PAM 252 Metode Numerik
Bab 4 Pencocokan Kurva

Mahdhivan Syafwan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

Semester Genap 2016/2017

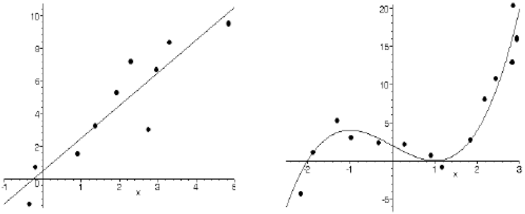
Permasalahan dan penyelesainnya

- Diberikan n buah titik dalam bidang
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$
yang berasal dari sebuah fungsi atau data hasil pengamatan.
- **Permasalahan**: ingin diketahui nilai dari fungsi/data tersebut di suatu titik x yang tidak berada dalam data tersebut.
- **Penyelesaian**: pencocokan kurva, yaitu mengkonstruksi sebuah kurva yang menghampiri titik tersebut.
- Istilah menghampiri di sini artinya kurva yang dibangun diformulasikan sedemikian sehingga galat yang diperoleh seminimal mungkin.
- Selain itu, pencocokan kurva juga digunakan untuk mengaproksimasi fungsi yang rumit dengan fungsi yang sederhana, contoh: fungsi $e^{x \tanh(x)} \sin(\ln(x))$ dapat dihampiri misalnya dengan fungsi polinom.

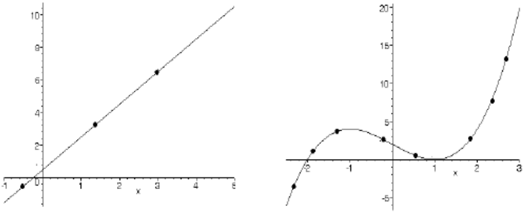
Dua macam teknik pencocokan kurva

1. Regresi
   - digunakan apabila sumber data yang digunakan mempunyai ketelitian yang cukup rendah.
   - kurva yang dibangun tidak perlu melalui semua titik data tersebut, tetapi cukup mengikuti kecendrungannya saja.
2. Interpolasi/Ekstrapolasi
   - digunakan apabila sumber data yang digunakan mempunyai ketelitian yang sangat tinggi.
   - kurva yang dibangun harus melalui semua titik data yang digunakan.

Ilustrasi



Ilustrasi pencocokan kurva dengan teknik regresi

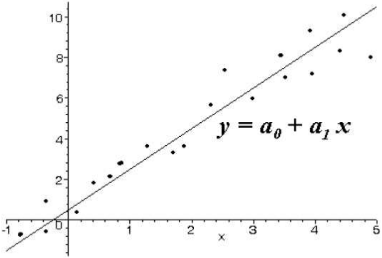


Ilustrasi pencocokan kurva dengan teknik interpolasi/ekstrapolasi

Regresi linier: bentuk umum

- Titik-titik data dihampiri oleh sebuah garis lurus (disebut garis/kurva regresi) yang dinyatakan sebagai

$$y \equiv f(x) = a_0 + a_1 x.$$



- **Pertanyaan**: berapa nilai a_0 dan a_1 agar garis regresi tersebut sedekat mungkin dengan titik-titik data yang diberikan (meminimumkan galat)?

Regresi linier: galat

- Galat dari garis regresi untuk setiap datum diberikan oleh

$$e_i = f(x_i) - y_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

- Tiga jenis galat dari garis regresi untuk keseluruhan data
  (i) Galat maksimum: $E_\infty(f) = \max_{1 \le i \le n} \{|f(x_i) - y_i|\}$
  (ii) Galat rata-rata: $E_1(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$
  (iii) Galat akar kuadrat rata-rata: $E_2(f) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|^2}$
- Di antara ketiga galat di atas, galat akar kuadrat rata-rata paling mudah untuk dihitung nilai minimumnya. [mengapa?]

Regresi linier: galat regresi kuadrat terkecil

- Pada regresi kuadrat terkecil, galat yang dipakai adalah galat akar kuadrat rata-rata, yaitu

$$E = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (a_0 + a_1 x_i)\right)^2}. \qquad (1)$$

  Perhatikan bahwa nilai E di atas sama saja dengan $E_2(f)$.
  Q: mengapa $(y_i - (a_0 + a_1 x_i))$ perlu dikuadratkan?
- Akan ditentukan nilai a_0 dan a_1 yang meminimumkan nilai galat E. Perhatikan bahwa E mencapai minimum jika

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0. \qquad (2)$$

- Untuk memudahkan perhitungan, masalah di atas diselesaikan dengan meminimumkan E^2, bukan E. [mengapa?]

