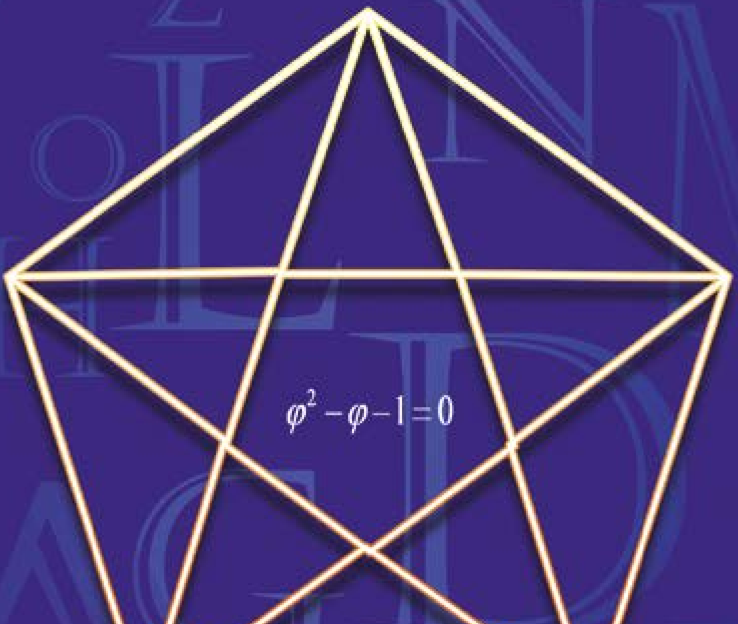
BRUNO PEDRA - IVAN MONTEIRO - ALEX RICARDO

Tópicos de ÁLGEBRA ELEMENTAR



Texto revisado de acordo com o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Diagramação – Luiz Cláudio de Melo

1ª edição 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pedra, Bruno / Monteiro, Ivan / Ricardo, Alex
Depois de um longo período de sucesso, o tão desafiador livro “TÓPICOS DE ÁLGEBRA ELEMENTAR “ passa por uma grande e detalhada transformação.
Revisado, atualizado e esquematizado para melhor orientar o leitor, a nova versão do Livro trás conteúdos novos, questões atuais e gradativas, sem perder a sua essência. Bruno Pedra. Ivan Monteiro, Alex Ricardo.
1. Bento Ribeiro, Rj, 2021. 400 pags.

ISBN 978-65-84598-02-7

1. Matemática 2. Álgebra Elementar

CDD-636.089
NLM-SF-745

21-56092

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

PREFÁCIO

Prof. DSc. Alexandre Vargas GRILLO

Foi com muito prazer que aceitei o convite dos ilustres professores Alex Ricardo, Bruno Pedra & Ivan Monteiro para prefaciar este seu primeiro livro didático voltado para a preparação dos candidatos aos cursos pré-militares. Não vou negar que vou sim cansar um pouco o nosso leitor em escrever cada autor, o que para mim será de enorme prazer e boas lembranças.

Começo com o Professor Alex Ricardo Ávila, o meu querido irmão e que carinhosamente nos referimos como “amigão”. Há exatos quinze anos entro no mercado de trabalho aqui no Brasil e começo a minha caminhada em querer lecionar em turmas preparatórias, tanto à nível militar quanto de vestibular. Exatamente no meu primeiro intervalo encontro mestres com alta qualificação e um deles trata-se do professor Alex Ricardo. Em pouco tempo ouvindo a conversa dos grandes mestres/professores pude perceber o quanto era diferenciado toda a abordagem do Alex, até que em um determinado momento um aluno do curso pré-AFA pede licença e chama o professor para que pudesse tirar uma dúvida de uma questão e, prontamente não menos que dois minutos tudo estava resolvido e esclarecido, sempre com o sorriso nos lábios e feliz em poder tirar a dúvida do aluno. Me deparei com aquela situação e pensei na hora: “um dia vou ter esta rapidez e visão em resolver questões deste nível”. A partir deste momento tivemos uma relação que dura até o presente momento, sempre pautado no carinho, respeito e acima de tudo muita admiração tanto profissional quanto pessoal. Sempre falei com colegas em poucas salas de professores que passei em minha vida, que caso eu tivesse que montar um curso, o meu primeiro professor seria de matemática e este seria Alex Ricardo Ávila. Professor renomado e com larga experiência no mercado militar. Licenciatura e Bacharel em Matemática pela Universidade Federal Fluminense – UFF e, com sua clareza e postura como professor é respeitado e querido por seus alunos, não só pelas suas explanações no âmbito da matemática, como pela atualização das informações e pela atenção cuidadosa que dá ao interlocutor. Para terminar, lembro de uma conversa, que quando ele era estudante secundarista, sua preparação em Química, matéria que leciono junto a turmas IME/ITA/Olimpíada, foi através das obras magníficas do Professor DSc. Ricardo Feltre, livros renomados de Química do segundo grau de perpetua em várias gerações, que estava diante da primeira pessoa, do primeiro ser humano que havia fechado TODOS, eu disse TODOS os exercícios dos três volumes do feltre.

Meu Deus!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Mais nada a declarar... rs

Bruno Pedra, amigo e companheiro de turmas IME-ITA-Olimpíada por mais dez anos no Rio de Janeiro. Pedra é um verdadeiro LEONHARD EULER da matemática atual, guardada suas devidas proporcionalidades. CLARO!!!!!!!!!!!!!!

Um matemático simplesmente de mão cheia, uma mente simplesmente brilhante, que não para de trabalhar e que pensa em matemática em tudo que vê. Há exatos 7 anos atrás em uma sala de professores, pedra me convida para conversarmos e dali fomos jantar com mais um amigo professor, Mestre Hermes de Biologia.

Simplesmente a conversa foi pautada na matemática e ali pude conhecer o brilhante ser-humano que não só respirava matemática, mas que tinha sonhos concretos em sua mente.

Pedra, até então um jovem de classe batalhadora e humilde, morador no subúrbio do Rio de Janeiro, venceu todas as barreiras e conseguiu através dos estudos passar entre os primeiros colocados do Instituto Militar de Engenharia (IME) e trouxe para o Brasil uma medalha olímpica mundial de matemática (IMC) em 2010 na Bulgária, dando o pontapé inicial no despertar em inúmeros alunos a chegarem ao topo de uma olimpíada nacional e internacional, sendo hoje em dia e sem medo de errar o professor de matemática que mais medalha alunos no Rio de Janeiro nas olimpíadas científicas de Matemática. Falo do

Professor Bruno Pedra com muito amor e carinho, pois fui a primeira pessoa a saber que ele seria pai do lindo “little pedra”, termo que sempre me conduzi a seu filho.

Bem, aprendi um velho ditado que diz o seguinte: os últimos serão e sempre foram os primeiros e, diante disso deixei para escrever do então Mestre, Amigo e um verdadeiro romântico da Matemática, IVAN MONTEIRO, fazendo questão de destacar seu nome com a chave do CAPS LOCK do computador acionado,

Ivan, meu amigo Ivan, tarefa muito árdua escrever sobre você, mas tentarei...

Professor Ivan Monteiro, referência no ensino da matemática, referência entre colegas matemáticos que já trabalharam e trabalham hoje em dia, referência entre colegas e amigos de diferentes disciplinas que trabalharam e que trabalham com ele e principalmente REFERÊNCIA ENTRE OS ALUNOS de diversas gerações. São quase 45 anos de magistério com enorme brilhantismo, excelência e com um trabalho de extrema elegância, com sua retórica simples, suave e objetiva que encantou e encanta diversos alunos.

Caro leitor, lembra no início do prefácio que havia conhecido o professor Alex Ricardo na primeira sala de professores que pisei na minha vida?

Pois é, sabe que também estava? MESTRE IVAN MONTEIRO...

Sempre muito educado e volto a repetir um romântico modernista, Ivan é sim um algebrista de mão cheia e o comparo sem medo de errar ao grande AL-KHWARIZMI, um matemático e astrônomo, considerado pai do algebrismo, que viveu no século IX. Das inúmeras vezes que ligava para o Ivan ele dizia que estava em seu escritório se deliciando com suas contas algébricas durante horas e horas, dias e dias...

Não tenho a menor dúvida em dizer que estou sim diante de um dos maiores matemáticos que já dividi sala de professores e com certeza uma das pessoas mais iluminadas por Deus que já me deparei.

Amigo e professor Ivan, eu só tenho que agradecer por inúmeras e longas horas de conversa tanto da ciência quanto da vida. Cabe ainda ressaltar que no trato com os alunos, o carinho que, com toda a justiça, recebe é uma consequência natural da reciprocidade, porque aplica com suavidade a regra de São Bento: "Carinho de pai e severidade de mestre". Sabemos que sem rigor o jovem (só o jovem?) não progride intelectualmente.

Todas essas palavras que proferi destes três grandes mestres, serão logo parcialmente comprovadas pela leitura do livro que ora apresento, e só não o serão inteiramente porque o livro, por melhor que seja, não substitui completamente a presença física do autor. Mormente, quando se trata de professores como esses que acabo de descrever de forma rápida e sucinta, e que por essas características mesmo logo granjearam a admiração dos seus alunos.

Na presente obra intitulada de "TÓPICOS DE ÁLGEBRA ELEMENTAR", a informação teórica que precede cada bateria de exercícios é sucinta, mas completa para o escopo a que se destina, e só quem já se abancou a enxugar um texto sabe o quanto é difícil resumir sem desfigurar. Focado no Colégio Naval (CN) e EPCAr, porém podendo ser utilizado para candidatos que busquem uma base sólida também para a EsPCEx, AFA, EN, IME, ITA e Olimpíada. Quantos aos exercícios, estão dispostos em cuidadosa ordem crescente de dificuldade, e foram tirados principalmente de exames militares, sendo alguns de concursos antigos, mas que não perderam a atualidade, e por serem antigos dificilmente encontrados em outras obras voltadas para o mesmo objetivo que esta.

As respostas dos problemas propostos são todas comentadas, de modo que funcionam, o mais das vezes, como uma revisão do assunto cujo conhecimento está sendo testado, e isso é inegavelmente, uma vantagem a mais.

Em resumo, ganhamos todos, alunos e professores da área, com o lançamento deste livro, que será um valioso auxiliar para o aluno, pelo crescimento gradual que proporciona, e para o professor, que encontra aqui um meio rápido de montar uma relação de exercícios do mais alto nível – para prova ou não – com o grau de dificuldade que achar conveniente.

Alexandre Vargas Grillo, Professor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaríamos de agradecer ao nosso Deus por sempre estar ao nosso lado permitindo que as coisas acontecessem da melhor forma possível. Em segundo lugar, e não menos importante, às nossas famílias, que com muita alegria nos presentearam com o mais importante: compreensão e incentivo. Aos nossos pais, pois toda a educação que recebemos, todos os conselhos, broncas e muito carinho, serviram para que nos tornássemos homens melhores. Se hoje chegamos até aqui, muito temos a agradecê-los. Vocês são tão responsáveis quanto nós pela realização de mais este sonho.

Às esposas, Patrícia (Esposa do Professor Alex Ricardo) e Silvana (Esposa do Professor Ivan Monteiro). Muitas vezes, por nos comprometermos com a obra, elas tiveram que ser pacientes, fortes e, entre outras qualidades, mulher; mas no sentido mais sublime que esta palavra pode ter. Sem querer ser "piegas", ao lado de um grande homem com certeza há uma mulher mais do que especial.

Eu, Bruno Pedra, agradeço imensamente ao Isaac, meu filho; à Vanessa, minha irmã; ao Claudemiro e Maria de Lourdes, meus pais, pelo empenho e dedicação. Certamente, todo este processo fez com que mais uma vez tivéssemos a convicção de que a presença de vocês em nossas vidas é muito mais do que especial.

Em especial, eu Alex Ricardo gostaria de agradecer a Deus pelos meus filhos Ana Luíza e Daniel. Depois de tudo que passamos após o nascimento de vocês (somente Deus e nossos pais foram testemunhas da enorme Graça que recebemos), tê-los ao meu lado nesses anos é simplesmente a maior Graça que pude receber na minha vida. Vocês fazem parte dessa Obra e gostaria que essa declaração ficasse aqui eternizada.

Aos amigos que sonharam este sonho conosco, o nosso "Muito obrigado." Muitos de vocês fizeram parte das primeiras conversas, dos primeiros sonhos, do início do trabalho, do desenvolvimento e da apoteose que foi ver este filho nascer. Todos vocês têm parte nisso.

E finalmente, aos nossos queridos alunos, que sempre nos apoiaram na realização deste sonho, o nosso agradecimento mais do que sincero. Sempre com palavras de força e incentivo, contribuíram para que esta obra fosse uma extensão das nossas almas. Vocês também fazem parte disso.

Muito obrigado a todos vocês!

SUMÁRIO

Fundamentos da Teoria dos Conjuntos

Segundo CANTOR $(*)$, conjunto é o grupamento num todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados *os elementos* do conjunto.

$(*)$ George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 —1918): Matemático russo, tendo sido professor na Universidade de Halle-Wittenberg na Alemanha.

Por exemplo, seja V o conjunto das vogais do alfabeto latino, então representaremos V das seguintes maneiras :

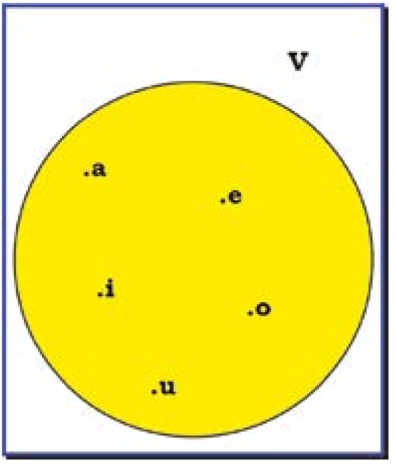
• $V = \{a, e, i, o, u\}$ que é a representação ***por enumeração***;

ou

• $V = \{x / x \text{ é vogal}\}$ que é a representação ***por propriedade***;

Ou

•Representação ***por Diagrama de Venn*** $(*)$



$(*)$ **John Venn(1834 – 1923) : Matemático inglês que lecionou Lógica e Teoria das Probabilidades na Universidade de Cambridge .**

Representaremos um conjunto por uma letra maiúscula do alfabeto latino e os objetos que o constituem, denominados ELEMENTOS, serão representados por uma letra minúscula do alfabeto latino.

Quando queremos afirmar se um determinado elemento é ou não elemento de um conjunto, utilizamos os símbolos $\in^{(*)}$ ou $\notin$. Por exemplo,podemos escrever que $a \in V$ assim como $d \notin V$.

$(*)$ **Notação devida ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932).**

Utilizaremos a simbologia $n(X)$ para representar o número de elementos de um determinado conjunto finito X .Logo, o conjunto V,no exemplo anterior, possui 5 elementos e, escreveremos $n(V)=5$.

Conjunto Iguais: Dois conjuntos A e B são iguais se forem formados pelos mesmos elementos; em simbologia matemática escrevemos: $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow x \in \mathrm{B})$.

Conjunto Vazio: É o conjunto cujos elementos são descritos por uma asserção logicamante falsa. Por exemplo, consideremos o conjunto A formado por números naturais maiores do que 2 e menores do que 3. Não existe nenhum número natural maior do que 2 e menor do que 3, logo, diz-se que A é o conjunto vazio e representaremos pela letra grega minúscula ϕ (phi), ou seja, $A=\phi$.

Subconjuntos e Relação de inclusão: Se todos os elementos de um determinado conjunto A forem também elementos de um conjunto B, então diz-se que A é subconjunto de B. Em simbologia matemática temos $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in \mathrm{B})$.

Se A é subconjunto de B, diz-se que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$(A está contido em B) ou $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$(B contém A).

Propriedades: (P_1) $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$;

(P_2) $\varnothing \subset \mathrm{A}, \forall \mathrm{A}$;

(P_3) Se $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ e $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, então A = B;

(P_4) Se A $\subset$ B e B $\subset$ C, então A $\subset$ C.

Para afirmar que um determinado conjunto X não é subconjunto de um outro conjunto Y, $X \not\subset Y$ (X não está contido em Y), basta mostrarmos que existe pelo menos um elemento x, $x \in X$, tal que $x \notin Y$.

Talvez você tenha estranhado a propriedade (P_2). O conjunto ϕ é subconjunto de qualquer conjunto? Você não achará tão estranho assim se pensar da seguinte forma: Como negar tal asserção? Basta mostrarmos que existe um elemento $x \in \phi$ tal que $x \notin A$. Observe que é impossível tal feito pelo simples fato de ϕ ser desprovido de elementos, logo, $\forall$ A, $\varnothing \subset$ A. Total de elementos do conjunto das partes

Um conjunto A com n elementos possui 2^n subconjuntos, ou seja, um conjunto com 3 elementos possui $2^3 = 8$ subconjuntos.

Quando X $\subset$ Y e X $\neq$ Y, dizemos que X Total de elementos é uma parte própria ou um subconjunto próprio de Y.

Conjunto das partes ($P(A)$) : Dado um conjunto A, denominamos $P(A)$ como o conjunto das partes de A, ou seja, P(A) é um conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A.

Em simbologia matemática temos: $P(\text{A}) = \{X \,/\, X \subset \text{A}\}$

Exemplo: A = {1,2,3}

Subconjuntos de A : ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3} .

P(A) = {∅, 1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

Observe que são verdadeiras as seguintes afirmações:

$\{2,3\} \subset A$ e $\{2,3\} \in P(A)$.

Operação com conjuntos:

(i) União: $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemplo : Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$, então

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$.

(ii) Intersecção: $A \cap B = \{x / x \in A \ e \ x \in B\}$

Exemplo : Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$, então $A \cap B = \{2,3\}$.

Se $A \cap B = \phi$, então dizemos que os conjuntos A e B são ***disjuntos***.

(iii) Diferença : $A - B = \{x / x \in A \ e \ x \notin B\} = A - (A \cap B)$

Exemplo: Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$, então $A - B = \{1\}$.

(iv) Complementar: $C_A^B = A - B \Leftrightarrow B \subset A$

Exemplo : Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, então

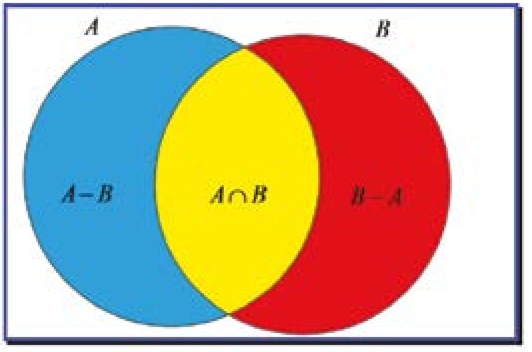
$C_B^A = B - A = \{4,5,6,7\}$.

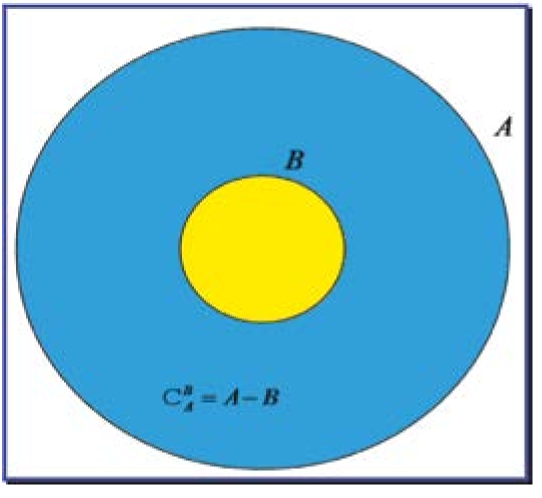
(v) Diferença simétrica: $(A - B) \cup (B - A) = A \,\Delta\, B$

Exemplo : Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,4,5,6,7\}$, então

$A \,\Delta\, B = \{1,2\} \cup \{4,5,6,7\} = \{1,2,4,5,6,7\}$.

Veja abaixo algumas operações representadas utilizando o diagrama de Venn.





☑Observações: Dados dois conjuntos finitos A, B e C, temos:

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ii) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Exemplos:

1) Se $A, B \ e \ A \cap B$ são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente,então qual o número de elementos do conjunto $A \cup B$?

Solução: Temos : $n(A)= 90$, $n(B)= 50$, $n(A \cap B) = 30$

Substituindo os valores na relação (i),teremos:

$n(A \cup B) = 90 + 50 – 30 = 110$.

2) Depois de uma briga de vários malucos em um hospício verificou-se que :

- 22 malucos perderam a cabeça
- 20 malucos perderam os braços
- 14 malucos perderam as pernas
- 9 malucos perderam cabeça e braços
- 6 malucos perderam braços e pernas
- 5 malucos perderam cabeça e pernas, e
- 4 malucos perderam cabeça, braços e pernas.

Sabendo-se que cada maluco que participou da briga teve pelo menos uma das perdas citadas acima, determine o número de malucos que brigaram .

Solução : Sejam

$C \rightarrow$ conjunto dos malucos que perderam a cabeça

$B \rightarrow$ conjunto dos malucos que perderam os braços

$P \rightarrow$ conjunto dos malucos que perderam as pernas, temos:

$n(C \cup P \cup B) = x$;

$n(C) = 22$;

$n(B) = 20$;

$n(P) = 14$;

$n(C \cap B) = 9$;

$n(C \cap P) = 5$;

$n(P \cap B) = 6$;

$n(C \cap B \cap P) = 4$.

Daí, substituindo na relação (ii), teremos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$x = 22 + 20 + 14 - 9 - 6 - 5 + 4$

$x = 40$

Resposta : 40 malucos brigaram.

Algumas propriedades da união e da intersecção:

- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Outras propriedades:

- Diferença

(i) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(ii) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$

(iii) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(iv) $A-(A-B)=A\cap B$

- Complementar

(i) Considerando $\overline{X}$ como o complementar de $\overline{X}$ em relação a um universo U, temos:

$$\overline{\left(\overline{A}\right)}=A$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}\\ \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}\end{array}\right\}\text{ Leis de DE Morgan }^{(*)}$$

(*) **Augustus De Morgan (1806—1871):Matemático e lógico britânico.**

(ii) $A-B=B^{C}-A^{C}$, onde por exemplo B^{C} representa o complementar de B em relação a um universo U (*).

(*) Conjunto Universo é o conjunto ao qual pertencem todos os elementos envolvidos em um determinado assunto ou estudo.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{12, 43, 56, 87, 99\}$

2) Considere os conjuntos $A = \{1,\ \{1\},\ \{2\}\}$ e $B = \{1,\ 2,\ \{2\}\}$ e julgue as afirmações a seguir.

(i) $A - B = \{\{1\}\}$

(ii) $2 \in (B - A)$

(iii) $\{1\} \subset A$

(iv) $A \cup B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

(v) $B - A = \{2\}$

Pode-se afirmar que:

a) Todas as proposições estão corretas.

b) Apenas I, II, III e IV estão corretas

c) Apenas I, II e V estão corretas

d) Somente IV está incorreta

e) Todas as proposições estão incorretas.

3) Em um certo concurso, 500 pessoas gabaritaram as questões de matemática, e 430 gabaritaram as questões de português. Se 170 gabaritaram ambas, quantos gabaritaram apenas uma das duas?

4) Num grupo de professores, sabe-se que há 26 que lecionam para o Ensino Fundamental, 13 que lecionam para o Ensino Médio e 5 que lecionam em ambos. Quantos professores há no grupo?

5) Numa confecção há 2500 funcionários onde são fabricados três tipos de roupas: Social (S), Básica (B) e Esportiva (E). A tabela seguinte indica quantos funcionários fabricam cada tipo de roupa.

Tipo de roupa	Funcionários
S	1300
B	1220
E	1080
S e B	220
S e E	800
B e E	180
S, B e E	100

Quantos funcionários fabricam SOMENTE roupas esportivas?

6) Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$.

Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11 b) 14 c) 15 d) 18 e) 25

7) Enuncie os elementos de $A = \{x \in \mathbb{Z}_- \,/\, x > -5\}$

8) Sejam x e y dois números reais não nulos e distintos entre si. Das alternativas a seguir, a única necessariamente verdadeira é:

a) $-x < y$.

b) $x < x + y$.

c) $y < xy$.

d) $x^2 \neq y^2$

e) $x^2 - 2xy + y^2 > 0$.

9) Se $-4<x<-1$ e $1<y<2$ então xy e $2/x$ estão no intervalo:

a)] - 8, - 1 [

b)] - 2, - 1/2 [

c)] - 2, - 1 [

d)] - 8, - 1/2 [

e)] - 1, - 1/2 [

10) Escreva na ordem crescente os números:

$$\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{3}{9},\frac{5}{2},1,2,3$$

EXÉRCÍCIOS AVANÇADOS

11)Dados os conjuntos A, B e C tal que $n(B \cup C) = 20$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 1$ e $n(A \cup B \cup C) = 22$, então $n[A - (B \cap C)]$ é igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 9 (e) 12

12)Dado um conjunto A com n elementos indiquemos a o número de subconjunto de A. Seja B o conjunto que se obtém acrescentando um novo elemento a A e indiquemos por b o número de subconjuntos de B. Qual a relação entre a e b ?

13) Sejam os conjuntos A com 2 elementos, B com 3 elementos e C com 4 elementos; então:

(a) $A \cap B$ tem no máximo 1 elemento

(b) $A \cup C$ tem no máximo 5 elementos

(c) $(A \cap B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos

(d) $(A \cup B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos

(e) $A \cap \varnothing$ tem 2 elementos pelo menos

14) Dados dois conjuntos A e B tais que $n(A \cup B) = 10$, $n(A \cap B) = 5$ e $n(A) > n(B)$, pode-se afirmar que a soma dos valores possíveis para $n(A - B)$ é:

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

15) Num grupo de 142 pessoas foi feita uma pesquisa sobre três programas de televisão A, B e C e constatou-se que:

I) 40 não assistem a nenhum dos três programas;

II) 103 não assistem ao programa C;

III) 25 só assistem ao programa B;

IV) 13 assistem aos programas A e B;

V) o número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade dos que assistem somente a A e B;

VI) 25 só assistem a 2 programas; e

VII) 72 só assistem a um dos programas

Pode-se concluir que o número de pessoas que assistem:

(a) ao programa A é 30

(b) ao programa C é 39

(c) aos três programas é 6

(d) aos programas A e C é 13

(e) aos programas A ou B é 63

16) Suponhamos que, numa equipe de 10 estudantes, 6 usam óculos e 8 usam relógio. O número de estudantes que usa, ao mesmo tempo, óculos e relógio é:

(a) exatamente 6

(b) exatamente 2

(c) no mínimo 6

(d) no máximo 5

(e) no mínimo 4

17) Se A e B são dois conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq \phi$, então:

(a) sempre existe $x \in A$ tal que $x \notin B$

(b) sempre existe $x \in B$ tal que $x \notin A$

(c) se $x \in A$, então $x \in A$

(d) se $x \notin B$, então $x \notin A$

(e) $A \cap B = \phi$

18) Sejam $A = \{2, 0, \{0\}, 5, \{5\}\}$ e $B \subset A$ tais que $5 \in B$ e $\{0\} \notin B$. O número de tais conjuntos B é igual a :

(a) 32 (b) 16 (c) 9 (d) 8 (e) 7

19) Sejam A e B dois conjuntos tais que o número de subconjuntos de A está compreendido entre 120 e 250 e o número de subconjuntos não vazios de B é 15. Se C é um conjunto cujo número de elementos é igual à soma dos números de elementos de A e B então o número de partes próprias de C é :

(a) 2047 (b) 2048 (c) 4094 (d) 4096 (e) 8190

20) Numa fábrica em greve, seis operários combinaram que *pelo menos dois* deles ficariam de vigília para evitar a entrada de outros funcionários. O número de maneiras distintas segundo as quais a entrada da fábrica pode ser vigiada pelos operários é :

(a) 64 (b) 63 (c) 58

(d) 57 (e) 56

21) Considere os conjuntos $A = \{1 \ , \ \{1\} \ , \ 2\}$ e $B = \{1 \ , \ 2 \ , \ \{2\}\}$ e as cinco afirmações

I) $A - B = \{ 1 \}$

II) $\{2\} \subset (B - A)$

III) $\{1\} \subset A$

IV) $A \bigcup B = \{ 1, \ 2, \ \{1, \ 2\} \}$

V) $B - A = \{ \{2\} \}$

Logo,

(a) todas as afirmações estão erradas.

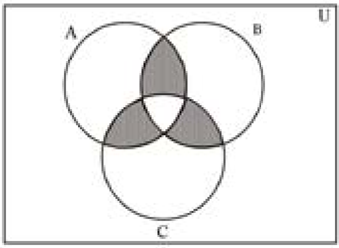
(b) só existe uma afirmação correta.

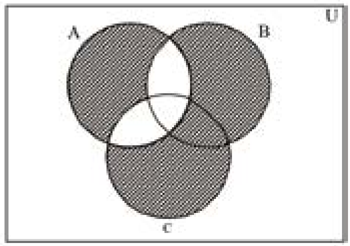
(c) as afirmações ímpares estão corretas.

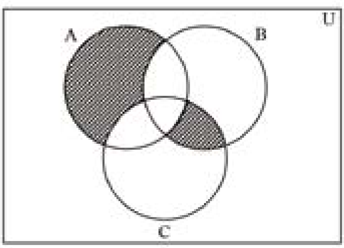
(d) as afirmações III e V estão corretas.

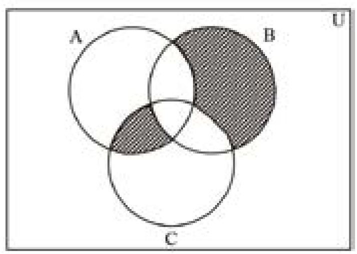
(e) as afirmações I e IV são as únicas incorretas.

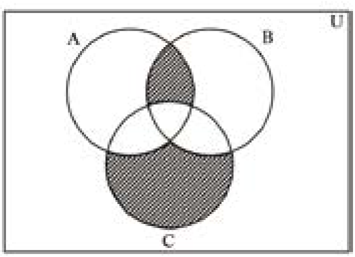
22) Sejam U o conjunto das brasileiras, A o conjunto das cariocas, B o conjunto das morenas e C o conjunto das mulheres de olhos azuis. O diagrama que representa o conjunto de mulheres morenas ou de olhos azuis, e não cariocas; ou mulheres cariocas e não morenas e nem de olhos azuis é:

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


23) Numa classe, existem 19 meninas; 10 crianças louras; 10 meninos não louros e 4 meninas louras. Considere então as afirmativas:

(1) 6 são os meninos louros.

(2) 15 são as meninas não louras.

(3) 40 são as crianças da classe.

(4) 25 são as crianças louras ou meninas.

(5) 31 são as crianças não louras ou meninos.

Conclua que o número de afirmações verdadeiras é igual a:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

24) Um grupo de 72 turistas visitou a França ou a Espanha. O número dos que visitaram a França é o sêxtuplo do número daqueles que visitaram França e Espanha, o qual, é a terça parte dos que visitaram só a Espanha. O número de turistas que visitou um único país é igual a :

(a) 18 (b) 32 (c) 36 (d) 48 (e) 64

25) Depois de n dias de férias, um estudante observa que :

(1) Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde.

(2) Quando chove de manhã não chove à tarde.

(3) Houve 5 tardes sem chuva.

(4) Houve 6 manhãs sem chuva.

Nestas condições, o valor de n é igual a :

(a) 4 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

26) Os valores de x e y para os quais $\{ x , 2y \} = \{ x+3 , y \}$ são tais que $x+y$ é

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3 (e) 2

27) Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B)=8$, $n(A \cup C)=9$, $n(B \cup C)=10$, $n(A \cup B \cup C)=11$ e $n(A \cap B \cap C)=2$.Então, $n(A)+n(B)+n(C)$ é igual a:

(A) 11 (B) 14 (C) 15 (D) 18 (E) 25

28) Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\Delta Y = (X-Y)\cup(Y-X)$. Pode-se afirmar que

(a) $(X\Delta Y)\cap(X\cap Y)=\phi$

(b) $(X\Delta Y)\cap(X-Y)=\phi$

(c) $(X\Delta Y)\cap(Y-X)=\phi$

(d) $(X\Delta Y)\cup(X-Y)=X$

(e) $(X\Delta Y)\cup(Y-X)=X$

29) Em relação à teoria dos conjuntos, considere as seguintes afirmativas relacionadas aos conjuntos A, B e C:

I. Se A $\in$ B e B $\subseteq$ C então A $\in$ C.

II. Se A $\subseteq$ B e B $\in$ C então A $\in$ C.

III. Se A $\subseteq$ B e B $\in$ C então A $\subseteq$ C.

Estão corretas:

(a) nenhuma das alternativas

(b) somente a alternativa I

(c) somente as alternativas I e II

(d) somente as alternativas II e III

(e) todas as alternativas

30) Na cidade C, constatou-se que todas as pessoas que gostam de música clássica não gostam de música sertaneja. Verificou-se, ainda, que 5% da população gostam de música clássica e de "rock", que 10% gostam de rock e de música sertaneja; que 25% gostam de "rock"; que 50% gostam de música sertaneja e que 30% gostam de música clássica. O percentual de habitantes da cidade C que não "curtem" nenhum dos gêneros musicais citados é de:

(a)10% (b) 8% (c) 5% (d) 2% (e) 0%

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (EPCAR 2021) Numa caixa foram guardados 302 utensílios de cozinha entre garfos e facas, nacionais e importados. Alguns desses utensílios foram confeccionados em metal e o restante em material não metálico.

Sobre todos esses utensílios, afirma-se que:

- 142 eram importados;
- 108 eram garfos
- 102 foram confeccionados em metal;
- 71 eram garfos importados;
- 27 eram garfos de metal;
- 52 eram importados e confeccionados em metal;
- 18 eram garfos importados e confeccionados em metal.
- Com base nessas informações sobre esses utensílios, pode-se afirmar que

a) O número de garfos nacionais confeccionados em material não metálico é igual a 26.

b) O número de garfos nacionais é igual ao número de facas importadas confeccionadas em material não metálico.

c) O número de facas nacionais confeccionadas em material não metálico é maior que 90.

d) O número de garfos importados confeccionados em material não metálico é menor que 50.

32) (EPCAR 2020) Para dinamizar suas aulas no 8º ano a professora Luiza organizou um jogo distribuindo duas fichas contendo operações com os números reais. Dois alunos participaram da 1º rodada do jogo: Lucas e Mateus. Ao jogarem, esses alunos receberam as seguintes fichas:

Aluno	Ficha 1
Lucas	$A=\left[\dfrac{0,\overline{7}+\frac{2}{9}+\left(\frac{5}{4}\right)^{0}}{-0,5-4^{\frac{3}{2}}-2^{-1}}\right]^{-1}$
Mateus	$C=\dfrac{(0,333\ldots)^{3}\cdot 1\frac{4}{5}+2,2}{-1,1333\ldots}$

Aluno	Ficha 2
Lucas	$B=\dfrac{8^{0,\overline{6}}+4^{\frac{3}{2}}-2^{\sqrt{9}}+9^{0,5}}{-\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}}$
Mateus	$D=\left[\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}\cdot 0,\overline{6}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0}-\frac{1}{1,333\ldots}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$

Depois de resolverem as operações, cada aluno deveria associas corretamente os resultados obtidos em cada ficha a somente um dos conjuntos abaixo.

$$P = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
$$W = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_+^*$$
$$X = \mathbb{Q}_-^* \cap \mathbb{R}_-^*$$
$$T = \mathbb{R} - \mathbb{Q}_+$$

Os resultados obtidos por Lucas e Mateus foram os seguintes:

Lucas afirmou que $A \in T$ e $B \in W$

Mateus afirmou que $C \in X$ e $D \in T$

Se Lucas e Mateus acertaram as operações nas suas duas fichas, então

a) Lucas e Mateus acertaram todas as correspondências entre os números calculados e os conjuntos.

b) Mateus acertou as duas correspondências e Lucas errou a correspondências de um dos números A ou B.

c) Lucas e Mateus erraram uma das correspondências cada.

d) Lucas acertou as duas correspondências e Mateus errou a correspondência de um dos números C ou D.

33) (CN 2021) Considere o conjunto $A = \left\{ x / x = \dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ um subconjunto da reta. É correto afirmar que:

a) Existe um único elemento de A cuja distância a qualquer outro elemento, também de A, é inferior a qualquer real positivo

b) Zero é um elemento do conjunto A

c) Fixando qualquer valor real positivo p, sempre existirão dois elementos do conjunto A cuja distância na reta real é menor do que p.

d) Existe um elemento do conjunto A que não é racional.

e) Existem dois elementos do conjunto A, de tal modo que a diferença entre eles não é um número racional.

34) (CN 2020) A triste e irreparável tragédia ocorrida com o Museu Nacional, situado na Quinta da Boa Vista em São Cristovão, RJ, em 02/09/2018, incentivou uma pesquisa com um grupo de estudantes, com o intuito de saber quais museus já visitaram. O resultado aparece a seguir:

- Apenas quatro museus foram mencionados: Museu Nacional (MN), Museu do Amanhã (MA), Centro Cultural Banco do Brasil (CCBB) e Museu Histórico Nacional (MHN);
- Todos os consultados afirmaram já terem ido ao MA, sendo que 32 nunca estiveram em qualquer outro dos museus mencionados;
- Dentre 50 dos estudantes que também já foram no CCBB, 30 nunca foram aos outros dois museus mencionados.
- Dentre 40 estudantes que também já foram ao MN, 22 nunca foram aos outros dois museus;

-Dentre 30 estudantes que também já foram no MHN, 18 nunca foram aos outros dois museus mencionados.

Com base nessas informações, quantos estudantes ao total responderam a essa pesquisa?

a) 148 b) 136 c) 122 d) 117 e) 105

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1 - $2^5 = 32$
2 - D
3 - 590
4 - 34
5 - 200
6 - D
7 - $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$
8 - e
9 - d
10 - $\frac{3}{9}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{5}{2}, 3$
11 - d
12 - b = 2a
13 - c
14 - c
15 - b
16 - e
17 - d
18 - d
19 - a
20 - d
21 - d
22 - b
23 - d
24 - e
25 d
26 - a
27 - d

28 - a
29 - b
30 - a
31 - b
32 - a
33 - c
34 - c

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

1) Definição: Seja $x \in \mathbb{R}$, definimos $|x| = \begin{cases} x, \; se \; x \geq 0 \\ -x, \; se \; x < 0 \end{cases}$, onde $|x|$ é o módulo (ou valor absoluto) de x.

Daí, temos que $|7| = 7$, $|0| = 0$ e $|-1| = -(-1) = 1$.

Exemplo: Para quaisquer reais não nulos a, b e c o conjunto dos valores que o número $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ **pode assumir é igual a :**

(a) $\{0\}$ **(b)** $\{-4,-2,2,4\}$ **(c)** $\{-4,0,4\}$

(d) $\{-4,-2,0,2,4\}$ **(e)** $\{-2,0,2\}$

Resolução: Sejam a, b e c números reais não nulos, temos as seguintes possibilidades :

a	b	c	abc	$\frac{a}{\lvert a\rvert} + \frac{b}{\lvert b\rvert} + \frac{c}{\lvert c\rvert} + \frac{abc}{\lvert abc\rvert}$
$+$	$+$	$+$	$+$	4
$+$	$-$	$-$	$+$	0
$-$	$-$	$-$	$-$	-4
$+$	$+$	$-$	$-$	0

Daí, a alternativa correta é a letra c.

2) Algumas propriedades:

(a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $|x| = k \Leftrightarrow x = k \quad ou \quad x = -k \ (\forall k > 0)$;

(c) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(d) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \quad ou \quad x = -y \left(\forall x, y \in \mathbb{R}\right)$;

(e) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \left(\forall a > 0\right)$;

(f) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad ou \quad x > a \left(\forall a > 0\right)$.

CUIDADO! Sejam $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, então $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$.

Exemplo: As raízes da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

(a) são positivas

(b) têm soma zero

(c) têm soma 1

(d) têm soma 6

(e) NRA

Resolução: Adotando $|x| = a$ **na equação** $|x|^2 + |x| - 6 = 0$**,**
teremos $a^2 + a - 6 = 0$ **cujas raízes são -3 e 2.**

Logo, temos:

* $|x| = -3$ **(Absurdo, pois** $|x| \geq 0$**);**
* $|x| = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$**.**

Daí, as raízes da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$ **são -2 e 2 cuja soma é igual a zero.**

A alternativa correta é a letra b.

Exemplo: Resolva a inequação $|3x+5| \leq$ **11 em** $\mathbb{R}$ **.**

Resolução: $|3x+5| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq 3x+5 \leq 11 \Leftrightarrow -\dfrac{16}{3} \leq x \leq 2$ **.**

Daí, temos $-\dfrac{16}{3} \leq x \leq 2$**.**

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Assinale com V ou F

( ) A equação $|x+5| = -3$ não possui solução

( ) A única solução da equação $|x-1| = 7$ é $x = 8$

( ) Se $a > b$ então $-a < -b$

( ) Se $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $a > b$ então $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

( ) A equação $|x^2 - 4| = 3$ possui exatamente duas soluções reais

2) Assinale com V ou F:

01. ( ) $\left|\dfrac{3x}{2}\right| = 0 \Rightarrow x = 0$

02. ( ) $|a|.|b| \neq |a.b|$

03. ( ) $|a|^{15} = |a^{15}|$

04. ( ) $|a| - |b| \geq |x+y|$

05. ( ) $|x| = |y| \Rightarrow x = y$

06. ( ) $|x+y| \leq |x| + |y|$

3) Determine a solução da equação $|x^2 - 3x - 1| = 3$ em $\mathbb{N}$

a) $S = \{-1, 1, 2, 4\}$

b) $S = \{1, 2, 4\}$

c) $S = \{1, 2\}$

d) NRA

4) Determine a solução da equação $|3x-9|-3=6$

5) Determine a solução da inequação $|3x-9|-3\leq 1$

6) Determine a solução da inequação $|x+2|-8<0$

7) Determine a solução da inequação $|x^2-2|>0$

8) Determine a solução da inequação $|x^2-2|-2<0$

9) Resolver a inequação $|x-1|-3x+7\leq 0$. Considere $U=\mathbb{R}$

10) Resolver a inequação $|2x+1|-3x+4\geq 0$. Considere $U=\mathbb{R}$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Se $\sqrt{x^2} + x + y = 10$ e $x + \sqrt{y^2} - y = 12$ o valor de x+y é igual a :

(a) -2 (b) 2 (c) $\frac{18}{5}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) 22

12) Sabendo que o sistema $\begin{cases} \sqrt{x^2} + x + \sqrt{y^2} + y = 10 \\ \sqrt{x^2} - x + \sqrt{y^2} - y = 4 \end{cases}$ possui duas soluções (a,b) e (c,d). O valor de a+b+c+d é igual a :

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

13) Se $1 < x < 2$, determine o valor de ε, onde $\varepsilon = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 4

14) Se α e β são raízes da equação $|x-7| + |2x-8| = 13$, determine o valor de $\alpha + \beta$.

(a) 7 (b) 10 (c) 13 (d) 17 (e) 20

15) Qual a soma de todos os valores de a para os quais a equação $\sqrt{(x+3a-8)^2} + \sqrt{(x-a)^2} = 4$ possui infinitas soluções?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

16) Resolva a inequação $3 \leq \sqrt{(1-x)^2} \leq 4$.

17) A soma das raízes da equação $|x+2|^2 - |x+2| - 2 = 0$ vale:

(a)-8 (b) -4 (c) 0 (d) 4 (e) 1

18) Determine o número de valores inteiros de x que satisfazem à inequação $\sqrt{x^2} + \sqrt{(2x-6)^2} \leq \sqrt{(x+6)^2}$.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

19) Se $x < 1$, então $4 + x + \sqrt{(x-1)^2}$ é igual a:

(a) 3 (b) 5 (c) $2x+3$ (d) $2x+5$ (e) $-2x-3$

20) Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

(a) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$ (b) $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$ (c) $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$

(d) $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$ (e) $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

21) Dada a equação $|2x-3| + |x| - 5 = 0$, a soma de todas as suas soluções é igual a:

(a) 3 (b) 8/3 (c) 2 (d) 4/3 (e) 2/3

22) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação $x^2+4x-2.|x+2|+4=0$ é igual a

(a) 16 (b) 20 (c) 24 (d) 28 (e) 36

23) Resolva a equação $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

24) O conjunto das soluções da inequação $\left|\dfrac{2x+1}{x-3}\right|>3$ é:

(a) $]8/5,3[\,\cup\,]3,+\infty[$ (b) $]3,10[\,\cup\,]10,+\infty[$

(c) $]-\infty,8/5[\,\cup\,]3,10[$ (d) $]8/5,3[\,\cup\,]3,10[$

(e) $]8/5,3[\,\cup\,]10,+\infty[$

25) Se $x<0$, então $\dfrac{\sqrt{\left(x-\sqrt{x^2}\right)^2}}{x}$ é igual a:

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

26) Se x e y são reais e $\sqrt{(x+y-17)^2}+\sqrt{(x-y-5)^2}=0$, determine o algarismo das dezenas simples do número x^y.

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

27) Determine a soma das raízes positivas da equação $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1$.

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 10

28) Sejam x e y números reais quaisquer. Assinale a afirmação correta:

(a) $|x+y| \leq \dfrac{|x|+|y|}{2}$ (b) $|x-y| \geq \dfrac{||x|-|y||}{2}$

(c) $|x|+|y| > \sqrt{x^2+y^2}$ (d) $|xy| > |x|.|y|$

(e) $|x|+|y| = 2\sqrt{x^2+y^2}$

29) A intersecção dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-2| \leq 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-7| \leq 2\}$ é um intervalo de comprimento

(a) 2 (b) 5 (c) 1 (d) 3 (e) 4

30) Qualquer que seja o número real não nulo x, tem-se sempre:

(a) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \geq 2$ (b) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leq 10$ (c) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leq x$

(d) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| < \dfrac{1}{x}$ (e) nenhuma das anteriores

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) V-F-V-V-F

2) V-F-V-F-F-V

3) b

4) {0,6}

5) $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 5\}$

6) $S = \{x \in \mathbb{R} / -10 < x < 6\}$

7) $S = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \, e \, x \neq 2\}$

8) $S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$

9) $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

10) $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$

11) c

12) a

13) d

14) b

15) a

16) $-3 \leq x \leq -2 \quad \text{ou} \quad 4 \leq x \leq 5$

17) b

18) e

19) b

20) a

21) c

22) b

23) As raízes são -2, 2 e todos os números reais maiores que 2.

