

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

2<sup>ο</sup> ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΖΙΟΛΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ 2591

### Άσκηση 1)α)

$$y' = \frac{y+x^2-2}{x+1}, y(0) = 2 \text{ και με ακριβή λύση:}$$

$$y(x) = x^2 + 2x + 2 - 2(x+1)\ln(x+1)$$

### Μέθοδος Euler

$$x_o = 0, y_o = 2, y'_n = f(x_n, y_n) = \frac{y + x^2 - 2}{x + 1}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{y_n + x_n^2 - 2}{x_n + 1} \right)$$

$$x_{n+1} = x_n$$

με h, n δική μας επιλογή

### Μέθοδος Taylor β' τάξης

$$y' = f(x, y) = \frac{x^2 + y - 2}{x + 1}, x_o = 0, y_o = 2$$

$$y''_n = \frac{[2x(x+1) - (y+x^2-2) \cdot 1]}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{y+x^2-2}{x+1}$$

$$y''_n = \frac{x^2 + 2x - y + 2}{(x+1)^2} + \frac{y+x^2-2}{(x+1)^2}$$

$$y''_n = \frac{2x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x}{x+1}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(y_n + x_n^2 - 2)}{x_n + 1} + \frac{h^2}{2} \frac{2x_n}{x_n + 1}$$

### Άσκηση 2)α)

$y' = x + y$ ,  $y(0) = 0$  και ακριβή λύση:

$$y(x) = e^x - x - 1$$

### Μέθοδος Euler

$$x_0 = 0, y_0 = 0, y'_n = x_n + y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n$$

$$y_{n+1} = (1 + h)y_n + h x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

### Τροποποιημένη μέθοδος Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}y'_n\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h}{2}x_n\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h}{2}x_n + x_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{h}{2}(y_n + x_n + 1) + y_n + x_n\right)$$

### Βελτιωμένη μέθοδος Euler

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f\left(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\right)\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(2y_n + 2x_n + h + hy_n + hx_n)$$

$$y_{n+1} = h(y_n + x_n) + \frac{h^2}{2}(y_n + x_n + 1) + y_n$$

### Άσκηση 3)α)

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

#### Μέθοδος Euler

$$x_0 = 0, y_0 = 1, y'_n = \frac{x_n}{y_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{x_n}{y_n} \right)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

#### Τροποποιημένη μέθοδος Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} y'_n \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \frac{x_n}{y_n} \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{x_n + \frac{h}{2}}{y_n + \frac{h}{2} \frac{x_n}{y_n}} \right)$$

.

.

.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{4y_n x_n h + 2h^2 y_n}{4y_n^2 + 2hx_n}$$

### Βελτιωμένη μέθοδος Euler

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left( f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left( \frac{x_n}{y_n} + f \left( x_n + h, y_n + h \frac{x_n}{y_n} \right) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left( \frac{x_n}{y_n} + \frac{x_n + h}{y_n + h \frac{x_n}{y_n}} \right)$$