Regresi linier: penentuan nilai koefisien a_0 dan a_1

- Misalkan $D = nE^2$. Maka

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x_i)\right)^2, \\
\frac{\partial D}{\partial a_0} &= \quad \ldots \quad = 0, \qquad (3) \\
\frac{\partial D}{\partial a_1} &= \quad \ldots \quad = 0. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

- Pers. (3)-(4) dapat ditulis (disebut persamaan normal):

$$
\begin{array}{ccccc}
na_0 & + & a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i & = & \sum_{i=1}^{n} y_i, \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i & + & a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.
\end{array}
$$

- Solusi dari SPL di atas untuk a_1 dan a_0 adalah

$$
a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{dan} \quad a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.
$$

Regresi linier: contoh

1. Tentukan garis regresi dari data berikut, lalu taksirlah nilai $y(2)$ dan $y(2,5)$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0,5	2,5	2	4	3,5	6	5,5

2. Tentukan galat dari garis regresi tersebut.

Regresi linier: algoritma

```
Masukan:   n        jumlah data
           x[i]     i=1,2,…,n     absis data
           y[i]     i=1,2,…,n     ordinat data

Keluaran:  a0, a1   nilai koefisien garis regresi

Langkah-Langkah:
        1.(**menghitung jumlah x[i]**)
          Sx:=0
          untuk i=1,2,…,n
          └──Sx:=Sx+x[i]

        2.(**menghitung jumlah y[i]**)
          Sy:=0
          untuk i=1,2,…,n
          └──Sy:=Sy+y[i]

        3.(**menghitung jumlah x[i]*y[i]**)
          Sxy:=0
          untuk i=1,2,…,n
          └──Sxy:=Sxy+x[i]*y[i]

        4.(**menghitung jumlah x[i]^2**)
          Sxx:=0
          untuk i=1,2,…,n
          └──Sxx:=Sxx+x[i]^2

        5. (**menghitung a1**)
          a1:=(n*Sxy-Sx*Sy)/(n*Sxx-Sx^2)

        6. (**menghitung a0**)
          a0:=(Sy-a1*Sx)/n
```

Model nonlinier

- Dalam masalah nyata, seringkali dijumpai data dengan kecendrungan berbentuk fungsi nonlinier (bukan garis lurus), seperti fungsi eksponensial, fungsi pangkat, fungsi laju pertumbuhan jenuh, fungsi polinomial, dan lain-lain.
- Kurva regresi untuk model-model nonlinier tersebut dapat diselesaikan dengan bantuan regresi linier, asalkan kurva regresinya dapat **ditransformasi** ke bentuk regresi linier.

Regresi eksponensial

- Bentuk umum:

$$y = pe^{qx}.$$

- Transformasi pelinieran:

$$\ln(y) = \ln(p) + qx. \quad [\text{tunjukkan!}]$$

- Notasikan variabel baru sebagai berikut:

$$\tilde{y} = \ln(y), \quad a_0 = \ln(p), \quad a_1 = q.$$

- Dengan demikian diperoleh bentuk regresi linier:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x.$$

Regresi persamaan pangkat

- Bentuk umum:

$$y = px^q.$$

- Transformasi pelinieran:

$$\ln(y) = \ln(p) + q\ln(x). \quad [\text{tunjukkan!}]$$

- Notasikan variabel baru sebagai berikut:

$$\tilde{y} = \ln(y), \quad \tilde{x} = \ln(x), \quad a_0 = \ln(p), \quad a_1 = q.$$

- Dengan demikian diperoleh bentuk regresi linier:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1\tilde{x}.$$

Regresi model laju pertumbuhan jenuh

- Bentuk umum:

$$y = \frac{px}{q + x}.$$

- Transformasi pelinieran:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}\frac{1}{x}. \quad [\text{tunjukkan!}]$$

- Notasikan variabel baru sebagai berikut:

$$\tilde{y} = \frac{1}{y}, \quad \tilde{x} = \frac{1}{x}, \quad a_0 = \frac{1}{p}, \quad a_1 = \frac{q}{p}.$$

- Dengan demikian diperoleh bentuk regresi linier:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1\tilde{x}.$$