24) d

25) a

26) e

27) c

28) b

29) c

30) a

POLINÔMIOS

Toda expressão algébrica cuja forma canônica é $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots.. + a_1 x + a_0$ onde $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots\ldots, a_1, a_0\} \subset \mathbb{R}$ e $\{n, n-1, n-2, \ldots\ldots.. 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, denominamos polinômio racional inteiro na variável x.

Se $a_n \neq 0$, diz-se que n é o *grau* de $p(x)$ e representamos por $gr(p) = n$.

Por exemplo,

: $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ é um polinômio do terceiro grau;

: $q(x) = 2x^2 - x - 3$ é um polinômio do segundo grau;

: $r(x) = x - 1$ é um polinômio do primeiro grau;

: $s(x) = 15$ é um polinômio de grau zero.

Se $a_n \neq 0$, então a_n é denominado ***coeficiente dominante*** de $p(x)$; e, quando $a_n = 1$ dizemos que $p(x)$ é o ***polinômio unitário***.

Quando $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$ diz-se que $p(x)$ é o polinômio nulo.

Dado um número real α, diz-se que $p(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio $p(x)$ em α.

Por exemplo, dado $p(x) = x^3 + 2x - 1$ então, $p(2) = 2^3 + 2(2) - 1 = 8 + 4 - 1 = 11$ é o valor numérico de $p(x)$ em 2.

Se $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é raiz de $p(x)$.

Por exemplo, dado $p(x) = x^3 - 3x + 2$ temos que $p(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 0$ logo, 1 é raiz de $p(x)$.

Identidade de polinômios: Dados

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **e**

$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ **,** temos que

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 = b_0 \end{cases}.$$

Por exemplo, pela definição, $p(x) = 2x^2 + 3x - 8$ e $q(x) = ax^2 + bx + c$ são polinômios idênticos se, e somente se, $a = 2$, $b = 3$ e $c = -8$.

Observações:

(i) ***Se*** $p(x)$ ***é o polinômio nulo, então, para todo*** $\alpha \in \mathbb{R}$***,*** $p(\alpha) = 0$***;***

(ii) ***Se*** $p(x)$ ***e*** $q(x)$ ***são polinômios idênticos, então, para todo*** $\alpha \in \mathbb{R}$***,*** $p(\alpha) = q(\alpha)$***.***

Operações com polinômios

1) Adição

Sejam $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, então

definimos que

$$\boxed{(p+q)(x) = \begin{cases} a_n x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0), \text{ se } n > m \\ b_m x^m + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0), \text{ se } n < m \\ (a_n + b_m)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0), \text{ se } n = m \\ 0 \ (\textit{polinômio nulo}), \text{ se } \ n = m \ \text{ e } \ a_i = -b_i \ \text{ onde } \ 0 \le i \le n \end{cases}}$$

onde $(p+q)(x)$ é o ***polinômio soma***.

Porexemplo,se $p(x) = 3x^2 - 5x + 6$ e $q(x) = 7x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ então $(p+q)(x) = 7x^3 + (3-5)x^2 + (-5+2)x + (6-8) = 7x^3 - 2x^2 - 3x - 2$

Observe que, se $p(x)$, $q(x)$ e $(p+q)(x)$ são polinômios não nulos, então temos $gr(p+q) \le \max\{gr(p), gr(q)\}$.

Propriedades da adição: Dados os polinômios p, q e r, temos

(P-1) Propriedade associativa: $p + (q + r) = (p + q) + r$;

(P-2) Propriedade comutativa: $p + q = q + p$;

(P-3) Existência de elemento neutro: $p + e = p$, donde $e \equiv 0$;

(P-4) Existência de inverso aditivo: $p + p' = e$, donde $p' = -p$.

Observe que, por (P-4), temos que $(p-q)(x) = [p + (-q)](x)$.

2) Multiplicação

Sejam $p(x)=a_nx^n+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ e $q(x)=b_mx^m+...+b_2x^2+b_1x+b_0$ sendo $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$ e $n\geq m$, então definimos $\boxed{(pq)(x)=(a_nb_m)x^{n+m}+...+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_0b_0)}$, onde $gr(pq)=n+m$.

Denominamos $p(x)$ e $q(x)$ como ***polinômios fatores*** e $(pq)(x)$ como ***polinômio produto***.

Por exemplo, se $p(x)=x^2-x+1$ e $q(x)=x+1$ então, $(pq)(x)=x^3+1$.

Na multiplicação se, pelo menos um dos polinômios fatores for o polinômio nulo, então o polinômio produto será o polinômio nulo.

Propriedades da multiplicação: Dados os polinômios p, q e r, temos

(P-1) Propriedade associativa: $p(qr)=(pq)r$;

(P-2) Propriedade comutativa: $pq=qp$;

(P-3) Existência de elemento neutro: $1.p=p$;

(P-4) Propriedade distributiva: $p(q+r)=pq+pr$.

Observe que não verificamos a existência do elemento inverso multiplicativo a não ser nos casos dos polinômios constantes e não nulos.

3) Divisão

Dados dois polinômios f (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir f por g consiste na determinação de dois outros polinômios, q (quociente) e r (resto), de tal modo que $f = gq + r$ e $gr(r) < gr(g)$ (ou $r = 0$ caso a divisão seja exata).

Se f é um polinômio não nulo e $gr(f) \geq gr(g)$ então, $gr(f) = gr(g) + gr(q)$.

Casos particulares na divisão de f por g:

1° caso: Se $f = 0$, então $q = 0$ e $r = 0$;

2° caso: Se $gr(f) < gr(g)$, então $q = 0$ e $r = f$.

E se $gr(f) \geq gr(g)$?

A partir de agora, daremos alguns exemplos de métodos para efetuar uma divisão de polinômios.

(i) Método da chave

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio f(x)= $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ por g(x)= $x + 6$.

Resolução

(Passo 1) No dispositivo colocar os polinômios dividendo e divisor ordenados decrescentemente segundo as potências da variável x;

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \quad \begin{array}{|l} x+6 \\ \hline \end{array}$$

(Passo 2) Divida o primeiro termo do polinômio dividendo pelo primeiro termo do polinômio divisor;

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 3x - 6 & x + 6 \\ \cline{2-2}
 & x^2
\end{array}
$$

(Passo 3) Multiplique o resultado encontrado da divisão(x^2) pelos termos do polinômio divisor e subtraia o resultado do dividendo obtendo assim o primeiro resto parcial;

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 3x - 6 & x + 6 \\ \cline{2-2}
-x^3 - 6x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
-8x^2 + 3x - 6 &
\end{array}
$$

(Passo 4) Agora basta repetir os procedimentos adotados nos passos anteriores.

Até quando?

A divisão estará terminada quando você encontrar resto 0 (divisão exata) ou quando você encontrar para resto um polinômio cujo grau seja ***menor*** do que o grau do polinômio divisor.

Continuando a divisão, teremos:

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6$	$x + 6$
$-x^3 - 6x^2$	$x^2 - 8x$
$-8x^2 + 3x - 6$	

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6$	$x + 6$
$-x^3 - 6x^2$	$x^2 - 8x$
$-8x^2 + 3x - 6$	
$+8x^2 + 48x$	
$+51x - 6$	

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6$	$x + 6$
$-x^3 - 6x^2$	$x^2 - 8x + 51$ (quociente)
$-8x^2 + 3x - 6$	
$+8x^2 + 48x$	
$+51x - 6$	
$-51x - 306$	
-312 (resto)	

Logo, o quociente é $q(x) = x^2 - 8x + 51$ e o resto é $r(x) = -312$.

(ii) Dispositivo prático de Briot–Ruffini(Caso em que o divisor é do tipo $x - a$).

Sejam $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ e $g(x) = x - a$, vamos considerar que na divisão de f por g, obteremos quociente $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0$ e resto $r(x) = r$,onde $gr(r) = 0$ ou $r(x) = 0$ (no caso da divisão ser exata), donde $f = gq + r$.

Efetuando $gq + r$, teremos:

$$gq + r = q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (q_1 - aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)x + (r - aq_0)$$

.

Da identidade $f = gq + r$, ou seja,

$$\underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}_{f} = \underbrace{q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (q_0 - aq_1)x + (r - aq_0)}_{g.q+r}$$

, obtemos:

* $a_n = q_{n-1} \Rightarrow \boxed{q_{n-1} = a_n}$

* $a_{n-1} = q_{n-2} - aq_{n-1} \Rightarrow \boxed{q_{n-2} = q_{n-1}.a + a_{n-1}}$

....

* $a_2 = q_1 - aq_2 \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2.a + a_2}$

* $a_1 = q_0 - aq_1 \Rightarrow \boxed{q_0 = q_1.a + a_1}$

* $a_0 = r - aq_0 \Rightarrow \boxed{r = q_0.a + a_0}$

Observe que encontramos os coeficientes do quociente (q_{n-1}, q_{n-2}, ... , q_1, q_0) e o resto (r) da divisão de f por $x-a$.

Para que os cálculos que acabamos de ver fiquem mais rápidos, utilizaremos o ***“dispositivo prático de Briot-Ruffini”***, conforme mostramos abaixo:

$$\begin{array}{ccccc|c}
\mathrm{a}_n & \mathrm{a}_{n-1} & \ldots & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_0 & \underbrace{a}_{\text{üüü=üüüü=üüü}} \\
\hline
\underbrace{a_n}_{q_{n-1}} & \underbrace{q_{n-1}.a+a_{n-1}}_{q_{n-2}} & \ldots & \underbrace{q_1.a+a_1}_{q_0} & \underbrace{q_0.a+a_0}_{r} &
\end{array}$$

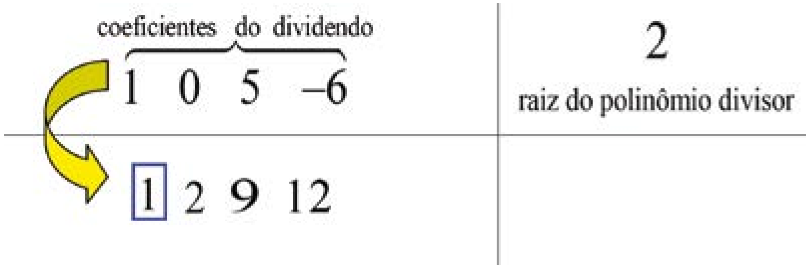
A seguir, um exemplo da utilização do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $x^3 + 5x - 6$ pelo polinômio $x - 2$.

(i) Vamos escrever o polinômio dividendo assim: $1x^3 + 0x^2 + 5x - 6$;

(ii) A raiz do polinômio divisor é 2.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, teremos:



Ao dividirmos o polinômio $x^3 + 5x - 6$ por $x-2$ encontramos como quociente um polinômio na forma $q(x) = ax^2+bx+c$ e, como resto um polinômio na forma $r(x) = d$.

No dispositivo, temos a = 1, b = 2, c = 9 e d = 12.

Daí, ao dividirmos $x^3 + 5x - 6$ por $x-2$, encontramos o quociente x^2+2x+9 e resto igual a 12.

Para mais informações sobre o dispositivo prático de Briot-Ruffini, sugerimos a leitura do excelente artigo da RPM (Revista do professor de matemática) número 34, cujo título é "Uma generalização de Briot-Ruffini", de autoria de Lenimar Nunes de Andrade.

UTILIZANDO O DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI PARA CALCULAR O VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO.

Exemplo: Determine o valor numérico de
$P(x) = x^5 + 3x^4 - 11x^3 + 5x^2 + 4x - 19$ para x = 2.

RESOLUÇÃO

Calcular o valor numérico de P(x) para x = 2, equivale a determinar o resto da divisão de P(x) por x – 2. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, teremos:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\multicolumn{6}{c|}{\overbrace{1 \quad 3 \quad -11 \quad 5 \quad 4 \quad -19}^{\text{coeficientes do dividendo}}} & 2 \\
\hline
 & 1 \quad 5 & -1 & 3 & 10 & \mid\ 1 = P(2) &
\end{array}
$$

Daí, $P(2) = 1$.

Teorema de D'Alembert $^{(*)}$ **: "Um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é divisível por $x - \alpha$ se, e somente se, α é raiz de $f(x)$."**

Prova:

(i) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

(ii) $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0$

(i)-(ii) = $f(x) - f(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1(x - \alpha)$

Observe que todos os termos são divisíveis por $x - \alpha$, logo temos

$f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha) \mathrm{x}\, q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau n – 1.

Daí, $f(x) = (x - \alpha) \mathrm{x}\, q(x) + f(\alpha)$

$(\Rightarrow)$ Se f é divisível por $x - \alpha$, então $f(\alpha) = 0$. Daí, α é raiz de f.

$(\Leftarrow)$ Se α é raiz de f, logo $f(\alpha) = 0$. Então,
$f(x) = (x - \alpha) \mathrm{x}\, q(x)$, ou seja, f é divisível por $x - \alpha$.

(*) JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783): Matemático, físico e enciclopedista francês.

Corolário: "O resto da divisão de $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ **por** $x-\alpha$ **é igual a** $f(\alpha)$**."**

Exemplo: Determine o resto da divisão de $f(x)=2x^{15}+4x-1$ por $g(x)=x-1$.

Resolução: O resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é dado por $f(1)=2.(1)^{15}+4.(1)-1=2+4-1=5$.

Daí, o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é igual a 5.

Teorema: "Um polinômio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ **de grau n, possui no máximo n raízes reais."**

Teorema: "Se um polinômio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ **é divisível separadamente por** $x-a$ **e por** $x-b$**, com** $a\neq b$**, então** f **é divisível pelo produto** $(x-a)(x-b)$**."**

Prova: Sendo q e r, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de f por $(x-a)(x-b)$, temos $f=(x-a)(x-b)q+r(x)$ onde, na pior das hipóteses, $r(x)=cx+d$.

f é divisível por x – a e por x – b , logo f(a) = 0 e f(b) = 0.

Logo, temos ca + d = 0 e cb + d = 0, donde concluímos que c = 0 e d = 0.

Daí, r (x) = 0, ou seja, f é divisível por (x-a)(x-b).

Exemplo: Determinar a e b reais, de modo que o polinômio $f(x)=x^3+2x^2+(2a-b)x+(a+b)$ seja divisível por $g(x)=x^2-x$.

Resolução: Como $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$, para que f seja divisível por g, f deve ser divisível, simultaneamente, por x e $x-1$.

Daí, pelo teorema do resto, temos:

(i) $f(0) = 0$, logo, $a + b = 0$;

(ii) $f(1) = 0$, logo, $3a = -3$.

Por (i) e (ii), concluímos que $a = -1$ e $b = 1$.

MDC DE POLINÔMIOS:

Dados dois polinômios não nulos $f(x)$ e $g(x)$, diz-se que $d(x)$ é um *mdc* de f e g se,

(i) $d|f$;

(ii) $d|g$;

(iii) d possui grau máximo dentre todos os polinômios que satisfazem às condições (i) e (ii).

Se mdc = 1, diz-se que os polinômios são primos entre si.

Teorema: " Se f e g são polinômios não nulos e r o resto da divisão de f por g, então mdc(f,g) = mdc(g,r)."

Prova: Sendo mdc(f,g) = h_1 e r o resto da divisão de f por g, temos:

(1) $f = h_1 q_1$ e $g = h_1 q_2$

(2) $f = gq + r$

Substituindo (2) em (1), obtemos $r = h_1\left(q_1 - q_2 q\right)$.

Logo, h_1 divide r.

Sendo mdc(g,r) = h_2, temos $g = h_2 q_3$ e $r = h_2 q_4 \quad (3)$.

Substituindo (3) em (2), obtemos $f = h_2\left(q_3 q + q_4\right)$.

Logo, h_2 divide f.

Como h_1 divide r e g, então h_1 divide h_2 e, como h_2 divide f e g, então h_2 divide h_1.

Daí, $h_1 = h_2$

ou seja, mdc(f,g) = mdc(g,r)

Teorema:* "** α ***é raiz do mdc(f,g) se, e somente se, α ***é raiz de f e de g."***

Prova:

$(\Rightarrow)$ Seja mdc(f,g) = h_1, temos $f = h_1 q_1$ e $g = h_1 q_2$.

Se α é raiz de h_1, temos $f(\alpha) = h_1(\alpha) \cdot q_1(\alpha) = 0 \cdot q_1(\alpha) = 0$ e $g(\alpha) = h_1(\alpha) \cdot q_2(\alpha) = 0 \cdot q_2(\alpha) = 0$.

Daí, α é raiz de f e g.

$(\Leftarrow)$ Se α é raiz de f e g, temos $f(\alpha) = h_1(\alpha) \cdot q_1(\alpha) = 0$ e $g(\alpha) = h_1(\alpha) \cdot q_2(\alpha) = 0$.

Se $h_1(\alpha) \neq 0$, então teríamos $q_1(\alpha) = 0$ e $q_2(\alpha) = 0$ o que é um ABSURDO, pois teríamos $f = h_1 \cdot (x - \alpha) \cdot q_3$ e $g = h_1 \cdot (x - \alpha) \cdot q_4$, logo $mdc(f, g) \neq h_1$. Daí, $h_1(\alpha) = 0$, ou seja, α é raiz de $h_1 = mdc(f, g)$.

Congruências mód M .

Definição: Dizemos que $A \equiv B(\text{mód.}M)$ se, e somente se, *A* e *B* deixam o mesmo resto quando divididos por *M* ou, equivalentemente, *M | (A – B)*.

Exemplos:

a) $7 \equiv 2\ (mód\ 5)$ pois, 7 e 2 deixam o mesmo resto quando divididos por 5 ou, equivalentemente, $5 \mid (7-2)$;

b) $x^3 \equiv 1\ (\text{mód x}^2 + x + 1)$ pois, x^3 e 1 deixam o mesmo resto quando divididos por $x^2 + x + 1$ ou ,equivalentemente, $x^2 + x + 1$ divide $x^3 - 1$.

Algumas propriedades:

(P1) Se $A \equiv B(mód\ \text{M})$ e $C \equiv D(mód\ \text{M})$, então $A \pm C \equiv B \pm D\ (mód.M)$.

(P2) Se $A \equiv B(mód\ \text{M})$ e $C \equiv D(mód\ \text{M})$, então $A \bullet C \equiv B \bullet D\ (mód.M)$.

(P3) Se $A \equiv B(mód\ \text{M})$, então $A^n \equiv B^n(mód\ \text{M})$, para todo n natural.

Exemplo: Calcule o resto da divisão de $x^5 + x + 1$ por $x^3 - 1$.

Resolução:

(i) Por definição, temos: $x^3 \equiv 1(mód\ x^3 - 1)$ e $x^2 \equiv x^2(mód\ x^3 - 1)$;

(ii) Por (P2), temos: $\left(x^3\right).\left(x^2\right) \equiv (1).\left(x^2\right)(mód\ x^3 - 1)$

ou seja, $\boxed{x^5 \equiv x^2(mód\ x^3 - 1)}$.

(iii) Por (P1), temos: $x^5+\left(x+1\right)\equiv x^2+\left(x+1\right) \quad (mód\ x^3-1)$

donde, obtemos $\boxed{x^5+x+1\equiv x^2+x+1 \quad (mód\ x^3-1)}$.

Daí, o resto da divisão de x^5+x+1 por x^3-1 é x^2+x+1.

Exemplo: Sendo R(x) o resto da divisão de $x^{210}+3x^2-4x+6$ por x^2-x+1, determine R(-2007).

Resolução:

(i) $x^3\equiv -1(mód\ x^2-x+1)$, logo $\boxed{x^{210}\equiv 1(mód\ x^2-x+1)}$;

(ii) $x^2\equiv x-1(mód\ x^2-x+1)$

$3x^2\equiv 3x-3(mód\ x^2-x+1)$

$\boxed{3x^2-4x+6\equiv -x+3(mód\ x^2-x+1)}$;

Logo, por (i) e (ii), temos $x^{210}+3x^2-4x+6\equiv \underbrace{-x+4}_{R(x)}(mód\ x^2-x+1)$

donde, $R(x)=-x+4$.

Daí, $R(-2007)=-(-2007)+4=2011$.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Determine o grau do polinômio $p(x)=\left(x-2\right)\left(2x-3\right)\left(x+5\right)$

2) Sabendo que os polinômios $p(x)=ax^3-5x^2+x+b$ e $q(x)=6x^3+cx^2+x+7$ são idênticos, determine o valor de $a+b+c$

3) Qual o valor numérico do polinômio $p(x)=-2x^5+4x^4+3x^3+2x-8$ para $x=-1$?

4) A soma de dois polinômios $p(x)+q(x)=-x^3+2x^3+x^2+11x-3$ e que $p(x)=x^5-2x^3+10x-5$, determine $q(x)$

5) Sabendo que $p(x)-q(x)=x^2+3x+9$ e que $p(x)=-2x^3-2x^3+2x-1$, determine $q(x)$

6) Dados os polinômios $p(x)=x^2+2x+3$ e $q(x)=x^2-2x+3$, determine o produto $p(x)\cdot q(x)$.

7) Dados os polinômios $p(x)=x^3-x+2$ e $q(x)=x^2+5x-1$, determine o produto $p(x)\cdot q(x)$.

8) Dados os polinômios $p(x)=x^3+5x^2+18x+13$ e $q(x)=x+2$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

9) Dados os polinômios $p(x)=6x^4+x^3-41x^2-x+35$ e $q(x)=6x^2+x-35$, determine o quociente da divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

10) Determine o valor de "k" para que o polinômio $p(x)=x^3-x^2+kx+4$ seja divisível por $(x-1)$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Sejam $p(x)=2x^{2010}-5x^2-13x+7$ e $q(x)=x^2+x+1$. Tomando $r(x)$ como sendo o resto na divisão de $p(x)$ por $q(x)$, o valor de $r(2)$ será:

(a) -8 (b) -6 (c) -4 (d) -3 (e) -2

12) O resto da divisão de x^{2007} por x^2-x+1 é:

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2 (e) – 2

13) Sabendo que a, p e q são constantes diferentes de zero, para que x^3+px+q seja divisível por $(x-a)^2$, devemos verificar a seguinte relação:

(a) $\frac{p^3}{4}-\frac{q^2}{27}=0$

(b) $\frac{p^3}{4}+\frac{q^2}{27}=0$

(c) $\frac{p^2}{27}+\frac{q^3}{4}=0$

(d) $\frac{p^2}{27}-\frac{q^3}{4}=0$

(e) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$

14) Determinar $m+n+p$, de modo que o polinômio $2x^4+mx\left(x^2+1\right)+\left(nx+p\right)\left(x+1\right)$ seja divisível por $(x-1)(x-2)(x-3)$.(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2 (e) -2

15) Um polinômio do 1º grau em x se anula para x = $\sqrt{2}$ e tem valor numérico 2 - $\sqrt{8}$ para x = 1. O valor numérico dessa expressão para x = $\sqrt{8}$ é:

(a) 1 (b) 4 $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) 3 $\sqrt{2}$ (e) 2 $\sqrt{2}$

16) Seja p(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de p(x) por x - 2 obtém-se um quociente q(x) e resto igual a 26. Na divisão de p(x) por x^2 + x - 1 obtém-se um quociente h(x) e resto 8x - 5. Sabe-se que q(0) = 13 e q(1) = 26. Então, h(2) + h(3) é igual a:

(a)16 (b) 0 (c) -47 (d) -28 (e) 1

17) Sejam $a<b<c<d$ as raízes do polinômio $P(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$. Fatore o polinômio e determine $\left(b-d\right)^a.c$

(a) 1/8 (b) 2 (c) -1/2 (d) -1/8 (e) 1/2

18) Sejam os polinômios com coeficientes reais:

$P\left(x\right)=4x^3+bx^2+cx+d$ e $Q\left(x\right)=mx^2+nx-3$. Sabe-se que $P\left(x\right)=\left(2x-6\right).Q(x)+\left(x-10\right)$.

Considere as afirmativas:

(I) Se 10 é raiz de Q(x) , então 10 também é raiz de P(x).

(II) É verdade que P(3) = -7.

(III) O valor de d é -23.

(IV) O valor de m é 2.

O número de afirmativas corretas é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

19) Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5, determine o valor de $a + b + c + d$.

20) Seja P(x) um polinômio divisível por x - 1. Dividindo-o por x^2 + x, obtêm-se o quociente Q(x) = x^2 - 3 e o resto R(x). Se R(4)=10, então o coeficiente do termo de grau 1 de P(x) é igual a

(a)–5 (b) -3 (c) -1 (d) 1 (e) 3

21) A soma dos coeficientes do polinômio $p(x) = (x^2 + 3x - 3)^{50}$ é:

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 25 (e) 50

22) Dividindo-se $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por (x – 1), obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por (x + 1), obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por (x – 2), tem – se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

(a) -6 (b) -4 (c) 7 (d) 4 (e) 9

23) Sendo $P(x) = (3x-2).Q(x)+1$ e $(x^2-1).P(x) = (3x-2).Q_1(x)+k$, podemos afirmar que o resto k vale:

(a) 4/9 (b) – 1/9 (c) – 4/9 (d) – 5/9 (e) – 2/9

24) Os polinômios $\left(x^5-1\right)^3 + 3\left(x^5-1\right)^2 + 3\left(x^5-1\right)+1$ e $(a-b)x^{15} + \left(2a-b\right)x$ são idênticos. Dessa forma, a + b é igual a:

(a) 3 (b) -2 (c) 1 (d) 2 (e) -3

25) Considere o polinômio $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. É incorreto afirmar que:

(a) o grau do quociente da divisão de p(x) por $d(x) = x^2 + x + 1$ é 3.

(b) o resto da divisão de p(x) por d(x) = x + 2 é r(x) = 63.

(c) o quociente da divisão de p(x) por d(x)= x – 1 é $q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

(d) p(x) possui raiz real.

(e) $p(\sqrt{2}) = 7(\sqrt{2}+1)$

26) Qual é o resto da divisão de $p(x)=x^{110}-x$ pelo polinômio $q(x)=x^2+x$?

(a) -2x (b) -2 (c) x (d) –x (e) 0

27) $P=x-3$, $Q=x^2+3x+9$ e $R=(a+b)x^3+(a-b)x^2+cx+d$. Sabendo que o polinômio $P\text{x}Q$ é idêntico a R, conclui-se que $a+b+c+d$ é igual a:

(a) 28 (b) 13 (c) 25/2 (d) 3/2 (e) -26

28) As três raízes de $x^3-12x^2+39x-28=0$ são r,s e 4. O valor de $\sqrt{r^2+s^2}$ é:

(a) $2\sqrt{10}$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{17}$ (e) $5\sqrt{17}$

29) Sabendo que $\text{P}(\text{x})$ é um polinômio de grau maior que 3 tal que $\text{P}(1)=2$, $\text{P}(2)=3$ e $\text{P}(3)=5$, seja $R(x)$ o resto da divisão de $\text{P}(\text{x})$ por $(x-1)(x-2)(x-3)$. O valor de $\text{R}(98)$ é igual a:

(a) 4751 (b) 4753 (c) 4755 (d) 4757 (e) 4757

30) Os pares ordenados (a,b) para os quais o polinômio

$$P(x)=a^2x^4+3x^3+b^2x^2+4abx+4ab$$

deixa resto 10 quando dividido por $x+1$ e resto 20 quando dividido por x são em número de:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2020) Sabe-se que os números distintos p, q e r são raízes do polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ e que $\frac{(x-2p)(x^2 - px - rx + pr)}{3x^2 - 9px + 6p^2} = \frac{x-2}{3}$, para todo x, com $x \neq 2p$, $x \neq p$ e $p + q = r - q$. Nessas condições, é correto afirmar que $3a - 2b + c$ é igual a:

a) 15a b) 13a c) 11a d) 10a e) 9a

32) (CMRJ 2019) Três pontos de duas funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x) = 3x^2 + 6x - 24$ e $g(x) = \frac{1}{10}x^2 + 2x + 9$ serão utilizados para construção de um triângulo. Esse triângulo será construído com seus vértices sobre os gráficos dessas funções, conforme o descrito abaixo:

> I - Um dos seus vértices no ponto de menor imagem da função g; II - dois vértices nos pontos de interseção da função f com o eixo das abscissas.

Dessa forma a área desse triângulo é igual a:

a) 30 b) 15 c) 9 d) 6 e) 3

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) 3º grau
2) 8
3) -7
4) $q(x) = -x^5 + x^3 + 2x^3 + x^2 + x + 2$
5) $q(x) = -2x^3 - 3x^3 - x - 10$
6) $x^4 + 2x^2 + 9$
7) $x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 11x - 2$
8) $x - 9$
9) $x^2 - 1$
10) K=-4
11) e
12) b
13) e
14) b
15) b
16) A

Resolução:

(1) p(x)=(x-2).q(x)+26

(2) p(x)=(x^2+x-1).h(x)+(8x-5)

(3) q(0)=13 ; q(1)=26

* Como gr(p)=4, então em (2) concluímos que gr(h)=2.

* Fazendo x=0, x=1 e x=2 em (1) obtemos, respectivamente, p(0)=0, p(1)=0 e p(2)=26.

* Fazendo x=0, x=1 e x=2 em (2) obtemos, respectivamente, h(0)=-5, h(1)=-3 e h(2)=3.

*Já deduzimos que h(x)=ax²+bx+c, logo, fazendo x=0, x=1 e x=2 em h, encontraremos equações das quais obteremos a=2, b=0 e c=-5.

Daí, temos que h(x)=2x^2-5; logo h(2)+h(3)=16.

17) a

18) d

Respostas: V-V-F-V

19) 21

20) c

21) b

22) e

23) d

Resolução: Substituir P(x) na segunda identidade e fazer x=2/3.

24) e

25) b

26) a

27) e

28) c

29) c

30) e

31) c

32) e 1) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

Produtos Notáveis.

1)Quadrado da soma de dois termos : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2)Quadrado da diferença de dois termos : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3)Cubo da soma de dois termos : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4)Cubo da diferença de dois termos : $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

5)Produto da soma pela diferença : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

6)Produto de Stevin: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (ab)$

7)Quadrado da soma de três termos:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

8) Produto das somas (ou diferenças) de dois quadrados :

$$\left.\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\end{aligned}\right\}\ (\ \textit{Identidade de Brahmagupta - Lagrange}\ )$$

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$$

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac-bd)^2-(ad-bc)^2$$

Exemplo : Se o produto $(5^2+9^2)(12^2+17^2)$ for escrito como uma soma de dois quadrados $a^2+b^2, a>0$ e $b>0$, então, a + b pode ser igual a um número cuja soma dos valores absolutos dos algarismos é igual a :

(a) 10 (b) 11 (c) 14 (d) 15 (e) 12

Resolução

Pela identidade de Brahmagupta-Lagrange, temos

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2$$

ou

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$$

Logo, temos

$$\left(5^2+9^2\right)\left(12^2+17^2\right)=\left(60-153\right)^2+\left(85+108\right)^2=\left(-93\right)^2+193^2=93^2+193^2\rightarrow a+b=286$$

ou

$$\left(5^2+9^2\right)\left(12^2+17^2\right)=\left(60+153\right)^2+\left(85-108\right)^2=213^2+\left(-23\right)^2=213^2+23^2\rightarrow a+b=236$$

Daí, a soma dos algarismos de $a+b$ pode ser igual a 2 + 8 + 6 = 16 ou 2 + 3 + 6 = 11.

Sendo assim, a alternativa correta é a letra b.

Algumas identidades muito importantes!

a) $ax^n+by^n=\left(ax^{n-1}+by^{n-1}\right)\left(x+y\right)-\left(ax^{n-2}+by^{n-2}\right)xy$

b) Identidade de Platão : $\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+\left(2ab\right)^2$.

c) Identidade de Cauchy : $\left(x+y\right)^3-\left(x^3-y^3\right)=3xy\left(x+y\right)$.

d) Identidade de Sophie Germain : $a^4+4b^4=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right)$.

e) $\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2=4ab$

Exemplo : O número $N=2^{30}+5^{20}$ é primo ou composto ?

Resolução

$$N = 5^{20} + 2^{30}$$
$$= \left(5^5\right)^4 + 2^2.\left(2^7\right)^4$$
$$= \left(5^5\right)^4 + 4.\left(2^7\right)^4$$

Pela Identidade de Sophie Germain, temos

$$N = 5^{20} + 2^{30} = \left(5^{10} + 2^{15} + 2^8.5^5\right)\left(5^{10} + 2^{15} - 2^8.5^5\right).$$

Logo, N é composto.

Exemplo: Sendo $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$, $ax^4 + by^4 = 42$ e $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$, determine o valor de $ax^5 + by^5$.

(a) 10 (b) 20 (c) 30 (d) 40 (e) 50

Resolução

Pela identidade $ax^n + by^n = \left(ax^{n-1} + by^{n-1}\right)(x+y) - \left(ax^{n-2} + by^{n-2}\right)xy$,

teremos :

(i) Para n = 2, $ax^3 + by^3 = \left(ax^2 + by^2\right)(x+y) - (ax+by)(xy)$

ou seja, $16 = 7(x+y) - 3(xy)$.

(ii) Para n = 3, $ax^4 + by^4 = \left(ax^3 + by^3\right)(x+y) - \left(ax^2 + by^2\right)(xy)$

ou seja, $42 = 16(x+y) - 7(xy)$.

Fazendo $x + y = s$ e $xy = p$, em (i) e (ii), temos o sistema:

$$\begin{cases} 7s - 3p = 16 \\ 16s - 7p = 42 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontraremos $x + y = -14$ e $xy = -38$.

Daí, para n = 5, teremos $ax^5 + by^5 = \left(ax^4 + by^4\right)(x+y) - \left(ax^3 + by^3\right)(xy)$

= 42(-14)-(16)(-38) = 20.

Logo, a alternativa correta é a letra b.

Exemplo: Dada a identidade de Platão, $\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+\left(2ab\right)^2$, considerando que a e b são inteiros positivos e consecutivos e $a>b$, encontramos vários ternos que são as medidas dos lados de triângulos retângulos.

Esses ternos são denominados ***TERNOS PITAGÓRICOS.***

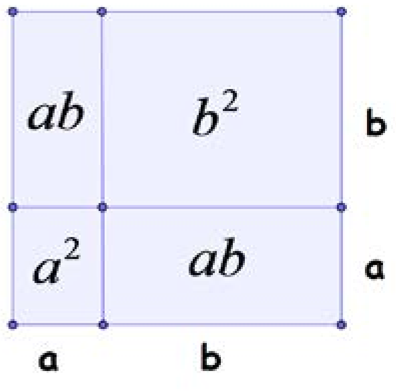
Veja a tabela abaixo

a	b	a^2-b^2	$2ab$	a^2+b^2	
2	1	3	4	5	
3	2	5	12	13	(Ternos Pitagóricos)
4	3	7	24	25	
...	...	...	...	...	

8) Representação geométrica de alguns produtos notáveis

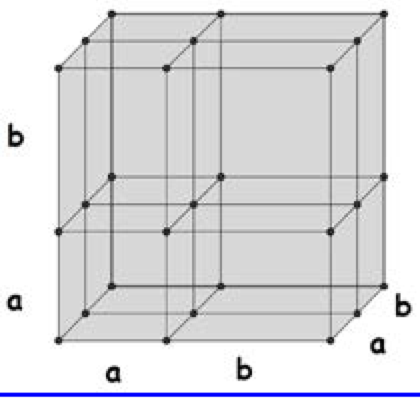
Sejam a e b números reais positivos, temos :

a) Quadrado da soma de dois termos



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

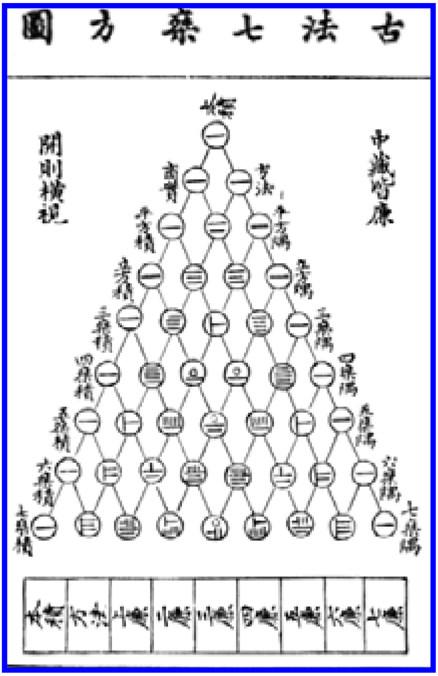
b) Cubo da soma de dois termos



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

9)O triângulo aritmético de Pascal - Tartaglia e o desenvolvimento de $(a+b)^n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

O triângulo que é conhecido como Triângulo de Pascal-Tartaglia foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui (1238 - 1298) e , aproximadamente cinco séculos depois, várias de suas propriedades foram estudadas pelo matemático francês Blaise Pascal(1623 - 1662).



$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & \rightarrow & (a+b)^0 = 1 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \rightarrow & (a+b)^1 = 1a + 1b \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \rightarrow & (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \rightarrow & (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \rightarrow & (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \rightarrow & (a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

Por exemplo, pelo triângulo de Pascal - Tartaglia , o desenvolvimento de $(a+b)^5$ é $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

E se quisermos o desenvolvimento de $(a-b)^5$?

Basta observarmos que $(a-b)^5=\left[a+(-b)\right]^5$. Logo, recaímos no caso visto anteriormente onde, o primeiro termo será a e o segundo termo $-b$.

10)Usando os produtos notáveis para calcular a soma das potências semelhantes de números naturais .

Exemplo : Determine o valor de $\varepsilon=1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2$.

Resolução

Dado o produto notável $(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$, ao variarmos o valor de x de 0 até 50, obteremos :

$$x=0\Rightarrow 1^3=1$$
$$x=1\Rightarrow 2^3=1+3.1+3.1^2+1^3$$
$$x=2\Rightarrow 3^3=1+3.2+3.2^2+2^3$$
$$x=3\Rightarrow 4^3=1+3.3+3.3^2+3^3$$
$$x=4\Rightarrow 5^3=1+3.4+3.4^2+4^3$$

....

$$x=50\Rightarrow 51^3=1+3.50+3.50^2+50^3$$

Ao somarmos as igualdades acima,obteremos :

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+51^3=\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{\text{51 PARCELAS}}+3(1+2+3+\ldots+50)+3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2\right)+\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+50^3\right)$$

Fazendo as simplificações possíveis,teremos

$$51^3 = 51 + 3\underbrace{(1+2+3+\ldots+50)}_{\alpha} + 3\underbrace{\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2\right)}_{\varepsilon} \qquad \text{(i)}$$

Calculando α :

$$\alpha = 1+2+3+\ldots+50$$
$$\alpha = 50+49+48+\ldots+1 \qquad \oplus$$

$$2\alpha = \underbrace{51+51+51+\ldots+51}_{\text{50 PARCELAS}}$$

$$\alpha = \frac{51(50)}{2} = 1275$$

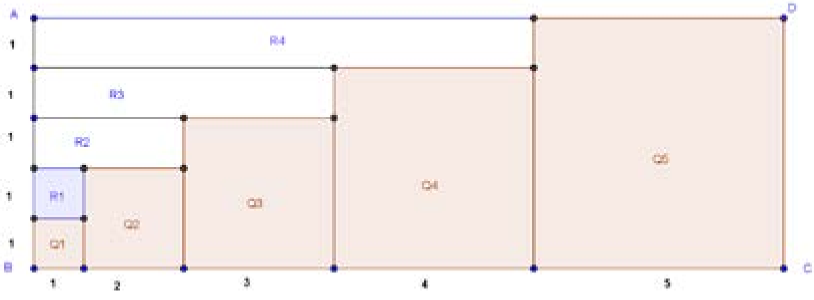
Substituindo α em (i), teremos $51^3 = 51+3(1275)+3\varepsilon$

Daí, $\varepsilon = 42925$.

Uma outra maneira de ver um problema ...

Por exemplo, se tivéssemos que calcular o valor de $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ dando uma interpretação geométrica para o problema.

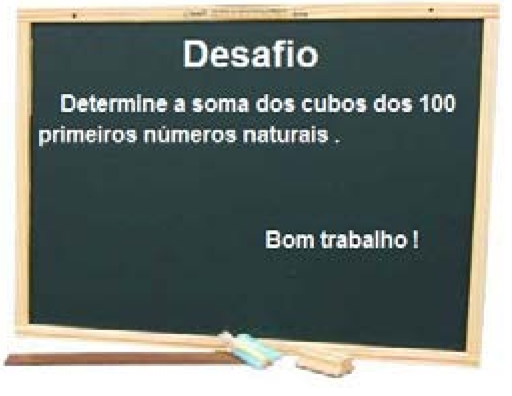
Na figura abaixo,



temos que a soma das áreas dos quadrados Q1, Q2, Q3, Q4 e Q5 é igual a área dos retângulo ABCD menos a soma das áreas dos retângulos R1, R2, R3 e R4.

Daí, temos

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=(1+2+3+4+5)(5)-[1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)]$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$$



EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Desenvolva $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$

2) O resultado mais simplificado da expressão $\left(x+2\right)^2-(x-2)^2$

3) O resultado mais simplificado da expressão $(x+2)^3-(x-2)^3$

4) Se $x^2 + y^2 = 34$ e $(x+y)^2 = 64$, calcule o valor de $6xy$

5) Um retângulo de lados medindo $(x-3)$ e $(x+3)$ tem área 216 m², qual o valor de “x”?

6) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$. Determine o valor de $x^2 + xy + y^2$?

7) Se $x + y = 11$ e $xy = 6$. Determine o valor de $(x-y)^2$?

8) Determine a forma mais simplificada possível da expressão

$$\sqrt{\frac{\left(x-y\right)^2+4xy}{\left(x+y\right)^2-4xy}}$$

9) Se $xy = x + y = 3$, calcule $x^3 + y^3$.

10) Calcule o valor de $\sqrt{\left(2014\right)\left(2015\right)\left(2016\right)\left(2017\right) + 1}$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11)Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2yx = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $\left(x^2 - y^2\right)^6$?

(a) a^3b^6 (b) a^8b^6 (c) a^6b^2 (d) a^6b^3 (e) a^4b^6

12)Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = p$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = q$ e $ab + ac + bc = r$. O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a

(a) $\frac{p^2r^2 + 9}{4}$ (b) $\frac{p^2r^2 - 9p}{12}$ (c) $p^2r^2 - 9$ (d) $\frac{p^2r^2 - 10}{4r}$

(e) $p^2r^2 - 12p$

Dica : Fazer (pr+3)(pr-3)

13) Ache os inteiros positivos a e b, $a < b$, tais que $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

14) Utilizando o valor de $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ podemos concluir que o valor do número $N=\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}$ é igual a :

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

15) Se $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ e $y=\sqrt[3]{\sqrt{189}-8}-\sqrt[3]{\sqrt{189}+8}$, então x^n+y^{n+1} onde $n\in\mathbb{N}$, é igual a:

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) -1 (e) -2

16) O produto

$$P=\left(\sqrt{19}+\sqrt{79}+\sqrt{98}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{79}-\sqrt{98}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{79}+\sqrt{98}\right)\left(-\sqrt{19}+\sqrt{79}+\sqrt{98}\right)$$

é igual a :

(a) 6000 (b) 6002 (c) 6004 (d) 6006 (e) 6008

17) Calculando x^3+3ax para $x=\sqrt[3]{b+\sqrt{b^2+a^3}}+\sqrt[3]{b-\sqrt{b^2+a^3}}$, encontramos:

(a) 0 (b) 1 (c) 2a (d) 2b (e) 3ab

18) Considere as afirmativas :

(1) Se $x^2+y^2=4xy$ e x>y>0, o valor da razão $\dfrac{x+y}{x-y}$ é igual a $\sqrt{3}$.

(2) O valor da fração $\dfrac{a+b}{a-b}$ se $2a^2+2b^2=5ab$ e a>b>0 é igual a 3.

(3) Se *a* e *b* são números reais tais que $0<a<b$ e $a^2 + b^2 = 6ab$, então, o valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ é igual a $\sqrt{2}$.

Assinale se forem verdadeiras:
(a) Somente (1) e (2) (b)Somente (1) e (3) (c) Somente (2) e (3)
(d) Todas (e) Somente (1)

19) Se $\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2+8}}+\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2+8}}=8$, onde n é um número inteiro, então o valor de n é igual a :
(a) 1 (b) -1 (c) 8 (d) 232 (e) 280

20) Se x > 0 e $x+\dfrac{1}{x}=5$, o valor de $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ é igual a :

(a) 3125 (b) 5000 (c) 2525 (d) 1250 (e) 550

21) Se $x=\dfrac{\left(4+\sqrt{7}\right)^5+\left(4-\sqrt{7}\right)^5}{3}$ e $y=\dfrac{\left(4+\sqrt{7}\right)^5-\left(4-\sqrt{7}\right)^5}{\sqrt{5}}$, o algarismo das unidades simples do número $9x^2-5y^2$ é :
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

22) A população de uma cidade num determinado ano era um quadrado perfeito. Mais tarde, com um aumento de 100 habitantes, a população passou a ter uma unidade a mais que um quadrado perfeito. Agora, com um acréscimo adicional de 100 habitantes, a população se tornou novamente um quadrado perfeito. A população original era um múltiplo de:
(a) 3 (b) 7 (c) 9 (d) 11 (e) 17

23) Sabe-se que $a^3-3a+1=93$ e $K=a^4-6a+1$. Logo, K também pode ser expresso por

(a) $3a^2+86a+1$ (b) $3a^2+84a+1$ (c) $6a^2+86a+1$

(d) $6a^2+84a+1$ (e) $9a^2+86a+1$

24) Se $\left(a^2+b^2\right)^3=\left(a^3+b^3\right)^2$ e $ab\neq 0$, o valor numérico de $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ é:

(a) 1 (b) 2 (c) $\dfrac{1}{2}$ *(d) $\dfrac{2}{3}$ (e) $\dfrac{3}{2}$

25) Sendo $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$ e $abc\neq 0$, determine o valor de $a^2+b^2+c^2$.

26) Se a é um número real tal que $\sqrt[3]{a}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=3$. Determine o valor de $a^3+\dfrac{1}{a^3}$.

