PAM 252 Metode Numerik

Bab 7 Persamaan Diferensial Biasa

Mahdhivan Syafwan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

Semester Genap 2017/2018

Motivasi

- Persamaan diferensial banyak digunakan untuk pemodelan matematika dalam sains dan rekayasa.
- Tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan secara eksak, sehingga penyelesaian secara numerik menjadi sangat diperlukan.
- Pada kuliah ini, akan dibahas beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa

  $$y' = f(t, y), \quad t \in [a, b],$$

  dengan syarat awal $y(a) = y_0$.
- Solusi numerik yang diperoleh bukan berupa suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial, tetapi himpunan titik $\{(t_k, y_k)\}$ yang digunakan sebagai hampiran dari $y(t_k)$, yaitu $y(t_k) \approx y_k$.

Bagaimana membangun titik $\{(t_k, y_k)\}$?

- Pilih absis $\{t_k\}$ sedemikian sehingga membagi/mempartisi selang $[a, b]$ menjadi M selang bagian yang sama panjang, yaitu

$$t_k = a + kh, \quad k = 0, 1, 2, ..., M,$$

  dengan $h = (b - a)/M$.
- Titik $\{t_k\}$ disebut titik kisi/titik partisi dan nilai h disebut ukuran langkah.
- Selanjutnya tentukan solusi hampiran dari

$$y' = f(t, y) \text{ pada } [t_0, t_M] \text{ dengan } y(t_0) = y_0.$$

- Caranya?

Metode Euler - konstruksi

- Asumsikan $y(t), y'(t)$ dan $y''(t)$ kontinu.
- Uraikan $y(t)$ atas deret Taylor di sekitar $t = t_0$:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + y''(c_1)\frac{(t - t_0)^2}{2}, \text{ untuk suatu } c_1 \in (t_0, t).$$

- Substitusi $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ dan $h = t_1 - t_0$ ke persamaan di atas, sehingga diperoleh hasil untuk $y(t_1)$ sebagai berikut:

$$y(t_1) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + y''(c_1)\frac{h^2}{2}.$$

- Jika h cukup kecil, maka suku terakhir dapat diabaikan. Dengan memperhatikan syarat awal $y(t_0) = y_0$, diperoleh hampiran

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0).$$

  yang kemudian disebut hampiran Euler.
- Proses di atas diulang untuk $t_2, \ldots, t_M$ sehingga diperoleh barisan titik $\{(t_k, y_k)\}$ yang menghampiri kurva solusi $y = y(t)$.

Metode Euler - langkah umum dan contoh

Langkah umum dari metode Euler adalah

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, \ldots, M-1.$$

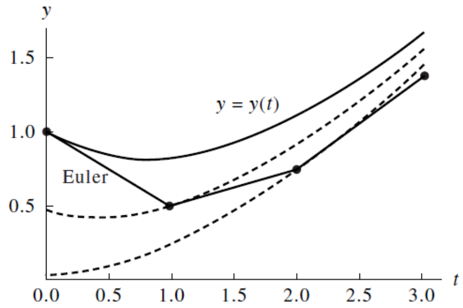
Contoh:
Gunakan metode Euler untuk menentukan hampiran solusi dari masalah nilai awal (MNA)

$$y' = Ry \text{ pada } [0,1] \text{ dengan } y(0) = y_0 \text{ dan } R \text{ konstan.}$$

Jawab:
Dari $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$ dengan $f(t_k, y_k) = Ry_k$, diperoleh

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0(1+hR), \\
y_2 &= y_1(1+hR) = y_0(1+hR)^2, \\
&\vdots \\
y_M &= y_{M-1}(1+hR) = \cdots = y_0(1+hR)^M.
\end{aligned}$$

Metode Euler - deskripsi geometrik



- Dari titik (t_0, y_0) dibuat garis dengan kemiringan $m = y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ dan lebar h. Titik pada garis tersebut adalah (t_1, y_1), sebagai hampiran dari $y = y(t_1)$.
- Proses di atas diulang dari (t_1, y_1) dan seterusnya.

