\log b}$ ）。

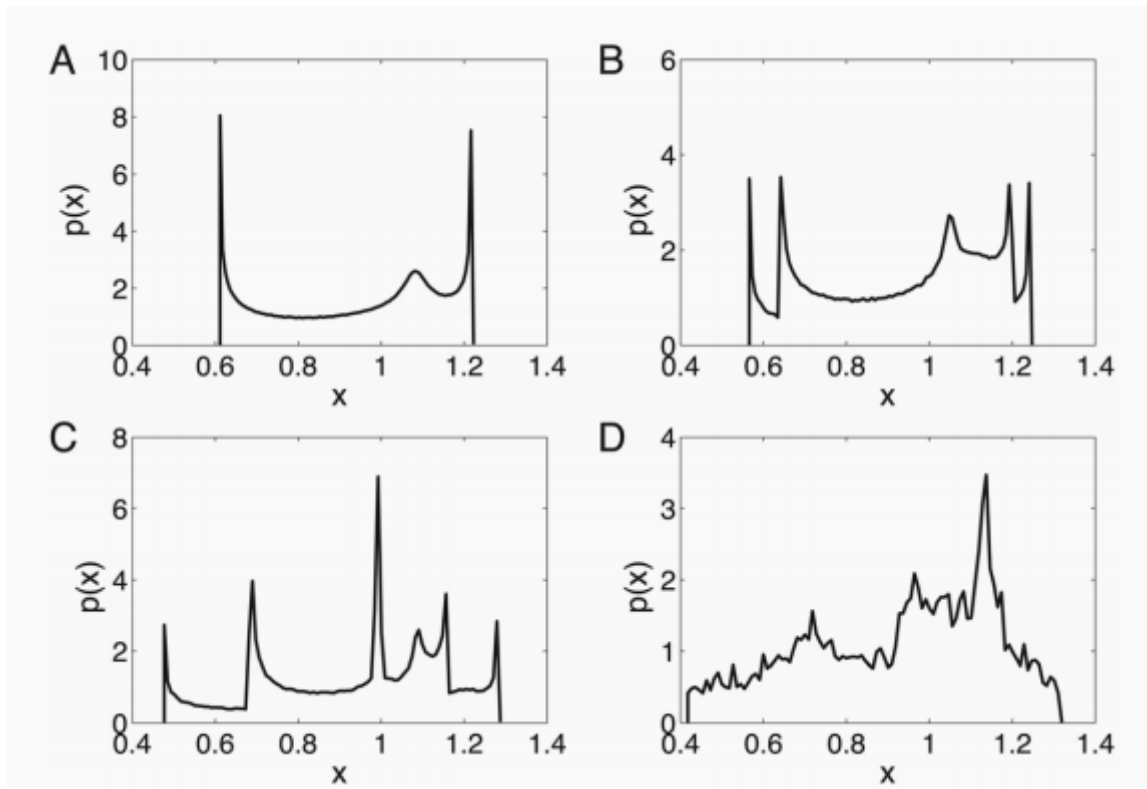


图 13. 对于 (a)  $\tau = 13$ , (b)  $\tau = 13.5$ , (c)  $\tau = 15.5$ , 和 (d)  $\tau = 17$ , Mackey-Glass 系统 (14) 的边缘密度  $p(x)$  的估计。一个人清楚地观察到周期倍增的分叉 (b) 和一个尖点的出现, 以及随后就当前局部最大值而言出现的次级回路结构 (c)。