27) Prove que, se $a+b+c=0$, então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

28) Sejam x e y números reais com $x\neq\pm y$ e $\begin{cases} x^3=13x+3y \\ y^3=13y+3x \end{cases}$.
Determine $\left(x^2-y^2\right)^2$.

29) Se $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ então $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ é igual a:

(a) $a^{\frac{2}{3}}$ (b) $a^{\frac{3}{2}}$ (c) $a^{\frac{3}{4}}$ (d) $a^{\frac{4}{3}}$ (e) a^2

30) Se $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ então $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}$ é igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2019) Os números reais e positivos "x" e "y" são tais que $x^2 + y^2 = 21$ e $(x - y)^2 = 9$. Nessas condições, determine o valor de 16^p, onde "p" é o produto das possíveis soluções da expressão

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

a) 1 b) 1/2 c)3/4 d) 1/16 e)1/8

32) (CN 2020) Sejam a b e c números reais positivos com a+b>c, considere também que $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + a + b - c = 21$ e que simultaneamente $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 9$. Um estudante fatorou os primeiros membros das igualdades e encontrou uma relação sempre verdadeira entre a, b e c. Assinale a opção que apresenta essa relação.

a) a+b=c+1 b) b-a=c-6 c) a-c=4-b

d) c-a=b-2 e) b-c=a+4

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
2) 4x
3) $12x^2 + 16$
4) 90
5) x=15
6) 49
7) 97
8) $\dfrac{x+y}{x-y}$
9) 18
10) (2014)(2017) + 1.
11) c
12) c
13) a = 2 e b = 3
14) a
15) c
16) c
17) d
18) a
19) e
20) c
21) e
22) b
23) a
24) d
25) 6/5
26) 5778
27) Demonstração
28) 133
29) a
30) a
31) b
32) b

FATORAÇÃO

Fatorar uma expressão consiste em escrevê-la na forma de produto. Por exemplo, diz-se que $(x-1)(x^2+x+1)$ é a forma fatorada de x^3-1. Veremos agora alguns casos de fatoração:

(i) Fatoração por evidenciação:

$2x^3-6x^2+10x=(2x)(x^2-3x+5)$, onde $2x$ é o fator comum.

(ii) Fatoração por grupamento:

$$\begin{aligned} x^3-x^2+x-1 &= x^2(x-1)+1(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+1) \end{aligned}$$

(iii) Fatoração de uma diferença de quadrados :

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= a^2+ab-ab-b^2 \\ &= a(a+b)-b(a+b) \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

(iv) Fatoração de uma soma (ou diferença) de cubos:

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2 \\ &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= (a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right] \\ &= (a+b)\left[a^2+2ab+b^2-3ab\right] \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

Analogamente, podemos deduzir que

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

(v) Fatoração de um trinômio quadrado perfeito:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= (a+b)(a+b) \\ &= (a+b)^2 \end{aligned}$$

Analogamente, podemos deduzir que $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

(vi) Fatoração de um trinômio da forma $x^2 + (a+b)x + ab$:

$$\begin{aligned} x^2 + (a+b)x + ab &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x(x+a) + b(x+a) \\ &= (x+a)(x+b) \end{aligned}$$

Exemplo : Determine as raízes da equação $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Resolução : Vamos iniciar a resolução da nossa equação

$x^3 - 2x + 1 = 0$, escrevendo-a da seguinte maneira :

$x^3 - x - x + 1 = 0$.

Colocando o fator x em evidência em relação aos dois primeiros termos e o fator -1 em evidência em relação aos dois últimos termos, teremos

$x(x^2 - 1) - 1(x - 1) = 0$.

Agora, veja que temos um termo que é uma diferença de quadrados,

$x^2 - 1 = x^2 - 1^2$, cuja fatoração é $(x+1)(x-1)$.
Logo, temos $x(x+1)(x-1)-(x-1)=0$, onde $x-1$ é o fator comum.
Colocando o fator comum em evidência, obteremos
$(x-1)\left[x(x+1)-1\right]=0$, ou seja, $(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0$.
Daí, temos $x-1=0$ ou $x^2+x-1=0$.

(i) $x-1=0$ se, e somente se, $x=1$.

(ii) $x^2+x-1=0$ é uma equação do segundo grau e, a idéia que agora vamos usar permitirá que você resolva qualquer equação do segundo grau sem que seja necessário o conhecimento de uma FÓRMULA.

O trinômio x^2+x-1 pode ser escrito assim $x^2+2(x)\left(\frac{1}{2}\right)-1$.
Por que escrever o trinômio assim ?

Observe que os termos $x^2+2(x)\left(\frac{1}{2}\right)$ são os dois primeiros termos do desenvolvimento do quadrado da soma $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

O que faremos agora é utilizar uma técnica que é conhecida como “completando quadrados” .

$$\underbrace{x^2+2(x)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}}_{\text{trinômio quadrado perfeito}}\underbrace{-\frac{1}{4}-1}_{=-\frac{5}{4}}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

Temos então que $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Daí, teremos $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Logo, as raízes da equação $x^3-2x+1=0$ são 1, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Exemplo: Fatorar $a^3+b^3+c^3-3abc$

Resolução: Podemos escrever $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

Daí, temos

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \\ &= \underbrace{(a+b)^3+c^3}_{\text{soma de cubos}}\underbrace{-3ab(a+b)-3abc}_{\text{fatorar por evidenciação}} \\ &= (a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b).c+c^2\right]-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \end{aligned}$$

- Observe que, se $a+b+c=0$ então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Exemplo: Fatore $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

Resolução : Considerando $A = b - c$, $B = c - a$ e $C = a - b$, temos $A + B + C = 0$. Logo, temos $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

Daí, $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$.

Exemplo : Determine o valor de $x + y$ na equação

$(x + y - 1)^2 - 5(x + y - 1) - 6 = 0$.

Resolução : Considerando $x + y - 1 = u$, para determinarmos o valor de $x + y$ basta determinarmos o valor de $u + 1$.

Substituindo $x + y - 1$ por u na equação,teremos a equação

$u^2 - 5u - 6 = 0$.

Temos então,

$$\begin{aligned}
&u^2 - 5u - 6 = 0 \\
&u^2 \underbrace{-6u + u}_{-5u} - 6 = 0 \\
&u(u-6) + 1(u-6) = 0 \\
&(u-6)(u+1) = 0
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

(i) $u - 6 = 0$ se, e somente se, $u = 6$. Logo, $x + y = 7$;

ou

(ii) $u + 1 = 0$ se, e somente se, $u = -1$. Logo, $x + y = 0$.

Daí, os valores de $x + y$ são 0 e 7.

Exemplo: Fatore $1 - 2xy - x^2 - y^2$.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
1-2x-x^2-y^2 &= 1-\left(x^2+2x+y^2\right) \\
&= 1-\left(x+y\right)^2 \\
&= \left(1+x+y\right)\left(1-x-y\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Na fatoração de $a^3+9a^2+27a+19$, temos como um dos fatores

(a) a^2+1

(b) a^2+8a+9

(c) $a^2-8a+19$

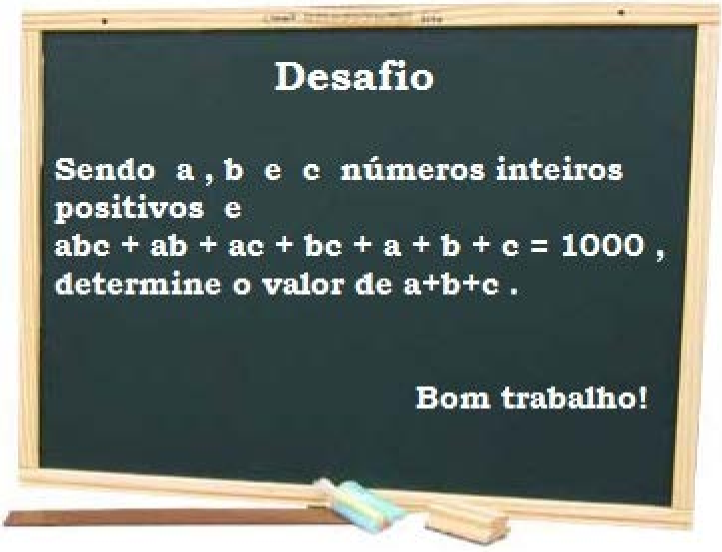
(d) a^2+19

(e) $a^2+8a+19$

Resolução:

$$
\begin{aligned}
a^3+9a^2+27a+19 &= a^3+9a^2+27a+27-27+19 \\
&= \left(a+3\right)^3-8 \\
&= \underbrace{\left(a+3\right)^3-2^3}_{\text{diferença de cubos}} \\
&= \left(a+1\right)\left(a^2+8a+19\right)
\end{aligned}
$$

Logo, a resposta é a letra e.


Desafio
Sendo a , b e c números inteiros positivos e
abc + ab + ac + bc + a + b + c = 1000 ,
determine o valor de a+b+c .
Bom trabalho!

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Simplificando a expressão $\frac{3y+5z}{6y+10z}$ obtemos?

2) Simplificando a expressão $\frac{a^4+a^2}{a^2+1}$ obtemos?

3) Simplificando a expressão $\frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+k^2}$ obtemos?

4) Simplificando a expressão $\frac{cb+b}{(b+1)^2}\cdot\frac{bc+c}{(c+1)^2}$ obtemos?

5) Se ab = 6 e a+b = 7, quanto vale a^2b+b^2a?

6) Determine a soma dos algarismos de “ a ”, onde

$a = 221944^2 - 221943^2$

7) Com quantos zeros termina o número $99^2+198+1$?

8) Simplifique a expressão $\frac{2006^2-2005^2}{4011}$

9) Simplifique a expressão $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}$

10) Simplifique a expressão $\frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Sendo $x=\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$, $x\in\mathbb{R}$, sobre o valor de $2011x^{2011}+2010x^{2010}+2009x^{2009}+...+2x^2+x$ podemos afirmar que :

(a) é um múltiplo de 3.

(b) é um múltiplo de 5.

(c) é um múltiplo de 7 .

(d) é um múltiplo de 11.

(e) todas as afirmativas anteriores são falsas.

12)Se a é um número real maior que 1/8 , o valor de

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$ é igual a:

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8 (e) (2/3)a

13) Sejam x e y números reais distintos e não nulos tais que $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{27}{xy}=9$. Sobre o valor de $y+x$, podemos afirmar que

(a) é um número positivo. (b) é um número par.

(c) possui três divisores positivos. (d) possui quatro divisores inteiros.

(e) possui três divisores negativos.

14) Se a, b e c são três números distintos e satisfazem as equações:

calcule a + b + c.
$$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0 \\ b^3 + pb + q = 0 \\ c^3 + pc + q = 0, \end{cases}$$

15) Se $\sqrt{\dfrac{\left(x^4 + x^2y^2 + y^4\right)^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(xy\right)^2} + x^2y^2} = 9xy$ onde $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

então o valor de $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ é igual a :

(a) 3 (b) 11 (c) 7 (d) 9 (e) 13

16) Fatore $(a-b)c^3 - (a-c)b^3 + (b-c)a^3$.

17) Sejam a, b e c números reais distintos dois a dois e não nulos tais que $a+b+c=0$. O valor de

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$$ é igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 9 (e) 27

18) Fatore $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$.

19) Seja x um número real tal que
$y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}$ seja inteiro, então:
(a) x é inteiro se, e somente se, y for par.

(b) x é inteiro se, e somente se, y for ímpar.

(c) x é sempre inteiro.

(d) x nunca é inteiro.

(e) x é sempre irracional.

20) O número de valores inteiros de m para os quais as raízes da equação $x^2-\left(m+m^2\right)x+m^3-1=0$ são inteiras é igual a:

(a)0 (b)1 (c)2 (d)3 (e)4

21) Se x > 0 e $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$, o valor de $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ é igual a :
(a) 55 (b) 63 (c) 123 (d) 140 (e) 145

22) Se $\left(x^2+10x+30\right)^2=11x^2+110x+300$ então, o número de raízes positivas desta equação é igual a :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

23) A soma dos algarismos de $\sqrt{2004.2002.1998.1996+36}$ é igual a:

(a) 40 (b) 42 (c) 44 (d) 46 (e) 48

24) Sejam $a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \ldots + \frac{1001^2}{2001}$ e $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \ldots + \frac{1001^2}{2003}$. O inteiro mais próximo de $a - b$ é :

(a) 500 (b) 501 (c) 999 (d) 1000 (e) 1001

25) Sendo $\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2003^2}\right) = \frac{x}{2003}$, o valor de x é :

(a) 1338 (b) 1336 (c) 2001 (d) 2002 (e) 2003

26) Os números inteiros a, b e c satisfazem à relação $a + b + c = 0$. Com relação ao número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ podemos afirmar que

(a) é um quadrado perfeito

(b) é um cubo perfeito

(c) é uma quarta potência

(d) é o dobro de um quadrado perfeito

(e) é o dobro de uma quarta potência

27) Sejam a e b números reais distintos tais que $\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2$. O valor de $\frac{a}{b}$ é igual a

(a) 0,4 (b) 0,5 (c) 0,6 (d) 0,7 (e) 0,8

28) Simplificando

$$\frac{bx\left(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2\right)+ay\left(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2\right)}{bx+ay}$$, obtemos

(a) $a^2x^2+b^2y^2$

(b) $\left(ax+by\right)^2$

(c) $\left(bx+ay\right)^2$

(d) $2\left(a^2x^2+b^2y^2\right)$

(e) $\left(ax+by\right)\left(bx+ay\right)$

29) Sendo a e b números reais e $a^4+2a^3b-3a^2b^2-4ab^3-b^4=0$, um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

(a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

30) Sabendo que o valor da soma

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$$

pode ser escrito na forma $a+\frac{b}{c}$. O valor de $a+b+c$ é igual a

(a) 5998 (b) 5999 (c) 6001 (d) 6002 (e) 6003

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2021) Sejam a,b, e c números reais positivos com a + b > c, considere também que $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + a + b - c = 21$ e que simultaneamente $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 9$. Um estudante fatorou os primeiros membros das igualdades e encontrou uma relação sempre verdadeira entre a,b e c. Assinale a opção que apresenta essa relação.

a) a+b+c+1 b) b-a=c-6 c) a-c=4-b

d) c-a=b-2 e) b-c=a+4

32) (EPCAR 2020) Considere as expressões P e Q, com os números a, b e c reais positivos e distintos entre si.

$$P = \frac{\left(a^6 + b^6 + c^6\right)^2 - \left(a^6 - b^6 - c^6\right)^2}{b^6 + c^6}$$

$$Q = \frac{\left(b^{-1} - a^{-1}\right)^{-1} - \left(b^{-1} + a^{-1}\right)^{-1}}{\left(a^{-1} + b^{-1}\right)^{-1} - \left(a^{-1} - b^{-1}\right)^{-1}}$$

A expressão $\sqrt{Q\sqrt{P}}$ é representada por:

a) $b\sqrt{2a}$ b) $a\sqrt{2b}$

c) $a\sqrt{\frac{b}{2}}$ d) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{2}}$

33) (EPCAR 2019) Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A, abaixo, está definida.

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^2}{(m^2 - n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é

a) $m^2 + n^2$ b) $m^2 - n^2$ c) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$ d) $\frac{m^2 + n^2}{m - n}$

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1 - $\frac{1}{2}$

2 - a^2

3 - $\frac{k^2+1}{k^2}$

4 - $\frac{bc}{(b+1)\cdot(c+1)}$

5 - 42

6 - 34

7 - Quatro

8 - 1

9 - $\frac{x+3}{x+5}$

10 - $\frac{1}{x+1}$

11 - e

12 - a

13 - d

14 - $a+b+c=0$

15 – d

16 - $(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$

17 – d

18 - $3(a+2b-3c)(2a-3b+c)(-3a+b+2c)$

19 – c

20 – c

21 – c

22 – a

23 – e

24 – b

25 – b

26 – a

27 – e

28 – b

29 – d

30 - c

31 – b

32 – b

33 - a

Frações algébricas.

1) Fração algébrica: Toda fração na forma $\frac{A(x)}{B(x)}$, onde $B(x)$ é um polinômio não identicamente nulo denominamos fração algébrica. Por exemplo, $\frac{2x+4}{x-1}$.

2) Operações com frações algébricas

(a) Adição e subtração

(CASO 1) Denominadores iguais: $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$.

Exemplo: $\frac{3x+7}{x-1} + \frac{2x+4}{x-1} = \frac{(3x+7)+(2x+4)}{x-1} = \frac{5x+1}{x-1}$

(CASO 2) Denominadores diferentes: $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{\left(\mathrm{A} \times \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}}\right) \pm \left(C \times \frac{E}{D}\right)}{\mathrm{E}}$, onde $E = mmc(B, D)$.

Exemplo:

$$\frac{2x+1}{x-2} - \frac{3}{x^2-4} = \frac{(2x+1)\times\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) - 3\times\left(\frac{x^2-4}{x^2-4}\right)}{x^2-4}$$

$$= \frac{(2x+1)\times\left(\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\right) - 3\times\left(\frac{x^2-4}{x^2-4}\right)}{\mathrm{x}^2-4}$$

$$= \frac{(2x+1)\times(x+2)-3}{x^2-4} = \frac{2x^2+4x+x+2-3}{x^2-4}$$

$$= \frac{2x^2+5x-1}{x^2-4}$$

(b) Multiplicação: $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\times C}{B\times D}$

Exemplo: $\dfrac{x-5}{x+1}\times\dfrac{x+6}{2x-3}=\dfrac{x^2+x-30}{2x^2-x-3}$

(c) Divisão: $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{A\times D}{B\times C}$

Exemplo: $\dfrac{3}{x+1}\div\dfrac{x-4}{2x+1}=\dfrac{3}{x+1}\times\dfrac{2x+1}{x-4}=\dfrac{6x+3}{x^2-3x-4}$

(d) Potenciação: $\left(\dfrac{A}{B}\right)^m=\dfrac{A^m}{B^m}$

Exemplo: $\left(\dfrac{x+7}{x-1}\right)^2=\dfrac{(x+7)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2+14x+49}{x^2-2x+1}$

(e) Radiciação: $\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$

Exemplo: $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+6x^2+12x+8}}=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{(x+2)^3}}=\dfrac{x-1}{x+2}$

3) Racionalizando o denominador de uma fração.

É muito útil saber racionalizar o denominador de uma fração, ou seja, determinar uma fração equivalente a fração em questão de modo que não apareça radical no denominador.

Para racionalizar o denominador de uma fração, multiplicar-se-á o numerador e o denominador pelo fator racionalizante do denominador.

Como determinar o fator racionalizante?

Não há uma regra geral para determinarmos o fator racionalizante pois, a sua determinação dependerá da natureza da expressão.

Veremos,a partir de agora, alguns casos notáveis:

(Caso 1) Expressões do tipo $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$.
Neste caso o fator racionalizante é do tipo $\sqrt[n]{B^{n-m}}$, pois
$\sqrt[n]{B^m} \times \sqrt[n]{B^{n-m}} = \sqrt[n]{B^n} = B$.

Exemplo: Racionalizar o denominador da fração $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$.
Resolução: O fator racionalizante é $\sqrt[3]{2^2}$; logo, multiplicando os termos da fração por $\sqrt[3]{2^2}$ teremos:

$$\frac{8}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{2} = 4\sqrt[3]{4}.$$

(Caso 2) Expressões do tipo $\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}}$.
Neste caso, o fator racionalizante será $\sqrt{B} \mp \sqrt{C}$, pois,
$\left(\sqrt{B} \pm \sqrt{C}\right)\left(\sqrt{B} \mp \sqrt{C}\right) = B - C$.

Exemplo: Racionalizar o denominador da fração $\dfrac{2c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$.

Resolução: Multiplicando os termos da fração por $\sqrt{b^2-4ac}+b$, teremos:

$$\frac{2c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}\times\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{\sqrt{b^2-4ac}+b}=\frac{2c\left(\sqrt{b^2-4ac}+b\right)}{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2-b^2}=\frac{2c\left(\sqrt{b^2-4ac}+b\right)}{b^2-4ac-b^2}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(Caso 3) Expressões do tipo $\dfrac{A}{\sqrt[n]{B}\pm\sqrt[n]{C}}$.

Neste caso, para determinarmos o fator racionalizante, basta lembrarmos de que

$$(x-y)(x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ldots+y^{n-2}x+y^{n-1})=\mathrm{x}^{\mathrm{n}}-y^{\mathrm{n}}$$

e

$$(x+y)(x^{n-1}-yx^{n-2}+y^2x^{n-3}-\ldots-y^{n-2}x+y^{n-1})=\mathrm{x}^{\mathrm{n}}+y^{\mathrm{n}}.$$

Exemplo: Racionalizar o denominador da fração $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$.

Resolução: Considerando $\sqrt[3]{x}=a$ e $\sqrt[3]{y}=b$, temos:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}.$$

Lembre que $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a+b\right)=a^3+b^3$; daí, multiplicando numerador e denominador por $a+b$, ou seja, por $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ teremos:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}\times\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}{x+y}.$$

Veremos agora algumas questões sobre frações algébricas.

Questão: Se $2x-3y-z=0$ e $x+3y-14z=0$, com $z\neq 0$, o valor da expressão $\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$ é:

(a)7 (b)2 (c)0 (d) $-\frac{20}{7}$ (e) −2

Resolução: Se $2x-3y-z=0$ e $x+3y-14z=0$, então $(2x-3y-z)+(x+3y-14z)=0$. Daí, temos $3x-15z=0$ ou seja, $x=5z$.

Fazendo $x=5z$ na igualdade $x+3y-14z=0$, obtemos $y=3z$.

Daí, fazendo $x=5z$ e $y=3z$ na fração $\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$,e sendo $z\neq 0$, teremos:

$$\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}=\frac{(5z)^2+3(5z)(3z)}{(3z)^2+z^2}=\frac{25z^2+45z^2}{9z^2+z^2}=\frac{70z^2}{10z^2}=7.$$

Logo, a alternativa correta é a letra a.

Questão: A expressão $\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}$, $xyz\neq 0$,é equivalente a:

(a) $4x^3$ (b) $4x^3y$ (c) $4x^3z$ (d) $4x^3yz$ (e) $4xyz$

Resolução: Considerando que $x^3=a$ e $y^3+z^3=b$, teremos:

$$\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{b}=\frac{4ab}{b}=4a=4x^3$$
.

Logo, a alternativa correta é a letra a.

Questão: Simplificando $\dfrac{a^{15}-b^{15}}{a^{20}-b^{20}}$, encontramos:

(a) $a^{-5}+b^{-5}$

(b) $a^{-5}-b^{-5}$

(c) $\dfrac{a^{10}+a^5b^5+b^{10}}{a^{15}+a^{10}b^5+a^5b^{10}+b^{15}}$

(d) $\dfrac{a^{10}-a^5b^5+b^{10}}{a^{15}-a^{10}b^5+a^5b^{10}-b^{15}}$

(e) $\dfrac{-a^{10}-a^5b^5-b^{10}}{a^{15}+a^{10}b^5+a^5b^{10}+b^{15}}$

Resolução: Considerando $a^5=u$ e $b^5=v$, teremos:

$$\frac{a^{15}-b^{15}}{a^{20}-b^{20}}=\frac{\left(a^5\right)^3-\left(b^5\right)^3}{\left(a^5\right)^4-\left(b^5\right)^4}=\frac{u^3-v^3}{u^4-v^4}=\frac{(u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)}{(u-v)(u+v)\left(u^2+v^2\right)}=\frac{u^2+uv+v^2}{(u+v)\left(u^2+v^2\right)}$$

$$=\frac{u^2+uv+v^2}{u^3+uv^2+u^2v+v^3}=\frac{a^{10}+a^5b^5+b^{10}}{a^{15}+a^5b^{10}+a^{10}b^5+b^{15}}$$

Daí, a alternativa correta é a letra c.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Simplifique a expressão algébrica $\dfrac{32x^3y^2z^2}{20xy^2z}$

2) Simplifique a expressão algébrica $\dfrac{60a^5b^6c^2}{72a^3b^2c}$

3) Simplifique a expressão algébrica $\dfrac{5a+35b+7bk+ak}{5+k}$

4) O resultado mais simplificado possível da expressão

$$\frac{2x+2y}{x-y}-\frac{x+7y}{2x-2y}$$

5) O resultado mais simplificado possível da expressão

$$\frac{4a-1}{b-2a}-\frac{2a}{4b-8a}$$

6) O resultado mais simplificado possível da expressão

$$\frac{3}{x+1}+\frac{5x}{x^2-1}-\frac{4}{x-1}$$

7) O resultado mais simplificado possível da expressão

$$\left(\frac{x}{y^2-x^2}:\frac{1}{3y-3x}\right)\cdot(3x+3y)$$

8) O resultado mais simplificado possível da expressão

$$\frac{\left(x^2-y^2-z^2-2yz\right)\cdot\left(x+y-z\right)}{\left(x+y+z\right)\cdot\left(x^2+z^2-2xz-y^2\right)}$$

9) O resultado mais simplificado possível da expressão

$$\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$$

10) Se $a+b+c=6,\ \ abc=2\ \ e\ ab+ac+bc=11$. Determine o valor de $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Se x e y são números reais tais que $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$. O valor de $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ é igual a:

(a) $\frac{k^4+24k^2+16}{4k^3+16k}$ (b) $\frac{k^4-24k^2-16}{4k^3-16k}$ (c) $\frac{k^4+24k^2-16}{4k^3-16k}$

(d) $\frac{k^4+24k^2-16}{4k^3+16k}$ (e) $\frac{k^4-24k^2+16}{4k^3+16k}$

Dica: Calcular x^8 e substituir na expressão.

12)Se $ab+bc+ac=0$, determine o valor de

$$\frac{(a+b+c)^4-a^4-b^4-c^4}{abc(a+b+c)}$$

(a) -4 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

13) Sejam a, b e c números reais distintos dois a dois e não nulos tais que $a+b+c=0$. O valor de

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$ é igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 9 (e) 27

14) Se a, b e c são números reais tais que $a \neq b \neq c \neq a$, a expressão

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$ é igual a :

(a) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ (b) $\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$ (c) $\frac{3}{a-b}+\frac{3}{b-c}+\frac{3}{c-a}$

(d) $\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}$ (e) $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{3}{c-a}$

Dica: a-b = α ; b-c = β ; c-a = θ

15) Sendo ab = cd, racionalizando o denominador da fração $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, encontramos:

(a) $\sqrt{abcd}$ (b)a+b+c-d (c) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}{a+b-c-d}$

(d) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}}{a+b-c+d}$ (e) 1

16) Considere as afirmativas:

(1) Se $x^2+y^2=4xy$ e x>y>0, o valor da razão $\dfrac{x+y}{x-y}$ é igual a $\sqrt{3}$.

(2) O valor da fração $\dfrac{a+b}{a-b}$ se $2a^2+2b^2=5ab$ e a>b>0 é igual a 3.

(3) Se a e b são números reais tais que 0<a<b e $a^2+b^2=6b$, então, o valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ é igual a $\sqrt{2}$.

Assinale se forem verdadeiras:

(a) Somente (1) e (2) (b)Somente (1) e (3)

(c) Somente (2) e (3) (d) Todas (e) Somente (1)

17) Sabendo que $\dfrac{13-22x-3x^2}{x^4-x^3-7x^2+x+6} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{D}{x-3}$, e que

A,B,C e D são constantes e diferentes de zero, podemos afirmar que

A+B+C+D é igual a :

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2 (e) – ½

18)Desenvolvendo

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

encontramos :

(a) abc (b) $\frac{1}{abc}$ (c) $a^2b^2c^2$ (d) $\frac{1}{a^2b^2c^2}$ (e) ab-bc+AC

19) Sabendo que o valor numérico da expressão $\frac{2x^2+(a+6)x+10}{5x^2+10x+b+7}$ é independente do valor de x, podemos afirmar que o valor de a+b é :

(a) múltiplo de 7 (b) múltiplo de 32

(c) múltiplo de 18 (d) divisor de 144 (e) divisor de 8

20)Se x = 1+ $\sqrt[4]{2}$ e y = 1 - $\sqrt[4]{2}$, o valor da fração $\frac{3xy(x+y)+x^3+y^3}{x^2+y^2+2xy}$ é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

21) Considere as afirmativas :

(1) Sabendo que xy = a , xz = b e yz = c, e se nenhuma dessas quantidades é igual a zero, então, $x^2+y^2+z^2$ é igual a $\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$.

(2) Simplificando a expressão $\dfrac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2b\ \ )(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 + c^2 - 2a\ \ - b^2)}$ para os valores de a,b,c que não anulam o denominador, obtemos 1.

(3) Simplificando $\dfrac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)} - \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ para $b \neq \pm a$, obtemos $\dfrac{a - b}{a + b}$.

Assinale se forem falsas:

(a) Somente (1) e (2)

(b) Somente (1) e (3)

(c) Somente (2) e (3)

(d) Todas

(e) Nenhuma

22) Se $\dfrac{y}{x - z} = \dfrac{x + y}{z} = \dfrac{x}{y}$ para $x \neq y \neq z \in \mathbb{Z}_+^*$, então, $\dfrac{x}{y}$ é igual a :

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{3}{5}$ (c) $\dfrac{2}{3}$ (d) $\dfrac{5}{3}$ (e) 2

23) O conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $x + \sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ é um número racional , é o conjunto de todos os:

(a) inteiros x

(b) racionais x

(c) reais x

(d) x tais que $\sqrt{x^2 + 1}$ é racional

(e) x tais que $x + \sqrt{x^2 + 1}$ é racional

24)Simplificando $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right)^{-1}}+\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1\right)^{-1}}}{\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right)^{-1}}-\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1\right)^{-1}}}$ onde 0<b<a, obtemos:

(a) $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ (b) $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ (c) $\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$ (d) $\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$ (e) ab

25) A expressão

$$\frac{\left(\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2\right)^2-(16a+4b)}{4a-b}+\frac{10\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$ é

equivalente a :

(a) a-b (b) a+b (c) $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ (d) $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ (e) 1

26) O denominador racional da fração $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}$ é igual a :

(a) $3a^2b^2(a+b)$ (b) 3ab(a+b)^2

(c) $3a^2b^2(a^2+b^2)$ (d) 3ab(a+b) (e) ab(a+b)

27) Sendo c a hipotenusa e a e b os catetos de um triângulo retângulo, determine o valor de $\dfrac{(b-a)(b+a).c^2}{\left(c^2-b^2\right)^2-\left(c^2-a^2\right)^2}$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) -1 (e) -2

28) Se $a+b+c>0$, $ab+ac+bc\neq 12$, $a^2+3ab=12$, $b^2-ab+bc=15$ e $c^2+bc+2ac=9$, calcule o valor de

$$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)}.$$

(a) -2 (b) 3 (c) 1/3 (d) 5 (e) -5

29) Se a e b são números reais tais que $ab^3=\sqrt{2}+1$ e $a^3b=\sqrt{2}-1$, determine o valor de

$$a^4\left(\frac{b^4+1}{a^4+1}\right)+b^4\left(\frac{a^4+1}{b^4+1}\right)$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

30) Sendo a, b e c números reais não nulos e $a+b+c=0$, então o valor de $\dfrac{(c^3-2abc)(b^3-2abc)(a^3-2abc)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$.

(a) 1 (b) 2 (c) abc (d) ab (e) AC

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2019) A quantidade de soluções inteiras da inequação

$\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{2}{x+2}\geq 1$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

32) Sejam $A=\dfrac{\left(2.10^{-3}\right).2^{-\frac{1}{2}}}{10^{-\frac{1}{4}}}$ e $B=-\left(\sqrt[4]{\dfrac{\left(4.10^{-3}\right)^2.0,000005}{2}}\right)$.

Comparando essas expressões numéricas, conclui-se que

a) $A = B$

b) $A/B = -1$

c) $A + 2B = 0$

d) $A \cdot B = -1$

e) $A + B > 0$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) $\dfrac{8x^2z}{5}$

2) $\dfrac{5a^2b^4c}{6}$

3) $a+7b$

4) $\dfrac{3}{2}$

5) $\dfrac{7a-2}{2b-4a}$

6) $\dfrac{4x-7}{x^2-1}$

7) 9x

8) 1

9) a^2-b^2-2ab

10) 7

11) a

12) a

Resolução:

(i)

$$a+b+c=\varepsilon$$

$$(a+b+c)^2=\varepsilon^2$$

$$a^2+b^2+c^2=\varepsilon^2-2\left(\underbrace{ab+ac+bc}_{=0}\right)=\varepsilon^2$$

$$a^2+b^2+c^2=\varepsilon^2$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\varepsilon^4$$

$$a^4+b^4+c^4=\varepsilon^4-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)$$

(ii)

$$ab+ac+bc=0$$

$$(ab+ac+bc)^2=0$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)=0$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc\left(\underbrace{a+b+c}_{\varepsilon}\right)=0$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=-2abc\left(\underbrace{a+b+c}_{\varepsilon}\right)=-2abc\varepsilon$$

Por (i) e (ii), temos:

$$\frac{(a+b+c)^4 - a^4 - b^4 - c^4}{abc(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)^4 - (a^4+b^4+c^4)}{abc(a+b+c)}$$

$$= \frac{\varepsilon^4 - \varepsilon^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{abc\varepsilon}$$

$$= \frac{2(-2abc\varepsilon)}{abc\varepsilon} = \frac{-4abc\varepsilon}{abc\varepsilon} = -4$$

13) d

14) b

15) c

16) a

17) a

18) b

19) d

20) c

21) e

22) e

23) b

24) d

25) e

26) d

27) d

28) a

Resolução:

(1)

$$(E1)\,a^2+3ab=12$$

$$(E2)\,b^2-ab+bc=15$$

$$(E3)\,c^2+bc+2ac=9$$

$$(E1)+(E2)+(E3):a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=36$$

ou seja, $(a+b+c)^2=36$.

Como $a+b+c>0$, então $a+b+c=6$.

(2)

$$\frac{(a-b)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)}=\frac{a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c+12}{ab+ac+bc-4a-4b-4c+12}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-4(6)+12}{ab+ac+bc-4(6)+12}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-12}{ab+ac+bc-12}$$

(3) Por (E1)+(E2)+(E3), temos:

$$\frac{(a-b)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)}=\frac{\overbrace{a^2+b^2+c^2}^{Ver\ \text{E1+E2+E3}}-12}{ab+ac+bc-12}=$$

$$=\frac{36-2ab-2ac-2bc-12}{ab+ac+bc-12}$$

$$=\frac{-2ab-2ac-2bc+24}{ab+ac+bc-12}$$

$$=\frac{-2(ab+ac+bc-12)}{ab+ac+bc-12}$$

Como $ab+ac+bc\neq 12$, então temos que

$$\frac{(a-b)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)}=-2.$$

29) b

30) c

Resolução:

(1)

$$\frac{(c^3-2abc)(b^3-2abc)(a^3-2abc)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=\frac{abc(c^2-2ab)(b^2-2ac)(a^2-2bc)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$$

(2) $a+b+c=0\Rightarrow\begin{cases}c^2-2ab=a^2+b^2\\ b^2-2ac=a^2+c^2\\ a^2-2bc=b^2+c^2\end{cases}$

Substituindo (2) em (1), teremos:

$$\frac{(c^3-2abc)(b^3-2abc)(a^3-2abc)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=\frac{abc(a^2+b^2)(a^2+c^2)(a^2+c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(a^2+c^2)}=abc$$

31) b

32) b

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Algumas propriedades de uma igualdade.

(P_1) $a = a$ (propriedade reflexiva);

(P_2) Se $a = b$, então $b = a$ (propriedade simétrica);

(P_3) Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ (propriedade transitiva);

(P_4) Se $a = b$, então $a + k = b + k$ (princípio aditivo);

(P_5) Se $a = b$ e $k \neq 0$, então $a.k = b.k$ (princípio multiplicativo).

Equação do primeiro grau

1) Definição e resolução.

Equação é uma igualdade que é verificada somente para alguns valores das variáveis. Por exemplo, diz-se que $2x - 6 = 0$ é uma equação do primeiro grau e, que 3 é a sua raiz pois, $2(3) - 6 = 0$.

Então, temos que:

“ toda equação da forma $ax+b=0$, onde a e b são constantes e $a \neq 0$, é denominada equação do primeiro grau na incógnita x; e, dado um número x_0, se $ax_0+b=0$ então, diz-se que x_0 é raiz da equação.”

E como resolver uma equação do primeiro grau?

Em suma, para resolvermos uma equação do primeiro grau, utilizamos as propriedades de uma igualdade.

Por exemplo: “Determine a raiz da equação $3x-10=11$.”

Somando 10 em ambos os membros, teremos $3x-10+10=11+10$

ou seja, $3x=21$.

Dividindo ambos os membros por 3, obtemos $\dfrac{3x}{3}=\dfrac{21}{3}$

ou seja, $x=7$.

Logo, 7 é a raiz da equação $3x-10=11$.

2) Discussão sobre uma igualdade da forma $Ax=B$.

Ao analisarmos uma igualdade do tipo $Ax=B$, temos as seguintes possibilidades:

(i) Se $A \neq 0$, então temos $x=\dfrac{B}{A}$; logo, diz-se que x é possível e determinado;

(ii) Se $A=0$ e $B \neq 0$, então não existirá x tal que $0x=B\neq 0$;

logo, diz-se que x é impossível;

(iii) Se $A = 0$ e $B = 0$, então teremos a igualdade $0x = 0$ que é uma identidade pois, para todo x, a asserção $0x = 0$ será sempre verdadeira. Diz-se então que x é possível e indeterminado.

Vejamos agora um exemplo da aplicação do estudo que acabamos de fazer.

Exemplo: Qual o valor de m para o qual a equação em x, $\left(m^2 + 2m\right)x + 2 = 4mx + m^2 - 6$, é impossível?

Resolução: Escrevendo a equação $\left(m^2 + 2m\right)x + 2 = 4mx + m^2 - 6$ na forma $Ax = B$,teremos $\left(m^2 - 2m\right)x = m^2 - 8$.

Para que a equação seja impossível, devemos ter $A = 0$ e $B \neq 0$ .Daí, $A = 0$ se, e somente se, $m = 0$ ou $m = 2$; e, se $m = 0$ ou $m = 2$,temos $B \neq 0$.

Daí, os valores de m são 0 e 2.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Resolva $\frac{x}{8}+3=x+\frac{5}{4}$, em $\mathbb{N}$.

2) Em uma corrida de táxi, o valor da bandeirada é 4,00, ou seja, valor fixo a ser pago, além disso são pagos 2,50 por quilometro de viagem. João pegou um táxi e pagou R$ 31,50. Escreva uma equação que descreva essa situação, sendo "x" os quilômetros percorridos.

3) Mariana é vendedora e recebe um salário fixo de R$ 1200,00 e uma comissão de R% 10,00 por cada venda feita. Se este mês mariana conseguiu fazer "x" vendas, escreva uma equação que descreva o salário (S) que mariana deverá receber.

4) A soma de um certo número com o seu dobro é 36, que número é este?

5) A soma de um certo número com o dobro de seu sucessor é 104, que número é este?

6) A razão entre as idades de João e sua filha é 7/2, se a soma das idades deles é 36 anos, qual a diferença entre suas idades?

7) Lucas propôs o seguinte desafio “Se eu tivesse o dobro da minha idade, mais metade da minha idade, mais um quarto da minha idade, mais um ano, eu teria 100 anos. Que idade tenho?” Determine a idade de Lucas.

8) A soma de quatro número consecutivos é 50, que números são estes?

9) Em uma turma 2/3 dos alunos são meninas, se a diferença entre meninas e meninos é 9, então o total de alunos nesta turma é:

10) Sabendo que $\frac{7}{3}$ é solução da equação $(k^2-4)x-\left(k^2+4k+4\right)=0$, na incógnita “x”, determine o valor de “k”.

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Pai e filho com 100 fichas cada um, começaram um jogo. O pai passava 6 fichas ao filho a cada partida que perdia e recebia dele 4 fichas, quando ganhava. Depois de 20 partidas, o número de fichas do filho era três vezes o número de fichas do pai. Quantas partidas o filho ganhou, após essas 20 partidas?
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e)nenhuma das respostas anteriores

12)Um cão persegue uma lebre que leva de dianteira 70 saltos dos seus. Enquanto a lebre dá 4 saltos, o cão dá apenas 3, mas 2 saltos do cão valem por 5 da lebre. Quantos saltos dá o cão até alcançar a lebre?
(a) 40 (b) 50 (c) 60 (d) 70 (e) 80

13)Trabalhando sozinho, João leva 12 horas a menos do que Pedro leva para fazer o mesmo trabalho. João cobra R$ 120,00 por hora e Pedro cobra R$ 96,00 por hora de trabalho. Sabendo que para o cliente o custo é o mesmo se João fizer um quarto do trabalho e Pedro fizer os outros três quartos ou se João fizer dois terços do trabalho e Pedro fizer o terço remanescente, quantas horas João levaria para fazer o trabalho sozinho?

(a) 42 (b) 46 (c) 48 (d) 50 (e) 52

14) Adicionando-se um litro de água a uma mistura de ácido e água, obtemos uma nova mistura com 20% de ácido. Quando um litro de ácido é adicionado à mistura, o resultado é uma mistura com $3\frac{1}{3}\%$ de ácido. O percentual de ácido na mistura original era:

(a) 21% (b) 22% (c) 23% (d) 24% (e) 25%

15) Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B. Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento A-B-A-B, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 Km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando-se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em Km, é igual a :

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 18

16) Há muito tempo, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú

com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e , querendo evitar um constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma idéia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.

Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17 então o número de moedas que havia originalmente no baú era :

(a) 99 (b) 95 (c) 135 (d) 87 (e) NRA

Dica: Considere que inicialmente havia 8x+7 moedas.

17) Um caminho, AB, com partes planas, subidas e descidas, é percorrido por um ciclista que desenvolve 12 km/h no plano, 8 km/h nas subidas

e 15 km/h nas descidas. De A para B o ciclista leva 5 horas e de B para A, 4h39min.

Sabendo que as partes planas somam 28 km, pede-se a soma dos comprimentos totais das partes em subida (sentido de A para B) bem como o das descidas.

(a) 24 km (b) 25 km (c) 26 km (d) 27 km (e) 28 km

18) Diofanto foi uma criança feliz durante 1/6 de sua vida. Após mais 1/12 começou a cultivar uma barba. Permaneceu somente mais 1/7 antes de se casar e somente no quinto ano após o seu casamento nasceu-lhe um filho que morreu quatro anos antes que o pai e que viveu apenas a metade do que viveu o pai. A idade que Diofanto alcançou foi :

(a) 44 anos (b) 54 anos (c) 64 anos (d) 74 anos (e) 84 anos

19)Renata e Fernanda seguiam o leito de uma ferrovia e começaram a atravessar uma ponte estreita na qual havia espaço apenas para o trem. No momento em que completavam 2/5 do percurso da ponte, ouviram o trem que se aproximava por trás delas, Renata começou correr de encontro ao trem, saindo da ponte praticamente no instante em que o trem entrava. Fernanda correu no sentido oposto a Renata, conseguindo sair da ponte praticamente no instante em que o trem saía. Quando as irmãs se encontraram Renata observou que como ambas tinham corrido à velocidade de 15 km/h ela podia afirmar que a velocidade do trem era:

(a) 15 km/h (b) 30 km/h (c) 45 km/h (d) 60 km/h (e) 75 km/h

20) Gustavo e Antonio correram 10 quilômetros. Começaram do mesmo ponto, correram 5 quilômetros montanha acima e retornaram ao ponto de partida pelo mesmo caminho. Sabendo que Gustavo partiu 10 minutos antes de Antonio com velocidades de 15 km/h montanha acima e 20 km/h montanha abaixo e que Antonio corre a 16 km/h e 22 km/h montanha acima e abaixo respectivamente, a que distância do topo da montanha eles se cruzam?

(a) 5/4 km (b) 35/27 km (c) 27/20 km (d) 7/3 km (e) 28/9 km

21) O número de inteiros positivos k para os quais a equação $kx - 96 = 3k$ possui solução inteira para x é igual a

(a)3 (b)6 (c)9 (d)12 (e)32

22) Para os racionais x e y, definimos $x * y = 2x + 3y - 8xy$. O racional a para o qual não existe um racional b tal que $a * b = 0$, é:

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{3}{2}$

23) Seja $\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2006^2}\right) = \frac{x}{2006}$. O valor de x é igual a:

(a) 1336 (b) 1337 (c) 1338 (d) 2006 (e) 2007

24) A maior raiz da equação $(4x^2-9)-2(2x-3)+x(2x-3)=0$, é:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{2}{3}$

25) A equação $(m^2+2m+4)x=(2m+5)x+m^3+1$ é possível e indeterminada quando

(a) $m=-3$ (b) $m=-2$ (c) $m=-1$ (d) $m=0$ (e) $m=1$

26) Sabe-se que a equação do primeiro grau em x:

$$2mx-x+5=3px-2m+p$$

admite as raízes $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$. Entre os parâmetros m e p vale a relação:

(a) $p^2+m^2=25$ (b) $p.m=26$ (c) $m^p=64$ (d) $p^m=32$ (e) $\frac{p}{m}=\frac{3}{5}$

27) Sendo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, raízes da equação do primeiro grau em x: $k^2x-kx=k^2-2k-8+12x$. Sobre k, é correto afirmar que

(a) é um número ímpar.

(b) é um múltiplo de 8.

(c) é um divisor de 27.

(d) é um número par.

(e) é um número negativo.

28) A raiz da equação $3x+\frac{5}{x-4}=12+\frac{5}{x-4}$, é:

(a) um número primo.

(b) um número ímpar maior do que 19.

(c) um múltiplo de 16.

(d) um divisor de 116.

(e) todas as afirmativas anteriores são falsas.

29) Dada a equação $mx - k = kx - m$, podemos afirmar que:

(a) $x = -1$, quaisquer que sejam m e k.

(b) ela é impossível.

(c) ela é indeterminada.

(d) $x = -1$, se $m \neq k$.

(e) $x = 1$, se $m \neq k$.

30) Considere a equação do primeiro grau em “x” : $m^2x + 3 = m + 9x$.

