

PAM 252 Metode Numerik

Bab 5 Turunan Numerik

Mahdhivan Syafwan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

Semester Genap 2017/2018

Permasalahan

Bagaimana menghitung hampiran dari $f'(x)$?

Bagaimana menghitung hampiran dari $f''(x)$, $f'''(x)$, $\dots f^{(n)}(x)$?

Bagaimana menghitung hampiran dari turunan parsial, misalnya $\partial f(x, t)/\partial x$?

Motivasi

- Banyak sekali fenomena alam yang dimodelkan oleh persamaan matematika yang melibatkan turunan (persamaan diferensial). Contoh: ...
- Untuk masalah-masalah yang lebih realistis, model matematika (persamaan diferensial) yang dihasilkan sulit/tidak ada penyelesaian eksaknya.
- Dengan demikian diperlukan pendekatan numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut dengan mencari hampiran turunannya terlebih dahulu.

Teorema Taylor

Teorema Taylor

Misalkan $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$, dan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga f dan turunannya $f', f'', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b) . Jika $\tilde{x} \in I$, maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat titik c di antara x dan \tilde{x} sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(x) = & f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x - \tilde{x})^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x - \tilde{x})^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - \tilde{x})^{n+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Bukti detailnya akan diberikan pada kuliah Analisis Riil.

Teorema Taylor

- Pers. (1) dapat juga ditulis dengan [tunjukkan!]

$$\begin{aligned} f(x+h) = & f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) \\ & + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1. \quad (2) \end{aligned}$$

- Untuk selanjutnya ditulis $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h) = \mathcal{O}(h^{n+1})$ dan suku ini disebut galat pemotongan orde h^{n+1} .
- Perhatikan bahwa untuk $h \ll 1$, galat $\mathcal{O}(h^{n+1}) \rightarrow 0$ bilamana $n \rightarrow \infty$

Konstruksi awal metode beda hingga

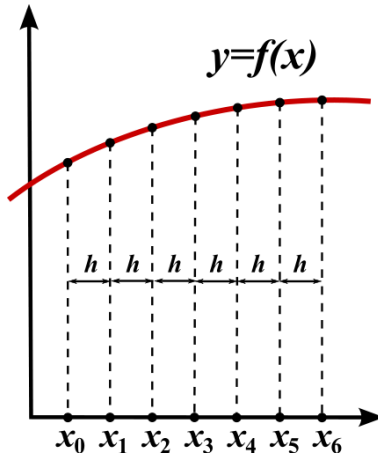
- Salah satu metode yang biasa digunakan untuk menghitung hampiran turunan adalah **metode beda hingga** (*finite difference*).
- Pada metode ini, domain fungsi $f(x)$ dipartisi atas sejumlah titik partisi dengan lebar selang yang sama.
- Domain $f(x)$, misalkan $[a, b]$, dipartisi atas $N + 1$ titik partisi dengan lebar selang h . Dengan demikian titik-titik partisinya adalah

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N.$$

Dalam hal ini $x_0 = a$ dan $x_N = b$.

- Selanjutnya nilai fungsi di masing-masing titik partisi ditulis $f_i = f(x_i)$.

Ilustrasi untuk $N = 6$



Jenis beda hingga

Ada tiga jenis beda hingga yang biasa digunakan:

① Beda maju (*forward difference*)

Hampiran menggunakan informasi di titik x_i dan beberapa titik di kanannya, yaitu x_{i+1}, x_{i+2}, \dots

② Beda mundur (*back difference*)

Hampiran menggunakan informasi di titik x_i dan beberapa titik di kirinya, yaitu \dots, x_{i-2}, x_{i-1} .

③ Beda pusat/tengah (*central difference*)

Hampiran menggunakan informasi di titik x_i dan beberapa titik di kiri dan kanannya secara simetris (sama banyak).

