Γιάλας Γιώργος
2591

Άσκηση 2

$$\frac{\partial c^T x}{\partial x} = c \quad (1)$$
$$\frac{\partial \|x\|^2}{\partial x} = 2x \quad (2)$$
$$\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (A + A^T)x \quad (3)$$

α) $5f^T x + 3 \xrightarrow{(1)} 5f$

β) $9\|x\|^2 + 2f^T x + x^T(D+5I)f + f^T D^T f$

i) Ο πρώτος όρος $\xrightarrow{(2)} 18x$

ii) Ο δεύτερος όρος $\xrightarrow{(1)} 2f$

iii) Ο τρίτος όρος: Έστω $n=2$ και $A=(D+5I)$

τότε: $x^T A f = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} =$

$= [x_1\ x_2]\begin{bmatrix} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{matrix} a_{11}f_1x_1 + a_{12}f_2x_1 + \\ + a_{21}f_1x_2 + a_{22}f_2x_2 \end{matrix}\right)$

Παραγωγίζοντας: $\left.\begin{matrix} \frac{\partial x^T A f}{\partial x_1} = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 \\ \frac{\partial x^T A f}{\partial x_2} = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

$= (D+5I)f$

iv) Ο τέταρτος όρος είναι σταθερά άρα 0

$= [f_1\ f_2]\begin{bmatrix} d_{11}f_1 + d_{21}f_2 \\ d_{12}f_1 + d_{22}f_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{matrix} d_{11}f_1^2 + d_{21}f_1f_2 + \\ + d_{12}f_1f_2 + d_{22}f_2^2 \end{matrix}\right)$

Παραγωγίζοντας: $\frac{\partial f^T D^T f}{\partial f_1} = 2d_{11}f_1 + d_{21}f_2 + d_{12}f_2$

$\frac{\partial f^T D^T f}{\partial f_2} = d_{21}f_1 + d_{12}f_1 + 2d_{22}f_2$

$$\left.\begin{matrix} D^T f \\ \begin{pmatrix} d_{11}f_1 + d_{21}f_2 \\ d_{12}f_2 + d_{22}f_2 \end{pmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} D \\ \begin{pmatrix} d_{11}f_1 + d_{12}f_2 \\ d_{91}f_1 + d_{99}f_2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} =$$

$$= D^T f + Df = (D^T + D)f$$

σταθερά άρα 0

Τελικά β) → $18x + 2f + (D+5I)f + (D^T+D)f$

$$= 18x + 2f + (D+5I)f$$

γ) Η παράγωγος του $g(x)$ είναι:

$$\frac{1}{2}x^T D^T D x + \frac{1}{2}x^T 2I x + f^T x + 10$$

1ος όρος: Αν $(D^T D) = A$ τότε παράγωγος →

$$\rightarrow \frac{\partial \frac{1}{2}x^T A x}{\partial x} = Ax = D^T D x$$

2ος όρος: $\frac{\partial \frac{1}{2}x^T 2I}{\partial x} x = 2Ix$

3ος όρος: $\frac{\partial f^T x}{\partial x} = f$

4ος όρος: $\frac{\partial 10}{\partial x} = 0$

Συνολικά: $D^T D x + 2Ix + f = (D^T D + 2I)x + f$

και $(D^T D + 2I)x = -f \Rightarrow x = -(D^T D + 2I)^{-1} \cdot f$