Pode-se afirmar que a equação tem conjunto verdade unitário se :

(a)$m = 3$ (b) $m = -3$ (c) $m \neq -3$ (d) $m \neq 3$ (e) $m \neq 3$ e $m \neq -3$

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCUSSOS

31) (EPCAR 2019) Elisa pretende comprar um computador que custa x reais. Ela possui 70% do valor total do computado e ainda vai ganhar de sus avós uma herança, que será totalmente repartida entre ela e suas irmãs Daniella e Lavínia.

Nessa partilha, elisa recebeu 0,2777... da herança, Daniella 1200 reais e Lavínia 7/18 da herança.

Ao fazer as contas de quanto possuía para comprar o computador percebeu que ainda lhe faltava 200 reais para realizar a compra.

O valor “x” do computador é, em reais, tal que o número de divisores naturais de x é:

a) 18 b) 20 c) 22 d) 24

32) (CMRJ 2019) Quando eu tinha o quadrado da sua idade, a sua idade era 1/7 da minha idade atual. Daqui a d^2 anos, eu terei 70 anos de idade, e você, 64. O valor de d é

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) $x = 2$
2) $2{,}50\,x + 4{,}00 = 31{,}50$
3) $S = 1200 + 10x$
4) 12
5) 34
6) 20
7) 36 anos
8) 11,12,13 e 14
9) 27
10) $K = 5$
11) a
12) c
13) c

Solução: (1) Calcular qual o custo para João fazer ¼ de uma obra e Pedro fazer ¾ dessa mesma obra e somar os valores;

(2) Calcular qual o custo para João fazer 2/3 de uma obra e Pedro fazer 1/3 dessa mesma obra e somar os valores;

(3) Igualar os valores das somas obtidas em 1 e 2.

14) e

15) d

16) b

17) c

18) e

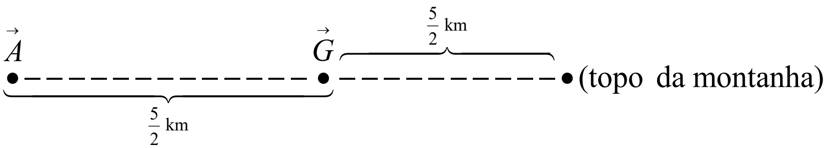
19) e

20) b

Resolução: Pelo texto temos

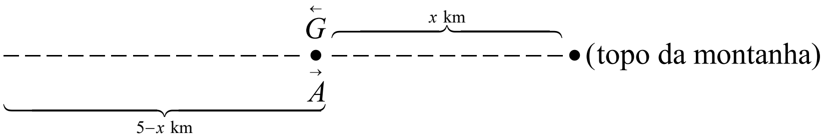
$$Gustavo\begin{cases} v_{subida} = 15km/h \\ v_{descida} = 20km/h \end{cases} \quad \text{e} \quad Antônio\begin{cases} v_{subida} = 16km/h \\ v_{descida} = 22km/h \end{cases}.$$

Como Gustavo saiu 10 minutos antes, ele percorreu $\frac{5}{2}$ km (vide figura abaixo).



Após os 10 minutos iniciais, quando ocorrerá o encontro?

Consideremos que o encontro ocorra a x km do topo da montanha; logo, o mesmo tempo que Gustavo levará para percorrer ($\frac{5}{2} + x$) km, Augusto percorrerá $(5-x)$ km.



Daí, teremos $\underbrace{\dfrac{\frac{5}{2}}{15}+\dfrac{x}{20}}_{Gustavo}=\underbrace{\dfrac{5-x}{16}}_{Augusto}$, onde $x=\dfrac{35}{27}$.

21) d

22) c

23) c

24) c

25) c

26) a

27) d

28) e

29) d

30) e

31) d

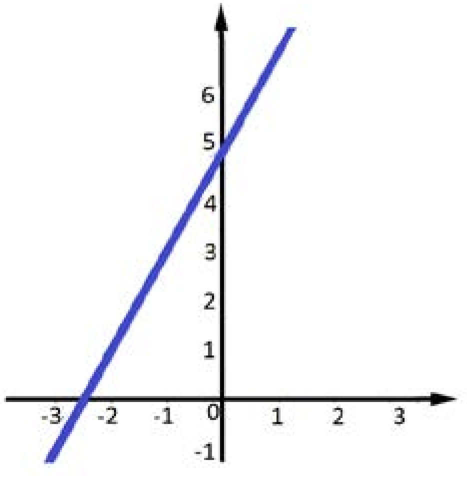
32) e

FUNÇÃO DO 1º GRAU

Uma função da forma $y = ax + b$, $a \neq 0$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ é chamada <u>função do 1º grau</u> ou <u>função afim</u> de coeficientes $a\, e\, b$.

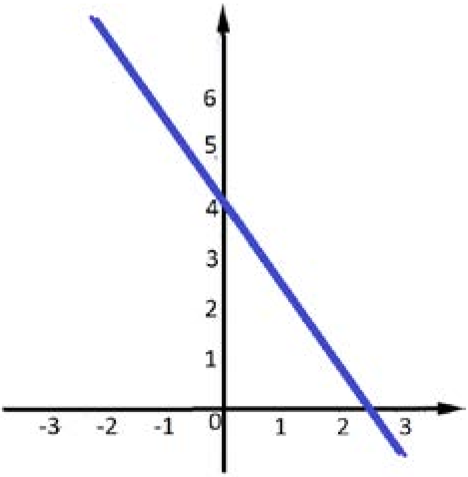
O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta.

Exemplo: $f(x) = 2x + 5$ é uma função do 1º grau com coeficientes $a = 2,\ b = 5.$ A imagem abaixo apresenta o gráfico desta função.



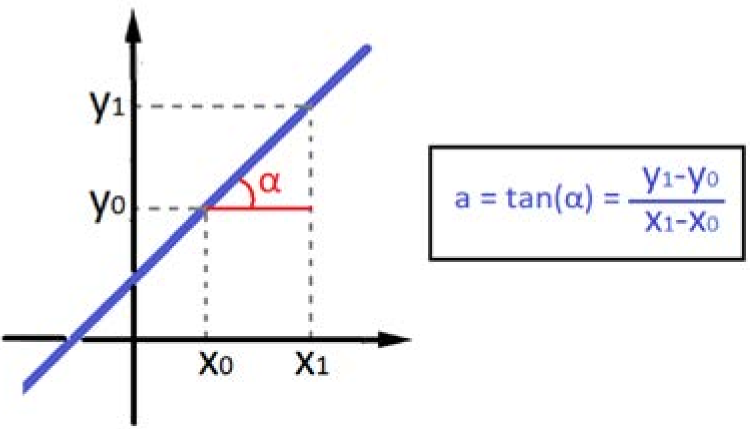
o

Exemplo: $f(x) = -\dfrac{8}{5}x + 4$ é uma função do 1º grau com coeficientes $a = -\dfrac{5}{8}\ e\ b = 4.$. A imagem abaixo apresenta o gráfico desta função.

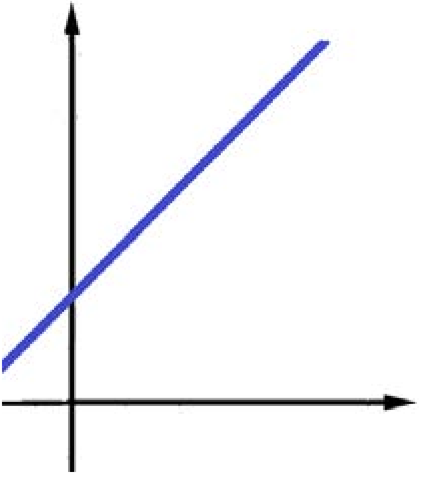


Coeficiente "a"

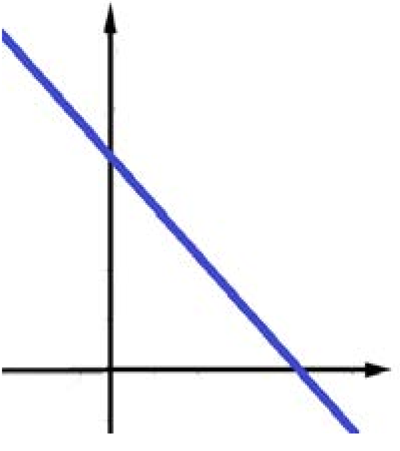
O coeficiente "a" é chamado coeficiente angular e corresponde a tangente do ângulo entre o gráfico e o eixo das abscissas.



- Se $a > 0$, a reta é crescente.

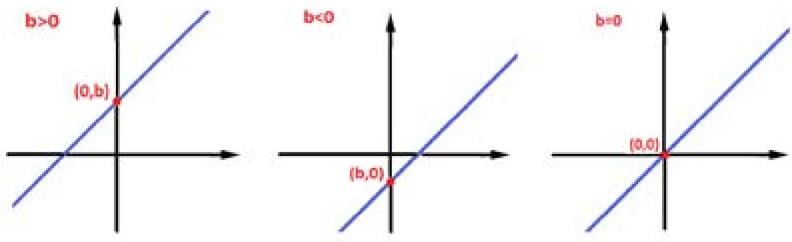


- Se $a < 0$, a reta é decrescente.



Coeficiente "b"

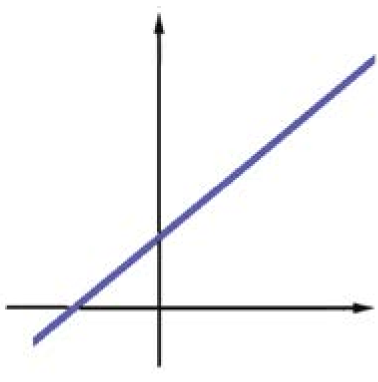
O coeficiente b determina o ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y.



Em particular, quando $b = 0$, a função é chamada função linear.

Exemplos:

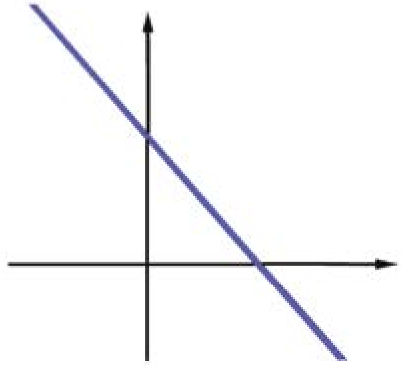
As imagens abaixo são gráficos de funções do 1º grau $f(x) = ax + b$, determine o sinal dos coeficientes a e b.



a)

A função é crescente, portanto, $a > 0$.

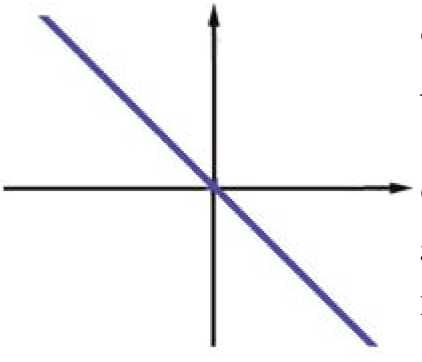
O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre no semieixo positivo, portanto, $b > 0$.



b)

A função é decrescente, portanto, $a < 0$.

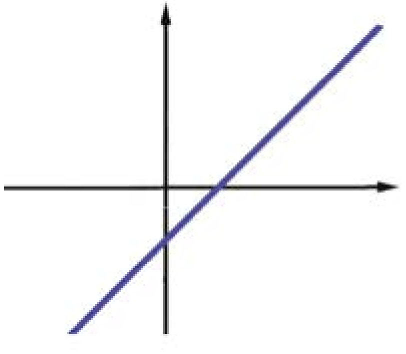
O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre no semieixo positivo, portanto, $b > 0$.



c)

A função é decrescente, portanto, $a < 0$.

O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre na origem, portanto, $b = 0$.



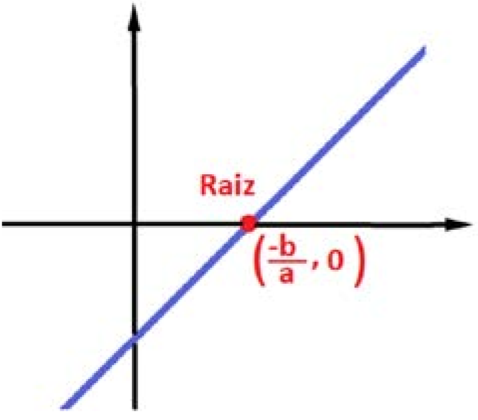
d)

A função é crescente, portanto, $a > 0$.

O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre no semieixo negativo, portanto, $b < 0$.

Raiz ou Zero da função.

Definição: A intercessão entre o gráfico da função e o eixo das abscissas é chamado raiz ou zero da função. Em outras palavras:



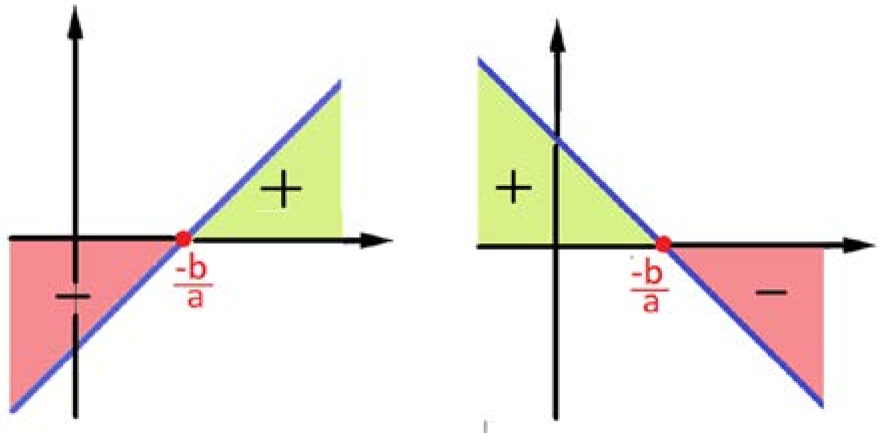
Propriedade: A função afim possui uma raiz $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b$$
$$Se\ x_0\ é\ raiz.$$
$$0 = ax_0 + b$$
$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

Estudo de sinais.

Sabendo o coeficiente $"a"$ e a raiz da função podemos determinar em quais trechos ela assume valores positivos e negativos. Observe essa análise nos gráficos abaixo.



Note que na função crescente, a função é negativa no intervalo $]-\infty, -\dfrac{b}{a}[$ e positiva no trecho $]-\dfrac{b}{a}, \infty[$. Na função decrescente ocorre o contrário.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Jorge pretende ir de Uber para a casa da sua tia que mora a 22 km de sua casa. Sabendo que o curso por quilometragem é R$ 1,40 além de um custo fixo de R$ 2,00. Quantos reais Jorge irá gastar para ir até a casa de sua tia?

2) João fará uma viagem ao longo de uma rodovia linear, iniciou seu trajeto no quilômetro 42 desta rodovia, em qual quilômetro ele estará após viajar por 2 horas a uma velocidade de 60km/h?

3) Um tanque inicialmente contendo 300 litros de água será esvaziado por um ralo a uma vazão de 20 litros por minuto. O ralo ficará aberto por 12 minutos, qual será o volume final de água neste tanque?

4) Assinale com V ou F

( ) (3,2) pertence a reta $y=x+1$

( ) A reta $y=2x-5$ passa por (5,5)

( ) A reta $y=x/3-1$ passa pela origem do plano cartesiano.

( ) As retas $y= - x+6$ e $y=3x+2$ se encontram no ponto (1,5)

( ) As reta $y=3$ é paralela ao eixo y.

5) Considere a função f(x)=0,25x-2 e assinale com V ou F:

01. ( ) f(x) é crescente

02. ( ) f(x) corta o eixo das ordenadas no semi-eixo positivo

03. ( ) f(x) corta o eixo das abcissas no semi-eixo negativo

04. ( ) -4 é raíz de f(x)

05. ( ) 0,25 é o coeficiente angular de f(x).

6) Sobre a função $f(x)=\frac{2}{3}x+9$ é correto afirmar que:

a) $f(x)>0,\ \textit{então}\ x\geq\frac{-27}{2}$

b) $f(x)<0,\ \textit{então}\ x<\frac{-27}{2}$

c) $f(x)>0,\ \textit{então}\ x\geq 6$

d) $f(x)<0,\ \textit{então}\ x<-6$

e) $f(x)<0,\ \textit{então}\ x<\frac{27}{2}$

7) Um carro parte do km 45 de uma estrada andando a 70km/h determine a função que descreve a posição do carro nesta estrada após “x” minuitos.

8) Em certa cidade, uma corrida de taxi custa R$ 5,25 a bandeirada, mais R$ 1,20 por quilometro rodado. Julgue as afirmações a seguir.

(i) A função que descreve esta situação é $y=5,25x+1,20$

(ii) Em uma corrida de 20km o passageiro pagará R$ 24,00

(iii) Em uma corrida de 12km o passageiro pagará R$ 19,65

(iv) Se um passageiro pagou 11,25 então percorreu 5km

Pode-se afirmar que:

a) Todas as proposições estão corretas.

b) Apenas I, III e IV estão corretas

c) Apenas II e IV estão corretas

d) Apenas III e IV estão corretas

9) Em uma corrida de táxi paga-se R$ 25,00 por uma corrida de 10km e por uma corrida de 6 km paga-se R$ 17,00. Qual o valor da bandeirada?

10) O salário de Ana é 1200 reais mais uma comissão de 30% do valor de suas vendas. A função que representa o salário (S) de Ana em função do valor "x" de produtos vendidos é:

a) S(x) = 1200x.

b) S(x) = $\frac{3}{10}.1200 + x$

c) S(x) = $\frac{3}{10}x + 1200$

d) S(x) = $(1200 + x).\frac{3}{10}$ 500 – x

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Funções bijetoras possuem função inversa porque elas são invertíveis, mas devemos tomar cuidado com o domínio da nova função obtida. Identifique a alternativa que apresenta a função inversa de $f(x) = x + 3$

a) $f^{-1}(x) = x - 3$ b) $f^{-1}(x) = x + 3$

c) $f^{-1}(x) = -x - 3$ d) $f^{-1}(x) = -x + 3$

e) $f^{-1}(x) = 3x$

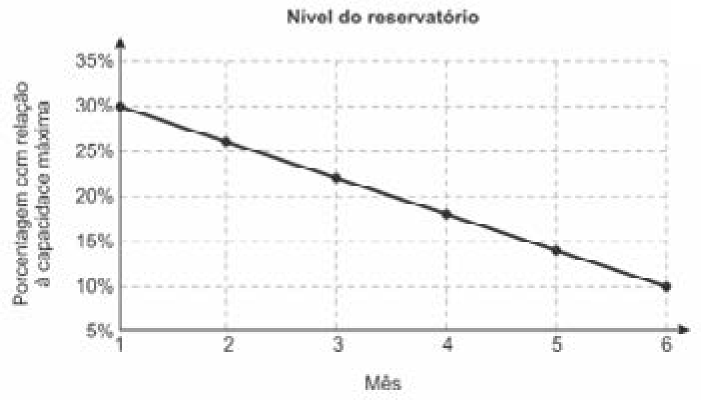
12) Sejam as funções reais dadas por $f(x) = 5x + 1$ e $g(x) = 3x - 2$. Se $m = f(n)$, então o valor $g(m)$ é:

a) $15n + 1$ b) $14n - 1$ c) $3n - 2$ d) $15n - 15$ e) $14n - 2$

13) Sabe-se que a função $f(x) = \frac{x+3}{5}$ é invertível. Assim, $f^{-1}(3)$ é

a) 3 b) 4 c) 6 d) 12

14) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

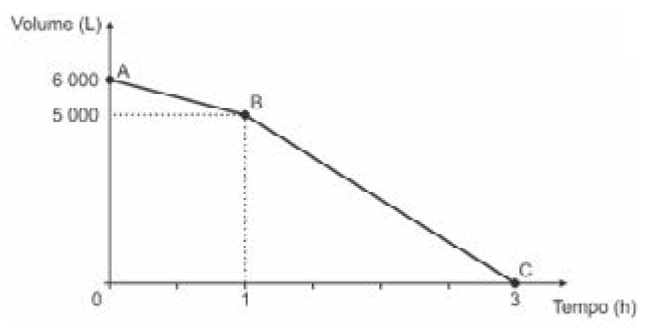


Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio. b) 3 meses e meio. c) 1 mês e meio.

d) 4 meses e) 1 mês.

15) Uma cisterna de 6.000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1.000 b) 1.250 c) 1.500

d) 2.000 e) 2.500

16) Sejam 30 moedas, algumas de 1 centavo e outras de 5 centavos, onde cada uma tem, respectivamente, 13,5 e 18,5 milímetros de raio. Alinhando-se estas moedas, isto é, colocando-se uma do lado da outra, obtém-se o comprimento de 1 metro. O valor total das moedas é:

a) R$ 0,92

b) R$ 1,06

c) R$ 1,34

d) R$ 2,08

17) Oliveira e Armando colecionaram figurinhas. Oliveira disse a armando: “Dê-me 5 de suas figurinhas e ficaremos com a mesma quantidade.” Armando disse a Oliveira: “Dê-me 10 de suas figurinhas e ficarei como dobro das que você ficar”. Quantas figurinhas tem Oliveira?

18) Todos os funcionários de uma empresa deve ser recompensados com uma parcela do lucro. Para este fim deve ser utilizado um certo numero de notas de R$ 50,00. Se cada funcionário receber 8 notas, sobrarão 44 notas e, se cada funcionário receber 10, faltarão 40. O número de funcionários da empresa e o número de notas que se devem

distribuir são, respectivamente:

a) 36 e 320

b) 40 e 360

c) 42 e 380

d) 44 e 396

19) Uma empresa adquiriu um total de 2100 componentes eletrônicos. Uma parte dos componentes foi adquirida aqui no Brasil por 7 reais cada um e a outra parte foi importada por 5 reais cada componente. Sabendo-se que esta empresa gastou, no total, 13.400 reais, quantos componentes foram importados?

a) 650

b) 750

c) 1350

d) 1450

20) A soma das idades de um pai e um filho é, hoje, 72 anos. Há 12 anos passados, a idade do pai era 7 vezes a idade do filho. Hoje, o quociente das idades é:

a) 2 b)3 c)4 d)6

21) Três latas de massa de tomate e duas latas iguais de atum custam, juntas, R$ 3,93. Uma pessoa necessitando os itens anteriores, adquire, por engano, duas latas de massa de tomate e três latas de atum e paga por elas a quantia de R$ 4,32, qual o preço de uma lata de atum?

a) R$ 0,39

b) R$ 0,63

c) R$ 0,83

d) R$ 1,02

22) Para cada número real x, seja $f(x) = \min\{4x + 1, x + 2, -x + 6\}$. Calcule o valor máximo de $f(x)$.

23) Indique o comprimento do intervalo das soluções da desigualdade $0 \leq 2x - 7 \leq 70$.

24) Dada a inequação $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$, o menor valor inteiro que a satisfaz é um número múltiplo de

a) 3. b) 2. c) 7. d) 5.

25) Sabe-se que 100 g de soja seca contém 39 g de proteínas e que 100 g de lentilha seca contém 26 g de proteínas. Homens de estatura média, vivendo em clima moderado, necessitam de 65 g de proteínas em sua alimentação diária. Suponha que um homem queira nutrir-se

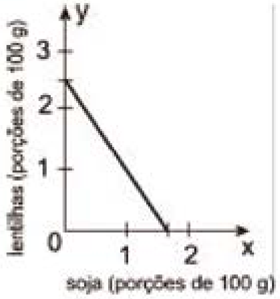
com esses 65 g de proteínas alimentando-se de soja e/ou lentilha. Seja x a quantidade diária de soja e y a quantidade diária de lentilha, x e y positivos e medidos em porções de 100 g.

É INCORRETO afirmar que

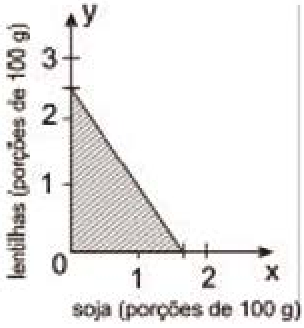
a) a relação estabelecida entre x e y é 3x + 2y = 5

b) se um homem deseja adquirir pelo menos 65 g de proteínas, tem-se que $y \geq -1,5x + 2,5$

c) o esboço do gráfico que melhor representa o consumo mínimo de soja e/ou lentilha que um homem precisa é



d) o esboço do gráfico que representa as possíveis combinações de tais alimentos para fornecer pelo menos a quantidade de proteínas requerida é



26) Com relação a função $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, definida para $x \neq -1$, pode-se afirmar que a única alternativa correta é:

a) $g(x) \leq 0$ para todo $x \in IR - \{-1,0\}$.

b) $\nexists\ x \in IR$ tal que $g(x) = 0$.

c) $g(x) < 0$ para todo $x \in]-1, + \square[$.

d) $g(x) < 0$ para todo $x \in]-1, 1[$.

e) $\nexists\ x \in IR$ tal que $g(x) = 2$.

27) Quatro carros A, B, C, D viajam a velocidades constantes na mesma estrada. A ultrapassa B e C às 8 horas e 9 horas, respectivamente, e encontra D às 10 horas; D encontra B e C às 12 horas e 14 horas, respectivamente. Determine a que horas B ultrapassa C.

a) 10: 20 h   b) 10: 30 h   c) 10: 40 h

d) 11:00 h   e) 11:20 h

28) Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo:

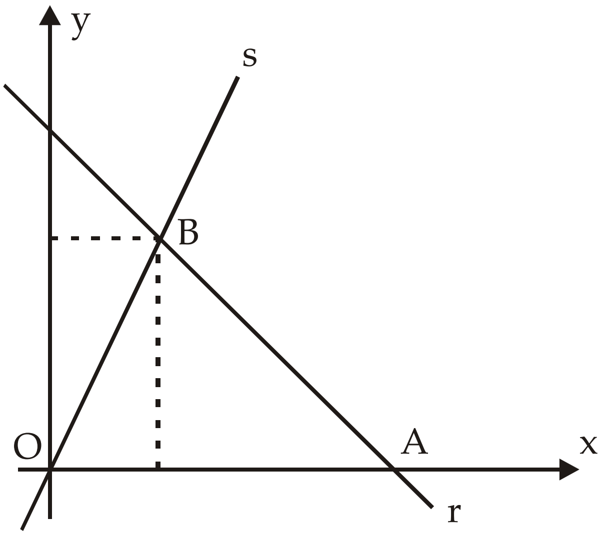
$f(1) = 1$

$f(2n) = 2.f(n) + 1$

$f(f(n)) = 4n + 3$

Calcule f(1990).

29) Na figura abaixo, a reta r tem equação $x + 3y - 6 = 0$, e a reta s passa pela origem e tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$. A área do triângulo OAB, em unidades de área, é igual a:



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

30) Dadas as retas (r_1): $x + 2y - 5 = 0$, (r_2): $x - y - 2 = 0$ e (r_3): $x - 2y - 1 = 0$ podemos afirmar que:

a) são 2 a 2 paralelas

b) (r_1) e (r_3) são paralelas

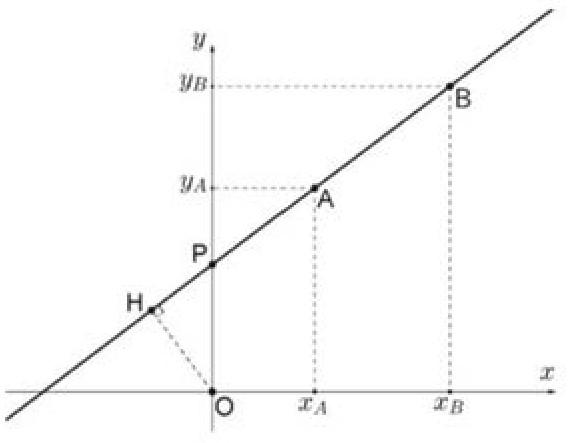
c) (r_1) é perpendicular a (r_3)

d) (r_2) é perpendicular a (r_3)

e) as três retas são concorrentes no mesmo ponto

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CMRJ 2019) A imagem a seguir ilustra parte do gráfico da função real polinomial do primeiro grau y, de variável real x, além dos pontos H, P, A e B, pertencentes a esse gráfico, no plano cartesiano xOy.



A diferença entre as abscissas dos pontos A e B é 4, e a diferença entre as ordenadas desses mesmos pontos é 3. Se o segmento $\overline{OH}$ mede 3, então o gráfico intersecta o eixo Oy no ponto P, cuja ordenada é

a) 3,00 b) 3,25 c) 3,75

d) 4,00 e) 5,00

32) (EPCAR 2021) A tabela de preços para refeições em um restaurante indica quatro opções como descritas a seguir:

Opção		Valor de acordo com a opção
1ª	*Self service* livre (por pessoa)	R$ 35,00
2ª	*Self service* com balança (por kg)	R$ 50,00
3ª	Prato feito pequeno (máximo de até 350 g)	R$ 15,00
4ª	Prato feito grande (máximo de até 700 g)	R$ 30,00

O Cliente faz a escola ao entrar no estabelecimento sem que possa alterá-la posteriormente e servindo-se uma única vez.

Naturalmente, os clientes desejam escolher a opção que lhes faça pagar um menor valor para uma refeição com quantidade x, em Kg.

Assim, é correto afirmar que

a) Se $x=0,29$, então a melhor escolha é a 3ª opção

b) A 2ª opção é a melhor escolha para todo $x<0,35$

c) Se $x>0.7$, então a 1ª opção seria a melhor escolha

d) Qualquer que seja x, tal que $0,35<x<0,7$, a 4ª opção é a melhor escolha.

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) R$ 32,80

2) 162 km

3) 60 litros

4) F-V-F-V-F

5) V-F-F-F-V

6) B

7) $y = 7x / 6 + 45$

8) D

9) R$ 5,00

10) C

11) A

12) A

13) D

14) A

15) C

16) B

17) 20

18) C

19) A

20) B

21) D

22) 4

23) 35

24) B

25) D

26) D

27) C

28) 3979

29) D

30) E

31) C

32) C

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES.

Diofanto de Alexandria foi o maior algebrista grego, tendo supostamente vivido entre o século II a.C. e o princípio do século IV da nossa era. Dentre vários livros que escreveu, o mais importante é o “Aritmética”.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS

O nosso estudo consistirá na resolução de equações da forma $ax + by = c$ (equações diofantinas lineares em duas variáveis) com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e, a e b não simultaneamente nulos.

Apesar das equações serem chamadas diofantinas, o primeiro a dar uma solução geral para equações deste tipo foi o hindu Brahmagupta(598-670) utilizando o algoritmo de Euclides.

Resolvendo equações diofantinas lineares.

Diz-se que o par ordenado de números inteiros (x_0, y_0) é solução da equação $ax + by = c$ se, $ax_0 + by_0 = c$.

Por exemplo, o par ordenado $(2,1)$ é solução da equação $3x + 4y = 10$, pois $3(2) + 4(1) = 10$.

Como determinar as soluções?

Exemplo: Determine as soluções da equação diofantina $2x + 3y = 5$.

Resolução: Da equação, temos que $x = (2 - y) + \dfrac{1 - y}{2}$.

Como $x \in \mathbb{Z}$, temos que $2 \mid (1 - y)$ ou seja, existe um inteiro t, tal que $1 - y = 2t$.

Logo, temos que $y = 1 - 2t$ e, substituindo y na equação, obtemos $x = 1 + 3t$.

Daí, todo par ordenado da forma $(x, y) = (1 + 3t, 1 - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$, é solução da equação $2x + 3y = 5$.

A equação possui infinitas soluções e, para obter algumas das soluções basta fazer t variar em $\mathbb{Z}$.

Por exemplo,

* $t = -2 \Rightarrow (-5, 5)$;

* $t = -1 \Rightarrow (-2, 3)$;

* $t = 0 \Rightarrow (1, 1)$;

* $t = 1 \Rightarrow (4, -1)$;

....

Exemplo: Determine as soluções da equação diofantina

$12x+58y=1321$.

Resolução: Observe que para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, o primeiro membro será sempre um número par enquanto que o segundo membro é sempre ímpar.

Logo, a equação $12x+58y=1321$ não possui solução.

A seguir, veremos alguns teoremas que nos permitirão afirmar se uma equação diofantina possui solução e como determiná-las.

Teorema: " Uma equação diofantina linear $ax+by=c$ possui solução se, e só se, $d \mid c$ onde $d=mdc(a,b)$."

Exemplos: a) A equação diofantina $3x+2y=5$ possui solução?

Resolução: A resposta é sim pois, $mdc(3,2)=1$ e, $1 \mid 5$.

b) A equação diofantina $3x+6y=25$ possui solução?

Resolução: A resposta é não pois, $mdc(3,6)=3$ e, 3 Œ 25.

Teorema: "Se a equação diofantina $ax+by=c$ tem uma solução (x_0, y_0), então tem infinitas soluções da forma $\left(x_0+\dfrac{b}{d}t, y_0-\dfrac{a}{d}t\right)$, $t \in \mathbb{Z}$, onde $d=mdc(a,b)$."

Exemplo: Resolva a seguinte equação diofantina linear:

$24x+138y=18$.

Resolução: Calculando o mdc(24,138) pelo algoritmo de Euclides, temos:

	5	1	3
138	***24***	18	$6 \rightarrow$ mdc(24,138) | 18
18	6	0	

Logo, temos que:

138 = 24 . 5 + 18

24 = 18 . 1 + 6

18 = 6 . 3 + 0

Observe que, podemos escrever:

6 = 24 – 18 . 1

= 24 – (138 – 24 . 5)

= 24 – 138 . 1 + 24 . 5

= 24 (6) + 138 (-1)

ou seja, 24.(6) + 138.(-1) = 6.

Multiplicando ambos os membros da igualdade por 3, obtemos 24.(18) + 138.(-3) = 18; logo, o par ordenado $(x_0, y_0) = (18, -3)$ é uma das soluções da equação diofantina 24x + 138y = 18.

Daí, temos que

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t = 18 + \frac{138}{6}t = 18 + 23t$$

e

$y = y_0 - \frac{a}{d}t =$ -3- $\frac{24}{6}t = -3-4t$, donde concluímos que todo par ordenado da forma $(x,y) = (18+23t\ ,\ -3-4t\ )$, onde $t \in \mathbb{Z}$, é solução da equação diofantina $24x+138y=18$.

1) Em um torneio há times de 5 meninas e times de 4 meninos e um total de 71 crianças. Escreva uma equação diofantina que descreva essa situação.

2) Um feirante vende dúzias de bananas e lotes de 4 mangas, certo dia ele vendeu no total 64 frutas. Escreva uma equação diofantina que descreva essa situação.

3) Verifique se (7,4) é solução da equação 5x + 2y = 34

4) Verifique se (2,5) é solução da equação 8x - 2y = 6

5) Verificar se a equação $5x+10y=134$ possui soluções inteiras.

6) Verificar se a equação $2x+3y=17$ possui soluções inteiras.

7) Determine todas as soluções inteiras da equação 2x + 3y = 5

8) Determine todas as soluções inteiras da equação 56x + 72y = 40

9) Determine todas as soluções inteiras da equação 48x + 7y = 5

10) Determine todas as soluções inteiras da equação 5x + 3y = 7

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

11) Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltiplo de 7 e a outra de 11.
(Problema do matemático Leonard Euler / 1707 – 1783)

12) O valor da entrada de um cinema é R$ 8,00 por adulto e R$5,00 por criança. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$ 500,00?
(A capacidade desse cinema é suficiente para esse número de pessoas).

13) Ao entrar num bosque, alguns viajantes avistam 37 montes de maçã. Após serem retiradas 17 frutas, o restante foi dividido igualmente entre 79 pessoas. Qual a parte de cada pessoa?
(Problema de Mahaviracarya, matemático hindu)

14) Marta comprou petecas, bolas e bonecas, pagando por cada unidade, respectivamente, R$1,00, R$10,00 e R$20,00. Gastou R$220,00 em um total de 101 unidades desses brinquedos. Quantas petecas ela comprou?
(a) 95 (b) 93 (c) 92 (d) 91 (e) 90

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

15) Com R$ 5,49 pode-se comprar maçãs, a 18 centavos cada, e pêras, a 33 centavos cada. Qual é o número mínimo de frutas (maçãs e peras) que podem ser compradas?

(a) 28 (b) 23 (c) 18 (d) 27 (e) 22

16)Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $2x+3y=763$?

(a)255 (b)254 (c)128 (d)127 (e)0

17) Marta foi a uma papelaria e comprou lápis, canetas e cadernos, num total de 25 unidades. Sabendo-se que foram gastos R$21,80 e que o preço unitário do lápis, da caneta e do caderno é igual a R$0,30, R$0,40 e R$2,00, respectivamente, encontre quantas canetas Marta comprou.

18) Maria comprou, para uma festa de crianças, bonecas, bolas e carrinhos num total de 20 unidades. Sabendo-se que o preço unitário da boneca, da bola e do carrinho valem, respectivamente R$2,00, R$3,00 e R$1,50 , qual a quantidade máxima possível de carrinhos comprados sabendo que Marta gastou R$40,00?

19) Resolvendo-se o sistema $\begin{cases} 2x+3y+z=18 \\ 7x+2y=20 \end{cases}$ e sabendo-se que os valores das variáveis são inteiras e positivas, ache o maior valor para z.

20) No sistema $\begin{cases} x+2y+3z=16 \\ 2x-z=0 \end{cases}$, de variáveis inteiras e positivas, encontre o maior valor para a variável z.

21) De quantos modos podemos pagar uma conta de R$ 160,00 utilizando notas de R$ 10,00 e de R$ 20,00 ?

22) Encontre o total de soluções inteiras e positivas que satisfazem a equação $6x+7y=2002$.

23) Quantas soluções inteiras e positivas satisfazem a equação $3x+6y=142$?

24) Determinar o menor inteiro positivo que dividido por 8 e por 15 deixa os restos 6 e 13, respectivamente.

25) Determinar as duas menores frações positivas que tenham 13 e 17 para denominadores e cuja soma seja igual a 305/221.

26) Encontre a solução inteira e positiva da equação $6x+4y=138$, onde a soma "$x+y$" é máxima.

27) Um fazendeiro deseja comprar filhotes de pato e de galinha, gastando um total de R$ 1.770,00.Um filhote de pato custa R$ 31,00 e um de galinha custa R$ 21,00. Quantos filhotes de pato e de galinha o fazendeiro comprou ?

28) Uma caixa contém besouros e aranhas. Sabendo que existem 46 patas na caixa, quantas são dos besouros?

29) Um grupo de pessoas gastou 1000 dólares num hotel. Sabendo-se que apenas alguns dos homens estavam acompanhados pelas esposas e que cada homem gastou 19 dólares e cada mulher gastou 13 dólares, pede-se determinar quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel?

30) Numa criação de coelhos e galinhas contaram-se 40 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que há mais galinhas do que coelhos e que a diferença entre esses dois números é um múltiplo de 7 ?

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2019) Seja A o conjunto formado pelos pares (x,y), onde x e y são inteiros positivos tais que $2x+3y=2018$. Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de elementos do conjunto A é

a) 256   b) 336   c) 512   d) 640   e) 720

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) 5x+4y=71, onde x = nº de times de meninas e y = nº de times de meninos

2) 12x+4y=64, onde x = nº de dúzias de bananas e y = nº de lotes de manga

3) Não é solução

4) É solução

5) Não, pois $mdc(5,10)=5$ e $5 \nmid 134$

6) Sim, pois $mdc(2,3)=1$ e $1/17$

7) $\begin{aligned} x &= 1-3t \\ y &= 1+2t \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x &= 32+9t \\ y &= -15-7t \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} x &= -5+7t \\ y &= 35-48t \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x &= 2+3t \\ y &= -1-5t \end{aligned}$

11) 56 e 44

12) 60 adultos e 4 crianças

13) $-37t-255$, onde $t \in \mathbb{Z}$ e $t \leq -7$

14) e

15) c

16) d

17) 7

18) 12

19) 5

20) 4

21) 7 modos

22) 47 soluções

23) Nenhuma

24) 118

25) 8/13 e 13/17

26) (1,33)

27) Há três possibilidades. O fazendeiro pode ter comprado 9 patos e 71 galinhas ou 30 patos e 40 galinhas ou 51 patos e 9 galinhas.

28) 30

29) 41 homens e 17 mulheres

30) 16 galinhas e 2 coelhos

31) b

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

1) Definição: Todo sistema da forma

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & a_{2n}x_n = & b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & \dots & a_{3n}x_n = & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

denominamos sistema de equações do primeiro grau com m equações e n incógnitas.

Determinar a solução do sistema consiste em encontrarmos uma ênupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, tal que

$$S:\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + & a_{12}\alpha_2 + & \dots & a_{1n}\alpha_n = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + & a_{22}\alpha_2 + & \dots & a_{2n}\alpha_n = & b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + & a_{32}\alpha_2 + & \dots & a_{3n}\alpha_n = & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m \alpha_1 + & a_{m2}\alpha_2 + & \dots & a_{mn}\alpha_n = & b_m \end{cases}.$$

Por exemplo, a solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y & = 13 \\ 5x - 7y & = 1 \end{cases}$ é o par ordenado $(3,2)$ pois, $\begin{cases} 3(3) + 2(2) & = 13 \\ 5(3) - 7(2) & = 1 \end{cases}$.

Sendo $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_m = 0$, diz-se que o ***sistema é homogêneo***.

Um sistema homogêneo possui, pelo menos, a solução trivial

$$\left(\underbrace{0,0,...,0}_{\text{n termos}}\right).$$

2) Sistemas equivalentes: Se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é,

simultaneamente, a solução de $S:\begin{cases} E_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\ E_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\ E_3(x_1, x_2, ..., x_n) = b_3 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ E_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m \end{cases}$

e de $S':\begin{cases} E_1'(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1' \\ E_2'(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2' \\ E_3'(x_1, x_2, ..., x_n) = b_3' \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ E_m'(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m' \end{cases}$, então diz-se que S e S' são ***sistemas equivalentes*** e escrevemos $S \approx S'$.

Por exemplo, $(3,1)$ é a solução dos sistemas $S:\begin{cases} x + y & = 4 \\ x - y & = 2 \end{cases}$ e $S':\begin{cases} 3x + 4y & = 13 \\ 2x - y & = 5 \end{cases}$, logo S e S' são sistemas equivalentes.

3) Resolução: Utilizaremos o método de ***ESCALONAMENTO*** na resolução de sistemas de equações do primeiro grau.

Um sistema é dito ***ESCALONADO*** se o número de incógnitas com coeficientes nulos antes da primeira incógnita, com coeficiente diferente de zero, aumenta a cada equação.

Para escalonarmos um sistema, utilizaremos as ***OPERAÇÕES ELEMENTARES*** que descreveremos a seguir.

OPERAÇÕES ELEMENTARES:

- **Trocar a posição de duas equações;**
- **Multiplicar uma equação por uma constante não nula** k **;**
- **Somar a uma equação um múltiplo de uma outra equação.**

Teorema: "As operações elementares transformam um sistema em um outro equivalente a ele."

Deixamos a prova do teorema acima como exercício para o leitor.

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y & =13 \\ 5x-7y & =48 \end{cases}$.

Resolução:

Sejam $\begin{cases} x+2y & =13 \ \ (\mathrm{E}_1) \\ 5x-7y & =48 \ (\mathrm{E}_2) \end{cases}$, aplicando as ***operações***

elementares, teremos:

$$\begin{cases} x+2y & =13 \\ 5x-7y & =48 \end{cases} \xrightarrow{5E_1-E_2} \approx \begin{cases} x+2y & =13 \\ \quad 17y & =17 \end{cases}$$, donde obtemos $x=11$ e $y=1$.

Daí, a solução do sistema é $(11,1)$.

Observação:

No exemplo acima, temos:

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 13 \\ 5x & - & 7y & = & 48 \end{cases} \approx \underbrace{\begin{cases} x & + & 2y & = & 13 \\ 0x & + & 17y & = & 17 \end{cases}}_{\text{SISTEMA NA FORMA ESCALONADA}}$$

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{cases}$.

Resolução:

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & -1 & \underrightarrow{E_1-E_2} \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 & \underrightarrow{E_1-E_3} \end{cases} \approx \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & -1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 & \underrightarrow{E_2+2E_3} \end{cases} \approx \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & -1 \\ & & & - & 3z & = & -9 \end{cases}$$

donde,obtemos $x=5$, $y=-2$ e $z=3$.

Daí, a solução do sistema é o terno ordenado $(5,-2,3)$.

Quando o sistema possui solução única, diz-se que o sistema é possível e determinado.

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 4x + 12y = 10 \end{cases}$.

Resolução:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 4x + 12y = 10 \end{cases} \xrightarrow{4E_1 - E_2} \approx \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 0y = 30 \end{cases}$$

Vemos claramente que o sistema não possui solução.

Neste caso, dizemos que o sistema é impossível ou que as equações são incompatíveis.

Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 4x + 4y + 4z = 20 \end{cases}$.

Resolução:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 4x + 4y + 4z = 20 \end{cases} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{3E_1 - E_2} \\ \xrightarrow{4E_1 - E_3} \end{matrix} \approx \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 5y + 4z = 10 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Observe que podemos abandonar a terceira equação pois ela é satisfeita para todo valor de y e de z.

Logo, temos agora o sistema $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 5y + 4z = 10 \end{cases}$, onde o número de equações é menor do que o número de incógnitas. Logo, o sistema possui ***infinitas*** soluções.

Quando o sistema possui infinitas soluções, diz-se que o sistema é possível e indeterminado.

E como determinar tais soluções?

Isolando y na segunda equação obtemos $y = \dfrac{10-4z}{5}$ e, substituindo y na primeira encontraremos $x = \dfrac{15-z}{5}$.

Logo, fazendo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, temos que a solução do sistema é todo terno ordenado (x, y, z) da forma $\left(\dfrac{15-t}{5}, \dfrac{10-4t}{5}, t\right)$.

Por exemplo,

* se $t = -1$, obteremos $\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{14}{5}, -1\right)$;
* se $t = 0$, obteremos $(3, 2, 0)$;
* se $t = 5$, obteremos $(2, -2, 5)$, onde os ternos obtidos são algumas das soluções do sistema em questão.

Exemplo: Discutir $(*)$ o sistema $\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$.

$(*)$ Discutir o sistema consiste em dizer para quais valores de "a" o sistema será:

- possível e determinado;
- possível e indeterminado;
- impossível.