## VI. 结论

总而言之, 我们提出了一个表征相干和非相干混沌振荡的统计框架, 该框架考虑了有关潜在吸引子的特定几何信息。为此, 我们利用了最近开发的 RN 分析概念。我们的结果表明, 基于动力学系统递归性质的统计量度不仅可以区分周期性动力学和混沌[43,47]或准周期性动力学和混沌[17-19], 而且可以区分以特征为特征的混沌动力学的不同表现形式 相位相干和非相干振荡。本着这种精神, RN 分析为从几何角度研究复杂系统提供了一种广泛适用的工具, 它补充了与 RQA 和递归时间统计等紧密相关的现有技术, 这些技术表征了与基础动力学直接相关的互补特性。具体而言, 除了研究由一组有限的常微分方程组描述的系统外, 已证明 RN 分析也可用于描述诸如 Mackey-Glass 方程或分段线性时滞系统等时滞系统的吸引子几何形状的变化。在参考文献中研究。[87], 但是, 尚不可能仅基于 RN 的个别特性 (例如网络可传递性) 来明确地区分相干和无相干的混沌。确定相应歧视的结构标准将是我们未来工作的主题。

对于 Rossler 系统, 我们已经详细研究了螺旋型和螺旋型混沌之间的过渡, 这是几种混沌振荡器所共有的, 并导致从相干振荡变为非相干振荡。已经详细讨论了对吸引子几何形状的相应影响, 以及由此引起的 RN 特性。作为一个特定的结果, 我们已经表明, 由于对吸引子的驻留概率分布非常不均, 最近给出的对 RN 传递性  $T$  的解释 (作为有效吸引子维数的度量) 并未考虑统计影响。在先前的研究中被很大程度上忽略了[50]

通常, 我们发现, 至少对于 Rossler 系统而言, 基于局部 RN 度量分布的统计特征与某些全局网络量词相比, 可以在相干和无相干混沌之间进行相同甚至更好的区分。此外, 两种类型的特性均优于基于重复时间分布的研究统计特性。我们强调 RN 度量可能表现得很好, 因为它们明确地描述了相空间中的几何吸引子特性 (即没有动态特性), 这些特性在相干和非相干混沌之间的过渡时会发生很大变化。在这方面, 它们对于获得相应的区别特别有用。

## 致谢

这项工作部分由莱布尼兹学会（ECONS项目）和联邦教育与研究部（BMBF）通过波茨坦地缘分析，环境变化和可持续性研究组（PROGRESS）资助。作者感谢邹维提供的代码来估计Mackey-Glass系统的最大Lyapunov指数，并感谢Istvan Kiss进行了富有成果的讨论。使用igraph软件包在波茨坦气候影响研究所的IBM iDataPlex集群上计算了复杂的网络度量[88]

- 1 A. Nayfeh and D. Mook, *Nonlinear Oscillations* (Wiley, New York, 1979).
- 2 J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 3rd ed. (Springer, New York, 1990).
- 3 A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1992).
- 4 M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* 76, 1804 (1996).
- 5 A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization—A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2001).
- 6 M. Wickramasinghe and I. Z. Kiss, *Chaos* 20, 023125 (2010).
- 7 H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004).
- 8 J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- 9 A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, and J. Vastano, *Physica D* 16, 285 (1985).
- 10 R. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, 2nd ed. (Oxford University Press, New York, 2000).
- 11 O. E. Rössler, *Phys. Lett. A* 57, 397 (1976).
- 12 M. C. Romano, M. Thiel, J. Kurths, I. Z. Kiss, and J. Hudson, *Europhys. Lett.* 71, 466 (2005).
- 13 N. Marwan, M. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, *Phys. Rep.* 438, 237 (2007).
- 14 D. V. Senthilkumar, K. Srinivasan, K. Murali, M. Lakshmanan, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* 82, 065201 (2010).
- 15 R. Suresh, D. V. Senthilkumar, M. Lakshmanan, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* 82, 016215 (2010).
- 16 J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle, *Europhys. Lett.* 4, 973



(1987).

17Y. Zou, D. Pazo', M. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, Phys. Rev. E 76, 016210 (2007).

18Y. Zou, M. Thiel, M. Romano, and J. Kurths, Chaos 17, 043101 (2007).

19Y. Zou, M. Thiel, M. Romano, P. Read, and J. Kurths, Eur. Phys. J. Spec. Top. 164, 23 (2008).

20G. K. Rohde, J. M. Nichols, B. M. Dissinger, and F. Bucholtz, Physica D 237, 619 (2008).