Beda maju

Dari pers. (2) dapat ditulis

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

atau

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

Jadi rumus beda maju untuk $f'(x)$ diberikan oleh

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

dengan galat $\mathcal{O}(h)$. Dalam notasi partisi, ekspresi di atas dapat ditulis

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}.$$

Beda mundur

Dari pers. (2) dapat ditulis

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

atau

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

Jadi rumus beda mundur untuk $f'(x)$ diberikan oleh

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h},$$

dengan galat $\mathcal{O}(h)$. Dalam notasi partisi, ekspresi di atas dapat ditulis

$$f'_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h}.$$

Beda pusat

Perhatikan bahwa

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \mathcal{O}(h^3).$$

Kurangkan persamaan atas dengan persamaan bawah, diperoleh

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Jadi rumus beda pusat untuk $f'(x)$ diberikan oleh

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

dengan galat $\mathcal{O}(h^2)$. Dalam notasi partisi, ekspresi di atas dapat ditulis

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}.$$

Catatan (1)

- Dalam hal galat yang dihasilkan, beda pusat lebih baik daripada beda maju dan beda mundur. Namun untuk beberapa kasus tertentu (misalnya pada masalah nilai batas), beda maju atau beda mundur lebih tepat digunakan daripada beda pusat.
- Untuk memperkecil galat atau meningkatkan orde ketelitian, tambahkan deret Taylor untuk titik-titik sebelum atau sesudahnya dua tingkat atau lebih, dan eliminasi suku-suku yang sesuai.
- Semakin banyak 'keterlibatan' titik-titik sebelum dan sesudahnya, semakin kecil galat yang dihasilkan. Tetapi hal itu harus dibayar dengan semakin berat beban komputasi yang dibutuhkan.

Catatan (2)

- Sebagai contoh, beda maju untuk $f'(x)$ dengan galat $\mathcal{O}(h^2)$ dapat diformulasi dengan menggunakan kedua persamaan

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!}f''(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

dan eliminasi $f''(x)$, sehingga diperoleh [tunjukkan!]

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

- Ada beberapa metode alternatif untuk memformulasi hampiran turunan dengan ketelitian yang lebih tinggi tetapi dengan beban komputasi yang lebih ringan, salah satunya adalah metode pseudo-spektral (dapat dijadikan topik TA).

Beda hingga untuk turunan tingkat tinggi

- Hampiran turunan tingkat tinggi dari $f(x)$, yaitu f'' , f''' , $f^{(4)}$, dst dapat dicari dengan menambahkan deret Taylor untuk titik-titik sebelum atau sesudahnya dua tingkat atau lebih, dan mengikutsertakan suku-suku turunan yang lebih tinggi, serta mengeliminasi suku-suku yang sesuai.
- Sebagai contoh, beda pusat untuk $f''(x)$ diformulasi dengan menggunakan kedua persamaan

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4), \\f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),\end{aligned}$$

dan eliminasi $f'(x)$, sehingga diperoleh **[tunjukkan!]**

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Catatan (3)

- Sama halnya pada turunan pertama, hampiran turunan tingkat tinggi dapat ditingkatkan orde ketelitiannya dengan memperbanyak 'keterlibatan' titik-titik sebelum dan sesudahnya, namun hal itu mengakibatkan semakin berat beban komputasi yang dibutuhkan.
- Secara umum, algoritma untuk membangkitkan rumus beda hingga (maju, mundur, dan pusat) untuk turunan ke- n dari $f(x)$ dengan orde ketelitian ke- m diberikan oleh Bengt Fornberg [Fornberg, Bengt. 1988. *Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids*. Mathematics of Computation 51 (184): 699706].
- Selain itu, bentuk tutup dari rumus beda hingga (maju, mundur, dan pusat) untuk turunan ke- n dari $f(x)$ dengan orde ketelitian ke- m juga sudah dikembangkan oleh Khan dan Ohba [Khan, Ishtiaq Rasool and Ohba, Ryoji. 1999. *Closed form expressions for the finite difference approximations of first and higher derivatives based on Taylor series*. J. Comput. Appl. Math. 107: 179-193] → dapat dijadikan topik TA.