Resolução: Resolvendo o sistema, teremos:

$$\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \quad \xrightarrow{2E_1 - aE_2} \end{cases}$$

Estamos multiplicando a segunda equação por a, logo teremos que analisar dois casos possíveis:

(Caso A) Sendo $\boxed{a=0}$, teremos $\begin{cases} 0x & + & 0y & = & 0 \\ 2x & & & = & 4 \end{cases}$.
Logo, o sistema será possível e indeterminado.

(caso B) Sendo $\boxed{a \neq 0}$, teremos:

$$\begin{cases} ax & + & 3ay & = & 0 \\ 2x & + & ay & = & 4 \end{cases} \xrightarrow{2E_1 - aE_2} \approx \begin{cases} ax & + & 3ay & = & 0 \\ & & \left(6a-a^2\right)y & = & -4a \end{cases}$$

Observe que, para resolvermos o sistema, basta determinarmos y na segunda equação e substituir na primeira, obtendo assim o valor de x. Porém, para determinarmos o valor de y, devemos dividir por $6a-a^2$ e, teremos então que analisar dois casos possíveis:

(Caso B.1) Sendo $\boxed{a=6}$, teremos:

$\begin{cases} 6x & + & 18y & = & 0 \\ & & 0y & = & -24 \end{cases}$; logo, o sistema é impossível.

(Caso B.2) Sendo $\boxed{a \neq 0}$ e $\boxed{a \neq 6}$, o sistema será possível e determinado.

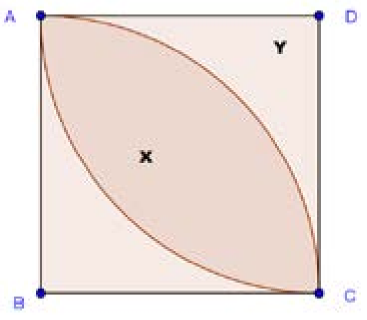
Fazendo um resumo da nossa discussão, temos:

Se $\boxed{a \neq 0}$ e $\boxed{a \neq 6}$, o sistema será possível e determinado;

Se $\boxed{a=0}$, o sistema será possível e indeterminado;

Se $\boxed{a=6}$, o sistema será impossível.

Exemplo: Determine os valores das áreas X e Y na figura abaixo, sabendo que o quadrado tem lado igual a 1 e as curvas são arcos de círculos com centros nos vértices B e D.



Resolução:

Na figura, pela relação entre as áreas, teremos: $\begin{cases} X+Y=\dfrac{\pi}{4} \\ X+2Y=1 \end{cases}.$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = \dfrac{\pi}{4} \\ X + 2Y = 1 \end{cases} \xrightarrow{E_1 - E_2} \approx \begin{cases} X + Y = \dfrac{\pi}{4} \\ \quad - Y = \dfrac{\pi}{4} - 1 \end{cases}$$, donde

obtemos $X=\dfrac{\pi}{2}-1$ e $Y=1-\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 28 \end{cases}$

2) Resolva o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ -x + 5y = 5 \end{cases}$

3) Resolva o sistema $\begin{cases} 13x - 92y = 237 \\ 12x - 91y = 237 \end{cases}$

4) Resolva o sistema $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$

5) Resolva o sistema $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 9\sqrt{y} = 21 \\ 10\sqrt[3]{x} - \sqrt{y} = 28 \end{cases}$

6) Felipe e seu irmão juntaram dinheiro para adquirir um computador. Felipe conseguiu juntar o dobro da quantia de seu irmão. Além disso, a diferença entre as economias de ambos é R$350,00. Quanto cada um conseguiu guardar?

7) Um estacionamento possui 47 veículos, entre carros e motos, num total de 164 rodas. Quantos são os carros e quantas são as motos?

8) Ana possui gatos e cachorros, sabe-se que: A soma do dobro do número de cachorros e do triplo do número de gatos é igual a 17. E que há um cachorro à mais que gatos. Quantos cachorros e quantos gatos Ana possui?

9) Laura pensou em dois números e propôs o seguinte desafio aos seus amigos: “A soma dos números que pensei é 20, e a diferença entre um deles e o triplo do outro é -12” Que números Laura pensou?

10) Saulo pensou em dois números “a” e “b”, sabe-se que: O dobro do antecessor de “a” somado ao triplo de “b” é 63 e que “a” mais onze é igual ao triplo do sucessor de “b”. Que números Saulo pensou?

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Para que o sistema $\begin{cases} kx + (k-2)y = k \\ (k+2)x + 3y = 1 \end{cases}$ seja indeterminado , devemos ter k igual a:

(a) 4 (b) –4 (c) 1 (d) –1 (e) NRA

12) Se os sistemas $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax - by = 5 \\ ay - bx = -1 \end{cases}$ são equivalentes, então $a^2 + b^2$ é igual a:

(a) 1 (b) 4 (c) 5 (d) 9 (e) 10

13) Ao resolvermos o sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{5}{2x-y} = 2 \\ \dfrac{2}{x+y} + \dfrac{3}{2x-y} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$, encontramos para solução o par ordenado (a,b). Logo, podemos afirmar que a expressão $2a + 4b$ é igual a:

(a) 12 (b) 0 (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{20}{3}$ (e) NRA

14) Dado o sistema $\begin{cases} mx + ny = 2m + 3n \\ px + qy = 2p + 3q \end{cases}$ onde m.n.p.q ≠ 0,

(a) se mq – np = 0, então o sistema pode ser impossível

(b) se mq – np = 0, então o sistema não é indeterminado

(c) se mq – np ≠ 0, então, o sistema não é determinado

(d) o sistema não é impossível

(e) se mq – np ≠ 0, então o sistema é impossível

15) Um estudante em férias, durante d dias, observou que:

I) Choveu 7 vezes , de manhã ou de tarde.

II) Sempre que chovia de tarde, fazia bom tempo de manhã.

III) Houve 5 tardes de sol.

IV) Houve 6 manhãs de sol.

d é igual a:

(a) 7 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

16) Para quaisquer inteiros a e b definamos a operação $*$ por

$a*b = a+b-ab$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases}(2*x)+(3*y)=19\\(3*x)+(4*y)=89\end{cases}$ verificamos que $y-x$ é igual a:

(a) -78 (b) 78 (c) 156 (d) 176 (e) 186

17) Dado o sistema de equações $\begin{cases}x+y+z=12\\3x-y+2z=14\\2x-2y+z=-3\end{cases}$, assinale a alternativa correta:

(a) o produto das soluções é 10

(b) a soma das soluções é 14

(c) o produto das soluções é 0

(d) o sistema é impossível

(e) o sistema é possível mas indeterminado

18) O sistema linear $\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ não admite solução se α for igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) 2 (e) –2

19) Se o sistema $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a \\ \dfrac{xz}{x+z} = b \\ \dfrac{yz}{y+z} = c \end{cases}$, $(a.b.c \neq 0)$ tiver solução, o valor de x será:

(a) $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$ (b) $\dfrac{2abc}{ab+bc+ca}$

(c) $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$ (d) $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$

(e) $\dfrac{2abc}{ac+bc-ab}$

20) O sistema $\begin{cases} x + & y + & z & = & 1 \\ 2x + & 2y + & 2z & = & 2 \\ 3x + & 3y + & mz & = & 3 \end{cases}$ é:

(a) possível e determinado para m = 4

(b) impossível para todo m real

(c) impossível para m = 3

(d) possível e indeterminado para todo m

(e) possível e determinado para m ≠ 3

21) Num gibi, um ser de outro planeta capturou em uma de suas viagens três tipos de animais. O primeiro tinha 4 patas e 2 chifres, o segundo 2 patas e nenhum chifre e o terceiro 4 patas e 1 chifre. Quantos animais do terceiro tipo ele capturou, sabendo que existiam 227 cabeças, 782 patas e 303 chifres?

(a) 24 (b) 25 (c) 26 (d) 27 (e) 30

22) O conjunto dos trinta talheres de uma certa casa é constituído de garfos, facas e colheres, de aço inoxidável e aço comum. Sabe-se que

- existem cinco facas, seis garfos e sete colheres, todos de aço comum;
- o número total de garfos é o dobro do número de facas de aço inoxidável;
- o número de facas de aço inoxidável excede o número de colheres desse mesmo tipo de aço em duas unidades.

O total de colheres no conjunto de talheres é igual a:

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

23) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma única solução para certo número real k que é um

(a) quadrado perfeito.

(b) número primo.

(c) número racional não inteiro.

(d) número negativo.

(e) múltiplo de 5.

24) Seja a, $b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}.$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

(a) $\dfrac{a}{b} = 11$ (b) $\dfrac{b}{a} = 22$ (c) $ab = \dfrac{1}{4}$ (d) $ab = 22$ (e) $ab = 0$

25) Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;

- Carlos e Andréia pesam 123 kg e

- Andréia e Bidu pesam 66 kg.

Podemos afirmar que:

(a) Cada um deles pesa menos que 60kg.

(b) Dois deles pesam mais de 60kg.

(c) Andréia é a mais pesada dos três.

(d) O peso de Andréia é a média aritmética dos pesos de Carlos e Bidu.

(e) Carlos é mais pesado que Andréia e Bidu juntos.

26) Para que o sistema a seguir, nas incógnitas x, y e z, seja impossível ou indeterminado, deveremos ter para o real k, valores cuja soma é: $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$

(a) -1 (b) 1 (c) 0 (d) -2 (e) 2

27) Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x+y-z)^2+(x-y)^2+(z-3)^2=0$ então, $x+y+z$ é igual a:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

28) Sabendo que (x, y, z) é solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$, o valor de $x^2+y^2+z^2$ é:

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 9 (e) 10

29) O sistema $\begin{cases} a^3x + 2ay = b \\ 2ax + y = c \end{cases}$ é homogêneo e possui solução única, se e somente se,

(a) $a \neq 4$ e $b = c = 0$.

(b) $a \neq 0$ e $a \neq 4$ e $b = c$.

(c) $a \neq 0$ e $a \neq 4$ e $b = c = 0$.

(d) $a \neq 0$ e $a = 4$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

(e) Todas as alternativas anteriores são falsas.

30) Qual é a relação que a, b e c devem satisfazer tal que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

(a) $5a = 2b - c$

(b) não existe relação entre a, b, c

(c) $5a = 2b + c$

(d) nenhuma das respostas anteriores

(e) $5a \neq 2b + c$

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2021) Observe a figura a seguir:

Ela esboça o percurso de um atleta amador, que partiu do ponto A e fez um trajeto que tem uma subida e uma descida. Ele chegou ao ponto B e retornou pelo mesmo caminho, seguindo o sentido oposto, onde o que era descida passou a ser subida e o que era subida passou a ser descida, finalizando no ponto de partida A. Sabendo que ele desenvolve uma velocidade média de 8 km/h na subida e uma velocidade de 12 km/h na descida e que gastou 1h e 30 min na ida e 1h e 45 min na volta, é correto afirmar que o percurso total corrido por ele em quilômetros é igual a:

a) 30,8 b) 31,2 c) 32,6 d) 34,4 e) 35,2

32) (EPCAR 2019) Considere quatro números naturais distintos tais que, quando adicionados três a três, resultem em: 152, 163, 175 e 185. Sobre esses quatro números é correto afirmar que

a) Todos são números menores que 70

b) Nenhum é múltiplo de 10

c) Apenas um é um número primo

d) Algum é quadrado perfeito

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) $S=\{(49,21)\}$

2) $S=\{(5,2)\}$

3) $S=\left\{\left(\frac{-273}{79},\frac{-273}{79}\right)\right\}$

4) $S=\{(9,25)\}$

5) $S=\{(27,4)\}$

6) Felipe R$ 700,00 e seu irmão R$ 350,00

7) 35 carros e 12 motos

8) 4 cachorros e 3 gatos

9) Os números são 8 e 12.

10) $a=19\ e\ \ b=9$

11) d

12) e

13) d

14) d

15) b

16) d

17) d

18) e

19) e

20)	d
21)	b
22)	a
23)	a
24)	b
25)	e
26)	a
27)	c
28)	a
29)	c
30)	c
31)	b
32)	c

DESIGUALDADES ELEMENTARES

Princípio da tricotomia: Sendo a e b dois números reais quaisquer, então somente uma das asserções abaixo é verdadeira :

- $a < b$ (“ a é menor do que b ”);
- $a = b$ (“ a é igual a b ”) ;
- $a > b$ (“ a é maior do que b ”).

Expressão do tipo $a < b$ é denominada desigualdade.

Se considerarmos $b = 0$, então teremos

- $a < 0$, ou seja, a é um número real negativo;
- $a = 0$, ou seja, a não é nem positivo e nem negativo;
- $a > 0$, ou seja, a é um número real positivo.

Observe que, quando escrevemos ,por exemplo, que $a < b$, noutras palavras estamos afirmando que $a - b$ é negativo; assim como, quando escrevemos que $a > b$, estamos afirmando que $a - b$ é positivo.

Algumas Propriedades de uma desigualdade:

(P_1) Se a < b e b < c, então a < c .

(P_2) Se a > b, então, a + c > b + c .

(P_3) Se a > b, então, a - c > b – c .

(P_4) Se a > b e c>0, então, ac > bc .

(P_5) Se a > b e c < 0, então, ac < bc .

(P_6) Se a > 0, b > 0 e a > b, então, $a^2 > b^2$

(P_7) Se a < 0, b < 0 e a > b, então, $a^2 < b^2$.

(P_8) Se a > b e c > d, então, a+c > b+d.

(P_9) Se a > b e c < d, então, a-c > b-d.

(P_{10}) Se a,b,c e d são números positivos, se a > b e c > d,então ac>bd.

(P_{11}) Se a,b,c,d são números negativos, se a > b e c > d,então ac < bd.

(P_{12}) Se a,b,c,d são números positivos, a > b e c < d, então $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

(P_{13}) Se a,b,c,d são números negativos,a > b e c < d, então $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

(P_{14}) Se a>0, b>0, e a>b, então, $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

Vamos provar algumas das propriedades acima:

(P_2) Se a > b, então, a + c > b + c .

Prova : Se a > b, então a – b > 0 .

Dado um real c qualquer, c – c = 0.

Daí , temos $(a - b) + (c - c) > 0$

$(a + c) - (b + c) > 0$

$a + c > b + c$

(P_4) Se a > b e c > 0, então, ac > bc .

Prova : Se a > b, então a – b > 0 .

Dado um real c, c > 0, temos (a – b) . c > 0 a.c – b.c > 0

Daí, a.c > b.c

(P_8) Se a > b e c > d, então a + c > b + d.

Prova : Se a > b e c > d, então a – b > 0 e c – d > 0.

Daí, temos (a – b) + (c – d) > 0

(a + c) – (b + d) > 0

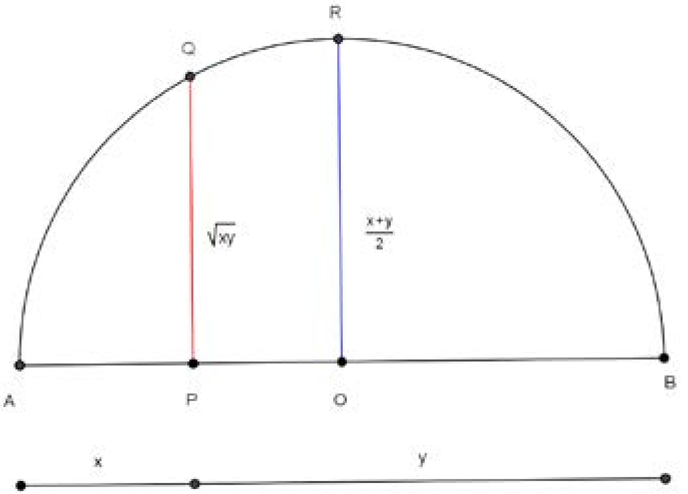
a + c > b + d

Fica como exercício para o leitor a demonstração das outras propriedades.

Desigualdade entre as Médias Aritmética (M_A) e Geométrica (M_G) .

Sendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $n > 1$, números reais positivos, temos que $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, ou seja, $M_A \geq M_G$ onde a igualdade ocorrerá quando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dados dois números reais positivos x e y, na figura abaixo, vemos a representação geométrica da relação entre as médias aritmética e geométrica.



Na figura vemos que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ **,onde a igualdade ocorrerá quando** $x = y$.

Agora, veremos alguns exemplos de aplicações das propriedades de uma desigualdade e das relações entre as médias aritmética e geométrica.

Exemplo: Prove que, se x e y são números reais positivos e

$x + y = 1$,

então $xy \leq \frac{1}{4}$.

Resolução: Sendo x e y números reais positivos, pela relação entre as médias temos que $0 < M_G \leq M_A$. Daí, temos $0 < \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$

$$0 < \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}$$

Pela propriedade (P_6), temos $\left(\sqrt{xy}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ou seja, $xy \leq \frac{1}{4}$.

Exemplo: Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ para quaisquer a, b e c reais.

Prova: Para quaisquer a, b e c reais, temos $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ e $(a-c)^2 \geq 0$. Daí, temos

$$(i)\, a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

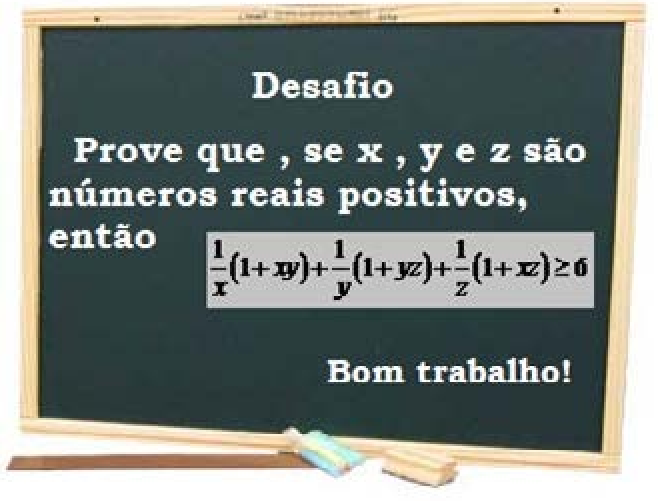
$$(ii)\, b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$$

$$(iii)\, a^2 + c^2 - 2ac \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$$

Somando as três desigualdades obteremos

$$\frac{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2} \geq ab + bc + ac$$

ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.


Desafio
Prove que , se x , y e z são números reais positivos, então
$\frac{1}{x}(1+xy)+\frac{1}{y}(1+yz)+\frac{1}{z}(1+xz)\geq 6$
Bom trabalho!

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Se $x+2 \geq x^2+3$, $x \in \mathbb{R}_+$ é correto afirmar que:

a) $\dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{x^2+3}$

b) $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{1}{x^2-3}$

c) $x<1$

d) NRA

2) Se $a \geq 5$, $x \in \mathbb{R}_+$ é correto afirmar que:

a) $-a \geq -5$

b) $-a \geq 5$

c) $-a \leq -5$

d) $-a \leq 5$

3) Das afirmações abaixo aquela que é certamente verdadeira:

a) $\dfrac{3+5+8}{3} \geq \sqrt[3]{3.5.8}$

b) $\dfrac{3+5+7}{3} \leq \sqrt[3]{3.5.7}$

c) $\dfrac{3+5+7}{3} > \sqrt[3]{3.5.7}$

d) $\dfrac{3+5+7}{3} < \sqrt[3]{3.5.7}$

4) Sobre os números $a = 2^{10}$ e $b = 3^{10}$ é correto afirmar que $a^2 + b^2 > 2^{21}$? Justifique.

5) Para quais valores de x é verdadeira a desigualdade $1 + x > 2\sqrt{x}$

6) É correto afirmar que $\left(2^{12} + 7^5 + 11^3\right)^3 < 27.2^{12}.7^5.11^3$? Justifique.

7) Sobre o número $a = x + \dfrac{1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}_+^*$ é correto afirmar que:

a) $a \leq 0$

b) $a < 1$

c) $a \geq 2$

d) $1 \leq a \leq 2$

8) Qual é o maior dentre os números 2^{60} , 3^{40} e 5^{20} ?

9) Sobre o número $a = 7^{50} + 7^{51} + 7^{53}$ é correto afirmar que:

a) $7^{50} < a < 7^{51}$

b) $7^{51} < a < 7^{52}$

c) $7^{52} < a < 7^{53}$

d) $7^{54} < a < 7^{55}$

10) Sobre o número $a = 2^{86} + 2^{84} + 2^{82} + 2^{80}$ é correto afirmar que:

a) $2^{86} < a < 2^{87}$

b) $2^{87} < a < 2^{88}$

c) $2^{88} < a < 2^{89}$

d) $2^{90} < a < 2^{91}$

EXERCICOS AVANÇADOS

11) Prove que se a, b, c e d são inteiros positivos, então $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$.

12) O menor valor da expressão $E=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{y}+48x^2y$, dado que x e y são reais positivos, é:

(a) 36 (b) 44 (c) $\sqrt{2}$ (d) 61 (e) 48

13) Se x , y , z são números reais positivos , $x+\frac{2}{x}=2y$, $y+\frac{2}{y}=2z$ e $z+\frac{2}{z}=2x$, determine o valor mínimo de $(x+y+z)^2$.

(a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 18 (e) 19

14) Sejam x e y números reais positivos e $xy=1$, o valor mínimo de $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{4y^4}$ ocorre quando x é igual a :

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[4]{2}$ (c) 1 (d) 0,5 (e) 0,25

15) O valor mínimo de $\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)}$, para $x>0$ é igual a

(a)1 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 9

16) Se $x^2+\dfrac{1}{x^2}=A$ e $x-\dfrac{1}{x}=B$, onde A e B são positivos, o valor mínimo de $\dfrac{A}{B}$ é igual a

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$ (e) 4

17) Qual a área máxima de um triângulo cujo perímetro é igual a 18cm ?

18) Sejam p e q números reais positivos tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{\sqrt{2010}}$.
Qual o valor mínimo do produto pq ?

(a) 8040 (b) 4020 (c) 2010 (d) 1005 (e) 105

19) Sejam a , b e c números reais positivos, prove que
$(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$

20) Sendo x real, o valor mínimo de $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ é
Dica : Aplicar a relação entre as médias aritmética e geométrica entre x^2+1 e 1

(a) 1 (b) $\dfrac{3}{2}$ (c) 2 (d) $\dfrac{5}{2}$ (e) 3

21) Sendo x um número real positivo, o menor valor de $5x+\frac{16}{x}+21$ é:
(a) $21+\sqrt{5}$ (b) $21+2\sqrt{5}$ (c) $21+4\sqrt{5}$ (d) $21+6\sqrt{5}$ (e) $21+8\sqrt{5}$

22) Se $0<x<1$, o valor máximo de $x\sqrt{1-x^2}$ é igual a :

Dica : Introduzir x no radical e aplicar a relação entre as médias aritmética e geométrica de x^2 e $1-x^2$
(a) 0 (b)1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{1}{8}$

23) O menor valor de $xy+2xz+3yz$ para valores positivos de x , y e z tais que $xyz=48$ é igual a
(a) 24 (b) 36 (c) 48 (d) 60 (e) 72

24) Se a , b , c , x , y , z são números reais positivos, prove que
$\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}\right)\geq 9\sqrt{abcxyz}$.

25) Se a e b são números reais tais que $4<a<7$ e $3<b<4$ então $a-b$ está entre:
(a) 0 e 4 (b) 1 e 3 (c) 1 e 4 (d) 7 e 11 (e) −1 e 3

26) Se $5\leq a\leq 10$ e $20\leq b\leq 30$, então o valor máximo de $\frac{a}{b}$ é
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{2}{3}$

27) Assinale a afirmativa correta :

(a) Se $x<0$ então $x^2>x$

(b) Se $x^2>0$ então $x>0$

(c) Se $x^2>x$ então $x>0$

(d) Se $x^2>x$ então $x<0$

(e) Se $x<1$ então $x^2<x$

28) Qual o valor inteiro e positivo de n para o qual existe um único inteiro k tal que $\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$ é

(a) 110 (b) 111 (c) 112 (d) 113 (e) 114

29) Sendo a_1, a_2, ..., a_n números reais positivos, prove que

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2 .$$

Dica : Aplicar a relação entre as médias aritmética e geométrica, separadamente, para os números $a_1,a_2,\ldots,a_n$ e $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$ e, em seguida, multiplique as desigualdades.

30) Determine o valor mínimo da expressão

$\frac{(a+b+c)(ab+ac+bc)}{abc}$, sendo a, b e c números reais positivos.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Dica : Aplicar a propriedade demonstrada no exercício 19.

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (EPCAR 2020) Considere os números reais representados na reta real abaixo

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) verdadeira ou Falsa.

( ) $\dfrac{\sqrt{y-x}}{-z^2}$ é, necessariamente, um número que pertence a $\mathbb{Q}_-$.

( ) y^2 é tal que $0 < y^2 < 1$

( ) O inverso do oposto de x é um número compreendido entre 1 e 2.

Sobre as proposições, tem-se que

a) Apenas uma é verdadeira

b) Apenas duas são verdadeiras

c) Apenas três são verdadeiras

d) Todas são falsas

32) (CN 2020) Analise as afirmações a seguir sobre os números racionais "a" e "b".

I – Para $a \neq b$, existem infinitos números reais x entre a e b.

II – Sempre existirá uma solução para a equação na variável x dada por $ax=b$

III – Se $a^3+b^3=0$, então $a=b=0$ é a única solução.

IV – Se $a<b$, então $a^2<b^2$

Assinale a opção correta

a) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

b) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.

c) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

d) Apenas as afirmativas I, II e IV são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) B

2) C

3) C

4) Sim, pois $\left(2^{10}\right)^2+\left(3^{10}\right)^2>\left(2^{10}\right)^2+\left(2^{10}\right)^2=2.2^{20}=2^{21}$

5) $\mathbb{R}_+-\{1\}$

6) Não, pois, sabemos, pela desigualdade das médias que

$\dfrac{2^{12}+7^5+11^3}{3}\geq\sqrt[3]{2^{12}.7^5.11^3}$, então:

$$\left(\frac{2^{12}+7^5+11^3}{3}\right)^3\geq 2^{12}.7^5.11^3$$

$$\left(2^{12}+7^5+11^3\right)^3\geq 27.2^{12}.7^5.11^3$$

7) D

8) Temos que $2^{60}=\left(2^3\right)^{20}=8^{20}$, $3^{40}=\left(3^2\right)^{20}=9^{20}$, 5^{20} então

$5^{20}<2^{60}<3^{40}$

9) C

$$a = 7^{50}(1+7+49)$$
$$a = 7^{50} \cdot 57$$
$$7^{50} \cdot 49 < 7^{50} \cdot 57 < 7^{50} \cdot 343$$
$$7^{50} \cdot 7^2 < 7^{50} \cdot 57 < 7^{50} \cdot 7^3$$
$$7^{52} < 7^{50} \cdot 57 < 7^{53}$$

10) A

$$a = 2^{86} + 2^{84} + 2^{82} + 2^{80}$$
$$a = 2^{80}(2^6 + 2^4 + 2^2 + 1)$$
$$a = 2^{80}(64+16+4+1)$$
$$a = 85.2^{80}$$
$$2^6.2^{80} < 85.2^{80} < 2^7.2^{80}$$
$$2^{86} < 85.2^{80} < 2^{87}$$

11) Prova : Sendo a , b , c e d são inteiros positivos, então temos

$$(i) \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \Rightarrow a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

$$(ii) \quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{abcd}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$$

Por (i) e (ii), ao multiplicarmos as desigualdades, teremos

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16\sqrt[4]{\frac{abcd}{abcd}}$$

ou seja,

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$$

12) A

13) D

14) B

15) D

16) C

17)

Pela fórmula de Heron, a área de um triângulo cujos lados são a, b e c é dada por $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Sabemos que $p=\dfrac{18}{2}=9$, logo temos $A=\sqrt{9(9-a)(9-b)(9-c)}$ onde A assume o seu valor máximo quando a expressão $(9-a)(9-b)(9-c)$ assume seu maior valor possível.

$9-a$, $9-b$ e $9-c$ são positivos (facilmente, pela condição de existência de um triângulo, podemos verificar a veracidade de tal afirmação), logo pela relação entre as médias aritmética e geométrica, teremos:

$$\frac{(9-a)+(9-b)+(9-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(9-a)(9-b)(9-c)}$$

$$\frac{27-(a+b+c)}{3}\geq\sqrt[3]{(9-a)(9-b)(9-c)}$$

$$\sqrt[3]{(9-a)(9-b)(9-c)} \leq 3$$

Elevando ambos os membros ao cubo, temos $(9-a)(9-b)(9-c) \leq 27$;
logo, o maior valor de $(9-a)(9-b)(9-c)$ é 27.
Daí, a área máxima do triângulo é $A_{\text{máx}} = \sqrt{9(27)} = 9\sqrt{3}$.

18) A

19) Prova : Se a, b e c são números reais positivos, então
$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\dfrac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}$ e $\dfrac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$.

Pela propriedade (P_{10}) , temos $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{a+c}{2}\right)\left(\dfrac{b+c}{2}\right) \geq \sqrt{a^2b^2c^2}$

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8} \geq abc ,$$

ou seja $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

20) C

21) E

22) C

23) E

24) Prova: Pela relação $M_A \geq M_G$, temos:

$$(i)\ \frac{x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c}}{3} \geq \sqrt[3]{xyz\sqrt{abc}}$$

$$(ii)\ \frac{a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}}{3} \geq \sqrt[3]{abc\sqrt{xyz}}$$

Multiplicando as desigualdades em (i) e (ii), obtemos

$$\left(\frac{x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{3}\right)\left(\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}}{3}\right)\geq\left(\sqrt[3]{xyz\sqrt{abc}}\right)\left(\sqrt[3]{abc\sqrt{xyz}}\right)$$

$$\left(\frac{x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}}{3}\right)\left(\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}}{3}\right)\geq\left(\sqrt[3]{\left(xyz\sqrt{abc}\right)\left(\sqrt[3]{abc\sqrt{xyz}}\right)}\right)$$

$$\frac{\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}\right)}{9}\geq\sqrt[3]{\sqrt{\left(abcxyz\right)^3}}=\sqrt{\sqrt[3]{\left(abcxyz\right)^3}}$$

$$\frac{\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}\right)}{9}\geq\sqrt{abcxyz}$$

$$\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}\right)\geq 9\sqrt{abcxyz}$$

25) A

26) D

27) A

28) C

29) Dica : Aplicar a relação entre as médias aritmética e geométrica, separadamente, para os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ e, em seguida, multiplique as desigualdades.

30) E

31) A

32) C

INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU.

1) Definição: Toda desigualdade numa das formas: $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$ ou $ax+b\leq 0$, denominamos inequação do primeiro grau na variável x.

Resolver uma inequação do primeiro grau, consiste em determinar quais valores a variável x deve assumir de tal modo que a desigualdade seja logicamente verdadeira.

2) Resolução: Para resolvermos inequações do primeiro grau aplicaremos algumas das propriedades vistas no capítulo sobre desigualdades elementares.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo: Resolva a inequação $2x-4>0$**.**

Resolução: $2x-4>0$

$$2x-4\ +4>0\ +4$$

$$2x > 4$$

$$\frac{2x}{2} > \frac{4}{2}$$

$$x > \frac{4}{2}$$

$$x > 2$$

Daí, o conjunto das soluções da inequação $2x-4>0$ representaremos por $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x>2\}$.

Exemplo: Resolva a inequação $-3x+21 \leq 0$.

Resolução: $-3x+21 \leq 0$

$$-3x+21-21 \leq 0-21$$

$$-3x \leq -21$$

$$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{-21}{-3}$$

$$x \geq 7$$

Daí, o conjunto das soluções da inequação $-3x+21 \leq 0$ é $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 7\}$.

3) Estudo da variação do sinal do binômio $y = ax+b$.

Dado o binômio $y = ax+b$, onde $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:

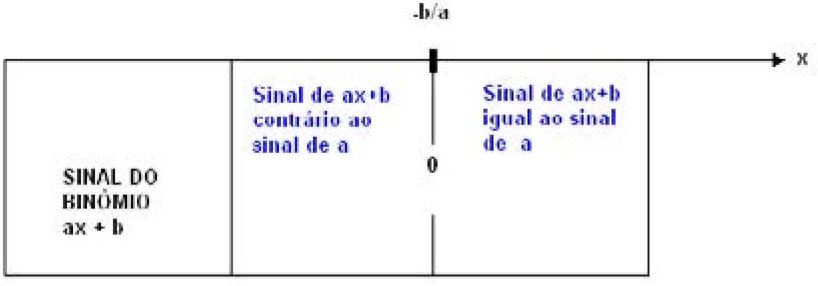
- se $x = -\dfrac{b}{a}$, temos $y = a\left(-\dfrac{b}{a}\right)+b = 0$. Então, dizemos que $-\dfrac{b}{a}$ é o ***"zero do binômio"*** e, representaremos por x_0.

Escrevendo o binômio $y = ax+b$ na forma fatorada, teremos $y = a\left(x+\dfrac{b}{a}\right) = a(x-x_0)$, donde:

- se $x > x_0$, então $x-x_0>0$. Daí, $y = ax+b$ terá sinal ***<u>igual</u>*** ao sinal de a;

- se $x < x_0$, então $x - x_0 < 0$. Daí, $y = ax + b$ terá sinal ***<u>contrário</u>*** ao sinal de a.

O estudo que acabamos de fazer pode ser representado pelo seguinte esquema:



Exemplo: Resolva a inequação-produto $(x-3)(x-4)(x-5) > 0$.

Resolução: Vamos adotar que $P = (x-3)(x-4)(x-5)$ e, temos que determinar para quais valores reais de x, teremos $P > 0$.

(i) Para $x = 3$, $x = 4$ ou $x = 5$, temos $P = 0$;

(ii) Para $x > 5$, temos $x - 3 > 0$, $x - 4 > 0$ e $x - 5 > 0$. Logo, $P > 0$;

(iii) Para $4 < x < 5$, temos $x - 3 > 0$, $x - 4 > 0$ e $x - 5 < 0$. Logo, $P < 0$;

(iv) Para $3 < x < 4$, temos $x - 3 > 0$, $x - 4 < 0$ e $x - 5 < 0$. Logo, $P > 0$;

(v) Para $x < 3$, temos $x - 3 < 0$, $x - 4 < 0$ e $x - 5 < 0$. Logo, $P < 0$.

Logo, teremos $P > 0$ quando $3 < x < 4$ ou $x > 5$.

Daí, o conjunto das soluções da inequação $(x-3)(x-4)(x-5) > 0$ é $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x < 4 \text{ ou } x > 5\}$.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Resolva a inequação $\frac{x}{3}+2 \leq 2x+\frac{1}{5}$, em $\mathbb{R}$.

2) Resolva a inequação $\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}+3\right) > \frac{7}{8}\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}\right)$, em $\mathbb{R}$.

3) Resolva a inequação $(2x+1)\cdot(2x-1)\cdot(x+2) > 0$, em $\mathbb{R}$.

4) Resolva a inequação $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)(x-2) < 0$, em $\mathbb{R}$.

5) Resolva a inequação $2x+4 < 3x-2 < x+14$, em $\mathbb{N}$.

6) Para um certo evento foram convidadas "x" pessoas, no entanto, 3/8 delas não compareceu ao evento. Sabendo que estavam presentes mais de 300 convidados, quantas pessoas foram convidadas?

7) Em uma pequena cidade há duas academias. Na academia A é cobrada uma taxa fixa mensal de R$ 50,00 além de R$ 5,00 por cada dia que o cliente vai a academia. Na academia B, a taxa fixa mensal é de R$ 30,00, no entanto são cobrados R$ 8,00 por dia que o cliente vai a academia. Quantos dias, no mínimo, por mês uma pessoa deve ir a academia para que a academia A seja a mais vantajosa.

8) Um terreno tem perímetro de 120 m e sabe-se que um dos lados mede ao menos o dobro do outro, quanto deve medir o lado menor?

9) Duas fábricas de sorvetes, X e Y, têm fabricado, respectivamente, 2000 e 900 potes de sorvete por mês. Se, a partir de um certo mês, a fábrica X aumentar sucessivamente a produção em 20 potes por mês e a fábrica Y aumentar sucessivamente a produção em 70 potes por mês, a produção da fábrica Y superará a produção da fábrica X após quantos meses?

10) Subtraindo dois anos da idade de Maria e multiplicando a diferença por 7 obtém - se um número menor do que o sêxtuplo da sua idade aumentado de 8. A maior idade possível para Maria é:

EXECÍCIOS AVANÇADOS

11) N bilhetes (N múltiplo de 10) de uma extração da Loteria Estadual foram vendidos e todo bilhete vermelho recebeu um prêmio. Quatro dos cem primeiros bilhetes eram vermelhos e dos bilhetes restantes vendidos, dois de cada dez eram vermelhos. Se no máximo 15% dos bilhetes vendidos recebeu um prêmio, o valor máximo de N é igual a :

(a) 350 (b) 340 (c) 330 (d) 320 (e) 310

12) Se $\min(a,b)=\begin{cases} a & se \ \ a \le b \\ b & se \ \ a > b \end{cases}$ onde, min(a,b) representa o menor dos números "a" e "b", então a solução da inequação min(2x+3 , 3x-5) < 4 é igual a:

(a) x < 1/2 (b) x < 3 (c) x > 1/2 (d) ½ < x < 3 (e) x > 3

13) Um comerciante comprou n rádios por d reais, onde d é um inteiro positivo. Ele contribuiu com a comunidade vendendo para o bazar da mesma 2 rádios pela metade do seu custo . O restante ele vendeu com um lucro de R$8,00 em cada rádio. Se o lucro total foi de R$72,00 então o menor valor possível de n é igual a:

(a) 18 (b) 16 (c) 15 (d) 12 (e) 11

14) Quantos pares de inteiros positivos (a,b) com a+b□ 100 satisfazem à equação $\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$?

(a) 1 (b) 5 (c) 7 (d) 9 (e) 13

15) O maior valor inteiro de x que satisfaz à inequação $\frac{3x+1}{x+5}\leq 2$ é igual a:

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

16) O número de soluções inteiras da inequação $\frac{x-3}{2x+4}>1$ é igual a:

(a) 0 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) infinito

17) Se $\frac{4}{2001}<\frac{a}{a+b}<\frac{5}{2001}$, o número de valores inteiros tais que $\frac{b}{a}$ pode assumir é igual a :

(a) 90 (b) 100 (c) 110 (d) 120 (e) 130

18) Contando n bolas coloridas, algumas pretas e outras vermelhas, achou-se que 49 das 50 primeiras eram vermelhas. Depois 7 de cada 8 contadas eram vermelhas. Se, no total, 90% ou mais das bolas contadas eram vermelhas, o valor máximo de n é igual a:

(a) 225 (b) 210 (c) 200 (d) 180 (e) 175

19) Uma caixa contém fichas vermelhas, brancas e azuis. O número de fichas azuis é no mínimo igual à metade do número de fichas brancas e no máximo igual à terça parte do número de fichas vermelhas. Se o

número de fichas brancas ou azuis é no mínimo 55 o número mínimo de fichas vermelhas é igual a :

(a) 24 (b) 33 (c) 45 (d) 54 (e) 57

20) O intervalo solução da inequação

$(x+3)(x+2)(x-3) > (x+2)(x-1)(x+4)$ é:

(a) $(-\infty,-5/3)$ (b) $(-\infty,-1)$ (c) $(-2,-5/3)$

(d) $(-5/3,+\infty)$ (e) $(-1,2)$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x-3}{x+5} \geq 0 \right\}$$

21) Sejam os conjuntos:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, (x-3)(x+5) \geq 0 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x-3 \geq 0 \ \text{ e } \ x+5 \geq 0 \right\}$$

Pode-se afirmar que:

(a) A = B = C (b) $A \subset B \subset C$ (c) $A \subset C \subset B$

(d) $C \subset A \subset B$ (e) $C \subset A = B$

22) A solução da inequação $\dfrac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} \geq 0$ é:

(a) $x \geq 0$ (b) $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ (c) $x \leq 0$ ou $x > 1$

(d) $x < 0$ ou $x > 1$ (e) $0 \leq x \leq 1$

23) A solução do sistema de inequações: $\begin{cases} 2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x \\ x + 5 < 0 \end{cases}$ é:

(a) $0 < x < 5$ (b) $-5 < x \leq -4$ (c) $-4 \leq x \leq -2$ (d) $x \leq -2$ (e) $x < -5$

24) a soma dos valores inteiros de x, no intervalo $-10 < x < 10$, e que satisfazem à inequação $(x^2 + 4x + 4)(x+1) \leq x^2 - 4$ é:

(a) 42 (b) 54 (c) -54 (d) -42 (e) -44

25) A soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação

$$\frac{(-x+3)^3}{(x^2 + x - 2).(5-x)^{11}.(2x-8)^{10}} \leq 0$$

(a) 11 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 2

26) O maior valor inteiro que verifica a inequação

$x(x-1)(x-4) < 2(x-4)$

(a) 1 (b) negativo (c) par positivo (d) ímpar maior que 4 (e) primo

27) Considere as seguintes inequações e as suas resoluções, nos reais:

1ª) 1 + 3x > 6x + 7; 3x - 6x > 7 - 1; -3x > 6; 3x > -6; x > ; x > -2

2ª) 5 > + 2; 5x > 3 + 2x; 5x - 2x > 3; 3x > 3; x > ; x > 1

3ª) $x^2 - 4 > 0$; $x^2 > 4$; x > ± ; x > ± 2

Logo, a respeito das soluções, pode-se afirmar que:

(a) as três estão corretas

(b) as três estão erradas

(c) apenas a 1ª e a 2ª estão erradas

(d) apenas a 1ª e a 3ª estão erradas

(e) apenas duas estão certas

28) No conjunto dos números reais, qual será o conjunto solução da inequação $\frac{88}{\sqrt{121}} - \frac{1}{x} \leq 0,25^{\frac{1}{2}}$?

(a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2}{15} < x < \frac{15}{2} \right\}$ (b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq \frac{2}{15} \right\}$

(c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{2}{15} < x < 0 \right\}$ (d) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{15}{2} < x < -\frac{2}{15} \right\}$

(e) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x < -\frac{15}{2} \right\}$

29) O conjunto solução de números reais, tal que o valor da expressão $\frac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^{8}}$ é maior do que, ou igual a zero, é:

(a) $[5;+\infty[\cup \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$ (b) $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [5;+\infty[$

(c) $]-\infty;+\infty[$ (d) $\left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \cup [5;+\infty[$

(e) $\left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup [5;+\infty[$

30) Quantos são os números inteiros com os quais é possível, no conjunto dos reais, calcular o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{103x - x^2 - 300}$?

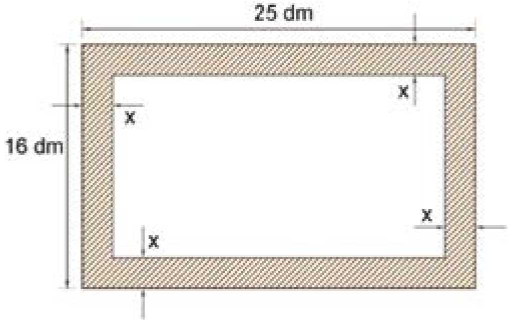
(a) 100 (b) 99 (c) 98 (d) 97 (e) 96

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (EPCAR 2020) Dona Lourdes trabalha em uma livraria, precisa guardar 200 livros em x caixas e vai utilizar todas elas. Se em 30 das x caixas ela guardar 4 livros em cada caixa e, nas demais, guardar 5 livros em cada caixa, então, sobrarão alguns livros para serem guardados. Entretanto, se em 20 das x caixas ela guardar 4 livros em cada caixa e 5 livros em cada uma das demais, então, não haverá livros suficientes para ocupar todas as caixas. Assim, a soma dos algarismos do número x é igual a

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

32) Com o objetivo de fabricar a moldura de um quadro, um marceneiro usa uma placa de madeira retangular com largura medindo 16 dm e comprimento medindo 25 dm. O marceneiro pretende recortar um retângulo da parte interna da placa, de modo que a largura x da moldura seja constante. A figura ilustra como ficará essa moldura.



Como o marceneiro deseja que a área total da moldura tenha, no mínimo, 10% e, no máximo, 45% da área da placa original, então a medida x, em dm, pode ser igual a qualquer valor do intervalo [a, b]. O valor do produto $a \cdot b$ é

a) 1,00 b) 1,10 c) 1,15 d) 1,20 e) 1,25

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{27}{25} \right\}$

2) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x < \frac{39}{116} \right\}$

3) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\}$

4) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2 \right\}$

5) $S = \{7\}$

6) Foram convidadas mais de 480 pessoas

7) No mínimo 7 dias.

8) O lado menor mede 20 m ou menos.

9) A partir do 23º mês.

10) 61 anos.

11) d

Resolução: N = 10k ($k \in Z^*_+$)

$4 + \frac{2}{10}(N - 100) \leq \frac{15N}{100}$

$N \leq 320$

12) b

13) d

14) c

Solução:

(1) $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+b}=13$

$\dfrac{\dfrac{ab+1}{b}}{\dfrac{ab+1}{a}}=13$

$\dfrac{a}{b}=13$

$a=13b$

(2) $a+b\leq 100$

$14b\leq 100$

$b\leq \dfrac{50}{7}\cong 7{,}1$

Daí, temos:

$b=1\Rightarrow a=13$

$b=2\Rightarrow a=26$

....

$b=7\Rightarrow a=91$

Logo, temos 7 pares.

15) b
16) C
17) b
18) b
19) e
20) c
21) d
22) c
23) e
24) e
25) e
26) e
27) b
28) b
29) e
30) c
31) b
32) e

Equação do segundo grau

1 – Definição e resolução: Toda equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, onde $a \neq 0$, denominamos equação do segundo grau em x.

Se α é raiz da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, então $a\alpha^2+b\alpha+c=0$. Por exemplo, 3 é raiz da equação $x^2-5x+6=0$ pois, $3^2-5.3+6=0$.

Exemplo: Considere a equação do 2^{o} - grau em x tal que $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c são números reais com "a" diferente de zero. Sabendo que 2 e 3 são as raízes dessa equação, podemos afirmar que:

(a) $13a+5b+2c=0$ **(b)** $9a+3b-c=0$ **(c)** $4a-2b=0$

(d) $5a-b=0$ **(e)** $36a+6b+c=0$

Resolução: Se 2 e 3 são raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, então $4a+2b+c=0$ e $9a+3b+c=0$.