Metode Euler - analisis galat

- Perhatikan bahwa dari uraian deret Taylor, sebagai dasar pembentukan hampiran Euler, lebar h yang digunakan sangat berpengaruh terhadap galat dalam perhitungan.
- Pada tiap langkah, galat yang terjadi adalah

$$\begin{aligned} e_{k+1} = y(t_{k+1}) - y_{k+1} &= y(t_{k+1}) - (y_k + hf(t_k, y_k)) \\ &\approx y''(c_{k+1})\frac{h^2}{2} = \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

- Setelah M langkah, galat terakumulasi menjadi

$$\begin{aligned} E = \sum_{k=0}^{M-1} e_{k+1} \approx \sum_{k=0}^{M-1} y''(c_{k+1})\frac{h^2}{2} &= My''(c)\frac{h^2}{2} \\ &= y''(c)\frac{b-a}{2}h = \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Metode Euler - contoh lagi

Hitung solusi numerik dari MNA

$$y' = \frac{t-y}{2},$$

pada selang $[0,3]$ dengan syarat awal $y(0) = 1$. Bandingkan solusinya untuk $h = 1, 1/2, 1/4$.

Jawab:

Metode Heun - konstruksi

- Menurut teorema dasar kalkulus,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)dt = [y(t)]_{t_0}^{t_1} = y(t_1) - y(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y)dt.$$

- Terapkan aturan trapesium pada perhitungan integral, yaitu

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1))\right], \;\; h = t_1 - t_0.$$

- Selanjutnya, $y(t_1)$ dihampiri dengan rumus Euler, sehingga diperoleh

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0))\right], \;\; h = t_1 - t_0,$$

yang kemudian disebut hampiran Heun.

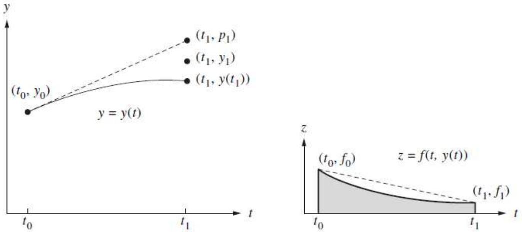
- Proses di atas diulang untuk $t_2, t_3, ..., t_M$ sehingga diperoleh barisan titik $\{(t_k, y_k)\}$ yang menghampiri kurva solusi $y = y(t)$.

Metode Heun - langkah umum

Pada tiap langkah, metode Euler digunakan sebagai **prediktor** dan aturan trapesium digunakan sebagai **korektor** (lihat gambar).

Langkah umum metode Heun adalah:

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\
t_{k+1} &= t_k + h, \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})\right].
\end{aligned}
$$



(a) Derivative predictor:
$p_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

(b) Integral corrector:
$y_1 - y_0 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$

Metode Heun - analisis galat dan contoh

- Penurunan metode Heun berdasarkan pada hampiran trapesium.
- Pada tiap langkah, galat dari metode Heun dihampiri oleh galat dari aturan trapesium, yaitu

$$-\frac{h^3}{12}y''(c_k).$$

- Setelah M langkah, galat yang terakumulasi dihampiri oleh

$$-\sum_{k=1}^{M}\frac{h^3}{12}y''(c_k) = -\frac{b-a}{12}y''(c)h^2 = \mathcal{O}(h^2).$$

- **Contoh:**
Gunakan metode Heun untuk menyelesaikan $y' = \frac{t-y}{2}$ pada selang $[0,3]$ dengan syarat awal $y(0) = 1$. Bandingkan solusinya untuk $h = 1, 1/2, 1/4$. Bandingkan juga dengan metode Euler yang diperoleh sebelumnya.

Metode deret Taylor?