Koefisien Beda Hingga

File Edit View History Bookmarks Tools Help


W Finite difference coefficient... x +

en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient

Community portal
Recent changes
Contact page

Tools
What links here
Related changes
Upload file
Special pages
Permanent link
Page information
Wikidata item
Cite this page

Print/export
Create a book
Download as PDF
Printable version

Languages 
Italiano
Nederlands
Português
[Edit links](#)

Central finite difference [\[edit\]](#)

This table contains the coefficients of the central differences, for several orders of accuracy.^[1]

Derivative	Accuracy	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
1	2				-1/2	0	1/2			
	4			1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
	6		-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	
	8	1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280
2	2				1	-2	1			
	4			-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12		
	6		1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90	
	8	-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560
3	2			-1/2	1	0	-1	1/2		
	4		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8	
	6	-7/240	3/10	-169/120	61/30	0	-61/30	169/120	-3/10	7/240
4	2			1	-4	6	-4	1		
	4		-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6	
	6	7/240	-2/5	169/60	-122/15	91/8	-122/15	169/60	-2/5	7/240
5	2		-1/2	2	-5/2	0	5/2	-2	1/2	

Ekstrapolasi Richardson - motivasi

- Hampiran turunan beda pusat dengan orde $\mathcal{O}(h^2)$ adalah

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Hampiran turunan beda pusat dengan orde $\mathcal{O}(h^4)$ adalah ...
- Hampiran turunan beda pusat dengan orde $\mathcal{O}(h^{2n})$ adalah ...

Apakah ada cara sistematis (iteratif) untuk memperoleh rumus hampiran turunan beda pusat dengan orde $\mathcal{O}(h^{2n})$?

Ekstrapolasi Richardson - ide

Hampiran turunan beda pusat dengan orde $\mathcal{O}(h^2)$:

- Untuk selang h :

$$f'(x) = D_0(h) - \frac{h^2 f'''(x)}{6} + \mathcal{O}(h^4),$$

$$\text{dengan } D_0(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

- Untuk selang $2h$:

$$f'(x) = D_0(2h) - \frac{4h^2 f'''(x)}{6} + \mathcal{O}(h^4),$$

$$\text{dengan } D_0(2h) = \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h},$$

Eliminasi suku yang memuat $f'''(x)$, diperoleh [tunjukkan!]

$$f'(x) = D_1(h) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$\text{dengan } D_1(h) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}.$$

Ekstrapolasi Richardson - definisi

- Perhatikan bahwa rumus $D_1(h)$ pada persamaan sebelumnya sama persis dengan rumus hampiran turunan beda pusat orde $\mathcal{O}(h^4)$ yang diperoleh dari deret Taylor. [periksa!]
- Pada ilustrasi sebelumnya, rumus hampiran turunan dengan orde yang lebih tinggi diperoleh dari rumus hampiran turunan dengan orde yang lebih rendah.
- Metode tersebut dikembangkan oleh Lewis Fry Richardson di awal abad 20, dan dikenal kemudian dengan metode ekstrapolasi Richardson.

Ekstrapolasi Richardson - teorema

Teorema Ekstrapolasi Richardson

Misalkan $D_{k-1}(h)$ dan $D_{k-1}(2h)$ adalah dua hampiran untuk $f'(x)$ dengan orde $\mathcal{O}(h^{2k})$, yaitu

$$\begin{aligned}f'(x) &= D_{k-1}(h) + h^{2k} C(x) + \mathcal{O}(h^{2k+2}), \\f'(x) &= D_{k-1}(2h) + 4^k h^{2k} C(x) + \mathcal{O}(h^{2k+2}).\end{aligned}$$

Maka perbaikan dari hampiran $f'(x)$ diberikan oleh

$$f'(x) = D_k(h) + \mathcal{O}(h^{2k+2}) = \frac{4^k D_{k-1}(h) - D_{k-1}(2h)}{4^k - 1} + \mathcal{O}(h^{2k+2}). \quad (3)$$

Perhatikan bahwa rumus (3) melibatkan nilai fungsi pada selang yang semakin menjauh dari x , yaitu menggunakan hampiran pada selang h dan $2h$.

Ekstrapolasi Richardson - memperhalus selang partisi

Rumus (3) dapat dimodifikasi dengan memperhalus selang.

