PAM 252 Metode Numerik

Bab 6 Pengintegralan Numerik

Mahdhivan Syafwan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

Semester Genap 2017/2018

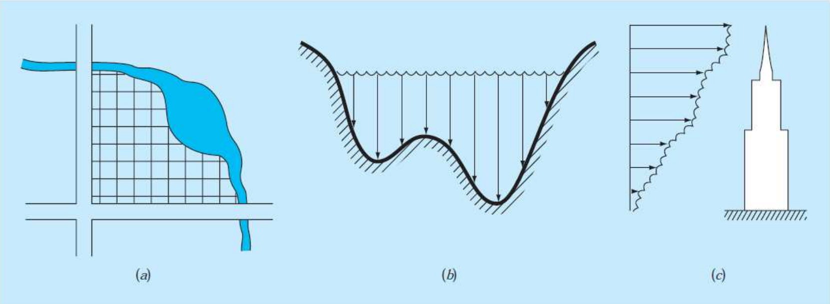
Motivasi

- Bagaimana memperoleh nilai hampiran untuk integral tentu yang tidak dapat diselesaikan secara analitik?
  Contoh:

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt = ?$$

- Integral numerik juga digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial.
  Contoh:
  Selesaikan $\frac{d}{dt} y(t) = f(t)$.
- Bagaimana menghitung luas daerah (atau volume) pada berbagai masalah teknik, fisika, dll?
- $\cdots$

Ilustrasi aplikasi integral numerik pada masalah teknik



Examples of how integration is used to evaluate areas in engineering applications. (*a*) A surveyor might need to know the area of a field bounded by a meandering stream and two roads. (*b*) A water-resource engineer might need to know the cross-sectional area of a river. (*c*) A structural engineer might need to determine the net force due to a nonuniform wind blowing against the side of a skyscraper.

Definisi kuadratur

Definisi

Misalkan $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = b$. Rumus berbentuk

$$\begin{aligned} Q[f] &= \sum_{j=0}^{M} w_j f(x_j) \\ &= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_M f(x_M), \end{aligned}$$

dengan sifat bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = Q[f] + E[f],$$

disebut pengintegralan numerik atau rumus kuadratur. Suku $E[f]$ disebut galat pemotongan untuk integral. Nilai $\{x_j\}_{j=0}^{M}$ disebut titik kuadratur dan $\{w_j\}_{j=0}^{M}$ disebut bobot.

Definisi derajat keakuratan

Definisi

Derajat keakuratan suatu rumus kuadratur adalah bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $E[p_i] = 0$ untuk semua polinom $p_i(x)$ berderajat $i \leq n$, tetapi $E[p_{n+1}] \neq 0$ untuk suatu polinom $p_{n+1}(x)$ berderajat $n+1$.

- Pandang polinom sebarang $p_i(x)$ berderajat i. Jika $i \leq n$, maka $p_i^{(n+1)}(x) = 0$ dan $p_{n+1}^{(n+1)}(x) = a_{n+1}(n+1)!$ untuk setiap x.
- Jadi bentuk umum dari suku galat pemotongan adalah

$$E[f] = Kf^{(n+1)}(c),$$

dimana K adalah konstanta yang dipilih secara sesuai dan n adalah derajat keakuratan.

Penurunan rumus kuadratur

- Rumus kuadratur biasanya diturunkan berdasarkan interpolasi polinom.
- Dari pembahasan sebelumnya diketahui bahwa terdapat polinom tunggal $p_M(x)$ berderajat $\leq M$ yang melalui $M+1$ titik $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{M}$.
- Jika polinom ini digunakan untuk mengaproksimasi $f(x)$ dalam selang $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_M(x)dx.$$

- Rumus terakhir disebut rumus Newton-Cotes. Jika titik $x_0 = a$ dan $x_M = b$ digunakan, maka rumus tersebut dinamakan rumus Newton-Cotes tertutup.

Teorema rumus Newton-Cotes tertutup

Teorema

Misalkan $x_i = x_0 + ih$ adalah titik-titik partisi yang berjarak sama dan $f_i = f(x_i)$. Empat rumus Newton-Cotes tertutup pertama adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1), \quad \text{[trapesium]} \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2), \quad \text{[Simpson]} \tag{2}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad \text{[Simpson 3/8]} \tag{3}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4). \quad \text{[Boole]} \tag{4}$$

Teorema rumus Newton-Cotes tertutup - bukti

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ dapat diaproksimasi oleh polinom Lagrange $p_M(x)$ dengan titik-titik interpolasi $x_0, x_1, ..., x_M$, yaitu

$$f(x) \approx p_M(x) = \sum_{i=0}^{M} f_i L_i(x),$$

dimana $f_i = f(x_i)$ dan $L_i(x) = \cdots$.