Transformasi pelinieran dari beberapa model nonlinier

Function, $y = f(x)$	Linearized form, $Y = Ax + B$	Change of variable(s) and constants
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$, $Y = y$
$y = \frac{D}{x + C}$	$y = \frac{-1}{C}(xy) + \frac{D}{C}$	$X = xy$, $Y = y$ $C = \frac{-1}{A}$, $D = \frac{-B}{A}$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x$, $Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$
$y = A\ln(x) + B$	$y = A\ln(x) + B$	$X = \ln(x)$, $Y = y$
$y = Ce^{Ax}$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x$, $Y = \ln(y)$ $C = e^B$
$y = Cx^A$	$\ln(y) = A\ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ $C = e^B$
$y = (Ax + B)^{-2}$	$y^{-1/2} = Ax + B$	$X = x$, $Y = y^{-1/2}$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln(C)$	$X = x$, $Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ $C = e^B$, $D = -A$
$y = \frac{L}{1 + Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln(C)$	$X = x$, $Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)$ $C = e^B$ and L is a constant that must be given

Koefisien determinasi

- Seberapa baik suatu regresi menghampiri data? Apa ukurannya?
- Untuk mengukurnya secara kuantitatif, dapat digunakan koefisien determinasi, R^2, yang didefinisikan dengan

$$R^2 = 1 - \frac{S_{\text{res}}}{S_{\text{tot}}},$$

dimana

$$S_{\text{res}} = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \text{ dan } S_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2,$$

dengan

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

- Nilai R^2 berkisar dari 0 sampai 1. Jika R^2 mendekati nilai 1, maka kurva regresi tersebut dikatakan semakin baik dalam menghampiri data, dan sebaliknya.

Regresi polinom: pendahuluan

- Bagaimana jika kecendrungan pola data tidak dapat ditentukan atau sulit dicari transformasi pelinierannya?
- Langkah yang biasanya diambil adalah dengan menggunakan regresi berbentuk polinom.
- Alasan pemilihan regresi polinom adalah karena setiap fungsi kontinu selalu dapat dihampiri dengan fungsi polinom (dibuktikan pada kuliah Analisis Riil).

Regresi polinom: konstruksi (1)

- Perhatikan kembali n buah titik data

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).$$

Prosedur kuadrat terkecil pada regresi linier akan diperluas untuk membangun kurva regresi polinom berderajat m yang dinyatakan dengan

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m.$$

Catatan: nilai m dan n tidak ada hubungan tertentu.

- Terapkan rumus galat sebagai berikut:

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m)\right)^2}.$$

Regresi polinom: konstruksi (2)

- Akan ditentukan nilai $a_0, a_1, \ldots, a_m$ yang meminimumkan nilai $D = nE^2$. Hal ini tercapai ketika
$$\frac{\partial D}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial a_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial D}{\partial a_m} = 0.$$
- Langkah di atas menghasilkan persamaan normal berupa SPL dalam $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
na_0 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i a_1 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_2 & + & \cdots & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^m a_m & = & \sum_{i=1}^{n} y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i a_0 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_1 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 a_2 & + & \cdots & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} a_m & = & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_0 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 a_1 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 a_2 & + & \cdots & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} a_m & = & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^m a_0 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} a_1 & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} a_2 & + & \cdots & + & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+m} a_m & = & \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i
\end{array}$$

- SPL di atas diselesaikan dengan salah satu teknik penyelesaian SPL yang sudah dibahas sebelumnya.

Regresi polinom: algoritma

```
Masukan:   n        jumlah data
           m        derajat polinom
           x[i]     i=1,2,…,n      absis data
           y[i]     i=1,2,…,n      ordinat data

Keluaran:  a[i]     i=1,2,…,m+1   nilai koefisien regresi polinom

Langkah-Langkah:
        1.(*membangun matriks koefisien Z*)

          untuk i=1,2,…,m+1
          |   untuk j=1,2,…,m+1
          |   |   s:=0
          |   |   untuk k=1,2,…,n
          |   |   └─── s:=s+x[k]^(i+j-2)
          └───└────z[i,j]:=s

        2.(*membangun vektor nilai SPL (dalam b)*)
          untuk i=1,2,…,m+1
          |   s:=0
          |   untuk j=1,2,…,n
          |   └───s:=s+(x[j]^(i-1)*y[j])
          └────── b[i]:=s

        3.(*menyelesaikan SPL Za=b[silakan pilih salah satu metode]*)
```

Pendahuluan

- Interpolasi/ekstrapolasi bertujuan untuk membangun suatu kurva yang melalui **semua** titik data.
- Pada kuliah ini hanya dibahas tentang interpolasi/ekstrapolasi berbentuk polinom.
- **Interpolasi** $\rightsquigarrow$ kurva yang dibangun dipakai untuk menaksir nilai $f(x)$ dengan x berada di **dalam** interval titik-titik data yang diberikan.
- **Ekstrapolasi** $\rightsquigarrow$ kurva yang dibangun dipakai untuk menaksir nilai $f(x)$ dengan x berada di **luar** interval titik-titik data yang diberikan.