21N. Marwan and J. Kurths, Physica D 238, 1711 (2009).

22J. Zbilut and C. Webber, Phys. Lett. A 171, 199 (1992).

23C. Webber and J. Zbilut, J. Appl. Physiol. 76, 965 (1994).

24L. Trulla, A. Giuliani, J. Zbilut, and C. Webber, Phys. Lett. A 223, 255 (1996).

25N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, and J. Kurths, Phys. Rev. E 66, 026702 (2002).

26N. Marwan, Eur. Phys. J. Spec. Top. 164, 3 (2008).

27M. C. Mackey and L. Glass, Science 197, 287 (1977).

28J. D. Farmer, Physica D 4, 366 (1982).

29V. Balakrishnan, G. Nicolis, and C. Nicolis, J. Stat. Phys. 86, 191 (1997).

30J. B. Gao, Phys. Rev. Lett. 83, 3178 (1999).

31V. Balakrishnan, G. Nicolis, and C. Nicolis, Phys. Rev. E 61, 2490 (2000).

32E. G. Altmann, E. C. da Silva, and I. L. Caldas, Chaos 14, 975 (2004).

33J. B. Gao, Y. H. Cao, L. Y. Gu, J. G. Harris, and J. C. Principe, Phys. Lett. A 317, 64 (2003).

34C. Rieke, R. G. Andrzejak, F. Mormann, and K. Lehnertz, Phys. Rev. E 69, 046111 (2004).

35C. Rieke, K. Sternickel, R. G. Andrzejak, C. E. Elger, P. David, and K. Lehnertz, Phys. Rev. Lett. 88, 244102 (2002).

36E. G. Altmann and H. Kantz, Phys. Rev. E 71, 056106 (2005).

37M. Baptista, E. Ngamga, P. R. Pinto, M. Brito, and J. Kurths, Phys. Lett. A 374, 1135 (2010).

38M. Thiel, M. Romano, and J. Kurths, Appl. Nonlinear Dynam. 11, 20 (2003).

39J. Zhang and M. Small, Phys. Rev. Lett. 96, 238701 (2006).

40X. Xu, J. Zhang, and M. Small, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 105, 19601 (2008).

41Y. Yang and H. Yang, Physica A 387, 1381 (2008).

42L. Lacasa, B. Luque, F. Ballesteros, J. Luque, and J. C. Nuno, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 105, 4972 (2008).

43N. Marwan, J. F. Donges, Y. Zou, R. V. Donner, and J. Kurths, Phys. Lett. A 373, 4246 (2009).

44R. V. Donner, M. Small, J. F. Donges, N. Marwan, Y. Zou, R. Xiang, and J. Kurths, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 21, 1019 (2011).

45R. V. Donner, Y. Zou, J. F. Donges, N. Marwan, and J. Kurths, New J. Phys. 12, 033025 (2010).

46R. V. Donner, J. F. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths, in Proceedings of the NOLTA 2010 (IEICE, Tokyo, 2010), pp. 87–90

47Y. Zou, R. V. Donner, J. F. Donges, N. Marwan, and J. Kurths, Chaos 20, 043130 (2010).

48J. F. Donges, R. V. Donner, K. Rehfeld, N. Marwan, M. H. Trauth, and J. Kurths, Nonlinear Processes Geophys. 18, 545 (2011).

49J. F. Donges, R. V. Donner, M. H. Trauth, N. Marwan, H. J. Schellnhuber, and J. Kurths, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 108, 20422 (2011).

50R. V. Donner, J. Heitzig, J. F. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths, Eur. Phys. J. B 84, 653 (2011).

51R. V. Donner, Y. Zou, J. F. Donges, N. Marwan, and J. Kurths, Phys. Rev. E 81, 015101 (2010).

52A. Facchini and H. Kantz, Phys. Rev. E 75, 036215 (2007).

53Z. Gao and N. Jin, Phys. Rev. E 79, 066303 (2009).

54L. C. Freeman, Soc. Networks 1, 215 (1979).