Jadi

$$\int_{x_0}^{x_M} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_M} p_M(x)dx = \cdots = \sum_{i=0}^{M} \left(\int_{x_0}^{x_M} L_i(x)dx \right) f_i = \sum_{i=0}^{M} w_i f_i.$$

Pada slide berikut akan dibuktikan aturan trapesium (untuk kasus $M = 1$) dan aturan Simpson (untuk $M = 2$).

Aturan trapesium - bukti

Perhatikan bahwa interpolasi Lagrange untuk polinom derajat 1 diberikan oleh

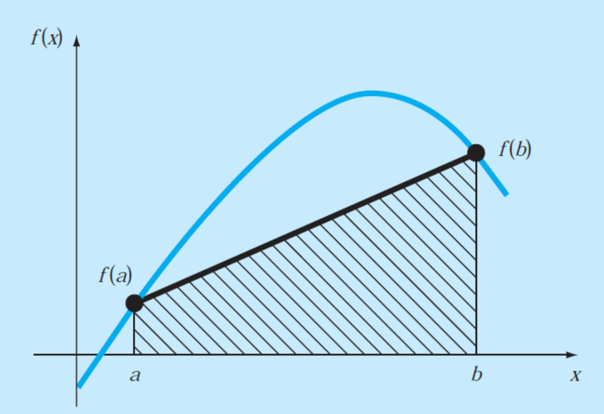
$$p_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

yang merupakan persamaan garis.

Karena $f(x) \approx p_1(x)$, maka

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left(f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{h}{2}(f_0 + f_1). \blacksquare \end{aligned}$$

Aturan trapesium - ilustrasi



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1).$$

Aturan Simpson - bukti

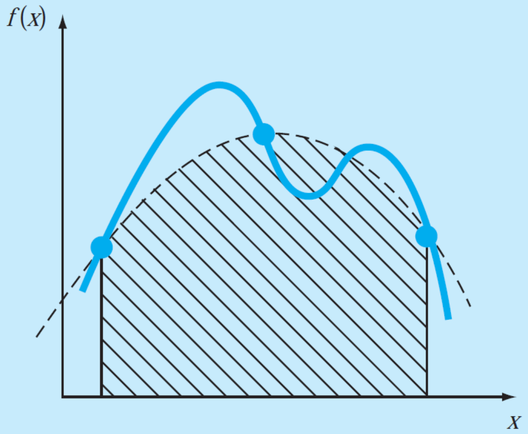
Perkenalkan peubah baru $x = x_0 + ht$ sehingga $dx = hdt$. Titik-titik partisi yang berjarak sama, yaitu $x_i = x_0 + ih$, mengakibatkan

$$x_i - x_j = (i-j)h \text{ dan } x - x_i = (t-i)h.$$

Karena $f(x) \approx p_2(x)$, maka

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_2} \left(f_0 \frac{\cdots}{\cdots} + f_1 \frac{\cdots}{\cdots} + f_2 \frac{\cdots}{\cdots} \right) dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2). \blacksquare \end{aligned}$$

Aturan Simpson - ilustrasi



$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2).$$

Keakuratan dan galat

Teorema

- Aturan trapesium mempunyai derajat keakuratan $n = 1$ dan galat $-\frac{h^3}{12}f''(c)$.
- Aturan Simpson mempunyai derajat keakuratan $n = 3$ dan galat $-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c)$.

Bukti. [tunggu sampai penjelasan galat pada aturan komposit]

Contoh

Gunakan aturan trapesium dan aturan Simpson untuk mengaproksimasi integral dari $f(x) = 1 + e^{-x}\sin(4x)$ pada selang $[a, b] = [0, 1]$.

Jawab:

- Untuk aturan trapesium, $h = 1$ dan $\int_0^1 f(x)dx \approx \cdots = 0,86079$.
- Untuk aturan Simpson, $h = 1/2$ dan $\int_0^1 f(x)dx \approx \cdots = 1,32128$.