- Mempunyai penerapan umum.
- Metode baku sebagai pembanding akurasi dari metode lainnya.
- Dapat dirancang untuk memperoleh hampiran dengan tingkat akurasi yang diinginkan.

Metode deret Taylor - konstruksi

- Kita tahu uraian deret Taylor diberikan oleh

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)h + y''(t_k)\frac{h^2}{2!} + \cdots . \tag{1}$$

- Perhatikan bahwa [tunjukkan!]

$$\begin{aligned} y'' &= f_t + f_y y' = f_t + f_y f, \qquad (2)\\ y''' &= \cdots = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_t + f_y f),\\ &\vdots \\ y^{(N)} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)^{N-1} f. \end{aligned}$$

- Metode Taylor orde N:

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + d_2\frac{h^2}{2!} + \cdots + d_N\frac{h^N}{N!},$$

dengan $d_j = y^{(j)}(t_k)$ untuk $j = 1, 2, ..., N$ pada tiap langkah $k = 1, 2, ..., M-1$.

Metode deret Taylor - analisis galat dan contoh

- Jika deret Taylor dipotong sampai turunan ke-N, maka galat pada setiap langkah berorde $\mathcal{O}(h^{N+1})$.
- Galat global akhirnya adalah $E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = \mathcal{O}(h^N)$.
- **Contoh:**
  Gunakan metode Taylor orde $N = 4$ untuk menyelesaikan $y' = \frac{t-y}{2}$ pada selang $[0, 3]$ dengan syarat awal $y(0) = 1$. Bandingkan solusinya untuk $h = 1, 1/2, 1/4$. Bandingkan juga dengan metode Euler dan metode Heun yang diperoleh sebelumnya.

Metode Runge-Kutta?

- Kendala pada metode deret Taylor:
  - Nilai N harus ditentukan sebelumnya dan harus diambil cukup besar agar diperoleh galat yang kecil.
  - Komputasi turunan tingkat tinggi yang rumit dan merepotkan.
- Pada metode Runge-Kutta:
  - Perhitungan dapat dibangun untuk sebarang orde N (yang paling populer $N = 4$).
  - Perhitungan turunan yang lebih tinggi dapat dihindari dengan cara melakukan beberapa evaluasi fungsi pada tiap langkah.
- Ciri metode Runge-Kutta: stabil, cukup akurat, mudah diprogram.

Metode RK2 - konstruksi (1)

- Bentuk umum:

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1, \tag{3}$$

dengan $f_0 = f(t, y)$ dan $f_1 = f(t + Ph, y + Qhf_0)$.

- Uraikan f_1 menjadi deret Taylor untuk dua peubah:

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t+Ph, y+Qhf_0) \\ &= f(t,y) + Phf_t(t,y) + Qhf_y(t,y)f(t,y) + C_P h^2 + \cdots . \end{aligned}$$

- Dengan demikian persamaan (3) menjadi

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + (A+B)hf(t,y) + BPh^2 f_t(t,y) \\ &\quad + BQh^2 f_y(t,y)f(t,y) + BC_P h^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{4}$$

Metode RK2 - konstruksi (2)

- Perhatikan kembali deret Taylor [dari persamaan (1) dan (2)]:

$$y(t+h) = y(t)+hf(t,y)+\frac{1}{2}h^2 f_t(t,y)+\frac{1}{2}h^2 f_y(t,y)f(t,y)+C_T h^3+\cdots. \tag{5}$$

- Dengan mencocokkan koefisien-koefisien suku yang sesuai pada persamaan (4) dan (5), diperoleh sistem persamaan

$$1 = A+B, \quad \frac{1}{2} = BP, \quad \frac{1}{2} = BQ.$$

- Perhatikan bahwa sistem di atas terdiri dari 3 persamaan dengan 4 variabel, sehingga satu variabel dapat dipilih bebas.
- *Kasus (1):* Pilih $A = 1/2$. Maka $B = 1/2$ dan $P = Q = 1$, sehingga rumus hampiran yang diperoleh adalah metode Heun [periksa!].
- *Kasus (2):* Pilih $A = 0$. Maka $B = 1$ dan $P = Q = 1/2$. Rumus hampiran yang diperoleh dikenal dengan metode Euler-Cauchy yang dimodifikasi [tuliskan rumusnya!].