Konstruksi awal

- Diberikan $n+1$ titik data
$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n)),$$
dengan $x_i \neq x_j$ untuk $i \neq j$. Urutan nilai x_i tidak diperlukan.
- Akan dikonstruksi sebuah polinom yang melalui semua titik data tersebut. Misalkan polinom tersebut berderajat m:
$$y \equiv p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m.$$
- **Pertanyaan**: Bagaimana hubungan antara m dan n agar diperoleh solusi tunggal untuk koefisien $a_0, a_1, ..., a_m$?

Sifat

Diberikan $n+1$ titik data dengan nilai absis yang berbeda. Maka terdapat secara tunggal polinom derajat $m \leq n$ yang melalui semua titik data tersebut.

Bukti? $\longrightarrow$ TUGAS BONUS!

Ilustrasi

Misalkan untuk $n+1$ titik data digunakan polinom dengan derajat maksimum n. Maka diperoleh SPL berikut:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_0 & + & a_1x_0 & + & a_2x_0^2 & + & \cdots & + & a_nx_0^n & = & f(x_0) \\
a_0 & + & a_1x_1 & + & a_2x_1^2 & + & \cdots & + & a_nx_1^n & = & f(x_1) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_0 & + & a_1x_n & + & a_2x_n^2 & + & \cdots & + & a_nx_n^n & = & f(x_n)
\end{array}$$

Nilai-nilai koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dapat dicari dengan salah satu metode penyelesaian SPL.

Contoh:

Tentukan polinom derajat ≤ 3 yang melalui empat buah titik data berikut: $(1,1), (2,4), (3,9), (5,25)$.

Tetapi ...

- Matriks koefisien (disebut matriks Vandermonde) bisa saja singular.
- Secara analitik, semakin tinggi derajat polinom yang digunakan, semakin akurat hasil yang diperoleh. Namun hal ini harus dibayar dengan beban komputasi yang semakin berat, mengingat ukuran SPL-nya semakin besar.
- Semakin tinggi derajat polinom yang digunakan, semakin banyak perhitungan komputasi yang harus dilakukan. Akibatnya galat pembulatan akan secara signifikan mempengaruhi hasilnya.

Solusinya?

Polinom interpolasi Lagrange - linier

- Diberikan dua buah titik data $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$. Polinom interpolasi yang melalui kedua titik tersebut adalah

$$y \equiv p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad \text{[mengapa?]}$$

- Joseph Louis Lagrange menyusun polinom interpolasi tersebut dengan cara lain:

$$y \equiv p_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad \text{[justifikasi!]}$$

- **Contoh**:
  Diberikan dua buah titik $(1, \ln(1))$ dan $(6, \ln(6))$. Gunakan polinom interpolasi Lagrange derajat satu untuk menaksir nilai $\ln(2)$. [Catatan: nilai $f(2)$ yang lebih akurat adalah 0,6931471806].

Polinom interpolasi Lagrange - kuadratik

- Diberikan tiga buah titik data $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$, dan $(x_2, f(x_2))$. Polinom interpolasi Lagrange berderajat ≤ 2 yang melalui ketiga titik tersebut mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + a_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &\quad + a_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

- Dapat dibuktikan bahwa $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f(x_1)$, dan $a_2 = f(x_2)$. [buktikan!]
- **Contoh**:
  Diberikan tiga buah titik $(1, \ln(1))$, $(4, \ln(4))$, dan $(6, \ln(6))$. Gunakan polinom interpolasi Lagrange derajat dua untuk menaksir nilai $\ln(2)$. [Catatan: nilai $f(2)$ yang lebih akurat adalah 0,6931471806].