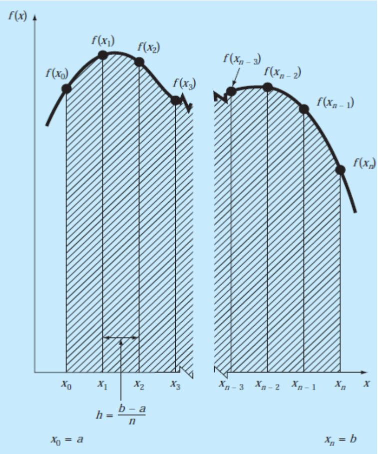
Perhatikan bahwa nilai eksak dari integral tersebut adalah

$$\int_0^1 f(x)dx = \cdots = 1,30825...$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa ...
Untuk membuat perbandingan yang 'adil', kita mesti menggunakan titik-titik fungsi yang sama banyak pada setiap metode. Hal ini akan dijelaskan pada pembahasan berikutnya tentang **aturan komposit**.

Aturan komposit?

$\rightsquigarrow$ menggunakan serangkaian polinom untuk menghampiri kurva $y = f(x)$ sepanjang $[a, b]$.



Aturan trapesium komposit

Teorema (Trapesium Komposit)

Andaikan selang $[a, b]$ dibagi menjadi M selang bagian $[x_i, x_{i+1}]$ selebar $h = (b-a)/M$, menggunakan titik partisi yang berjarak sama, yaitu $x_i = a + ih, i = 0, 1, ..., M$. Maka

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f_i + f(b)\right).$$

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{M-1}}^{b} f(x)dx \\ &\approx \cdots \\ &= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{M-1} + f_M) \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f_i + f(b)\right). \blacksquare\end{aligned}$$

Aturan trapesium komposit - contoh

Aproksimasi $\int_1^6 2 + \sin(2\sqrt{x})dx$ dengan menggunakan aturan trapesium komposit dengan (i) 6 titik partisi dan (ii) 11 titik partisi.

Jawab:

Aturan Simpson komposit

Teorema (Simpson Komposit)

Andaikan selang $[a, b]$ dibagi menjadi $2M$ selang bagian $[x_i, x_{i+1}]$ berlebar sama, yaitu $h = (b-a)/2M$, dan menggunakan titik-titik partisi $x_i = a + ih, i = 0, 1, ..., 2M$. Maka

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{M} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f(b)\right).$$

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2M-2}}^{b} f(x)dx \\
&\approx \cdots \\
&= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M}\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{M} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f(b)\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Aturan Simpson komposit - contoh

Aproksimasi $\int_1^6 2+\sin(2\sqrt{x})dx$ dengan menggunakan aturan Simpson komposit dengan (i) 5 titik partisi dan (ii) 11 titik partisi.

Jawab:

Analisis galat aturan trapesium

Akibat (Galat Aturan Trapesium)

Misalkan selang $[a, b]$ dibagi menjadi M selang bagian $[x_i, x_{i+1}]$ berlebar sama $h = (b - a)/M$. Aturan trapesium komposit

$$T(f, h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f_i + f(b)\right)$$

merupakan aproksimasi terhadap integral

$$\int_a^b f(x)dx = T(f, h) + E_T(f, h).$$

Lebih lanjut, jika $f \in C^2[a, b]$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga galat $E_T(f, h)$ diberikan oleh

$$E_T(f, h) = \frac{-(b - a)f''(c)h^2}{12} = \mathcal{O}(h^2).$$

Bukti. [tugas baca!]

Analisis galat aturan Simpson

Akibat (Galat Aturan Simpson)

Misalkan selang $[a, b]$ dibagi menjadi $2M$ selang bagian $[x_i, x_{i+1}]$ berlebar sama $h = (b-a)/2M$. Aturan Simpson komposit

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{M} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{M-1} f_{2i} + f(b)\right)$$

merupakan aproksimasi terhadap integral

$$\int_a^b f(x)dx = S(f,h) + E_S(f,h).$$

Lebih lanjut, jika $f \in C^4[a, b]$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga galat $E_S(f, h)$ diberikan oleh

$$E_S(f,h) = \frac{-(b-a)f^{(4)}(c)h^4}{180} = \mathcal{O}(h^4).$$

Bukti. [tugas baca!]

Analisis galat - contoh

Tentukan nilai M dan lebar selang h sedemikian sehingga galat $E_T(f,h)$ dari aturan trapesium dalam mengaproksimasi integral $\int_2^7 dx/x$ adalah kurang dari 5×10^{-9}.