Somando as igualdades, teremos $13a+5b+2c=0$.

Logo, a alternativa correta é a letra a.

A partir de agora, descreveremos alguns métodos para determinar as raízes de uma equação do segundo grau.

1.a - Método dos babilônios.

Há registros de que, em torno de 1800 a.C., na Babilônia, problemas do tipo "Ache dois números cuja soma é S e o produto é P", eram comumente resolvidos.

Se considerarmos a simbologia algébrica que utilizamos atualmente, sendo x um dos números procurados, então o outro será $S-x$.

Como P é o produto dos números que queremos determinar, então

temos $\qquad x\left(S-x\right)=P$,

ou seja, $\qquad x^2-Sx+P=0$.

Logo, os números são as raízes de uma equação do segundo grau.

Como os babilônios resolviam esse problema?

Naquele tempo não existia a simbologia que hoje utilizamos comumente, mas os babilônios utilizavam uma "receita" em forma de prosa, onde descrevia um método parecido com o que citaremos a partir de agora:

(i) Eleve ao quadrado a metade de S e, em seguida, subtraia do resultado o valor de P;

(ii) Calcule a raiz quadrada do resultado obtido;

(iii) Ao valor encontrado acrescente a metade de S obtendo assim um dos números;

(iv) Para obter o outro número, basta subtrair de S o número que acabamos de determinar.

Vamos utilizar o método babilônico para resolver o seguinte problema:

"Determine dois números cuja soma é $\dfrac{7}{2}$ e o produto é $\dfrac{3}{2}$."

Resolução: No problema temos $S=\frac{7}{2}$ e $P=\frac{3}{2}$. Daí, teremos:

(i) $\left(\frac{S}{2}\right)^2-P=\left(\frac{7}{4}\right)^2-\frac{3}{2}=\frac{25}{16}$

(ii) $\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

(iii) $\frac{S}{2}+\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}=\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=3$

3 é um dos números procurados, logo o outro será $S-3=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$.

Toda equação da forma $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ e $a\neq 1$, pode ser resolvida pelo método dos babilônios. Para isso, basta dividirmos os termos de ambos os membros da equação por a, obtendo assim uma equação do tipo $x^2-Sx+P=0$ onde $S=-\frac{b}{a}$ **(soma das raízes) e** $P=\frac{c}{a}$ **(produto das raízes).**

Exemplo: Sendo α e β as raízes da equação $2x^2-4x+5=0$, determine o valor de $\alpha^2+\beta^2$.

Resolução: Dividindo ambos os membros da equação por 2, teremos $x^2-2x+\frac{5}{2}=0$ donde, concluímos que $\alpha+\beta=2$ e $\alpha\beta=\frac{5}{2}$.

Daí, temos

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= 2^2-2\left(\frac{5}{2}\right)\\ &= 4-5\\ &= -1\end{aligned}$$

1.b – Utilizando o método dos babilônios para determinar uma fórmula para resolver equações do segundo grau.

Dada a equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, dividindo ambos os membros por a, teremos $x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\left(\frac{c}{a}\right)=0$ onde, $S=-\frac{b}{a}$ e $P=\frac{c}{a}$.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação, pelo método dos babilônios, teremos:

$$x_1=\frac{S}{2}+\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P} \quad \text{e} \quad x_2=S-x_1=\frac{S}{2}-\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}\ .$$

Logo, as raízes da equação são dadas por $x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}$ e, se substituirmos S por $-\frac{b}{a}$ e P por $\frac{c}{a}$, teremos :

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Adotando $b^2-4ac=\Delta$, teremos $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$ que é uma fórmula que nos permitirá determinar as raízes de uma equação do segundo grau.

Observe que,

(i) se $\Delta > 0$, então a equação terá duas raízes reais e distintas;

(ii) se $\Delta = 0$, então a equação terá uma única raiz real (ou "duas" raízes reais e iguais);

(iii) se $\Delta < 0$, então a equação não terá raízes reais.

Exemplo: Determine as raízes da equação $x^2 - 3x - 4 = 0$**.**

Resolução: Na equação $x^2 - 3x - 4 = 0$**, temos** $a = 1$**,** $b = -3$ **e** $c = -4$**.**

Utilizando a fórmula que acabamos de deduzir, teremos:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

. Daí, temos $x_1 = 4$ **e** $x_2 = -1$**.**

Resposta: As raízes são 4 e -1.

1.c – Determinação da raiz positiva de uma equação do segundo grau pelo método de $^{(*)}$ Al-Khwarizmi("Completando o quadrado").

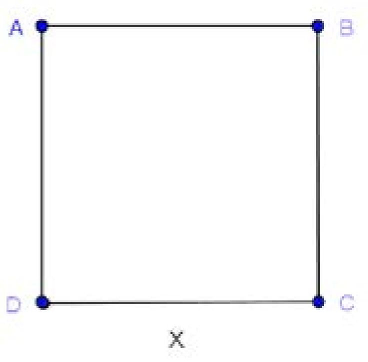
$(*)$ Al-Khwarizmi (aprox.780 d.C – aprox. 850 d.C): Matemático persa que apresentou em seu trabalho,Kitab al-jabr wa-l-Muqabala, a primeira solução sistemática das equações lineares e quadráticas.
A palavra "Álgebra" é derivada de al-jabr, que é uma das duas operações que ele usou para resolver equações **quadráticas.**

O método de Al-Khwarizmi é geométrico e suas equações eram escritas retoricamente, ou seja, sem usar os símbolos que atualmente são habituais.

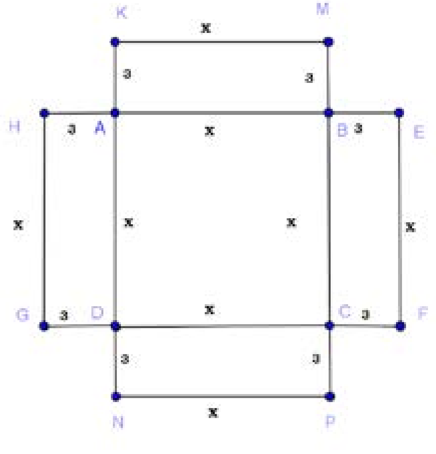
Por exemplo: Determine as raízes da equação $x^2 + 12x = 13$.

Resolução:

(i) Considere um quadrado de lado x;

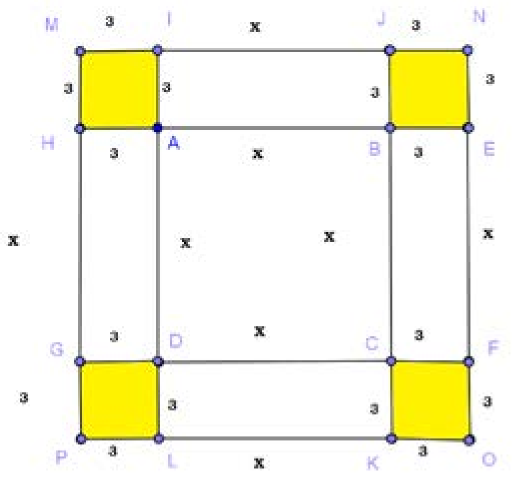


(ii) Sobre os lados do quadrado,construir retângulos de lados x e 3;



A área da figura é dada por $x^2 + 12x$ que é igual a 13.

(iii) Completando os quadrados nos "cantos" da figura anterior, teremos:



Ao completarmos a figura, obtivemos o quadrado MNOP de lado $x+6$ cuja área é igual a 49.

Daí, temos $(x+6)^2 = 49$, donde facilmente podemos concluir que a raiz positiva da equação é $x = 1$.

1.d – Método de $(*)$ Viète.

$(*)$ François Viète(1540-1603), matemático francês que em seu tratado In artem analyticem Isagoge aplica álgebra ao estudo de geometria.

Vamos determinar as raízes de uma equação do segundo grau utilizando o método de Viète:

Dada uma equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, fazendo $x=u+v$, teremos: $a\left(u+v\right)^2+b\left(u+v\right)+c=0$

$$a\left(u^2+2uv+v^2\right)^2+b\left(u+v\right)+c=0$$

Efetuando as operações indicadas e, considerando uma equação do segundo grau em u, teremos: $au^2+\left(2av+b\right)u+\left(av^2+bv+c\right)=0$.

Adotando $v=-\dfrac{b}{2a}$, obteremos $au^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$ donde,

$$u=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como consideramos inicialmente que $x=u+v$, daí temos

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Exemplo: Utilizando o método de Viète, determine as raízes da equação $x^2-2x-2=0$.

Resolução: Fazendo $x=u+v$ e substituindo na equação teremos $\left(u+v\right)^2-2\left(u+v\right)-2=0$.

Efetuando as operações indicadas e considerando a equação do

segundo grau em u, obtemos $u^2+(2v-2)u+(v^2-2v-2)=0$.
Adotando $v=1$, ao substituirmos na equação obteremos $u^2-3=0$, donde $u=\pm\sqrt{3}$.
Daí, como $x=u+v$, temos $x=1\pm\sqrt{3}$.

2 - Soma das potências semelhantes das raízes de uma equação do segundo grau (Fórmula de Newton).

Se x_1 e x_2 são as raízes não nulas da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$ então, temos que $ax_1^2+bx_1+c=0$ (i) e $ax_2^2+bx_2+c=0$ (ii).
Multiplicando (i) e (ii),respectivamente, por x_1^{n-2} e por x_2^{n-2}, $n\in\mathbb{Z}$, obteremos $ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}=0$ (iii) e $ax_2^n+bx_2^{n-1}+cx_2^{n-2}=0$ (iv).
Ao somarmos (iii) e (iv) e, substituirmos $x_1^n+x_2^n$ por S_n, $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ por S_{n-1} e $x_1^{n-2}+x_2^{n-2}$ por S_{n-2}, obteremos a relação $\boxed{aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0}$.

Exemplo: Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2-3x-1=0$, determine o valor de $x_1^5+x_2^5$.

Resolução: Pela fórmula de Newton, temos $S_n-3S_{n-1}-S_{n-2}=0$ logo, $S_n=3S_{n-1}+S_{n-2}$.

Se $n=2$**, temos** $S_2 = 3S_1 + S_0 = 3(3)+2=11$**;**

Se $n=3$**, temos** $S_3 = 3S_2 + S_1 = 3(11)+3=36$**;**

Se $n=4$**, temos** $S_4 = 3S_3 + S_2 = 3(36)+11=119$**;**

Se $n=5$**, temos** $S_5 = 3S_4 + S_3 = 3(119)+36=393$**.**

Logo, $x_1^5 + x_2^5 = 393$**.**

3 – Posicionamento de um número real em relação às raízes reais de uma equação do segundo grau.

Dado o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo x_1 e x_2, $x_1 \le x_2$, as raízes reais da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ então, se $\alpha \in \mathbb{R}$,temos:

$$(i) \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < \alpha < x_2$$

$$(ii) \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha > \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \le x_2 < \alpha$$

$$(iii) \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < x_1 \le x_2$$

$(iv)\ a.f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha$ é uma das raízes

$(*)\ f(\alpha)$ **é o valor numérico do trinômio** $f(x)=ax^2+bx+c$ **em** α **.**

Exemplo: Determine m de modo que o número 1 esteja compreendido entre as raízes da equação $x^2-2x+m=0$.

Resolução: Para que o número 1 esteja entre as raízes da equação $x^2-2x+m=0$, devem ser satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ a.f(1)<0 \end{cases}$$

$(i)\ \Delta>0$ **(Para que tenhamos duas raízes reais e distintas)**

$(-2)^2-4(1)(m)>0$

$4-4m>0$

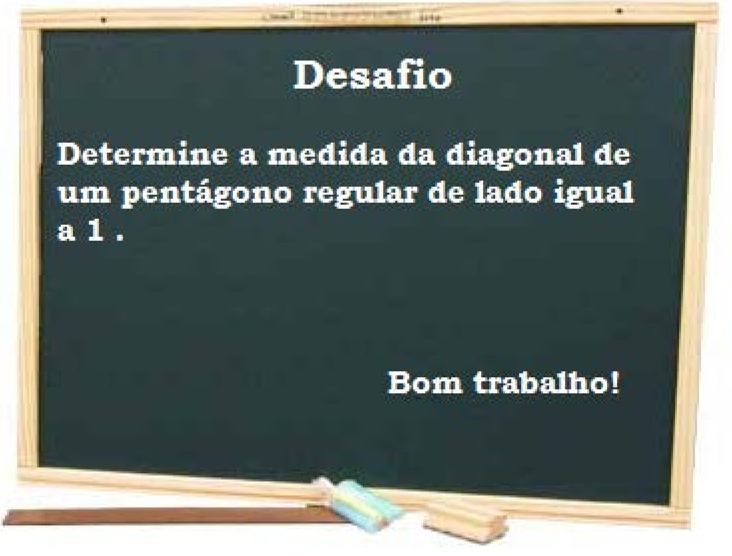
$m<1$

$(ii)\ a.f(1)<0$ **(Para que o número 1 esteja entre as raízes reais da equação)**

$1^2-2(1)+m<0$

$m<1$

Daí, por (i) **e** (ii)**, temos que** $m<1$**.**


Desafio
Determine a medida da diagonal de um pentágono regular de lado igual a 1 .
Bom trabalho!

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Desenvolvendo a equação

$\left(3x-2\right)^2+\left(x-4\right)\left(x+4\right)=x^2+(x+5)^2$ obtemos uma equação da formar $ax^2+bx+c=0$, onde:

a) $a=12, b=-22, c=-12$

b) $a=10, b=-12, c=16$

c) $a=9, b=-12, c=-12$

d) $a=8, b=-22, c=-37$

2) Determinar as raízes da equação $x^2-10x-11=0$

3) Determine o valor da soma e do produto das raízes da equação $70x^2+210x+420=0$

4) Considere "a", a maior solução da equação $x^2+x-1=0$.
Determine o valor da expressão $\dfrac{a^5}{1-a}+\dfrac{2a^6}{\left(1-a\right)^2}$

5) Determine todos os possíveis valores de "b" de modo que a equação x^2+bx+b não possua raízes reais.

6) Sabendo que $a+\dfrac{3}{a}=5$, determine o valor de $a^2+\dfrac{9}{a^2}$

7) Determine a média aritmética (M) das raízes da equação

$x^2 - 12x + p = 0$

8) Determine a média geométrica (M) das raízes da equação

$x^2 + bx + 49 = 0$

9) Determine a razão entre a média aritmética e a média geométrica da equação $x^2 - 5ax + a^4 = 0$

10) Determine os possíveis valores de "a" de modo que a equação $ax^2 + ax + (a+1) = 0$ possua uma única solução.

EXECICIOS AVANÇADOS

11) O valor de x que satisfaz a equação
$\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^{x} - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^{x} = 140\sqrt{2}$ é :

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

12) Se $\dfrac{1}{x^2-10x-29}+\dfrac{1}{x^2-10x-45}-\dfrac{2}{x^2-10x-69}=0$ então, a soma dos algarismos da solução positiva desta equação é igual a:

(a) 10 (b) 8 (c) 6 (d) 4 (e) 2

13) Se $a \in \mathbb{Z}^*$ e -2005 $\leq$ a $\leq$ 2005, o número de raízes reais da equação

$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\frac{a^2}{(x+2)(x+3)}+\frac{a^2}{(x+3)(x+4)}+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1$$

é igual a :

(a) 2005 (b) 2006 (c) 4010 (d) 4011 (e) 4012

14) Se α e β são raízes reais da equação $x^2+\dfrac{9x^2}{x^2+6x+9}=27$, $\alpha > \beta$, determine o valor de $\alpha - \beta$.

(a) $\sqrt{5}$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) $4\sqrt{5}$ (e) $5\sqrt{5}$

15) O número de raízes reais da equação $(1+x^2)^2 = 4x(1-x^2)$ é igual a :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

16) Sendo <u>a</u> a hipotenusa , <u>b</u> e <u>c</u> os catetos de um triângulo retângulo, a equação $a^2x^2 - b^2x - c^2 = 0$

(a) tem uma raiz igual a -1 e a outra entre 0 e 1

(b) tem raízes não reais

(c) tem uma raiz igual a 1 e a outra entre 0 e -1

(d) não admite raízes racionais

(e) NRA

17)Sabendo que a equação $x^2 - 97x + A = 0$ possui raízes iguais às quartas potências das raízes de $x^2 - x + B = 0$. A soma dos valores possíveis de A é igual a:

(a) 5391 (b) 5392 (c) 5393 (d) 5394 (e) 5395

18) Se a equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais, então, sobre a equação $x^2 + (p + 2m)x + q + mp = 0$ podemos afirmar que :

(a) não possui raízes reais para todo m real

(b) possui raízes reais para todo m real

(c) só admite raízes reais para -1< m < 1

(d) para -3 < m < -2 não admite raízes reais

(e) nada podemos concluir com os dados fornecidos

19) Sejam r_1 e r_2 raízes de $x^2-6x-2=0$, com $r_1>r_2$. Se $x_n=r_1^n-r_2^n$, calcule $m=\dfrac{x_{10}-2x_8}{2x_9}$.

20) Se ϕ é o número real positivo tal que $\phi^2=\phi+1$, então ϕ^8 é igual a

(a) $20+\phi$ (b) $31+21\phi$ (c) $13+21\phi$ (d) $13+8\phi$ (e) $8+8\phi$

21) A equação $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$ possui quantas soluções reais?

(a) nenhuma (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) infinitas

22) A equação do segundo grau $ax^2+bx-3=0$ tem -1 como uma raiz. Se a e b são números primos, qual o valor de a^2+b^2?

(a)125

(b) 29

(c) Dependendo de a e b, pode ser 29 ou maior do que 100

(d) Dependendo de a e b, pode ser 125 ou maior do que 300

23) Dada a equação do segundo grau $x^2-3x+1=0$ de raízes α e β, determine o valor de $(\alpha+4)(\beta+6)(\alpha+6)(\beta+4)$.

(a) 2001 (b) 1585 (c) 2002 (d) 1590 (e) 1595

24) As equações $x^2+ax+1=0$ e $x^2+x+a=0$, $a\neq 1$, possuem uma raiz em comum. Determine a menor de todas as raízes.

(a) -1 (b) -3 (c) 1 (d) 2 (e) -2

25) Se α e β são as raízes da equação $x^2-7x+1=0$, determine o valor de $(\alpha-1)^4+(\beta-1)^4$.

(a) 376 (b) 485 (c) 1175 (d) 2000 (e) 1279

26)As equações em x, $(m+2)x^2-(n^2+3)x-2=0$ e $(m+1)x^2+(n+1)x-1=0$, possuem as mesmas raízes. Determine o valor de mn.

(a)0 (b)2 (c)3 (d)4 (e)15

27) a, b, c, d são números reais distintos, tais que: a,b são as raízes da equação $x^2-3cx-8d=0$; c, d são as raízes da equação $x^2-3ax-8b=0$. Calcule a soma $a+b+c+d$.

28) A razão entre as raízes positivas da equação $ax^2+bx+c=0$ é $\frac{m}{n}$. Podemos afirmar que $\frac{b^2}{ac}$ é :

(a) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ (b) $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$ (c) $(\frac{n}{m}+\frac{m}{n})^2$

(d) $\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}$ (e) $\left(\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2$

DICA :

$$\frac{b^2}{ac}=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{c}{a}\right)=(x_1+x_2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$$

29)Se α , β e ε são raízes da equação
$\left(x^2+x+4\right)^2+8x\left(x^2+x+4\right)+15x^2=0$, $\alpha \neq \beta \neq \varepsilon \neq \alpha$,
determine o valor de $\alpha+\beta+\varepsilon$.

(a) 0 (b) $\sqrt{5}+2$ (c) $-\sqrt{5}-2$ (d) -8 (e) 8

Dica: Dividir ambos os membros por x^2

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

30) Dois barcos partem num mesmo instante de lados opostos de um rio de margens paralelas. Viaja cada qual perpendicularmente às margens com velocidade constante. Supondo que um deles é mais rápido que o outro, eles se cruzam num ponto situado a 720 metros da margem mais próxima; completada a travessia, cada barco fica parado no respectivo cais por dez minutos. Na volta eles se cruzam a 400 metros da outra margem. Qual a largura do rio?

31) (CN 2020) Multiplicando os valores reais distintos que resolvem a equação $(x^3-6x^2+12x-4)^2-15(x^3-6x^2+12x-4)+36=0$. Encontra-se, como resultado:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 12 e) 18

32) (CN 2019) O maior inteiro “k” para que $x^2 + 2018x + 2018k = 0$ tenha soluções reais é:

a) 2018 b) 1010 c) 1009 d) 505 e) 504

33) (EPCAR 2021) Sejam a e b, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$, as raízes da equação $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. É correto afirmar que $\left[\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^{-ab}\right]^{a^2+b^2}$ é igual a

a) 12^2 b) 12^3 c) 12^5 d) 12^4

34) (EPCAR 2021) Considere todos os trapézios que podem ser formados com as medidas de base maior, base menor e altura iguais a 4c, 4 e (-2x+40), respectivamente, em uma mesma unidade de medida, sendo c um número real, de modo que o trapézio exista. As áreas dos trapézios estão em função de c. De todos os trapézios que podem ser formados, apenas um term a maior área A. O valor de A, em unidade de área, é igual a

a) 441 b) 220,5 c)110,25 d) 882

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) d
2) x=-1 e x=11
3) Soma: $-\dfrac{210}{70} = -3$ Produto: $\dfrac{420}{70} = 6$
4) 1
5) $b = 0 \;\; e \; b = 4$
6) $a^2 + \dfrac{9}{a^2} = 19$
7) M = 6
8) 7
9) 5/2a
10) a = 0 ou a = -4/3
11) e
12) d
13) c
14) c
15) c
16) c
17) b
18) b
19) 3
20) c
21) c

22) b

23) e

24) e

25) c

26) a

27) 96

(1) $a+b=3c$

(2) $c+d=3a$

(3) $a^2-3ca-8d=0$

(4) $c^2-3ac-8b=0$

(3)-(4) : $(a+c)(a-c)+8(b-d)=0$ (5)

(1)-(2) : $b-d=-4(a-c)$ (6)

Substituindo (6) em (5), temos: $a+c=32$

(1)+(2) : $b+d=2(a+c)=64$

Logo, $a+b+c+d=96$

28) e

29) d

30) 1760 metros

31) a

32) e

33) c

34) a

TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU.

1) Forma canônica do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Sendo $y = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos que

$$y = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}]$$

$$y = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$$

$$y = a[(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{trinômio quadrado perfeito}}) - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})]$$

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})]$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a})$$

Fazendo $b^2 - 4ac = \Delta$, teremos

$$\boxed{y = \underbrace{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}}_{\text{Forma canônica do trinômio } ax^2+bx+c}}.$$

Exemplo: Escreva na forma canônica o trinômio $y = x^2 - 4x - 7$.

Resolução: $y = x^2 - 4x - 7$

$$y = \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} - (4 + 7)$$

Daí, temos $y = (x-2)^2 - 11$, que é a forma canônica do trinômio $y = x^2 - 4x - 7$.

Qual a importância de sabermos escrever o trinômio na forma canônica?

Vamos analisar os seguintes problemas:

Problema 1: *"Determine as raízes da equação* $x^2 - 6x - 5 = 0$*."*

Resolução: *O primeiro membro da equação* $x^2 - 6x - 5 = 0$ *é um trinômio e, escrevendo este trinômio na forma canônica, teremos:* $(x-3)^2 - 14 = 0$

$$(x-3)^2 = 14$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{14}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{14}$$

Logo, as raízes da equação são $3 + \sqrt{14}$ *e* $3 - \sqrt{14}$.

Observe que resolvemos uma equação do segundo grau sem que tenha sido necessário o conhecimento de uma fórmula.

Problema 2: *"Fazendo* x *variar em* $\mathbb{R}$*, qual o valor mínimo (ou máximo) que o trinômio* $y = x^2 - 4x - 5$ *pode assumir?"*

Resolução: *Escrevendo o trinômio em questão na forma canônica, obtemos:* $y = (x-2)^2 - 9$.

Logo, fazendo x *variar em* $\mathbb{R}$*, temos que* $(x-2)^2 \geq 0$ *enquanto que* -9 *é constante.*

Daí, temos que o trinômio $y = x^2 - 4x - 5$ *assume valor mínimo igual a* -9 *quando* $(x-2)^2 = 0$*, ou seja, quando* $x = 2$.

Em geral, temos que, $\forall x \in \mathbb{R}$ **, o trinômio** $y = ax^2 + bx + c$**,**
se $a > 0$**, possui valor mínimo** $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$**, quando** $x = -\dfrac{b}{2a}$**;**
e,
se $a < 0$**, possui valor máximo** $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$**, quando** $x = -\dfrac{b}{2a}$**.**

Acreditamos que os dois problemas que acabamos de ver, mostram bem a importância de sabermos escrever um trinômio na forma canônica.

Uma propriedade muito importante!

" Dados $f(x) = ax^2 + bx + c$ **(**$a, b, c \in \mathbb{R}$ **e** $a \neq 0$**) e** $k \in \mathbb{R}$**, então temos que**

$$f\left(-\frac{b}{2a} - k\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + k\right)."$$

Exemplo: Dado $f(x) = x^2 - 6x + c$ e sendo $f(-1) = 15$, determine o valor de $f(7)$.

Resolução: Temos que $-\dfrac{b}{2a} - 4 = -1$ e $-\dfrac{b}{2a} + 4 = 7$, logo $f(7) = f(-1) = 15$.

2) Forma fatorada do trinômio ax^2+bx+c.

Sendo x_1 e x_2 os zeros ("RAÍZES") do trinômio ax^2+bx+c, temos:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2\right] \\ &= \underbrace{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}_{\text{FORMA FATORADA}} \end{aligned}$$

Exemplo: Resolva a inequação $x^2-5x+6\le 0$.

Resolução: Escrevendo o trinômio $y=x^2-5x+6$ na forma fatorada, obtemos $y=(x-2)(x-3)$.

Logo,

(i)Para $x=2$ ou $x=3$, temos $y=0$;

(ii) Para todo $x<2$, temos $x-2$ negativo e $x-3$ negativo; logo $y>0$;

(iii) Para todo $x>3$, temos $x-2$ positivo e $x-3$ positivo; logo $y>0$;

(iv) Para todo $2<x<3$, temos $x-2$ positivo e $x-3$ negativo; logo $y<0$.

Daí, para que tenhamos $x^2-5x+6\le 0$, devemos ter $2\le x\le 3$.

Exemplo: Resolva a inequação $x^2-6x+9>0$.

Resolução: Escrevendo o trinômio $y=x^2-6x+9$ na forma fatorada, obtemos $y=(x-3)^2$.

Logo,

(i) Para $x=3$, temos $y=0$;

(ii) Para todo $x\neq 3$, $y=(x-3)^2$ é positivo.

Daí, para todo $x \neq 3$, teremos $x^2 - 6x + 9 > 0$.

3) Estudo da variação do sinal do trinômio $y = ax^2 + bx + c$.

Dado $y = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos que:

(i) se $\Delta > 0$, escrevendo o trinômio na forma fatorada,

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 < x_2$, podemos afirmar que

- para $x = x_1$ ou $x = x_2$, teremos $y = 0$;
- para todo x, $x_1 < x < x_2$, $x - x_1$ é positivo e $x - x_2$ é negativo.

Daí, se $a > 0$ teremos $y < 0$ e, se $a < 0$ teremos $y > 0$;

- para todo x, $x < x_1 < x_2$, $x - x_1$ é negativo e $x - x_2$ é negativo.

Daí, se $a > 0$ teremos $y > 0$ e, se $a < 0$ teremos $y < 0$;

- para todo x, $x_1 < x_2 < x$, $x - x_1$ é positivo e $x - x_2$ é positivo.

Daí, se $a > 0$ teremos $y > 0$ e, se $a < 0$ teremos $y < 0$.

(ii) se $\Delta = 0$, escrevendo o trinômio na forma fatorada, teremos

$y = a(x - x_1)^2$.

- Para $x = x_1$, teremos $y = 0$;
- Para $x \neq x_1$, teremos $(x - x_1)^2 > 0$. Daí, se $a > 0$ teremos $y > 0$ e, se $a < 0$ teremos $y < 0$.

(iii) se $\Delta < 0$, escrevendo o trinômio na forma canônica, teremos

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right].$$

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ e, $\frac{-\Delta}{4a^2}$ é uma constante positiva.

Daí, para todo $x \in \mathbb{R}$, se $a > 0$ teremos $y > 0$ e, se $a < 0$ teremos $y < 0$.

Exemplo: Considere o trinômio $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$. Assinale dentre as condições abaixo a que torna o trinômio sempre positivo.

(a) $a > 0$ (b) $a < 1/2$ (c) $a < -1/4$

(d) $a > -1/2$ (e) $a > 1/4$

Resolução: Para que o trinômio $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$ seja sempre positivo, para todo x real, devemos ter $\Delta < 0$.

Daí, temos:

$$\Delta < 0$$
$$(2a-1)^2 - 4a^2 < 0$$
$$-4a + 1 < 0$$
$$a > \frac{1}{4}$$

Resposta: letra e

EXERCICIOS INTRODUTÓRIOS

1) Mariana fez aos seus amigos a seguinte charada: “A minha idade e a idade da minha irmã mais nova são as raízes da equação $\frac{x^2}{2} - 11x + 60 = 0$ ”. Qual é a idade de Mariana?

2) Determine o valor do coeficiente c da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$ sabendo que -3 é raíz desta equação

3) Resolva a inequação $-5x^2 + 20x \geq 15$, onde $x \in \mathbb{R}$.

4) Determine os valores de x para os quais:

$(x^2 + 5x - 24)(x^2 - 3x + 2) = (4x - 10)(x^2 + 5x - 24)$

5) Eduardo quer construir uma piscina retangular com perímetro de 48 m e de modo que a área da piscina seja o maior possível. Qual deverá ser a área desta piscina?

6) O gerente de uma padaria observou que eram vendidas 20 unidades de bolo diariamente à 25,00 reais cada, mas que se fizesse um desconto de 1,00 em cada bolo venderia 4 bolos a mais por dia. Qual o preço de venda para que se possa garantir o maior lucro possível?

7) Considere a equação $x^2 + bx + c = 0$ na qual $x = 2$ e $x = -2$ são as raízes. Determine o valor de “b+c”

8) Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ na qual $a + b = 20$ e $x = 5$ e $x = 6$ são as raízes. Determine o valor de “c”

9) Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ na qual $a - b = 8$ e $x = 3$ e $x = 4$ são as raízes. Determine o valor de “b”

10) Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ na qual $a \cdot b = -54$ e $x = -1$ e $x = 7$ são as raízes. Determine o valor de “b”

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Um cão está a uma distância de 10 metros de um balão pousado no solo. Num mesmo instante em que o balão se desprende e começa a subir verticalmente em relação ao solo o cão começa a persegui-lo , sendo a velocidade do balão 1m/s e a velocidade do cão 2 m/s e ambas constantes. Determine qual a distância mínima entre o cão e o balão e em que instante essa distância mínima ocorre.

12) Determinar os valores de m de modo que, para qualquer valor de x, seja $2x^2+(m-9)x+m^2+3m+4>0$.

13) Dado o trinômio do segundo grau $y=kx^2+\left(k-1\right)x+\left(k-1\right)$

(a) Não há nenhum valor de k que torne o trinômio negativo para qualquer valor de x.

(b) O trinômio é negativo para qualquer valor de x se $-1/3 < k < 1$.

(c) $k > 3$ torna sempre nulo o trinômio.

(d) Para que o trinômio seja sempre negativo só convirão os valores de $k < -1/3$.

(e) Todas as respostas anteriores são falsas.

14) O trinômio $y=kx^2+2\left(k+1\right)x-\left(k+1\right)$

(a) É negativo para todo valor de x e todo k □ 0.

(b) É negativo para todo valor de x se k □ -2.

(c) É positivo para todo valor de x e todo k □ 0.

(d) É negativo para todo valor de x se $-1 < k <$ -1/2

(e) NRA.

15) Determine os valores possíveis da razão $\frac{p}{h}$, onde p e h são positivos, de modo que $\sqrt{p^2 - 2ph - h^2}$ seja real.

16) Um quadrado e um retângulo, cujo comprimento é o triplo da largura, são construídos usando-se todo um arame de 28 cm. Determine as dimensões do quadrado e do retângulo de forma que a soma de suas áreas seja a menor possível.

17) Considere o trinômio do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujos zeros são 2 e -3. Se $f(1) = -12$, então o valor de f(3) é:

(a)-36 (b)-6 (c)12 (d)18 (e)20

18)Sabendo que x e y são reais tais que 3x + 4y = 12, sobre o menor valor inteiro que z pode assumir onde z = x^2 + y^2,podemos afirmar que:

(a) é um múltiplo de 4.

(b) é um múltiplo de 12.

(c) é um múltiplo de 5.

(d) é raiz da equação $\sqrt{x+3} = \frac{x}{2}$.

(e) seu sucessor é um múltiplo de 14.

19) Qual dos valores abaixo é possível para o produto de dois números reais cuja diferença é 8?

(a) -18,71 (b) -16,213 (c) -19,27 (d) -15,999 (e) -17,002

20)Se $P(x) = ax^2 + bx + c$ e $P(k)$ é o seu valor numérico para $x = k$ e sabendo que $P(3) = P(-2) = 0$ e que $P(1) = 6$, podemos afirmar que $P(x)$

(a) tem valor negativo para $x = 2$

(b) tem valor máximo igual a $\frac{27}{4}$

(c) tem valor máximo igual a $\frac{11}{4}$

(d) tem valor máximo igual a $\frac{25}{4}$

(e) tem valor mínimo iguala $-\frac{25}{4}$

21) Para que o trinômio $P(x) = kx^2 + x + 1$, com k inteiro e diferente de zero, admita uma raiz inteira, deveremos ter k igual a:

(a) um múltiplo de 5.

(b) um múltiplo de 7.

(c) um múltiplo de 3

(d) um múltiplo de 2.

(e) um múltiplo de 11.

22) Determine os valores de h, de modo que a desigualdade $-3<\dfrac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}<3$ seja válida para qualquer x real.

23) Determinar a, $a\in\mathbb{R}$, de modo que a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2+(a-5)x-(a+4)=0$ seja igual a um número inteiro k. Qual é o valor mínimo de k?

(a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) -15 (e) -16

24) Para que valores de m o trinômio $y=x^2+4x+m$, $m\in\mathbb{R}$,é sempre superior a 15, qualquer que seja o valor de x real?

(a) -18<m<-19

(b) m < -18

(c) m > 19

(d) 18< m < 19

(e) 15 < m < 17

25) Determinar a soma dos valores de m ,$m\in\mathbb{Z}$, de modo que tenhamos sempre $\dfrac{2x^2-2mx+m}{3x^2+3x+4}<1$.

(a) -10 (b) 10 (c) -9 (d) 9 (e) 8

26) Se a ,b ,c representam os lados de um triângulo,então, sobre o trinômio $y=b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2$, podemos afirmar que:

(a) é sempre positivo para todo x real

(b) é sempre negativo para todo x real

(c) possui raízes reais se o triângulo for retângulo e a for a hipotenusa desse triângulo

(d) possui raízes reais para todo x real

(e) nada podemos afirmar somente com os dados fornecidos

DICA: *Calcule o discriminante escrevendo-o na forma fatorada e aplique a condição de existência de um triângulo(qualquer um dos lados é menor do que a soma dos outros dois) verificando o sinal de cada um dos fatores.*

27) Determine λ no trinômio $f(x) = x^2 - 4b^2x + \lambda - 2a^2 + b^4$ de modo que ele possa ser escrito como uma soma de dois quadrados.

Resposta: $\lambda > 2a^2 + 3b^4$

DICA: *Escreva na forma canônica um trinômio e considere a = 1 e o discriminante negativo. Observe que será possível escrevê-lo como uma soma de dois quadrados.*

28) Os valores de k que tornam $5x^2 - 4x + k = 0$ uma soma de dois quadrados são:

(a) $k < \dfrac{4}{5}$ (b) $k = \dfrac{4}{5}$ (c) $k = -\dfrac{4}{5}$ (d) $k > \dfrac{4}{5}$ (e) $-1 < k < 1$

29) Determinar os valores de m para os quais o primeiro membro da equação $3x^2 - 4(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ é uma soma de dois quadrados.

30) Se a é um número real positivo tal que $a^3 = 6(a+1)$, o trinômio $f(x) = x^2 + ax + a^2 + 6$ possui raízes reais?

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

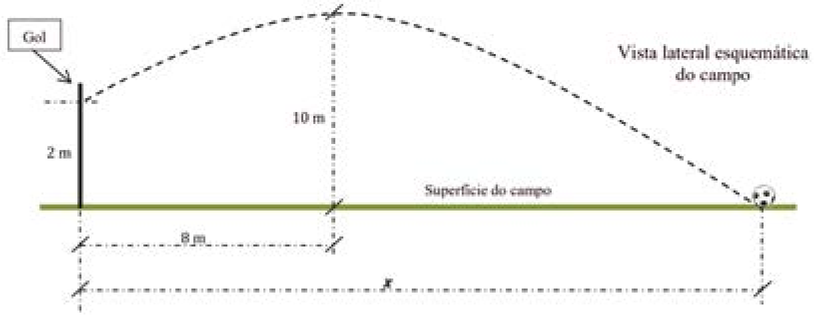
31) (CN 2020) Seja $y = mx^2 + (m-1)x - 16$ um trinômio do 2º grau na variável "x" e com "m" pertencente ao conjunto dos números reais. Sabendo-se que as raízes r_1 e r_2 de y são tais que $r_1 < 1 < r_2$, a soma dos possíveis valores inteiros e distintos de "m" é:

a) 36 b) 42 c) 49 d) 53 e) 64

32) (CN 2019) Considere os três operadores matemáticos #, $\triangle$ *e* $\square$ tais que $a \# b = a^b$, $a \triangle b = \dfrac{a}{b}$ e $a \square b \square c = a + b + c$. Sabendo que "x" é um número real, pode-se afirmar que o valor máximo inteiro que a expressão $\left[2\left(x \# 2\right) \square 8x \square 23\right] \triangle \left[2\left(x \# 2\right) \square 8x \square 11\right]$ assume é:

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

33) Ao treinar chutes a gol, o atleta de futebol Pedro, num chute impressionante, fez com que uma das bolas utilizadas no treino descrevesse uma trajetória em forma de arco de parábola, desde o ponto em que recebeu o chute, no gramado, até ultrapassar completamente a linha do gol, a uma altura de 2 m do chão.



A altura máxima atingida pela bola nesse trajeto foi de 10 m e, nesse instante, sua distância horizontal do gol era de 8 m. A distância horizontal x entre o gol e a bola no momento em que ela recebeu o chute era

a) menor que 17 m.

b) igual a 17 m.

c) entre 17 e 18 m.

d) igual a 18 m.

e) maior que 18 m

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) 12 anos
2) 15
3) $S = \{x \in R;\ 1 \leq x \leq 3\}$.
4) 8,4 e 3]
5) 144 m²
6) R$ 15,00
7) -4
8) -6
9) -7
10) -18
11) A distância mínima ocorrerá quando t=4,será igual a $2\sqrt{5}$ m.
12) m < - 7 ou m > 1 .
13) d
14) d
15) $\frac{p}{h} \geq \sqrt{2} + 1$

Resolução: Resolução: $p^2 - 2ph - h^2 \geq 0$

$$p^2 - 2ph + h^2 - 2h^2 \geq 0$$

$$(p-h)^2 - \left(\sqrt{2}h\right)^2 \geq 0$$

$$p - \left(\sqrt{2}+1\right)h \geq 0$$

$$\left[\overbrace{p + \underbrace{\left(\sqrt{2}-1\right)}_{>0}h}^{\text{é sempre positivo}}\right]\left[\underbrace{p - \left(\sqrt{2}+1\right)h}_{\text{deve ser positivo ou nulo}}\right] \geq 0$$

$$p \geq \left(\sqrt{2}+1\right)h$$

$$\frac{p}{h} \geq \sqrt{2}+1$$

16) Cada lado do quadrado mede 3 e, o retângulo tem altura igual a 2 e comprimento igual a 6.

17) d

18) d

19) d

20) d

21) d

22) $-5 < h < 1$

23) c

24) c

25) a

26) a

27) $\lambda > 2a^2 + 3b^4$

28) d

29) $-7 < m < -1$

30) Não.

31) a

32) c

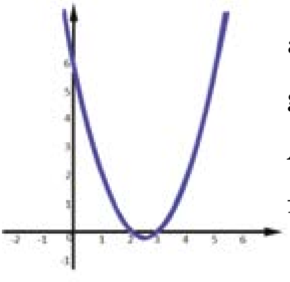
33) a

FUNÇÃO DO 2º GRAU

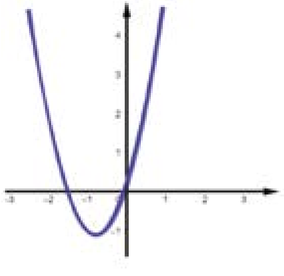
Uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ é chamada <u>função do 2º grau</u> ou <u>função quadrática</u> de coeficientes a, b, c.

O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola

Exemplos:



a) $f(x) = x^2 - x + 5$ é uma função do 2º grau com coeficientes $a = 1, b = -1\ e\ c = 5$. A imagem ao lado apresenta o gráfico desta função.

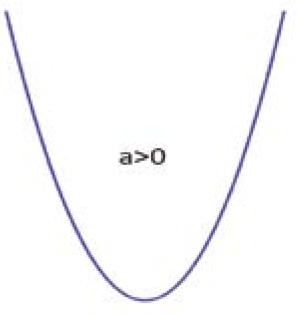


b) $f(x) = 2x^2 + 3x$ é uma função do 2º grau com coeficientes $a = 2, b = 3\ e\ c = 0$. A imagem abaixo apresenta o gráfico desta função.

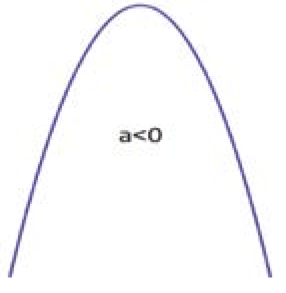
Coeficiente "a"

O coeficiente a determina se a concavidade do gráfico está voltada para cima ou para baixo:

- Se $a > 0$, a concavidade está voltada para cima.



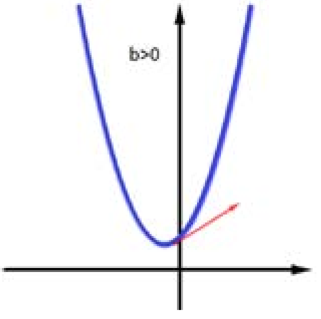
- Se a<0, a concavidade está voltada para baixo.



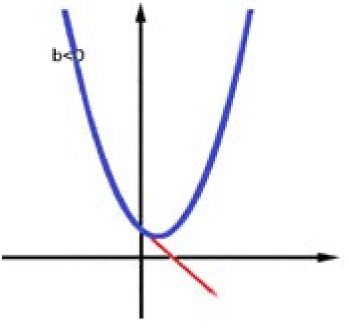
Coeficiente "b"

O coeficiente b determina se o gráfico da função é crescente ou decrescente ao passar pelo eixo y.

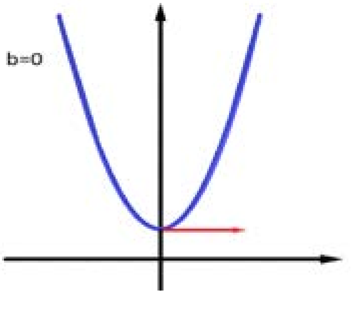
- Se $b > 0$ a função é crescente em $x = 0$



- Se $b < 0$ a função é decrescente em $x = 0$

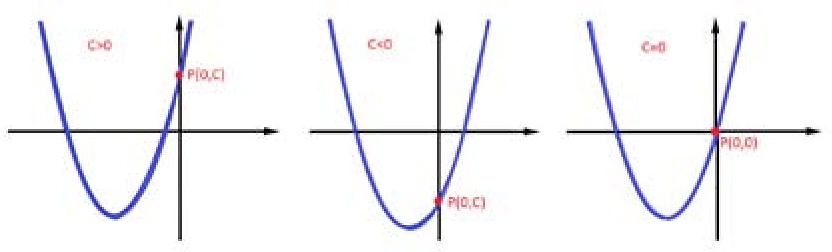


- Se $b = 0$ a função não é crescente nem decrescente em $x = 0$



Coeficiente "c"

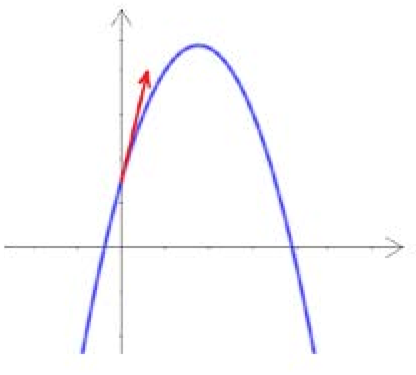
O coeficiente c determina o ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y.



Exemplos:

As imagens abaixo são gráficos de funções do 2º grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine sinal dos coeficientes $a, b\, e\, c$.

a)



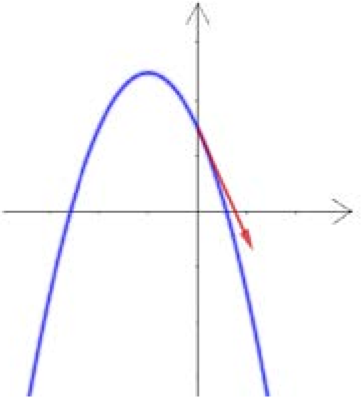
A concavidade está voltada para baixo, portanto, $a < 0$.

A função é crescente ao atravessar o eixo y, portanto, $b > 0$.

O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre no semieixo positivo, portanto, $c > 0$.