Polinom interpolasi Lagrange - kasus umum

- Bentuk umum polinom Lagrange derajat $\leq n$ yang menginterpolasi titik-titik $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$ adalah

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + \\ & a_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \\ & \vdots \\ & a_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

- Dapat ditunjukkan bahwa

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), ..., a_n = f(x_n).$$

Polinom interpolasi Lagrange - notasi bentuk umum

Bentuk umum dari polinom interpolasi Lagrange diberikan oleh

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x),$$

dimana

$$f_i = f(x_i) \text{ dan } L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Polinom interpolasi Lagrange - algoritma

Pendahuluan

- Seringkali kita memerlukan hampiran polinom yang derajatnya dibangun secara bertahap, yaitu $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$.
- Pada metode polinom interpolasi Lagrange, perhitungan seperti ini tidak bisa dilakukan karena tidak ada hubungan antara $p_{i-1}(x)$ dengan $p_i(x)$.
- Hal ini mengakibatkan proses komputasinya menjadi sangat besar.
- Sebagai contoh, gunakan polinom Lagrange untuk menginterpolasi empat titik data $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$.
- Solusinya?
  $\rightsquigarrow$ Metode polinom interpolasi (beda terbagi) Newton.

Polinom interpolasi Newton: konstruksi

Polinom interpolasi Newton dibangun sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0), \\
p_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1), \\
&\vdots \\
p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\
&\quad \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Dari hubungan di atas terlihat hubungan rekursif:

$$p_i(x) = p_{i-1}(x) + a_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1}).$$

Permasalahan: Bagaimana menentukan koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n$?

Polinom interpolasi Newton: penentuan koefisien (1)

- Bentuk polinom interpolasi Newton derajat ≤ 1 yang melalui dua titik data $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$ adalah

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0),$$

dimana $a_0 = f(x_0)$ dan $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. [tunjukkan!]

- Bentuk polinom interpolasi Newton derajat ≤ 2 yang melalui tiga titik data $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dan $(x_2, f(x_2))$ adalah

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

dimana $a_2 = \dfrac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$. [tunjukkan!]

Polinom interpolasi Newton: penentuan koefisien (2)

- Rumusan koefisien polinom Newton melibatkan ekspresi:
$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$
yang dikenal dengan beda terbagi orde pertama antara x_{i-1} dan x_i.
- Untuk perhitungan koefisien polinom Newton, secara umum diperlukan konsep beda terbagi orde ke-nol, pertama, kedua, sampai ke-j sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k), \\
f[x_k, x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}, \\
&\vdots \\
f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+j}] &= \frac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{k+j}] - f[x_k, \ldots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}.
\end{aligned}$$

Polinom interpolasi Newton: bentuk umum

Bentuk umum polinom Newton derajat $\leq n$ yang melalui titik-titik data $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, ..., n$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \quad = \quad & f[x_0] + \\
& f[x_0, x_1](x - x_0) + \\
& f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
& \vdots \\
& f[x_0, x_1, x_2, ..., x_i](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}) + \\
& \vdots \\
& f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Polinom interpolasi Newton: contoh dan diskusi

1. Gunakan polinom Newton untuk menginterpolasi empat titik data $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$. Bandingkan dengan perhitungan polinom Lagrange. Apa kesimpulan Anda?
2. Aproksimasi nilai $\ln(2)$ dengan menggunakan polinom interpolasi Newton pada dua titik $(1,\ln(1))$ dan $(6,\ln(6))$. Lakukan hal yang sama namun sekarang dengan menginterpolasi titik $(1,\ln(1))$ dan $(4,\ln(4))$. Bandingkan hasil yang Anda peroleh dengan nilai 'eksak' dari $\ln(2)$. Apa kesimpulan Anda?
3. Lakukan hal yang sama dengan soal no.2, namun dengan menginterpolasi ketiga titik $(1,\ln(1))$, $(4,\ln(4))$, dan $(6,\ln(6))$. Bandingkan dengan hasil pada soal no.2. Apa kesimpulan Anda?

Polinom interpolasi Newton: catatan

- Secara analitik, hasil hampiran semakin baik jika polinom yang dibangun derajatnya semakin tinggi.
- Namun secara numerik, konstruksi polinom derajat tinggi akan semakin sensitif terhadap galat pembulatan.
- Untuk mendapatkan hasil hampiran yang optimal, polinom interpolasi Newton mengkonstruksi hampiran secara bertahap yaitu $p_0(x) = f(x_0), p_1(x), p_2(x), \ldots$.
- Bila pada tahap ke-$(k+1)$ sudah memenuhi

$$|p_{k+1}(x) - p_k(x)| < \epsilon,$$

dimana ϵ galat yang ditetapkan, maka perhitungan dihentikan dan polinom hampirannya adalah $p_{k+1}(x)$.

Polinom interpolasi Newton: algoritma

Tugas:
Diberikan data $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, ..., n$. Tuliskan algoritma polinom interpolasi Newton untuk menghampiri nilai $f(z)$ dengan galat ϵ.