- Perhalus selang h menjadi $h/2$, sehingga diperoleh
[tunjukkan!]

$$D_k(h/2) = D_{k-1}(h/2) + \frac{D_{k-1}(h/2) - D_{k-1}(h)}{4^k - 1}.$$

- Perhalus selang $h/2$ menjadi $(h/2)/2 = h/2^2$, sehingga diperoleh

$$D_k(h/2^2) = D_{k-1}(h/2^2) + \frac{D_{k-1}(h/2^2) - D_{k-1}(h/2)}{4^k - 1}.$$

- Lakukan sampai selang menjadi $h/2^j$, sehingga diperoleh

$$D_k(h/2^j) = D_{k-1}(h/2^j) + \frac{D_{k-1}(h/2^j) - D_{k-1}(h/2^{j-1})}{4^k - 1}.$$

Ekstrapolasi Richardson - penerapan

- Dalam notasi indeks, persamaan terakhir dapat ditulis

$$D(j, k) = D(j, k-1) + \frac{D(j, k-1) - D(j-1, k-1)}{4^k - 1},$$

dimana k terkait dengan orde dan j terkait dengan lebar selang.

- Jadi, untuk menghitung $f'(x)$ dengan ekstrapolasi Richardson, mulai dengan lebar selang h kemudian diperhalus menjadi setengahnya, dan seterusnya. Turunan diperoleh pada saat $j = k$.
- Nilai-nilai $D(j, k)$ dapat disusun dalam bentuk matriks segitiga bawah:

$$\begin{array}{cccc} D(0, 0) & & & \\ D(1, 0) & D(1, 1) & & \\ D(2, 0) & D(2, 1) & D(2, 2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

- Sebagai kriteria penghentian iterasi, dapat digunakan $|D(j, j) - D(j-1, j-1)| < \epsilon$, dimana ϵ adalah batas galat.

Ekstrapolasi Richardson - algoritma

Masukan: $f(x)$ fungsi yang ingin ditentukan hampiran turunannya
 x_0 titik absis dimana nilai hampiran turunannya ingin dicari
 h lebar selang awal
 ϵ_{sl} batas galat

Keluaran: df nilai hampiran turunan f di $x=x_0$

Langkah-Langkah :

1. $j:=1$
2. $D[1,1] := (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2*h)$
3. $galat := \epsilon_{sl} + 1$
4. selagi $galat \geq \epsilon_{sl}$
 - $h := h/2$
 - $D[j+1,1] := (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2*h)$
 - untuk $k=1, 2, \dots, j$
 - $D[j+1, k+1] := D[j+1, k] + (D[j+1, k] - D[j, k]) / (4^{k+1} - 1)$
 - $galat := \text{abs}(D[j+1, j+1] - D[j, j])$
 - $j := j+1$
5. $df := D[j, j]$

Ekstrapolasi Richardson - contoh

Gunakan ekstrapolasi Richardson untuk menghitung turunan $f(x) = \frac{e^x}{\sin \sqrt{x}}$ di $x = 1$ dengan galat 0,001 (mulai dengan $h = 0.1$).

Turunan parsial pertama

- Turunan parsial pertama dapat dihitung secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga dengan cara yang serupa dengan perhitungan pada turunan biasa.
- Misalkan kita ingin menentukan turunan parsial pertama untuk fungsi dua variabel $f(x, y)$. Dengan menggunakan beda pusat, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}.\end{aligned}$$

Turunan parsial kedua (campuran)

- Misalkan kita ingin menentukan turunan parsial dari $f(x, y)$ terhadap x dan y , yaitu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

- Bentuk terlebih dahulu ekspresi beda hingga (dalam hal ini beda pusat) untuk turunan parsial terhadap x dari turunan parsial terhadap y , yaitu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}.$$

- Selanjutnya turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial y}(x \pm \Delta x, y)$ dapat diaproksimasi oleh

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x \pm \Delta x, y) \approx \frac{f(x \pm \Delta x, y + \Delta y) - f(x \pm \Delta x, y - \Delta y)}{2\Delta y}.$$

- Jadi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \dots$

Contoh

Hitunglah $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$, dan $\partial^2 f / \partial x \partial y$ untuk fungsi berikut di $x = y = 1$ secara (a) analitik, dan (b) numerik dengan $\Delta x = \Delta y = 0,0001$.

$$f(x, y) = 3xy + 3x - x^3 - 3y^3.$$