Então: a é negativo, b e c são positivos.

b)



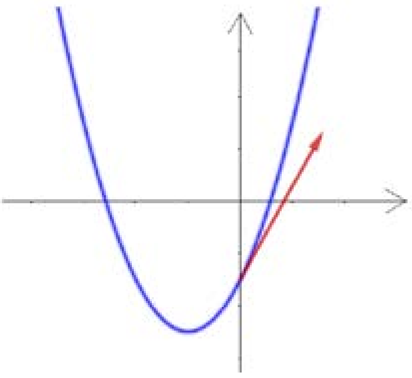
A concavidade está voltada para baixo, portanto, $a < 0$.

A função é decrescente ao atravessar o eixo y, portanto, $b < 0$.

O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre no semieixo positivo, portanto, $a < 0$.

Então: a e b são negativos e c é positivo.

c)



A concavidade está voltada para cima, portanto, $a > 0.$

A função é crescente ao atravessar o eixo y, portanto, $b > 0.$

O ponto de interseção entre o gráfico e o eixo y ocorre no semieixo negativo, portanto, $c < 0.$

Então: $b < 0$ são positivos e c é negativo.

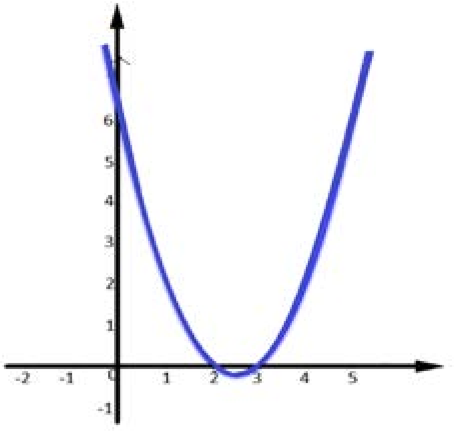
Uma função do 2º grau possui raízes em:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \;\; e \;\; x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

No gráfico, estes pontos correspondem as intercessões do gráfico com o eixo x.

Exemplo:

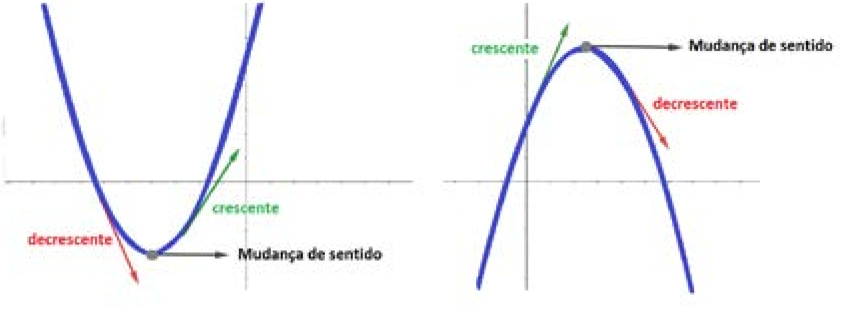
O gráfico abaixo representa uma função com raízes em $x = 2$ e $x = 3$



Vértice da função

Definição: Dada uma função do 2º grau, o ponto em que a função muda de sentido, é chamado vértice, suas coordenadas são comumente denotadas por $V = (x_v, y_v)$

Observe a imagem abaixo:



Note que:

- Se $a > 0$, o vértice é ponto de mínimo da função.
- Se $a < 0$, o vértice é ponto de máximo da função.

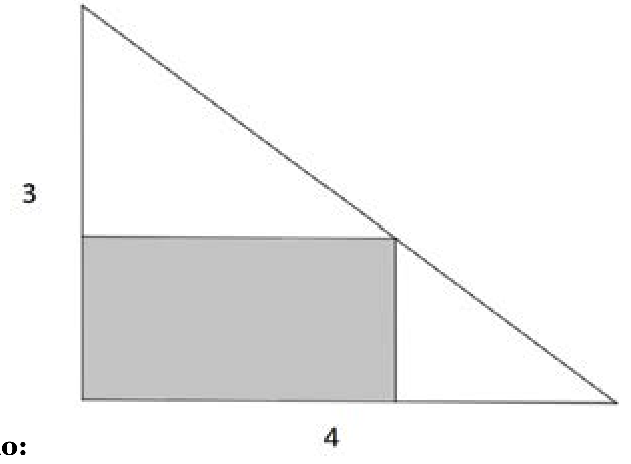
As coordenadas do vértice são dadas por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

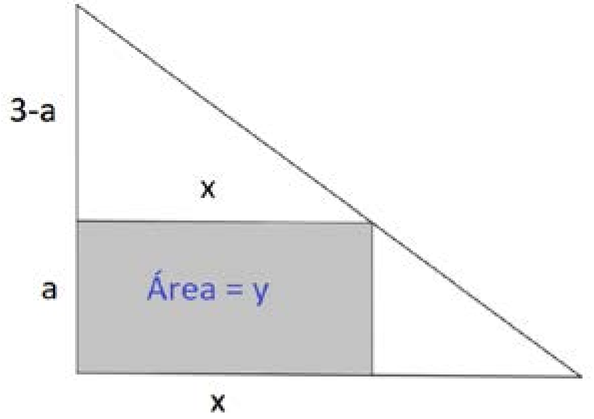
Em um problema, quando queremos saber o valor máximo/mínimo de uma função, basta calcular o y_v. E para determinar o valor que torna a função o máximo/mínimo, basta calcular o x_v

Exemplo:

Na figura abaixo, qual o maior valor possível para a área do retângulo? Qual o valor da base do retângulo que torna essa área a maior possível?



Solução:



Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{3}{4}=\frac{3-a}{x}$$

$$3x=12-4a$$

$$a=-\frac{3}{4}x+3$$

Calculando a área, temos:

$$y=x.a$$

$$y=x.\left(\frac{-3}{4}x+3\right)$$

$$y=\frac{-3}{4}x^2+3x$$

Para determinar a área máxima, basta determinar o valor de y_v :

$$y_v=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{3^2-4.\left(\frac{-3}{4}\right).0}{4\left(\frac{-3}{4}\right)}=\frac{-9}{-3}=3$$

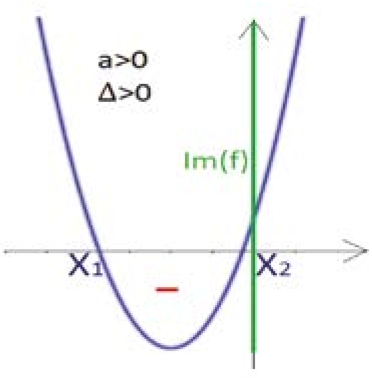
Para determinar o valor que torna a função o máximo possível, basta determinar o x_v :

$$x_v = \frac{-3}{2\left(\frac{-3}{4}\right)} = 2$$

<u>Analise do discriminante (Δ)</u>

<u>1º caso:</u> Se $a > 0$, então $\text{Im}(f) = [y_v, \infty[$, analisaremos cada um dos casos.

- $\Delta > 0$:

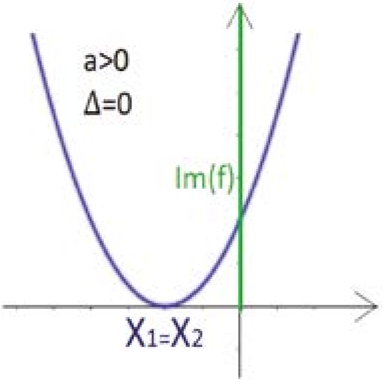


A função é secante ao eixo x, ou seja, possui duas raízes distintas ($x_1 \neq x_2$).

A função é negativa entre as raízes.

A função é da forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

- $\Delta = 0$:

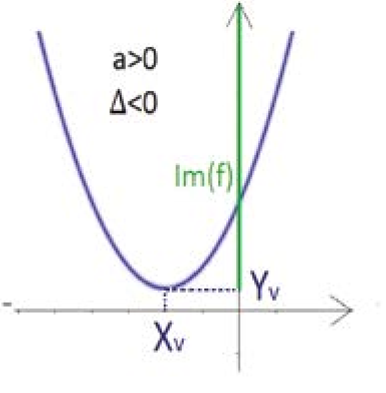


A função é tangente ao eixo x, ou seja, possui duas raízes reais e iguais, também chamada raiz dupla ou raiz de multiplicidade 2. ($x_1 = x_2$).

A função é sempre não-negativa ($y \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

A função é da forma $y = a(x - x_1)^2$

- $\Delta < 0$:



A função não intersecta ao eixo x, ou seja, não possui raízes reais.

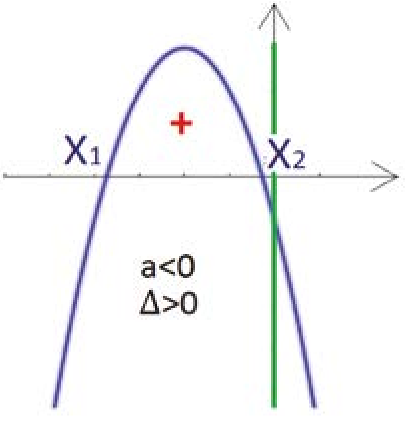
A função é sempre positiva

($y > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

A função é da forma $y = a(x - x_v)^2 + y_v$

<u>2º caso:</u> Se $a < 0$, então $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, y_v]$, analisaremos cada um dos casos.

- $\Delta > 0$

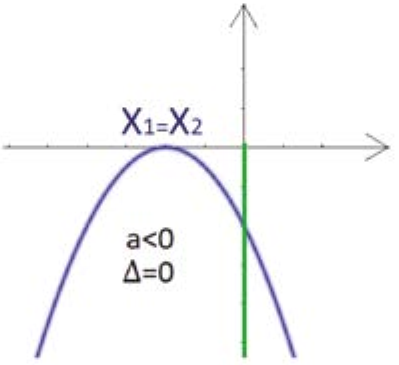


A função é secante ao eixo x, ou seja, possui duas raízes distintas ($x_1 \neq x_2$).

A função é positiva entre as raízes.

A função é da forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

- $\Delta = 0$



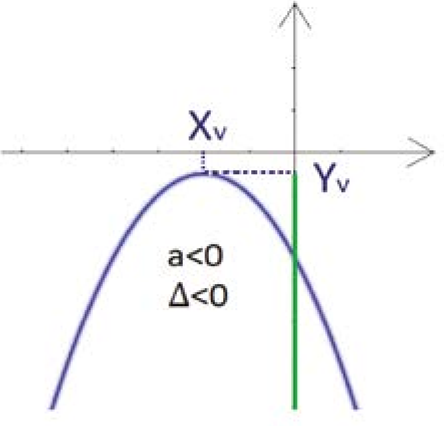
A função é tangente ao eixo x, ou seja, possui duas raízes reais e iguais, também chamada raiz dupla ou raiz de multiplicidade 2.

($x_1 = x_2$).

A função é sempre não-positiva ($y \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

A função é da forma $y = a(x - x_1)^2$

- $\Delta < 0$



A função não intersecta ao eixo x, ou seja, não possui raízes reais.

A função é sempre negativa ($y < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

A função é da forma $y = a(x - x_v)^2 + y_v$

Propriedade Se x está entre as raízes x_1 e x_2 de uma função $p(x) = ax^2 + bx + c$ então:

$$p(x).a < 0$$

Demonstração:

De fato, pois:

Se $a > 0$, entre as raízes $f(x) < 0$, então $p(x).a < 0$

Se porém $a < 0$, entre as raízes $f(x) > 0$, logo $p(x).a < 0$

Exemplo:

Na função $y = x^2 - px + 3$ determine o valor de p para o qual $x_1 < 2 < x_2$, onde x_1, x_2 são raízes.

Solução:

Sabemos que a função possui duas raízes, portanto $\Delta > 0$.

$$\Delta = p^2 - 4.1.3 > 0$$
$$p^2 - 12 > 0$$
$$p^2 > 12$$
$$p > \sqrt{12}$$

E também.

$$P(2).1 < 0$$
$$2^2 - 2p + 3 < 0$$
$$-2p + 7 < 0$$
$$p > 3,5$$

$$p > \sqrt{12} \ e \ p > 3,5 \Rightarrow p > 3,5$$

Exemplo:

Determine os possíveis valores de p para os quais a função $y = -x^2 + px - p - 3$ é sempre negativa.

Solução:

Para que a função seja sempre negativa, devemos ter:

$$a < 0 \quad e \quad \Delta < 0$$
$$\Delta < 0$$
$$p^2 - 4.(-1).(-p-3) < 0$$
$$p^2 - 4p - 12 < 0$$

A função $p^2 - 4p - 12$ é negativa entre as raízes, pois $a > 0 \ e \ \Delta > 0$.

Como as raízes são $x = -2 \ e \ x = 6$, então $p \in]-2, 6[$

<u>Método para determinar a equação da parábola</u>

Dado um gráfico, ou algumas informações sobre a função quadrática é possível determinar sua lei de formação:

- Se são conhecidas as raízes $(x_1 \ e \ x_2)$, então a função pode ser escrita como:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Se são conhecidos a soma e o produto das raízes ($S\ e\ P$), então a função pode ser escrita como:

$$y = a(x^2 - Sx + P)$$

- Se são conhecidas as coordenadas do vértice ($x_v\ e\ y_v$), então a função pode ser escrita como:

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Exemplos:

a) Determinar a função do 2º grau cujas raízes são $x = 2\ e\ x = -1$ que passa pelo ponto $(0, 2)$

Solução:

Como sabemos as raízes, podemos escrever y na forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, onde $x_1 = 2\ e\ x_2 = -1$.

$y = a(x - 2)(x + 1)$

Substituindo $(0, 2)$, obtemos:

$2 = a(0 - 2)(0 + 1)$

$2 = a(-2)(+1)$

$2 = -2a$

$a = -1$

Portanto: $y = -(x - 2)(x + 1)$

b) Determinar a função do 2º grau sabendo que a soma e o produto de suas raízes são $S = 3\ e\ x = -4$ e que esta função passa pelo ponto $(1,12)$

Solução:

Como sabemos a soma e o produto das raízes, podemos escrever y na forma $y = a(x^2 - Sx + P)$, onde $S = 3\ e\ x = -4$.

$y = a(x^2 - 3x - 4)$

Substituindo $(1,12)$, obtemos:

$12 = a(1^2 - 3.1 - 4)$

$12 = a(1 - 3 - 4)$

$12 = a(-6)$

$a = -2$

Portanto: $y = -2(x^2 - 3x - 4)$

c) Determinar a função do 2º grau que passa por $(2,0)$ e possui vértice $V = (-2,3)$.

Solução:

Como sabemos as coordenadas do vértice, podemos escrever y na forma

$y = a(x - x_v)^2 + y_v$, onde $x_v = -2\ \ e\ \ y_v = 3$

$y = a(x + 2)^2 + 3$

Substituindo $(2,0)$, obtemos:

$$0 = a(2+2)^2 + 3$$

$$0 = 16a + 3$$

$$a = \frac{-3}{16}$$

Portanto: $y = \frac{-3}{16}(x+2)^2 + 3$

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Considere a função $f(x) = -3x^2 + 2 - x = 0$ e julgue os itens a seguir. Assinale com V ou F

( ) $a = 3$

( ) $b = 2$

( ) $c = 1$

( ) O valor de Δ é 26

( ) -1 é uma das raízes.

2) Julgue as afirmações a seguir

01. ( ) Se $\Delta < 0$ a função possui duas raízes reais e distintas.
02. ( ) Se $\Delta = 0$ o gráfico é tangente ao eixo das ordenadas
03. ( ) Se $a > 0$ o gráfico tem concavidade voltada para cima
04. ( ) Se $c > 0$ a função corta o eixo das abcissas no semieixo positivo
05. ( ) Um função do 2º grau sempre possui duas raízes reais

3) Carla quer construir uma piscina retangular em seu terreno, a região disponível para construir a piscina é um terreno retangular de dimensões 20m x 15m e ela deseja deixar uma borda de "x" metros ao redor de toda a piscina. Determine a função f(x) da área da piscina em função da largura da borda.

4) Determine o valor do coeficiente c na função f(x) $x^2 - 6x - c$ sabendo que f(2)=5.

5) Determine o valor do coeficiente b na função f(x) $x^2 + bx + 1$ sabendo que f(-2)=-7.

6) Considere a função $f(x) = x^2 + 8x - 3$ e julgue as afirmações a seguir.

(i) $f(-1) = 6$

(ii) $\Delta = \sqrt{76}$

(iii) Possui duas raízes reais e distintas

(iv) *O gráfico passa pela origem do plano cartesiano*

(v) O coeficientes são $a = 1, b = 8\, e\, c = -3$

Pode-se afirmar que:

a) Todas as proposições estão corretas.

b) Apenas II, III e V estão corretas

c) Apenas III e V estão corretas

d) Somente IV está incorreta

e) Todas as proposições estão incorretas.

7) Um foguete foi lançado de uma plataforma de lançamento e sua altura h, em metros, t segundos após o seu lançamento é dada pela função $h(t) = -t^2 + 20t + 300$. Esse foguete deve atingir um alvo que

se encontra ao nível do solo (h=0).

Qual a altura máxima atingida pelo foguete?

8) Uma bola é chutada por Juninho de modo que a sua altura h, em metros é dada pela função $h(t) = -t^2 + 8t + 5$, onde t é o tempo em segundos após o chute.

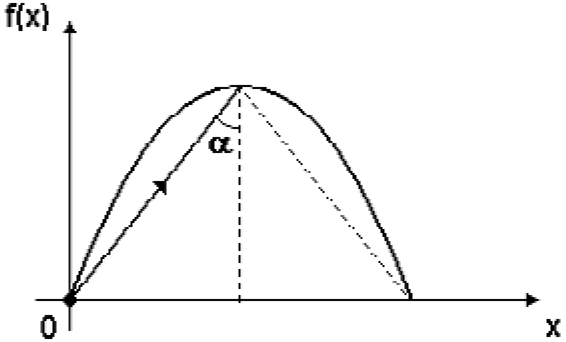
Após quanto tempo a bola atinge sua altura máxima?

9) Determine os valores de “a” de modo que o ponto (a,4) pertença a função $f(x)= x^2-5x+8$.

10) Determine o valor de k de modo que o ponto (k,9) corresponda ao vértice da função $f(x)=6x^2+bx+15$.

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) A figura a seguir mostra um anteparo parabólico que é representado pela função f(x) = $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)x^2+2\sqrt{3x}$.



Uma bolinha de aço é lançada da origem e segue uma trajetória retilínea. Ao incidir no vértice do anteparo é refletida e a nova trajetória é simétrica à inicial, em relação ao eixo da parábola.

O valor do ângulo de incidência á corresponde a:

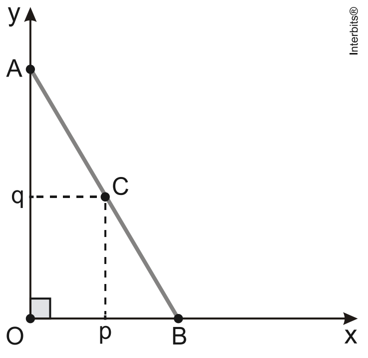
a) 30° b) 45° c) 60° d) 75°

12) Para que o polinômio do segundo grau 2 $A(x) = 3x^2 - bx + c$, com $c > 0|$ seja o quadrado do polinômio $B(x) = mx + n$,é necessário que

a) $b^2 = 4c^2$ b) $b^2 = 12c$ c) $b^2 = 12$

d) $b^2 = 36c$ e) $b^2 = 36$

13) O gráfico abaixo mostra o segmento de reta AB, sobre o qual um ponto C (p, q) se desloca de A até B (3, 0).



O produto das distâncias do ponto C aos eixos coordenados é variável e tem valor máximo igual a 4,5.

O comprimento do segmento AB corresponde a:

a) 5 b) 6 c) $3\sqrt{5}$ d) $6\sqrt{2}$

14) Examine a função real $f(x) = 2x - 3x^2$ quanto à existência de valores e pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa CORRETA.

a) A função atinge o valor máximo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.

b) A função atinge o valor mínimo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

c) A função atinge o valor máximo de $1/3$, no ponto $x = 2/3$.

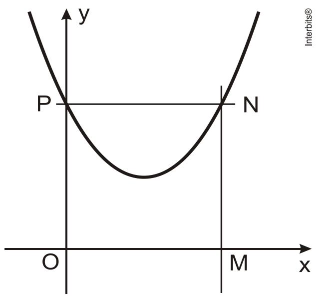
d) A função atinge o valor mínimo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.

e) A função atinge o valor máximo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

15) Considere a função real $f(x) = 1 + 4x + 2x^2$. Determine o ponto x^* que define o valor mínimo dessa função.

a) $x^* = -2$ b) $x^* = -1$ c) $x^* = -1/2$ d) $x^* = \text{zero}$ e) $x^* = 1$

16) Na figura abaixo, estão representados um sistema de eixos coordenados com origem O, o gráfico de uma função real do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e o quadrado $OMNP$, com 16 unidades de área. Sabe-se que o gráfico de $f(x)$ passa pelos pontos P e N, vértices do quadrado, e pelo ponto de encontro das diagonais desse quadrado. Assim, o valor de $a + b + c$ é



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

17) Um número N, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é:

a) 2 b) 7 c) 16 d) 17

18) Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a $\text{R\$ } 9{,}00$, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de $\text{R\$ } 1{,}00$ no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de

a) $\text{R\$ } 8{,}00$. b) $\text{R\$ } 7{,}00$. c) $\text{R\$ } 6{,}00$. d) $\text{R\$ } 5{,}00$. e) $\text{R\$ } 4{,}00$.

19) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625 b) 781150 c) 1000 d) 250 e) 375

20) Um fabricante de poltronas pode produzir cada peça ao custo de $\text{R\$ } 300{,}00$. Se cada uma for vendida por x reais, este fabricante venderá por mês $(600 - x)$ unidades, em que $0 \le x \le 600$.
Assinale a alternativa que representa o número de unidades vendidas mensalmente que corresponde ao lucro máximo.

a) 150 b) 250 c) 350 d) 450 e) 550

21) (Sejam a, b, c números reais dados com a < 0. Suponha que x1 e x2 sejam as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ e x1 < x2. Sejam $x3 = \frac{-b}{2}$ e $x4 = -\frac{2b+\sqrt{b^2-4ac}}{4a}$. Sobre o sinal de y podemos afirmar que:

a) y < 0, “ x ∈ R, x1 < x < x3

b) y < 0,” x ∈ R, x4 < x < x2

c) y > 0, “ x ∈ R, x1 < x < x4

d) y > 0, “ x ∈ R, x > x4

e) y < 0, “ x ∈ R, x < x3

22) Sejam a, b e c constantes reais com a ≠ 0 formando, nesta ordem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ é $-\sqrt{2}$. Então uma relação válida entre <u>b</u> e <u>c</u> é:

a) $c = \frac{b}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$

b) $c = b(2-\sqrt{2})$

c) $c = b(\sqrt{2}-1)$

d) $c = b\sqrt{2}$

e) $c = \frac{b}{2}(4-\sqrt{2})$

23) Considere os pontos A, B e C pertencentes ao gráfico do trinômio do segundo grau definido por $y = x^2 - 8x$. Se a abscissa do ponto A é –4; B é o vértice; a abscissa do ponto C é 12; o segmento AB tem medida d_1; e o segmento BC tem medida d_2, pode-se afirmar que

a) $d_1 + d_2 < 48$

b) $48 < d_1 + d_2 < 64$

c) $64 < d_1 + d_2 < 72$

d) $72 < d_1 + d_2 < 128$

e) $d_1 + d_2 > 128$

24) O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-14}{x} > 3 \\ x \le 12 \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

a) $0 \leq k < 2$ b) $2 \leq k < 4$ c) $4 \leq k < 6$ d) $6 \leq k < 8$ e) $k \geq 8$

25) O conjunto-solução em $\Re$ da equação $|2x^2 - 5| = x^2 - 4$ é:

a) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ b) $\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\varnothing$

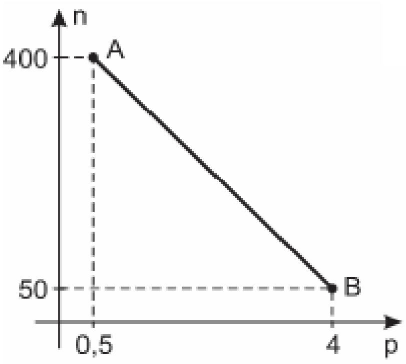
26) Para angariar fundos para a formatura, os alunos do 3º ano do CPCAR vendem bombons no horário do intervalo das aulas. Inicialmente, começaram vendendo cada bombom por R\$ 4,00. Assim, perceberam que vendiam, em média, 50 bombons por dia. A partir dos conhecimentos que os alunos tinham sobre função, estimaram que para cada 5 centavos de desconto no preço de cada bombom (não podendo conceder mais que 70 descontos), seria possível vender 5 bombons a mais por dia.

Considere:

- p o preço de cada bombom;
- n o número de bombons vendidos, em média, por dia;
- $x \in \mathbb{N}$ o número de reduções de 5 centavos concedidas no preço unitário de cada bombom; e
- y a arrecadação diária com a venda dos bombons.

Com base nessas informações, analise as proposições abaixo.

(02) O gráfico que expressa n em função de p está contido no segmento $\overline{AB}$ do gráfico abaixo.



(04) A maior arrecadação diária possível com a venda dos bombons, considerando os descontos de 5 centavos, ocorre quando concederem 35 descontos de 5 centavos.

(08) Se forem concedidos 20 descontos de 5 centavos, serão vendidos mais de 100 bombons por dia.

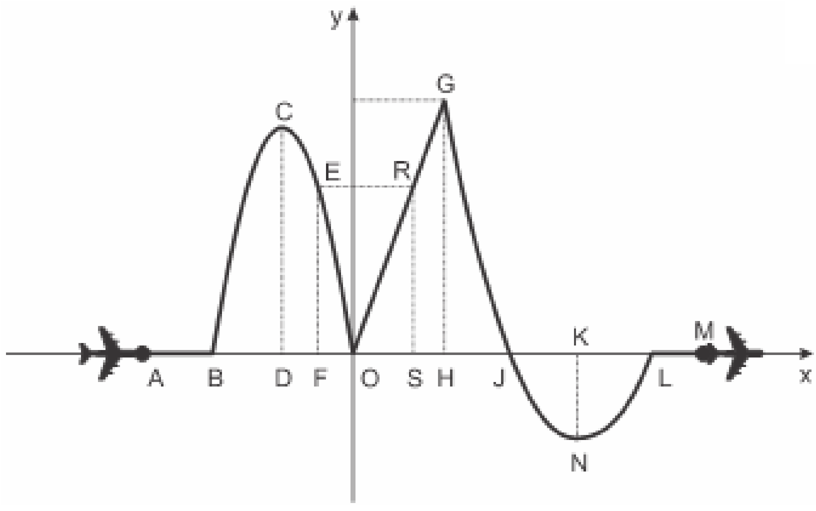
A soma das proposições verdadeiras é igual a

a) 6 b) 10 c) 12 d) 14

27) Um professor, após ter ministrado os conteúdos de função polinomial do 1º grau e função polinomial do 2º grau, elaborou, juntamente com os alunos do 9º ano, um projeto de uma pista virtual de um percurso de aviões em um jogo eletrônico.

A figura abaixo é a vista frontal dessa pista, num plano cartesiano, que é composta por:

- três percursos em linha reta: $\overline{AB}$, $\overline{OG}$ e $\overline{LM}$; e
- duas curvas parabólicas: do ponto B até o ponto O, com vértice em



Sabe-se que:

$\overline{DO} = 2$ e F é ponto médio de $\overline{DO}$

$\overline{EF} = 4$ $\quad\overline{OH} = 2$ $\quad\overline{GH} = 6$

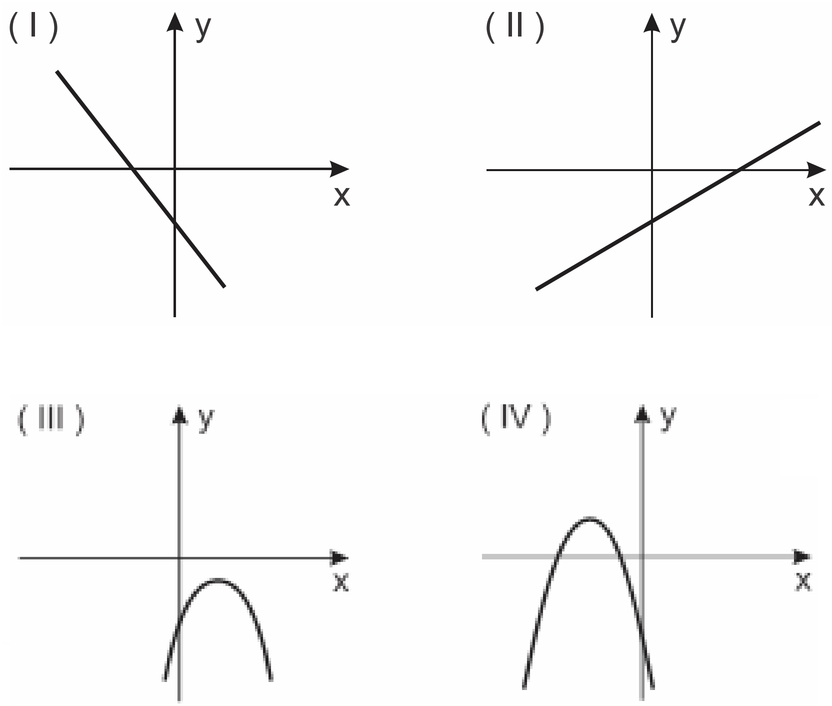
$\overline{JL} = 2$ $\quad\overline{AO} = \overline{OL} = 5$ $\quad\overline{LM} = 2$

$\overline{CD}$ e $\overline{KN}$ são eixos de simetria das curvas parabólicas.

Se todas as medidas indicadas têm a mesma unidade de comprimento, então, o valor de $\left(\overline{AB} + \overline{DC} + \overline{OS} + \overline{OJ}\right)$, nessa mesma unidade de comprimento, é

a) $\dfrac{26}{3}$ b) $\dfrac{28}{3}$ c) $\dfrac{29}{3}$ d) $\dfrac{32}{3}$

28) Um professor de matemática, ao utilizar um programa de computador, obteve a sequência de gráficos abaixo.



Os gráficos acima foram obtidos a partir das seguintes leis, na variável x :

(I) $y = mx + n$

(II) $y = -px - q$

(III) $y = ax^2 - bx + c$

(IV) $y = -rx^2 + sx + t$

Em que os coeficientes $a, b, c, r, s, t, m, n, p$ e q são números reais não nulos.

Esse professor, apresentou os dados acima a uma turma de 9º ano e pediu-lhes que classificassem as afirmativas abaixo em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) $m \cdot n \cdot b \cdot c > 0$

( ) $\dfrac{p \cdot q}{a \cdot t \cdot s} < 0$

( ) $s^2 + 4 \cdot r \cdot t > 0$

A sequência correta que os alunos deveriam ter obtido é

a) F – V – V

b) F – F – F

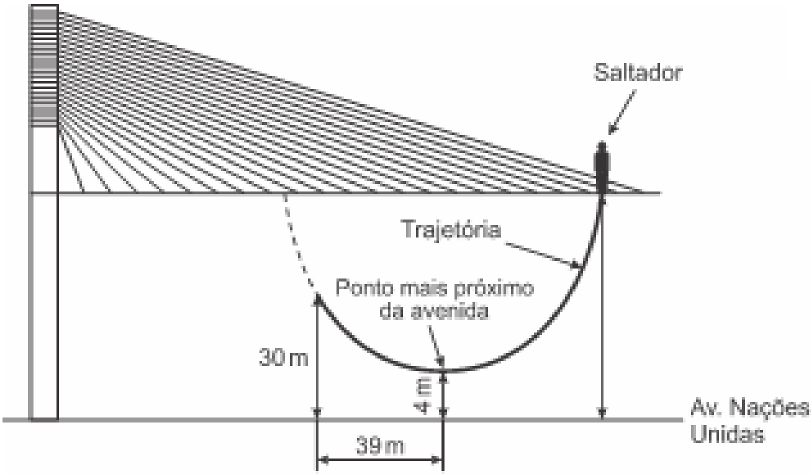
c) V – F – V

d) F – F – V

29) De acordo com o senso comum, parece que a juventude tem gosto por aventuras radicais. Os alunos do CPCAR não fogem dessa condição. Durante as últimas férias, um grupo desses alunos se reuniu para ir a São Paulo com o objetivo de saltar de "*Bungee Jumping*" da Ponte Octávio Frias de Oliveira, geralmente chamada de "Ponte Estaiada".

Em uma publicação na rede social de um desses saltos, eles, querendo impressionar, colocaram algumas medidas fictícias da aproximação do saltador em relação ao solo. Considere que a trajetória que o saltador descreve possa ser modelada por uma função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo eixo das abscissas coincida com a reta da Av. Nações Unidas e o eixo das ordenadas contenha o "ponto mais próximo da Avenida", indicados na figura.

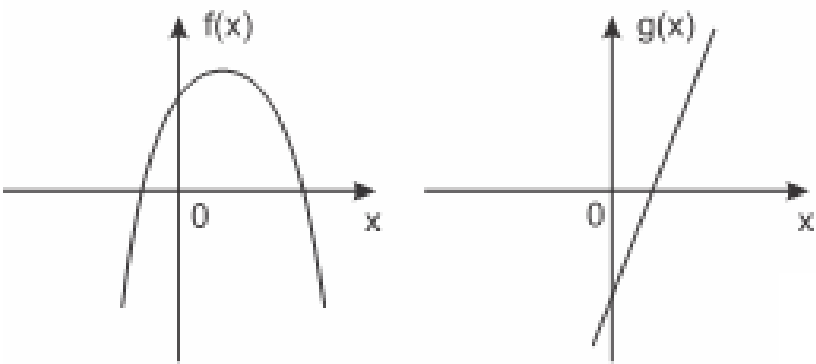
Considere, também, as medidas informadas.



O coeficiente de x^2 da função com as características sugeridas é igual a

a) $\dfrac{22}{1.521}$ b) $\dfrac{2}{117}$ c) $\dfrac{13}{1.521}$ d) $\dfrac{13}{117}$

30) Nos gráficos abaixo estão desenhadas uma parábola e uma reta que representam as funções reais f e g definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = dx + e$, respectivamente.



Analisando cada um deles, é correto afirmar, necessariamente, que

a) $(a+e)\cdot c \geq b$

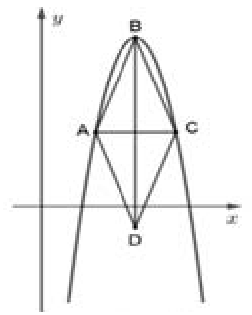
b) $-\dfrac{e}{d} < -b$

c) $a\cdot b\cdot c+\dfrac{e}{d} > 0$

d) $(-b+a)\cdot e > a\cdot c$

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2021) Observe a figura a seguir:



Na figura, a parábola é a representação gráfica no plano cartesiano da função $y=-x^2+14x-33$. Sabe-se, sobre o losango ABCD de diagonais AC e BD, com AC paralelo ao eixo x e BD paralelo ao eixo y, que o produto das abscissas dos vértices A e C é igual a 40 e que o vértice B é o produto de ordenada máxima da função. É correto afirmar que a área do losango em unidades de área é igual a:

a) 72 b) 64 c) 60 d) 54 e) 48

32) (CN 2019) As equações na incógnita "x" dadas por $ax+b=0$ e $ax^2+bx+c=0$, onde "a", "b" e "c" são números reais e a$\neq 0$, possuem uma única raiz comum. Sabendo que "m" e "n" são as raízes da equação do 2º grau, marque a opção que apresenta o valor da soma $m^{2018}+n^{2018}$

a) $\left(\dfrac{c}{b}\right)^{2018}$ b) $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^{2018}$ c) $\left(\dfrac{c}{a}\right)^{2018}$

d) $\left(\dfrac{bc}{a}\right)^{2018}$ e) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2018}$

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) F-F-F-V-V
2) F-F-V-V-F
3) $f(x)=(20-2x)(15-2x)$
4) $c = -13$
5) $b = 6$
6) C
7) 400 m
8) 4 segundos
9) $a = 1$ e $a = 4$
10) -2
11) A
12) B
13) C
14) E
15) B
16) C
17) D
18) C
19) A
20) D
21) C

22) E

23) E

24) D

25) D

26) D

27) D

28) C

29) B

30) D

31) D

32) E

TÓPICOS DE ÁLGEBRA ELEMENTAR

Equação biquadrada

1) Definição e resolução.

Toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, onde $a \neq 0$, denominamos equação biquadrada.

Para determinarmos as raízes de uma equação biquadrada, consideramos $x^2 = y$ logo, por conseguinte, temos $x^4 = y^2$.

Ao fazermos as substituições na equação biquadrada, obteremos a equação $ay^2 + by + c = 0$ (EQUAÇÃO DO $2^{\underline{0}}$ GRAU) que denominaremos **EQUAÇÃO RESOLVENTE**.

Daí, sendo y_1 e y_2 as raízes da equação resolvente, as raízes da equação biquadrada serão $x_1 = \sqrt{y_1}$, $x_2 = \sqrt{y_2}$, $x_3 = -\sqrt{y_1}$ e $x_4 = -\sqrt{y_2}$.

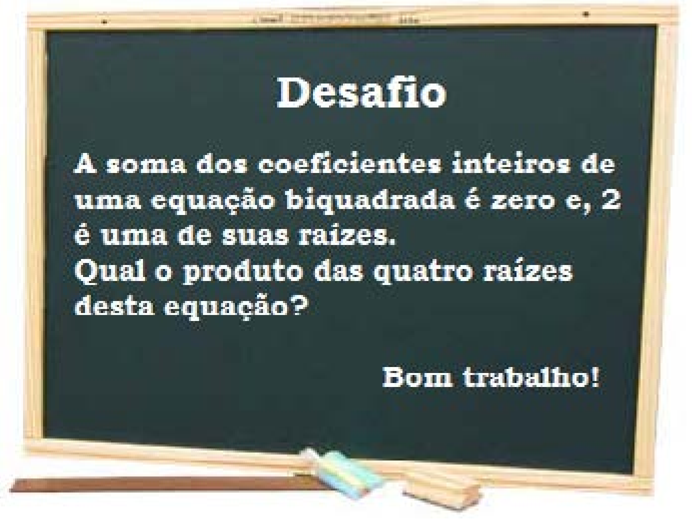
Observe que as raízes da equação biquadrada são simétricas duas a duas, logo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

2) Relações entre coeficientes e as raízes não negativas de uma equação biquadrada.

Sejam x_1 e x_2 as raízes não negativas de uma equação biquadrada,temos:

2.1)Soma dos quadrados das raízes não negativas: $\boxed{x_1^2 + x_2^2 = -\frac{b}{a}}$

2.2)Produto dos quadrados das raízes não negativas: $\boxed{x_1^2 \times x_2^2 = \dfrac{c}{a}}$



EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Determinar as raízes reais da equação $x^4 - 10x^2 - 11 = 0$

2) Determine o produto das raízes positivas de $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

3) Determinar a soma dos quadrados das raízes não negativas da equação $x^4 - 25x^2 + 5 = 0$

4) Determinar o produto dos quadrados das raízes não negativas da equação $x^4 - 25x^2 + 5 = 0$

5) Determinar a soma dos quadrados das raízes não negativas da equação $ax^4 - 11ax^2 + 7 = 0$

6) Determinar o produto dos quadrados das raízes não negativas da equação $bx^4 - 12x^2 + 17b = 0$

7) Determine as soluções da equação $\dfrac{x^2+1}{x^2-4} = x^2 - 7$

8) Determinar o valor de "k" para que a equação $x^4 + (k-1)x^2 + k + 5 = 0$ admita x=0 como solução.

9) Determinar o valor de "k" sabendo que a soma dos quadrados das raízes não negativas da equação $(k+2)x^4+(k^2+4k+4)x^2+k^2-4=0$ é igual à -12.

10) Determinar o valor de "k" sabendo que o produto dos quadrados das raízes não negativas da equação

$(k+2)x^4+(k^2+4k+4)x^2+k^2-4=0$ é igual à 5

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Resolva a equação : $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$

12) Uma das raízes da equação $x^4 - bx^2 + 36 = 0$ é 3. Calcular as outras raízes, sendo b constante.

13) Calcule a média aritmética das raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

14) Calcular m para que a equação $x^4 - 3x^2 + m - 1 = 0$ tenha duas raízes nulas.

15)Qual o valor de $m + p$ para que a equação $mx^4 + (p+1)x^2 + m^2 + m = 0$,tenha todas as suas raízes nulas ?

16) Qual o valor de m para que a equação $x^4 - 2x^2 + m - 3 = 0$, tenha duas raízes nulas e duas reais e simétricas ?

17) Determine a para que a equação $x^4 + ax^2 + 4 = 0$ tenha raízes reais.

18)A equação $x^4 - 8x^2 + k^2 - 5 = 0$, onde k é um número inteiro, tem 4 raízes reais. A soma dos valores absolutos de k é:

(a)13 (b)14 (c)15 (d)16 (e)17

19)Duas das raízes da equação biquadrada $x^4 + bx^2 + c = 0$ são $0,2333...$ e $\frac{30}{7}$. O valor de c é:

(a)1 (b)3 (c)5 (d)7 (e)11

20)Determine m para que a equação $2x^4 + 3x^2 + m + 1 = 0$ tenha raízes nulas e duas não reais.

21)Considere a soma de n parcelas $S = n^{15} + n^{15} + ... + n^{15}$. Sobre as raízes da equação $\sqrt[4]{S} = 13n^2 - 36$, pode–se afirmar que:

(a)seu produto é –36

(b)sua soma é nula

(c)sua soma é 5

(d)seu produto é 18

(e)seu produto é 36

22) Uma equação biquadrada da qual –1 e 2 são duas de suas raízes possui para soma dos seus coeficientes:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

23)O conjunto das soluções reais da equação $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$ é igual a :

(a) $\left\{\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}\right\}$

(b) $\left\{\pm\sqrt[4]{6}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}\right\}$

(c) $\left\{\pm\sqrt[4]{6}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}\right\}$

(d) $\left\{\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}\right\}$

(e) $\left\{\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt[4]{6}\right\}$

24)Determinar p na equação $25x^4 - 25x^2 + 4(p+1)^2 = 0$ de modo que uma das suas raízes reais e positivas seja metade da outra.

25)Formar uma equação biquadrada cujas raízes reais e positivas satisfaçam as relações: $\frac{1}{2} \times \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2} = 0$ e $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2$.

26) Sendo x_1 e x_2 as raízes positivas da equação $3x^4 - 6mx^2 + 3m^2 - m + 1 = 0$, determinar m de modo que $x_1^2 - x_2^2 = 1$.

27) O número de pares ordenados distintos (x, y) onde x e y são inteiros positivos tais que $x^4 y^4 - 10x^2 y^2 + 9 = 0$ é igual a:

(a) 0 (b) 3 (c) 4 (d) 12 (e) 15

28) A equação $x^4 - (a-6)x^2 + (9-a) = 0$, na variável x, tem quatro raízes reais e distintas, se e somente se :

(a) a>8 (b) 6<a<8 (c) 8<a<9 (d) 6<a<9 (e) a>9

29) Se a equação $x^4 - 4(m+2)x^2 + m^2 = 0$ admite quatro raízes reais, então

(a) o maior valor inteiro de m é −3.

(b) a soma dos três menores valores inteiros de m é *zero*.

(c) a soma dos três maiores valores inteiros de m é −12.

(d) só existem valores inteiros e positivos para m.

(e) só existem valores negativos para m.

30) Sendo x_1, x_2, x_3, x_4 as raízes reais e não nulas da equação $x^4 - 5x^2 + a = 0$, tais que $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2} = 10$ e $x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4} + x_3^{\ 4} + x_4^{\ 4} = 34$, podemos afirmar que

(a) <u>a</u> possui 4 divisores positivos

(b) <u>a</u> possui 6 divisores inteiros

(c) <u>a</u> possui 4 divisores inteiros

(d) <u>a</u> passui 6 divisores positivos

(e) <u>a</u> não é número inteiro

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) **(EPCAR 2020)** Seja $S \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução, na variável x, da equação irracional dada por $\sqrt[4]{\left(x^2+x\right)^4} + \sqrt[8]{\left(x^2+x\right)^4} = 420$

Sugestão: use $\left(x^2+x\right) = y$

Analise as alternativas e marque a FALSA.

a) Os elementos de S são tais que $S \subset \left(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\right)$

b) O produto dos elementos de S é um número positivo

c) A soma do maior e do menor elemento de S é igual a 1

d) A soma dos elementos de S é igual a 2

32) A soma dos cubos das raízes reais da equação $\left(x^2-2x+1\right)^2 = 5x^2-10x+1$ é igual a

a) 36 b) 34 c) 18 d) −18 e) − 34

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1) $x = \pm\sqrt{11}$
2) $3\sqrt{3}$
3) 25
4) 5
5) 11
6) 17
7) $x = \pm 3 \ ou \ x = \pm\sqrt{3}$
8) K = -5
9) K = 10
10) K = 7
11) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$
12) $b = 13$
13) $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 0$
14) $m = 1$
15) $m + p = -2$
16) $m = 3$
17) $a \leq -4$
18) b
19) a
20) $m = -1$
21) c

22) a

23) b

24) Os valores de p são 0 e -2

25) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

26) $m = \frac{7}{4}$

27) b

28)	c
29)	b
30)	b
31)	a
32)	b

EQUAÇÃO IRRACIONAL

Toda equação que possua incógnita submetida a um radical é denominada equação irracional.

A partir de agora veremos alguns exemplos de equações irracionais e mostraremos algumas formas de como resolvê-las.

Exemplo: Determine a raiz real da equação $\sqrt{x+6}=x$.

Resolução: Iniciaremos verificando que, como $x \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geq 0$.

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, teremos:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = x^2$$

$$x+6=x^2$$

$$x^2-x-6=0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $x=3$ ou $x=-2$.

Como $x \geq 0$,logo $x=3$ é a raiz da equação.

Exemplo: Resolva a equação $4-\sqrt[3]{x^2-8}=3$ em $\mathbb{R}$.

Resolução: Isolando o radical e elevando ambos os membros da equação ao cubo, teremos:

$$\sqrt[3]{x^2-8}=1$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2-8}\right)^3=1^3$$

$x^2 - 8 = 1$

$x^2 = 9$

Daí, temos $x = 3$ ou $x = -3$.