Jawab:

Aturan trapesium rekursif - definisi

- Untuk meningkatkan ketelitian hasil perhitungan aturan trapesium, perbanyak jumlah partisi atau perhalus lebar selang.
- Agar efisien, hasil perhitungan yang telah dilakukan untuk suatu lebar selang perlu tetap dimanfaatkan untuk perhitungan dengan lebar selang yang lebih halus.
- Cara perhitungan seperti ini disebut aturan trapesium rekursif/berturutan.

Aturan trapesium rekursif - konstruksi (1)

Misalkan ingin dihitung

$$\int_a^b f(x)dx.$$

- Buat lebar selang $h_0 = b - a$ dan titik partisi $x_0 = a$ dan $x_1 = b$, sehingga aturan trapesium memberikan

$$T(f, h_0) = \frac{h_0}{2}(f_0 + f_1),$$

dimana $f_0 = f(x_0)$ dan $f_1 = f(x_1)$.

- Perhalus selang menjadi $h_1 = h_0/2 = (b - a)/2$, sehingga titik-titik partisi menjadi $x_0 = a$, x_1, dan $x_2 = b$ [x_1 adalah ...]. Aturan trapesium untuk tahap ini diberikan oleh

$$T(f, h_1) = \frac{h_1}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = \cdots = \frac{T(f, h_0)}{2} + h_1 f_1,$$

dimana $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, dan $f_2 = f(x_2)$.

Aturan trapesium rekursif - konstruksi (2)

- Perhalus selang menjadi $h_2 = h_1/2 = \cdots = (b-a)/2^2$, sehingga titik-titik partisi menjadi $x_0 = a$, x_1, x_2, x_3, dan $x_4 = b$ [x_1, x_2, x_3 adalah ...]. Aturan trapesium untuk tahap ini diberikan oleh

$$T(f, h_2) = \frac{h_2}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) = \cdots = \frac{T(f, h_1)}{2} + h_2(f_1 + f_3).$$

dimana $f_i = f(x_i), i = 0, 1, ..., 4$.

- Proses di atas dilanjutkan sehingga pada penghalusan ke-j, lebar selang menjadi $h_j = h_{j-1}/2 = \cdots = (b-a)/2^j$ dan titik-titik partisi menjadi $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{2M} = b$ dengan $2M = 2^j$. Aturan trapesium untuk tahap ini adalah

$$\begin{aligned} T(f, h_j) &= \frac{h_j}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2M-1} + f_{2M}) \\ &= \cdots \\ &= \frac{T(f, h_{j-1})}{2} + h_j \sum_{k=1}^{M} f_{2k-1}. \end{aligned}$$

Kaitan antara aturan Simpson dan trapesium rekursif

Untuk lebar selang h_j dan h_{j-1}, integral $\int_a^b f(x)dx$ dapat diaproksimasi berturut-turut oleh aturan trapesium

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(f,h_j) = \frac{h_j}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2M-1} + f_{2M}\right),$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx T(f,h_{j-1}) = \frac{h_{j-1}}{2}\left(f_0 + 2f_2 + 2f_4 + \cdots + 2f_{2M-2} + f_{2M}\right).$$

Dari kedua persamaan di atas diperoleh [tunjukkan!]

$$\begin{aligned} 3\int_a^b f(x)dx &\approx 4T(f,h_j) - T(f,h_{j-1}) \\ &= h_j\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M}\right). \end{aligned}$$

Dengan membagi 3, bentuk rumusan pada baris di bawah adalah bentuk Simpson dengan lebar selang h_j, sehingga secara umum diperoleh

$$S(f,h_j) = \frac{4T(f,h_j) - T(f,h_{j-1})}{3}.$$

Kaitan antara aturan Boole dan Simpson rekursif, dst...

Rumusan aturan Boole dan Simpson rekursif memenuhi hubungan berikut [tunjukkan!]:

$$B(f, h_j) = \frac{16S(f, h_j) - S(f, h_{j-1})}{15}.$$

Rangkaian perhitungan integral dengan menggunakan aturan trapesium, Simpson, dan Boole rekursif, yaitu $T(f, h_j), S(f, h_j)$ dan $B(f, h_j)$, dapat diteruskan dalam bentuk rumusan yang lebih umum. Hal ini dikenal sebagai integral Romberg.