Metode RK4 - konstruksi

- Bentuk umum:

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4,$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k), \\ k_2 &= hf(t_k + a_1 h, y_k + b_1 k_1), \\ k_3 &= hf(t_k + a_2 h, y_k + b_2 k_1 + b_3 k_2), \\ k_4 &= hf(t_k + a_3 h, y_k + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3). \end{aligned}$$

- Dengan cara mencocokkan koefisien uraian Taylor orde $N = 4$, diperoleh sistem 11 persamaan dengan 13 variabel [tunjukkan!], sehingga dua variabel dapat dipilih bebas.

Metode RK4 - bentuk paling populer

- Pilihan yang paling populer adalah $a_1 = 1/2$ dan $b_2 = 0$, sehingga diperoleh bentuk populer/klasik dari RK4:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_k, y_k), \\ f_2 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_1), \\ f_3 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_2), \\ f_4 &= f(t_k + h, y_k + hf_3). \end{aligned}$$

- Tafsiran geometri dari metode RK4 ini dapat dikaitkan dengan aturan pengintegralan Simpson [tugas baca!].

Metode RK4 - analisis galat dan contoh

- Karena metode RK4 menggunakan uraian Taylor orde $N = 4$, maka galat RK4 pada setiap langkah berorde $\mathcal{O}(h^4)$.
- Galat global akhirnya adalah $E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = \mathcal{O}(h^4)$.
- **Contoh:**
  Gunakan metode RK4 untuk menyelesaikan $y' = \frac{t-y}{2}$ pada selang $[0, 3]$ dengan syarat awal $y(0) = 1$. Bandingkan solusinya untuk $h = 1, 1/2, 1/4$. Bandingkan juga dengan metode Euler, metode Heun, dan metode deret Taylor yang diperoleh sebelumnya.

Sistem persamaan diferensial

- Sistem dua MNA:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x,y), \quad x(t_0) = x_0, \\ y'(t) &= g(t,x,y), \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned}$$

- Sistem tiga MNA:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x,y,z), \quad x(t_0) = x_0, \\ y'(t) &= g(t,x,y,z), \quad y(t_0) = y_0. \\ z'(t) &= l(t,x,y,z), \quad z(t_0) = z_0. \end{aligned}$$

- Solusi numeriknya? (di sini hanya dibahas untuk metode RK4)

Solusi sistem persamaan diferensial dengan RK4

Rumus iterasi:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4), \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{array}{ll} f_1 = f(t_k, x_k, y_k), & g_1 = g(t_k, x_k, y_k), \\ f_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1), & g_2 = g(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f_1, y_k + \frac{h}{2}g_1), \\ f_3 = f(\cdots, \cdots, \cdots), & g_3 = g(\cdots, \cdots, \cdots), \\ f_4 = f(\cdots, \cdots, \cdots), & g_4 = g(\cdots, \cdots, \cdots). \end{array}$$

Untuk penyederhanaan, tulis bentuk di atas dalam bentuk vektor!

Persamaan diferensial orde lebih tinggi

- MNA orde 2:

$$\begin{aligned} x''(t) &= F(t, x(t), x'(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x'(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

- Misalkan $x'(t) = y(t)$, maka $x''(t) = y'(t)$. Jadi MNA di atas menjadi sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y'(t) &= F(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned}$$

- Untuk MNA orde 3?
- Sistem persamaan diferensial yang terbentuk dapat diselesaikan dengan menggunakan metode RK4.

Contoh