55D. Lathrop and E. Kostelich, Phys. Rev. A 40, 4028 (1989).

56M. Newman, SIAM Rev. 45, 167 (2003).

57S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang, Phys. Rep. 424, 175 (2006).

58L. d. F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso, and P. R. V. Boas, Adv. Phys. 56, 167 (2007).

- 59D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature* (London) 393, 440 (1998).
- 60A. Barrat and M. Weigt, *Eur. Phys. J. B* 13, 547 (2000).
- 61M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E* 64, 016131 (2001).
- 62M. E. J. Newman, *Phys. Rev. Lett.* 89, 208701 (2002).
- 63B. Kralemann, L. Cimonieriu, M. Rosenblum, A. Pikovsky, and R. Mrowka, *Phys. Rev. E* 76, 055201 (2007).
- 64B. Kralemann, L. Cimonieriu, M. Rosenblum, A. Pikovsky, and R. Mrowka, *Phys. Rev. E* 77, 066205 (2008).
- 65J. T. C. Schwabedal and A. Pikovsky, *Phys. Rev. E* 81, 046218 (2010).
- 66J. T. C. Schwabedal and A. Pikovsky, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 187, 63 (2010).
- 67J. Y. Chen, K. W. Wong, and J. W. Shuai, *Phys. Lett. A* 285, 312 (2001).
- 68G. V. Osipov, B. Hu, C. Zhou, M. V. Ivanchenko, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* 91, 024101 (2003).
- 69I. Z. Kiss, Q. Lv, and J. L. Hudson, *Phys. Rev. E* 71, 035201 (2005).
- 70S. Boccaletti, E. Allaria, and R. Meucci, *Phys. Rev. E* 69, 066211 (2004).
- 71H. Fujisaka, T. Yamada, G. Kinoshita, and T. Kono, *Physica D* 205, 41 (2005).
- 72A. S. Zakharova, T. E. Vadivasova, and V. S. Anishchenko, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 18, 2877 (2008).
- 73A. S. Pikovsky and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* 78, 775 (1997).
- 74C. S. Zhou, J. Kurths, E. Allaria, S. Boccaletti, R. Meucci, and F. T. Arencchi, *Phys. Rev. E* 67, 066220 (2003).
- 75D. C. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments*, 7th ed. (Wiley, New York, 2009).
- 76W. J. Conover, *Practical Nonparametric Statistics* (Wiley, New York, 1999).
- 77M. Hollander and D. A. Wolfe, *Nonparametric Statistical Methods*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1999).
- 78R. G. Lomax, *Statistical Concepts: A Second Course for Education and the Behavioral Sciences* (Lawrence Erlbaum Associates Inc., Mahwah, NJ, 2007).
- 79P. Gaspard and G. Nicolis, *J. Stat. Phys.* 31, 499 (1983).
- 80P. Gaspard, R. Kapral, and G. Nicolis, *J. Stat. Phys.* 35, 697 (1984).

81S. Kahan and A. C. Sicardi-Schififino, *Physica A* 262, 144 (1999).

82R. Genesio, G. Innocenti, and F. Gualdani, *Phys. Lett. A* 372, 1799 (2008).

83R. Barrio, F. Blesa, and S. Serrano, *Physica D* 238, 1087 (2009).

84O. E. Roessler, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 316, 376 (1979).

85J. C. Sprott and S. J. Linz, *Int. J. Chaos Theory Appl.* 5, 3 (2000).

86L. Glass and M. C. Mackey, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 316, 214 (1979).

87D. V. Senthilkumar, N. Marwan, and J. Kurths, in *Proceedings of the NOLTA 2010 (IEICE, Tokyo, 2010)*, pp. 83–86.

88G. Csárdi and T. Nepusz, *InterJournal CX.18*, 1695 (2006).

89Note that  $T$  is sometimes referred to as the (Barrat-Weigt) global clustering coefficient, often also denoted as  $C$ , e.g., in Ref. 47. In order to avoid confusion, in this work, we prefer to discuss both measures separately