Integral Romberg - pendahuluan

- Dari pembahasan sebelumnya diketahui bahwa

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= T(f,h_j)+\mathcal{O}(h^2),\\ \int_a^b f(x)dx &= S(f,h_j)+\mathcal{O}(h^4),\\ \int_a^b f(x)dx &= B(f,h_j)+\mathcal{O}(h^6).\end{aligned}$$

- Misalkan suatu hampiran integral menggunakan lebar selang h dan $2h$. Kemudian dengan manipulasi aljabar dapat diperoleh perbaikan hampiran dengan galat yang lebih kecil.
- Secara umum, setiap perbaikan hampiran memperkecil galat dari $\mathcal{O}(h^{2N})$ ke $\mathcal{O}(h^{2N+2})$. Proses ini dinamakan integral Romberg.
- Bagaimana perhitungan yang efisien untuk integral Romberg ini?

Integral Romberg - perbaikan Richardson

Diberikan dua hampiran $R(2h, k-1)$ dan $R(h, k-1)$ untuk suatu besaran Q yang memenuhi

$$\begin{aligned} Q &= R(h, k-1) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots , \\ Q &= R(2h, k-1) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \cdots . \end{aligned}$$

Perbaikan hampiran untuk Q diberikan oleh [tunjukkan!]

$$Q = \frac{4^k R(h, k-1) - R(2h, k-1)}{4^k - 1} + \mathcal{O}(h^{2k+2}).$$

Jika $h = h_j$ dan $2h = 2h_j = h_{j-1}$, maka bentuk di atas dapat ditulis dalam notasi indeks sebagai berikut:

$$Q = \frac{4^k R(j, k-1) - R(j-1, k-1)}{4^k - 1} + \mathcal{O}(h^{2k+2}).$$

Integral Romberg - barisan $R(j,k)$

Definisi

Definisikan barisan $\{R(j,k) | j \geq k\}_{j=0}^{\infty}$ dari rumus kuadratur untuk $f(x)$ pada $[a,b]$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
R(j,0) &= T(f,h_j), && \text{untuk } j \geq 0, && \text{adalah aturan trapesium,}\\
R(j,1) &= S(f,h_j), && \text{untuk } j \geq 1, && \text{adalah aturan Simpson,}\\
R(j,2) &= B(f,h_j), && \text{untuk } j \geq 2, && \text{adalah aturan Boole.}
\end{aligned}
$$

Barisan berikutnya adalah

$$
\begin{aligned}
R(j,1) &= \frac{4R(j,0) - R(j-1,0)}{4-1}, j \geq 1,\\
R(j,2) &= \frac{4^2 R(j,1) - R(j-1,1)}{4^2-1}, j \geq 2,\\
&\vdots\\
R(j,k) &= \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k-1}, j \geq k.
\end{aligned}
$$

Integral Romberg - tabel

j	$R(j,0)$ aturan trapesium	$R(j,1)$ aturan Simpson	$R(j,2)$ aturan Boole	$R(j,3)$ perbaikan ke-3	$R(j,4)$ perbaikan ke-4	$\cdots$
0	$R(0,0)$					
1	$R(1,0)$	$R(1,1)$				
2	$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$			
3	$R(3,0)$	$R(3,1)$	$R(3,2)$	$R(3,3)$		
4	$R(4,0)$	$R(4,1)$	$R(4,2)$	$R(4,3)$	$R(4,4)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Sebagai kriteria penghentian iterasi, dapat digunakan $|R(j,j) - R(j-1,j-1)| < \epsilon$, dimana ϵ adalah batas galat.

Integral Romberg - contoh

Gunakan integral Romberg untuk menentukan hampiran dari

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1)\cos(x)dx,$$

dengan galat 0.01.

Catatan: nilai eksaknya adalah $-2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 2,038197427067\ldots$.

Jawab:

Integral Romberg - algoritma

```
Masukan:   f(x)    fungsi integran
           a       batas bawah integral
           b       batas atas integral
           epsl    batas galat
Keluaran:  F       hasil integral

Langkah-Langkah :
       1. j:=1
       2. M:=1
       3. h:=b-a
       4. R[1,1]:=h/2*(f(a)+f(b))
       5. galat:=epsl+1
       6. selagi galat >= epsl
          |  h:=h/2
          |  s:=0
          |  untuk i=1,2,…,M
          |  |   x:=a+h*(2*i-1)
          |  └── s:=s+f(x)
          |  R[j+1,1]:=R[j,1]/2+h*s
          |  M:=2*M
          |  untuk k=1,2,…,j
          |  └── R[j+1,k+1]:=(4^(k+1)*R[j+1,k]-R[j,k])/(4^(k+1)-1)
          |  galat:=abs(R[j+1,j+1]-R[j,j])
          └─ j:=j+1
       7. F:=R[j,j]
```