Não há nenhuma restrição em relação ao valor de x, então 3 e -3 são as raízes da equação.

Exemplo: Determine as raízes reais da equação $\sqrt{28+2x} - \sqrt{21+x} = 1$.

esolução: Isolando um dos radicais e, elevando ambos os membros da equação ao quadrado, teremos:

$\sqrt{28+2x} = 1 + \sqrt{21+x}$

$\left(\sqrt{28+2x}\right)^2 = \left(1+\sqrt{21+x}\right)^2$

$28 + 2x = 1 + 2(1)\left(\sqrt{21+x}\right) + 21 + x$

$6 + x = 2\sqrt{21+x}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos:

$(6+x)^2 = \left(2\sqrt{21+x}\right)^2$

$36 + 12x + x^2 = 4(21+x)$

$36 + 12x + x^2 = 84 + 4x$

$x^2 + 8x - 48 = 0$

Ao resolvermos a equação do segundo grau, obtemos $x = -12$ ou

$x = 4$.

Agora, faremos a verificação da validade de cada um dos valores obtidos para x:

* Para $x = -12$, obteremos $\sqrt{28+2(-12)} - \sqrt{21+(-12)} = 1$, ou seja, $\sqrt{4} - \sqrt{9} = 1$ que é falso. Logo, -12 não é raiz.

* Para $x = 4$, obteremos $\sqrt{28+2(4)} - \sqrt{21+(4)} = 1$, ou seja, $\sqrt{36} - \sqrt{25} = 1$ que é verdadeira. Logo, 4 é raiz.

Daí, a raiz da equação é 4.

Exemplo: Qual a raiz real da equação $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}} + \sqrt[3]{3x-1} = 4$?

Resolução: Adotando $\sqrt[3]{3x-1} = a$, $a \in \mathbb{R}$, ao substituirmos na equação $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}} + \sqrt[3]{3x-1} = 4$, teremos: $\sqrt{2+a} + a = 4$

$$\sqrt{2+a} = 4 - a, \text{ onde } -2 \le a \le 4.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, teremos:

$$\left(\sqrt{2+a}\right)^2 = (4-a)^2$$

$$2 + a = 16 - 8a + a^2$$

$$a^2 - 9a + 14 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau encontramos $a = 2$ (ok!) e $a = 7$ (não convém, pois $-2 \le a \le 4$).

Daí, temos: $\sqrt[3]{3x-1} = a$

$$\sqrt[3]{3x-1} = 2$$

Elevando ambos os membros ao cubo, obtemos: $\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^3 = (2)^3$

$$3x - 1 = 8$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Daí, a raiz da equação é 3.

Exemplo: O número de equações dentre as abaixo listadas que possuem pelo menos uma solução no conjunto dos inteiros positivos é igual a:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Resolução: Vamos resolver cada uma das equações, onde x é um inteiro positivo.

(i) Para todo x inteiro positivo, é evidente que $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ logo, a primeira equação possui infinitas soluções;

(ii) $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x}$

Efetuando as operações indicadas, temos $\sqrt{x^2} = 2\sqrt{x}$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $x^2 - 4x = 0$.

Resolvendo a equação encontramos $x = 0$ (não convém!) e $x = 4$ (ok!).

Logo, a segunda equação possui uma solução;

(iii) $\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$

Efetuando as operações indicadas, temos $\sqrt{x^3} = 3\sqrt{x}$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $x^3 - 9x = 0$ onde, resolvendo a equação obteremos $x = 0$ (não convém!), $x = -3$ (não convém!) e $x = 3$ (ok!). Daí, a equação possui uma solução;

(iv) $\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$

Efetuando as operações indicadas, temos $\sqrt{x^4} = 4\sqrt{x}$.

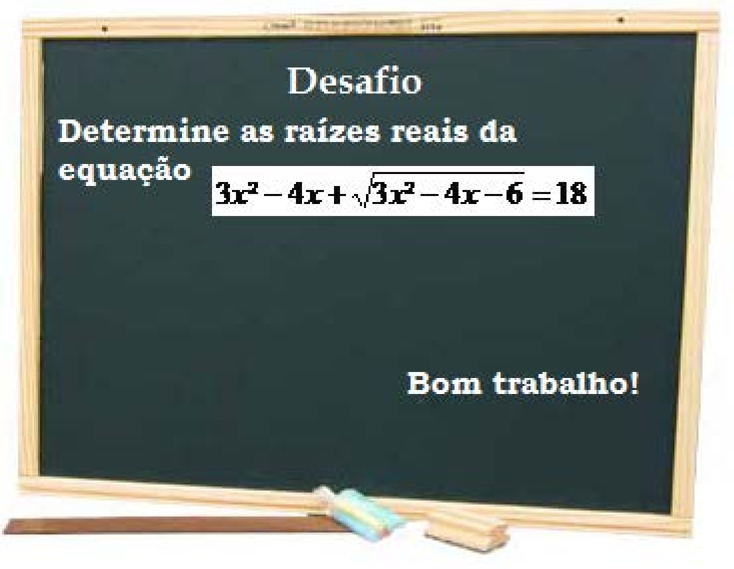
Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $x^4 - 16x = 0$ onde, resolvendo a equação, verificamos que a equação não possui solução inteira positiva.

(v) $\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}$

Efetuando as operações indicadas, temos $\sqrt{x^5} = 5\sqrt{x}$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $x^5 - 25x = 0$ onde, resolvendo a equação, verificamos que a equação não possui solução inteira positiva.

Daí, o número de equações que possui pelo menos uma solução inteira positiva é 3, logo, a alternativa correta é a letra c.



EXERCÍCIOS INTRODUTORIOS

1) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{3x+1}=5$

2) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x-11}=\frac{4}{5}$

3) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x^2+10x-2}=2$

4) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{7+\sqrt{x+1}}=3$

5) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$

6) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}$

7) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x+1}=2x$

8) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{4x+5}-x=0$

9) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=6$

10) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x^2+2x+1}=x-1$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Determine as soluções reais de $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=3$.

12) Determine a soma das raízes reais da equação

$$\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[9]{x^2+2x+1}-\sqrt[9]{x+1}=2.$$

13) Sobre a raiz real da equação

$$\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}=x^2-4x+13,$$

podemos afirmar que:

(a) é um quadrado perfeito

(b) possui quatro divisores positivos

(c) é um número ímpar

(d) possui seis divisores inteiros

(e) é um número primo

14)A equação $\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-3x}$:

(a) não tem solução.

(b) tem uma única solução positiva.

(c) tem uma única solução negativa.

(d) tem duas soluções, uma positiva e outra negativa.

(e) tem duas soluções, ambas negativas.

15)Determine as raízes reais da equação $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$.

16)A raiz da equação $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$ é:

(a) 6/5 (b) 5/4 (c) 4/3 (d) 3/2 (e) 1

17) A solução real da equação $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}$ é:

(a) uma dízima periódica

(b) um quadrado perfeito

(c) um número racional cujo inverso tem quatro divisores positivos

(d) um número irracional

(e) inexistente

18) Calcular o menor valor positivo de k, para que a raiz real da equação $\sqrt{4-\sqrt[3]{x^3-k}}=1$ seja um número inteiro

(a) 1 (b) 60 (c) 27 (d) 37 (e) 40

19) A maior raiz real da equação $\sqrt{2x+1}-4\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}=0$ é :

(a) zero

(b) um número irracional

(c) um número par entre 42 e 310

(d) um número par maior do que 320

(e) um número ímpar maior que 160

20) Se a solução da equação $\sqrt{6x+6}-\sqrt{5x-5}=\sqrt{4x+4}-\sqrt{3x-3}$ possui a forma $\dfrac{a-\sqrt{15}-\sqrt{24}}{b-\sqrt{15+\sqrt{24}}}$ então o par ordenado (a,b) é:

(a) (9,−1) (b) (−9,−1) (c) (9, 1) (d) (−1, 9) (e) (−9, 1)

21) Se $x=\sqrt{a}$, $a\in\mathbb{R}$, é raiz da equação $\dfrac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$, então:

(a) a é um número par menor do que 7.

(b) a é um número inteiro que possui quatro divisores positivos.

(c) a é um número par maior do que 11.

(d) a é um número ímpar maior do que 20.

(e) a é um número primo.

22) Ache as soluções reais de $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$.

23) Se r é a menor raiz real da equação $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4}=\sqrt{x^6}$, então:

(a) r < -1 (b) -1 < r < 0 (c) r = 0 (d) 0 < r < 1 (e) r > 1

24) Sobre o conjunto solução em $\mathbb{R}$ da equação $\sqrt{(2x+1)^2}=x-3$,

podemos afirmar que:

(a) é unitário cujo elemento é positivo.

(b) possui dois elementos em que um é racional e o outro irracional.

(c) é vazio.

(d) é unitário cujo elemento é negativo.

(e) possui dois elementos irracionais.

25) O quociente entre a maior e a menor raiz da equação

é: $\sqrt[9]{x} + \dfrac{\sqrt[9]{x^8}}{x} = \dfrac{17}{4}$

(a) 2^{27} (b) 2^{32} (c) 2^{36} (d) 2^{45} (e) 2^{54}

26) Os números reais positivos a e b satisfazem a igualdade:

$a\sqrt{(a^2 + 2b^2)} = b\sqrt{(9a^2 - b^2)}$. Um valor possível para $\dfrac{a}{b}$ é:

(a) $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{2}$ (b) $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$ (c) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$ (d) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ (e) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

27) A equação $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$ tem duas raízes cuja soma é:

(a) 10 (b) 4 (c) 8 (d) 5 (e) 6

28) O maior valor de y, na solução de sistema, $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt[5]{y^2} = 5 \end{cases}$ é:

(a) 1 (b) 16 (c) 32 (d) 64 (e) 128

29) O valor de x no sistema, $\begin{cases} 16x - y = 1 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt[4]{y+3} = 1 \end{cases}$ é:

(a) $15+14\sqrt{2}$ (b) $15+12\sqrt{2}$

(c) $15+10\sqrt{2}$ (d) $15+8\sqrt{2}$

(e) $15+6\sqrt{2}$

30) A solução da equação $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}}+\sqrt[3]{3x-1}=4$

(a)divisor de 30.

(b)múltiplo de 5.

(c)fator de 40.

(d)múltiplo de 7.

(e)divisível por 9.

CAIU NOS ULTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2020) Seja "A" o conjunto das soluções da equação $\sqrt{\left(x^2-5x+6\right)^4}=\dfrac{1}{16}$. A quantidade de elementos do conjunto "A" é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

32) (EPCAR 2019) Sobre o conjunto solução, na variável x, $x \in \mathbb{R}$, da equação $x+2=\sqrt{x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2}}$, pode-se dizer que

a) É vazio

b) Possui somente um elemento

c) Possui dois elementos de sinais iguais

d) Possui dois elementos de sinais opostos

33) (CMRJ 2020) Problemas, em diversas áreas de conhecimento, podem ser modelados por meio de equações e inequações. Sobre a resolução de equações e inequações, foram feitas as seguintes afirmativas:

I- O Conjunto solução da equação irracional $x+\sqrt{x+5}=7$ possui dois elementos.

II- As inequações $\left(x^2+3x-7\right)\left(3x-5\right)\left(x^2-2x+3\right)<0$ e $\left(x^2+3x-7\right)\left(3x-5\right)<0$ possuem o mesmo conjunto solução

III- A soma dos inversos das raízes da equação $x^2-x+2=0$ é igual a $\dfrac{1}{2}$.

a) as afirmativas l, II e III são verdadeiras.

b) apenas as afirmativas l e II são verdadeiras.

c) apenas as afirmativas l e III são verdadeiras.

d) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) apenas a afirmativa II é verdadeira.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) $S = \{8\}$

2) $S = \left\{\dfrac{291}{50}\right\}$

3) $S = \left\{\dfrac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}\right\}$

4) $S = \{3\}$

5) $S = \{7\}$

6) $S = \{3\}$

7) $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right\}$

8) $S = \{5\}$

9) $S = 4$

10) $S = \varnothing$

11) -3

12) -11

13) e

14) e

15) $\pm 3\sqrt{21}$

16) b

17) c

18) d

19) d

20) a

21) e

22) 1 e 3

23) a

24) c

25) c

26) e

27) e

28) c

29) b

30) a

31) d

32) a

33) d

Inequação irracional.

PROPOSIÇÃO:“Se a>0 e b>0, então, a>b se,e somente se, $a^2 > b^2$.”

Prova: $(\Rightarrow)$ **Como a>0, b>0 e a>b, então, temos a+b>0 e a-b>0.**

Logo, temos (a-b)(a+b)>0,ou seja, $a^2-b^2>0$.

Daí, $a^2>b^2$.

$(\Leftarrow)$ **Se $a^2>b^2$ então, $a^2-b^2>0$; logo,(a+b)(a-b)>0.**

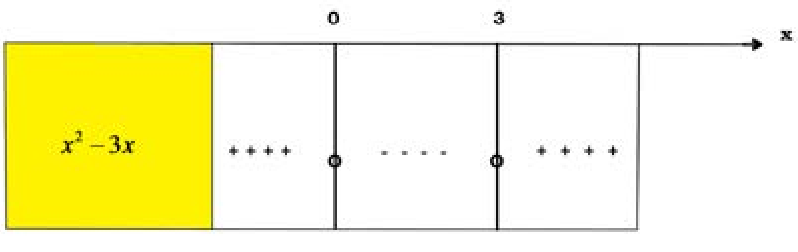
Como a>0 e b>0, então a+b>0.

Daí, a-b>0 ou seja,a>b.

Agora, como resolver inequações irracionais? Vamos ao trabalho!

Exemplo: Determine a solução da inequação $\sqrt{x^2-3x}<2$.

Resolução: Iniciaremos a resolução fazendo o estudo da variação do sinal de x^2-3x para todo x , $x \in \mathbb{R}$.



Observe que:

(i) para $0 < x < 3$, temos $x^2 - 3x < 0$.Logo, $\sqrt{x^2 - 3x} \notin \mathbb{R}$;

(ii) para $x = 0$ ou $x = 3$, temos $\sqrt{x^2 - 3x} = 0 < 2$ (ok!);

(iii) para $x < 0$ ou $x > 3$ $(*)$, temos $\sqrt{x^2 - 3x} > 0$.

Daí,pela proposição que provamos inicialmente,teremos:

$$\sqrt{x^2 - 3x} < 2$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)^2 < (2)^2$$

$$x^2 - 3x < 4$$
$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

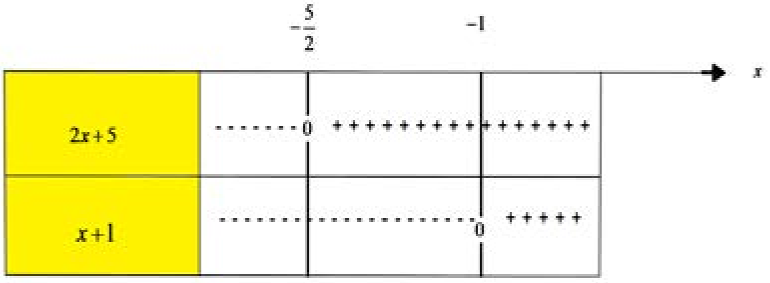
Logo, temos $-1 < x < 4$ $(**)$

Por $(*)$ e $(**)$, temos $-1 < x < 0$ ou $3 < x < 4$.

Daí, por (ii) e (iii), temos que a solução da inequação $\sqrt{x^2 - 3x} < 2$ é $-1 < x \leq 0$ ou $3 \leq x < 4$.

Exemplo: Determine o menor valor real de x, tal que $\sqrt{2x+5} \leq x+1$.

Resolução: Vamos fazer o estudo da variação do sinal de $2x+5$ e de $x+1$ para todo x, $x \in \mathbb{R}$.



Observe que:

(i) para $x < -\frac{5}{2}$, temos $2x+5<0$. Logo, $\sqrt{2x+5} \notin \mathbb{R}$;

(ii) para $-\frac{5}{2} \leq x < -1$, temos $\sqrt{2x+5} \geq 0$ e $x+1<0$, logo, a asserção $\sqrt{2x+5} \leq x+1$ é falsa;

(iii) para $x=-1$, temos $\sqrt{2x+5} > 0$ e $x+1=0$, logo, a asserção $\sqrt{2x+5} \leq x+1$ é falsa;

(iv) para $x > -1$ $(*)$, temos $\sqrt{2x+5} > 0$ e $x+1>0$.

Daí, temos:

$$\sqrt{2x+5} \leq x+1$$

$$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 \leq (x+1)^2$$

$$2x+5 \le x^2+2x+1$$

$$x^2-4 \ge 0$$

$$x \le -2 \quad \text{ou} \quad x \ge 2 \quad (**)$$

Por $(*)$ e $(**)$, temos que $x \ge 2$.

Resposta: O menor valor de x é 2.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{3x+1} \geq 3x+1$

2) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x-11} > 1$

3) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x^2-5x+3} > 0$

4) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x+\sqrt{3x-1}} \leq \frac{5}{2}$

5) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7} < 6$

6) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{3x+3}-\sqrt{4x-1} < \sqrt{x-4}$

7) Determine as soluções reais da equação $-\sqrt{x+3} \geq x+1$

8) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x^2+9}-2x+3 \geq 0$

9) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{x}+\sqrt{x-9} > \frac{3x-3}{8}$

10) Determine as soluções reais da equação $\sqrt{2x^2-39x+19} < 19+x$

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11) Dada a inequação $\sqrt{x^2-7x+17} \le \sqrt{8+2x-x^2}$ e sendo S a soma de todas as suas soluções inteiras podemos afirmar que S^S é igual a :

(a) 3125 (b) ¼ (c) 0 (d) 25 (e) NRA

12) Qual a solução do sistema abaixo ?

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x}+2} \times \sqrt{\sqrt{x}-2} - 5\sqrt[4]{x-4} + 6 < 0 \\ 1500x^{-1} + x > 80 \end{cases}$$

(a) $x > 85$
(b) $30 < x < 50$
(c) $20 < x < 85$
(d) $20 < x < 50$ ou $x > 85$
(e) $20 < x < 30$ ou $50 < x < 85$

13)Determine para quais valores de x ,temos

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9 \text{ ?}$$

14)Determine para quais valores de x , temos $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

15) Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2+3x-5} \le x+1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a

(a) 0 (b) 1 *(c) 2 (d) 3 (e) 4

16)Resolva a inequação $\sqrt{3x-5} \geq 2$.

17) O menor número inteiro positivo que satisfaz à inequação $\sqrt{3x^2 - 7x + 2} > -4$, é :

(a) um número par

(b) um múltiplo de 5

(c) um divisor de 49

(d) um múltiplo de 11

(e) um divisor de 39

18) Determine a soma das soluções inteiras da inequação $\sqrt{2x-1} > x - 2$

.(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

19) Determine o maior inteiro positivo que é solução da inequação $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x} \leq 2$.

20) Resolva a inequação $\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

21) Resolva a inequação $\sqrt{x+1} < 2 + \sqrt{x-4}$

22)Quantas soluções inteiras possui a inequação $\sqrt{2 - 3x - x^2} > \sqrt{x^2 - 5x + 4}$?

(a)Nenhuma (b) Uma (c) Duas (d) Três (e) Quatro

23)Quantas soluções inteiras possui a inequação
$\sqrt{x^2-2x+2}<\sqrt{2x^2-x+4}$?

(a)Nenhuma (b)10 (c)25 (d)50 (e)Infinitas

24)Se a e b são, respectivamente, o menor valor inteiro negativo e o menor valor inteiro positivo que satisfazem à inequação $x+\sqrt{x^2-10x+9}>\sqrt{x+2\sqrt{x^2-10x+9}}$, determine o valor de $a+b$.

(a)-1 (b)2 (c)0 (d)-2 (e)1

25) Resolva a inequação $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}$.

26) Determine a soma de todas as soluções inteiras da inequação
$\sqrt{x^2+x-12}-x<0$.

(a) 59 (b) 63 (c) 67 (d) 71 (e)75

27) Determine o menor valor inteiro que é solução da inequação
$1-\sqrt{13+3x^2}\leq 2x$.

28) Resolva a inequação $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

29) Quantas soluções inteiras possui a inequação $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}<4$?

(a) 22 (b) 23 (c) 24 (d) 25 (e) Nenhuma

30) Resolva a inequação: $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

Dica: Considere $\frac{1}{x}=a$

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (CN 2021) Seja A o conjunto de todos os valores reais de x, tais que $\sqrt{(x-2)^2}>x-2$. É correto afirmar que:

a) A é todo o conjunto dos Reais

b) $A=]2,+\infty[$

c) $A=]-\infty,2[$

d) $A=]-2,+\infty[$

e) $A=]-2,2[$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) $[-1/3\ ,\ 0]$
2) $(6\ ,\ \infty)$
3) $(-\infty\ ,\ 1)\cup(3/2\ ,\infty)$
4) $[\ 1/3\ ,\ 2]$
5) $[7\ ,\ 11]$
6) Vazio
7) $[-3\ ,\ -2]$
8) $(-\infty\ ,\ 4]$
9) $(9\ ,\ 25)$
10) $(0\ ,\ 20)$
11) a
12) e
13) $-\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{45}{8}$ e $x\neq 0$
14) $-1\leq x<\dfrac{8-\sqrt{31}}{8}$
15) c
16) $x\geq 3$
17) e
18) e
19) 3
20) $x<-4$ ou $\mathrm{x}\geq 3$

21) $x > \frac{65}{16}$

21) a

22) e

24) d

25) $\frac{\sqrt{13}-5}{2} < x \leq 1$

26) b

27) -2

28) $2 \leq x < \frac{2\sqrt{21}}{3}$

29) b

30) $1 < x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

31) c

TRANSFORMAÇÃO DE EXPRESSÕES DA FORMA $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

O que vamos estudar neste capítulo é como escrever expressões do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, denominadas radicais duplos, como uma soma ou diferença de dois radicais simples.

Vamos iniciar a nossa discussão com o seguinte problema:

Um professor de Matemática, ao resolver uma equação, encontrou como raiz o radical duplo $\sqrt{7-\sqrt{40}}$. Com objetivo de transformar esse radical numa diferença de radicais mais simples, escreveu a seguinte igualdade: $\sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Os valores de *a* e *b* que satisfazem essa igualdade são, respectivamente:

(a) 5 e 2 (b) 2 e 5 (c) 3 e 5 (d) 5 e 3 (e) 3 e 2

Resolução: O problema acima consiste em escrever um radical duplo como uma diferença de dois radicais simples. Então, vamos ao trabalho!

Observe que $\sqrt{7-\sqrt{40}} > 0$, logo, devemos ter $a > b > 0$.

Elevando ambos os membros da igualdade $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ao quadrado, teremos:

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{40}}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$
$$7-\sqrt{40}=a+b-2\sqrt{ab}$$
$$7-\sqrt{40}=(a+b)-\sqrt{4ab}$$

Daí, devemos ter $\begin{cases} a+b=7 \\ 4ab=40 \end{cases}$ onde, resolvendo o sistema, encontraremos $a=5$ e $b=2$.

Logo, a alternativa correta é a letra a.

No exemplo anterior, vimos que o professor escreveu o radical duplo $\sqrt{7-\sqrt{40}}$ como uma diferença de dois radicais simples, ou seja, $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Agora vamos generalizar o problema: Como fazer para escrever expressões do tipo $\sqrt{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}$,denominadas radicais duplos (caso B não seja um quadrado perfeito), como uma soma ou diferença de dois radicais simples?

Consideremos $\sqrt{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, onde $A\pm\sqrt{B}>0$, $B>0$ e $x>y>0$.

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos $\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}=x+y\pm 2\sqrt{xy}$, ou seja, $\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}=x+y\pm\sqrt{4xy}$.

Da igualdade $\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}=x+y\pm\sqrt{4xy}$, temos que $\begin{cases} x+y=\mathrm{A} \\ xy=\dfrac{\mathrm{B}}{4} \end{cases}$ onde, x

e y são as raízes da equação $x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$.

Resolvendo a equação acima, encontramos $x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$ e $y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$.

Considerando $\boxed{C = \sqrt{A^2 - B}}$, teremos $\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$ onde, para que os radicais no segundo membro sejam radicais simples, $A^2 - B$ deve ser um quadrado perfeito.

Vejamos um exemplo: Transforme o radical $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$ numa soma de dois radicais simples.

Resolução: Temos $A = 5$ e $B = 24$ logo,

$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{5^2 - 24} = 1$.

Daí, $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

EXERCÍCIOS INTRODUTÓRIOS

1)Transformar $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, numa soma de radicais simples.

2)Transformar $\sqrt{7+\sqrt{13}}$, numa soma de radicais simples.

3)Transformar $\sqrt{10-\sqrt{19}}$, numa soma de radicais simples.

4)Transformar $\sqrt{6-\sqrt{20}}$, numa soma de radicais simples.

5)Transformar $\sqrt{12-2\sqrt{11}}$, numa soma de radicais simples.

6)Transformar $\sqrt{12+3\sqrt{7}}$, numa soma de radicais simples.

7)Transformar numa soma de dois radicais simples: $\sqrt{5+\sqrt{24}}$.

8)Transformar numa diferença de dois radicais simples: $\sqrt{12-\sqrt{23}}$.

9)Seja $x = \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$,calcule o valor de x^{x^x} .

10)Escrevendo o radical $\sqrt{12+\sqrt{80}}$ como $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, onde a e b são números reais positivos, determinar o valor de $a-b$.

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

11)Escrevendo o radical $\sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ na forma $\sqrt{a}$, determine o valor de a.

12) Se $y=\sqrt[3]{\sqrt{11+\sqrt{21}}-\sqrt{11-\sqrt{21}}}$, então o valor de y é igual a:

(a) $\sqrt[3]{2}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt[6]{2}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) $\sqrt[3]{3}$

13)Escrevendo o radical $\sqrt{\dfrac{30(3+\sqrt{5})}{11}}$ na forma $a\sqrt{\dfrac{b}{c}}+\sqrt{\dfrac{d}{c}}$, onde a, b, c e d são números primos,determine o valor de $a+b+c+d$.

14) Qual o valor de $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$?

15) Escrevendo o radical $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ na forma $x+\left(x+1\right)\sqrt{x+2}$,onde x é um inteiro positivo,determine o valor de $3x+3$.

16) Escreva a expressão $\sqrt{a+b-c-2\sqrt{b(a-c)}}$ como uma diferença de dois radicais simples.

17) Escrever o radical $\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}$ como uma diferença de dois radicais simples.

18)Determine o menor valor inteiro e positivo de a que permite transformar o radical $\sqrt{a+3+\sqrt{a^2+8}}$ numa soma de radicais simples e efetue a transformação para esse valor de a.

19) Sendo x = $\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}}}$, podemos afirmar que o valor de $\left(x^{x}\right)^{x}$ é igual a :

(a) 8 (b) 16 (c) 1 (d) 1024 (e) 2

20) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

(a) 3,00 (b) 3,05 (c) 3,15 (d) 3,25 (e) 3,35

21) O resultado mais simples para a expressão $\sqrt[4]{(\sqrt{48}+7)^2}+\sqrt[4]{(\sqrt{48}-7)^2}$ é

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $4\sqrt[4]{3}$ (c) 4 (d) $2\sqrt{7}$ (e) $\sqrt{4\sqrt{3}+7}+\sqrt{4\sqrt{3}-7}$

22) $6\sqrt{50-5\sqrt{75}}-\sqrt{128-16\sqrt{48}}$ é igual a

(a) $22\sqrt{\sqrt{3}-1}$ (b) $22\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (c) $11\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

(d) $11\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ (e) $11\left(\sqrt{6}-2\right)$

23) Seja $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$,prove que x é um número inteiro.

24) O número $4\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{97-56\sqrt{3}}$ é inteiro?

25) Sendo $A=\sqrt{17-2\sqrt{30}}-\sqrt{17+2\sqrt{30}}$, o valor de $\left(A+2\sqrt{2}\right)^{2003}$ é

(a)0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

26) Determine como verdadeiro (V) ou falso (F) as proposições a seguir.

Depois assinale a opção que apresenta a sequencia correta.

I - Se $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, então x é um número irracional.

II – Se $\sqrt{7}-\sqrt{2}=\sqrt{A-\sqrt{B}}$, então $\dfrac{B-2}{A}=6$

III – Se $a\in\mathbb{R}^*$ e $y=a\sqrt{a\sqrt{a}}^{\,-1/2}$, então $y=\dfrac{\sqrt[8]{a^7}}{a}$

a) V-F-V

b) F-V-F

c) V-V-V

d) V-F-F

e) F-F-F

27) Se $A=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$ e $B=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$, então é correto afirmar que:

a) A=1/B

b) A>B

c) B>A

d) A=B

e) A+B=0

28) Se $X=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ e $Y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, então o valor da expressão (X^2-Y^2) é igual ao valor da expressão:

a) X.Y

b) X+Y

c) X-Y

d) X:Y

e) Y:X

29) Sabendo que C,M, P e A representam números reais positivos não-nulos e que, além disso, $\sqrt{M}\neq\sqrt{P}$, afirma-se que:

$$C=\frac{M\sqrt{M}-P\sqrt{P}}{\sqrt{M}-\sqrt{P}}$$

$$A=\sqrt{MP}+1$$

$$M+P=9.$$

Nestas condições o valor numérico de $(C-A)^{0,666...}$ é igual a:

a) 2

b) 4

c) 8

d) 16

e) 32

30) O número real $\sqrt[3]{\frac{25}{8}+\frac{11\sqrt{2}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{25}{8}-\frac{11\sqrt{2}}{4}}$ pertence ao intervalo:

a) [-5, -3)
b) [-3, -1)
c) [-1 , 1)
d) [1 , 3)
e) [3,5)

CAIU NOS ÚLTIMOS CONCURSOS

31) (EPCAR 2019) Considere os números reais x, y e z, tais que:

$$x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$y = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$z = \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}$$

Simplificando a expressão $(x\cdot y\cdot z)^{-1}\cdot\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, obtém-se:

a) $2-\sqrt{3}$ b) 1 c) $2+\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$

32) (CMRJ 2020) O Prof. Pinheiro, do CMRJ, resolveu desafiar seus três melhores alunos do 9° ano, Huguinho, Zezinho e Luizinho, com um problema para cada um. Depois de resolvê-los, os alunos entregaram suas respostas.

Huguinho

Resposta: O valor de $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é igual a $1+\sqrt{3}$.

Zezinho

Resposta: O quadrado da expressão $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é igual a um número inteiro.

Luizinho

Resposta: A soma dos algarismos do número $10^{2021}-10^{2019}$ é um múltiplo de 3.

o Prof. Pinheiro concluiu que:

a) todos os três alunos acertaram.

b) apenas um aluno acertou.

c) apenas Huguinho e Zezinho acertaram.

d) apenas Huguinho e Luizinho acertaram.

e) apenas Zezinho e Luizinho acertaram.

33) (CMRJ 2019) A expressão numérica
$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ é equivalente a

a) $\sqrt{6}+2\sqrt{3}+1$

b) $\sqrt{6}+2\sqrt{2}+1$

c) $\sqrt{6}+5$

d) $\sqrt{6}+1$

e) $\sqrt{6}-1$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1 - $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

2 - $\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

3 - $\sqrt{\frac{19}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$

4 - $\sqrt{5}-1$

5 - $\sqrt{11}-1$

6 - $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

7 - $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

8 - $\sqrt{\frac{23}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$

9 - 16

10 - 8

11 - 2

12 - c

13 - 34

14 - 1

15 - 6

16 - $\sqrt{b} - \sqrt{a - c}$

17 - $\frac{1}{2}\left[\sqrt{2(2x^2 + x + 2)} - \sqrt{2x}\right]$

18 - $a = 4$; $1 + \sqrt{6}$

19 - b

20 - c

21 - c

22 - d

23 - $x = 2$

24 - Sim

25 - a

26 - b

27 - d

28 - b

29 - a

30 - d

31 - c

32 - a

33 - a

MISCELÂNEA DE QUESTÕES

1) Se $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, o valor de $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3}$ é igual a :
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

2) Sejam x e y números reais tais que $x^2+2y^2+2=2x(y+1)$, calcule o valor de $\frac{x^2+2y^2}{x^2-2y^2}$.
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

3) Sendo $x=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ e $y=3+\sqrt{3\times\sqrt{3\times\sqrt{3\times\ldots}}}$, determine o valor de xy.

(a) 1 (b) 6 (c) 12 (d) 18 (e) 24

4) Se $f(x)=2ax^2+3bx+c$ é um trinômio quadrado perfeito, então o valor de $\frac{b^2}{ac}$ é igual a:
(a) 2 (b) 3 (c) 2/3 (d) 8/9 (e) nenhuma das respostas anteriores

5) Se x é um número tal que $10x^4+7x^2+10=0$, determine o valor de $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$.

(a) 1 (b) 13/10 (c) 10/13 (d) 13/7 (e) 7/13

6) Se $a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=14$ e $a^3+b^3+c^3=34$, então o valor de abc é igual a:

(a) 6 (b) -6 (c)8 (d)-8 (e) nenhuma das respostas anteriores

7) Se $p(x)=ax^9+bx^8+1$ é divisível por $q(x)=(x-1)^2$, onde $a\neq 0$ e $b\neq 0$, o valor de a é igual a:

(a) -9 (b) -10 (c) 8 (d)9 (e) 10

8) Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)=(x-3)^{17}+(x-4)^{15}$ por $t(x)=x^2-7x+12$, determine o valor de $r(-1)$.

(a) 9 (b) -9 (c) 5 (d) -5 (e)nenhuma das respostas anteriores

9) Sabendo que a, p e q são constantes diferentes de zero, para que x^3+px+q seja divisível por $(x-a)^2$, devemos verificar a seguinte relação :

(a) $\frac{p^3}{4}-\frac{q^2}{27}=0$

(b) $\frac{p^3}{4}+\frac{q^2}{27}=0$

(c) $\frac{p^2}{27}+\frac{q^3}{4}=0$

(d) $\frac{p^2}{27}-\frac{q^3}{4}=0$

(e) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$

10) Um bando de gafanhotos atacou uma plantação de algodão. Se 100 gafanhotos atacassem cada pé de algodão, 60 gafanhotos ficariam sem pé para atacar. Como todos os pés foram atacados por 102 gafanhotos cada um, o número de gafanhotos é igual a:

(a) 3000 (b) 3020 (c) 3040 (d) 3060 (e) 3080

11) Um cavalo e um burro caminhavam juntos, levando sobre os lombos pesadas cargas. Lamentava-se o cavalo de seu revoltante fardo ao que obtemperou-lhe o burro : “ De que te queixas? Se eu te tomasse um saco, minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um saco, tua carga igualaria a minha”. Ao todo, quantos sacos levavam os animais?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 15 (e) 16

12) Contando n bolas coloridas, algumas pretas e outras vermelhas, achou-se que 49 das 50 primeiras eram vermelhas. Depois 7 de cada 8 contadas eram vermelhas. Se, no total, 90% ou mais das bolas contadas eram vermelhas, o valor máximo de n é igual a :

(a) 225 (b) 210 (c) 200 (d) 180 (e) 175

13) Uma certa Federação Estadual de Futebol resolveu fazer uma promoção para levar as famílias aos estádios em dias de jogos do campeonato estadual. Dessa maneira, um adulto sozinho paga R$ 20,00 pelo ingresso individual e um casal paga R$ 30,00 pelo ingresso familiar,

com direito a levar uma criança. No jogo entre A e B compareceram 4700 pessoas e foram vendidos 1100 ingressos familiares, obtendo-se uma renda de R$ 73.000,00. Neste jogo, alguns casais não levaram crianças e não houve criança que pagou ingresso de adulto. Pode-se afirmar que o total de crianças que assistiram ao jogo é :

(a) 2000 (b) 500 (c) 700 (d) 1100 (e) 600

14) Num barril há 12 litros de vinho e 18 litros de água. Num 2° barril há 9 litros de vinho e 3 litros de água. Sabe-se que todas as misturas são homogêneas. As quantidades, em litros, que devemos retirar, respectivamente, dos 1° e 2° barris, para que juntas perfaçam 14 litros, sendo 7 de água e 7 de vinho, são:

(a) 7 e 7 (b) 10 e 4 (c) 8 e 6 (d) 9 e 5 (e) 5 e 9

15) Quatro números inteiros são tais que quando adicionados três a três obtemos as somas 180, 197, 208 e 222. Logo, podemos afirmar que o maior dos quatro números é igual a :

(a) 77 (b) 83 (c) 89 (d) 91 (e) 95

16) Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por $2x+1$. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por $3x-1$.

Se no visor está o número 5, apertando alguma seqüência das teclas A e B, o maior número de dois algarismos que se pode obter é:

(a) 85 (b) 87 (c) 92 (e) 95 (e) 96

17) A equação do 2° grau $ax^2+bx-3=0$ tem –1 como uma de suas raízes. Sabendo que os coeficientes a e b são números primos positivos, podemos afirmar que a^2+b^2 é igual a:

(a) 29 (b) 89 (c) 17 (d) 13 (e) 53

18) Se x e y são números reais positivos e $x+y=1$, determine o valor mínimo da expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$.

19) Simplifique a seguinte expressão: $\left(\frac{1.2.4+2.4.8+\ldots+n.2n.4n}{1.3.9+2.6.18+\ldots+n.3n.9n}\right)^{\frac{1}{3}}$

.

20) Supondo que $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}$ para todo número inteiro positivo $n\geq 1$.

Sendo $a_0=1$ e $a_1=2$, determine o valor de

$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{50}}{a_{51}}$.

21) Para quais valores de b, as equações : $1988x^2+bx+8891=0$ e $8891x^2+bx+1988=0$ possuem uma raiz comum?

22) Determine as raízes reais da equação $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$.

23) Se α , β , γ são as raízes de $x^3 - x - 1 = 0$. Calcule

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\cdot$$

24)Sendo (x, y, z), $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$, solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = 2 \\ \dfrac{xyz}{y+z} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xyz}{z+x} = \dfrac{3}{2} \end{cases},$$

determine o valor de $x^y + x^z + y^x + y^z + z^x + z^y$.

Dica: Dividir a primeira eq. pela segunda eq. e a segunda eq. pela terceira. Pelos resultados obtidos concluímos que y=2x e z=3x. Ao substituir , por exemplo, na primeira eq., obteremos as soluções.

25)Encontre todas as soluções reais do sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

26) Determine o valor máximo da expressão

$$\sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$$

no intervalo $-1<x<1$.

27) Os dois números reais a e b são não nulos e satisfazem $ab = a - b$. Assinale a alternativa que exibe um dos possíveis valores de $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab$.

(a)-2 (b)$-\frac{1}{2}$ (c)$\frac{1}{3}$ (d)$\frac{1}{2}$ (e)2

28) Quantos ternos de números reais x, y, z satisfazem o sistema abaixo?

$$\begin{cases} x(x+y+z)=2005 \\ y(x+y+z)=2006 \\ z(x+y+z)=2007 \end{cases}$$

(a)Nenhum (b)1 (c)2

(d)3 (e)2006

29) Se $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ e $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, então $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ é igual a:

(a)0 (b) 1 (b) 2 (d) 3 (e)nenhuma das respostas anteriores

30) Sendo α, β e γ as raízes da equação $(x-1)^3+(-3x+9)^3+(2x-8)^3=0$, determine o valor de $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$.

31)A asserção:"Sendo $a + b + c = 0$, então $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7} = \dfrac{a^5+b^5+c^5}{5} \times \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$." é verdadeira ou falsa?

32) Se x é real positivo e $1 + (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = 181^2$, então o valor de $x(x + 3)$ é:

(a) 180 (b) 150 (c) 120 (d) 182 (e) 75

33) Sejam a, b e c números tais que

$$\mathbf{a^2 - ab = 1}$$

$$\mathbf{b^2 - bc = 1}$$

$$\mathbf{c^2 - ac = 1}$$

O valor de $abc \times (a + b + c)$ é igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) 2

(d) –1 (e) –3

34) Determine a soma das raízes reais da equação

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-2x+12}-\sqrt{x^2-5}\right)^3}{\left(5x^2-2x-3\right)\sqrt{2x^2-2x+12}} = \frac{2}{9}.$$

(a) $-\dfrac{1}{5}$ (b) $-\dfrac{2}{7}$ (c) 1 (d) 2 (e) $\dfrac{3}{5}$

35)Para quais valores de k a equação $x = k^2(x-1)(x-2)$ raiz real?

(a) Nenhum (b) $-2 < k < 1$ (c) $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$ (d) $k > 1$ ou $k < -2$ (e) Todos

36) O número de soluções reais da equação $\sqrt{\left(x^2-1\right)^2} + 2x = \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) maior do que 3

37) O número de soluções distintas da equação: $\left|x - |2x+1|\right| = 3$ é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

38) O conjunto solução da inequação $\frac{x^4-1}{-x^4+3x^3-2x^2} < 0$ é:

(a) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ (b) $(-\infty,-1)\cup(1,2)$

(c) $(-\infty,-1)\cup(0,2)$ (d) $(-\infty,-1)\cup(1,2)$

(e) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

39) Estudando os quadrados dos números naturais, um aluno conseguiu determinar corretamente o número de soluções inteiras e positivas da equação $5x^2+11y^2=876543$. Qual foi o número de soluções que este aluno obteve?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

40) Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é :

(a) $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 5\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x \leq 7\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} / 7 \leq x \leq 9\}$

41) No sistema $\begin{cases} 3x - y\sqrt{3} = 0 \\ x^2 \cdot y^{-2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, a quantidade de soluções inteiras para 'x' e 'y' é :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) infinita

42) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2$

(a) é vazio

(b) é unitário

(c) possui dois elementos

(d) possui três elementos

(e) possui quatro elementos

43) No conjunto dos números reais, qual será o conjunto solução da inequação $\dfrac{88}{\sqrt{121}} - \dfrac{1}{x} \leq 0,25^{\frac{1}{2}}$?

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2}{15} < x < \frac{15}{2}\right\}$

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq \frac{2}{15}\right\}$

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{2}{15} < x < 0\right\}$

(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{15}{2} < x < -\frac{2}{15}\right\}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -\frac{15}{2}\right\}$

44) Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2yx = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $\left(x^2 - y^2\right)^6$?

(a) a^3b^6 (b) a^8b^6 (c) a^6b^2 (d) a^3b^6 (e) a^4b^6

45) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$.

Qual o valor mínimo do produto pq?

(a) 8040 (b) 4020 (c) 2010 (d) 1005 (e) 105

46) O combutível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por

(a) 5/3 (b) 3/5 (c) 2/5 (d) 5/2 (e) 3/2

47) Um funcionário usa uma empilhadeira para transportar bobinas de 70 kg ou 45 kg, sendo uma de cada vez. Quantas viagens com carga deverá fazer, no mínimo, para transportar exatamente uma tonelada dessa carga?

(a) 18 (b) 17 (c) 16 (d) 15 (e) 14

48) Os números $\dfrac{4x}{2-x}$ e $\dfrac{2-x}{4x}$ são inteiros e positivos, com $x \in \Re - \{0;2\}$. Nessas condições, pode-se concluir que:

(a) $x<0$

(b) $0<x<\dfrac{1}{3}$

(c) $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$

(d) $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{2}{3}$

(e) $\dfrac{2}{3}<x<1$

49) A menor raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "m+n" é expresso por :

(a) $\dfrac{3abc-b^3}{a^2c}$

(b) $\dfrac{3abc+b^3}{a^2c}$

(c) $\dfrac{3abc-b^3}{c^2a}$

(d) $\dfrac{abc+b^3}{c^2a}$

(e) $\dfrac{abc-b^3}{a^2c}$

50) O conjunto solução de números reais, tal que o valor da expressão $\dfrac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^{8}}$ é maior do que, ou igual a zero, é:

(a) $\left[5;+\infty\right[\cup \left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$ (b) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup \left[5;+\infty\right[$

(c) $\left]-\infty;+\infty\right[$ (d) $\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right] \cup \left[5;+\infty\right[$

(e) $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[5;+\infty\right[$

51) Quantos são os números inteiros com os quais é possível, no conjunto dos reais, calcular o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{103x-x^2-300}$?

(a) 100 (b) 99 (c) 98 (d) 97 (e) 96

52) Sabendo-se que 2x + 3y = 12 e que mx + 4y = 16 são equações sempre compatíveis, com x e y reais, quantos são os valores de m que satisfazem essas condições ?

(a) Um (b) Dois (c) Três (d) Quatro (e) Infinitos

53) A solução de $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}$ no campo dos reais é

(a) o conjunto vazio

(b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(c) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

(d) $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

(e) $\left]-\infty,+\infty\right[$

54) Num determinado jogo, o apostador recebe, toda vez que ganha, o valor apostado inicialmente, mais 25% do mesmo; e recebe, toda vez que perde, apenas 25% do valor apostado inicialmente. Sabendo-se que foi feita uma aposta inicial de uma quantia x e que foram realizadas quatro jogadas, sempre sendo apostado o valor total obtido na jogada anterior, das quais ganhou-se duas e perdeu-se duas, qual é, aproximadamente, o percentual de x obtido no final ?

(a) 3,7 (b) 4,7 (c) 5,7 (d) 6,7 (e) 9,8

55) O valor de $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(5\sqrt{2}+7\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2}$ é um número

(a) múltiplo de onze (b) múltiplo de sete (c) múltiplo de cinco

(d) múltiplo de três (e) primo

56) Uma expressão constituída por números de dois algarismos é do tipo □□ × □□ - □□ , no qual cada quadrinho deve ser ocupado por um algarismo, num total de seis algarismos para toda a expressão. Sabendo-se que os algarismos que preencherão os quadrinhos são todos distintos. o menor valor possível para essa expressão é

(Observação: números do tipo 07 são considerados de um algarismo)

(a) 123 (b) 132 (c) 213 (d) 231 (e) 312

57) Sejam y e z números reais não nulos tais que $\frac{4}{yz}+\frac{y^2}{2z}+\frac{z^2}{2y}=3$. Qual é o valor da soma dos possíveis valores de y + z ?

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 2 (e) 3

58) O número $a \neq 0$ tem inverso igual a b. Sabendo-se que $a+b=2$, qual é o valor de $\left(a^3+b^3\right)\left(a^4-b^4\right)$?

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2 (e) 0

59)Se $a>0$, $b>0$, $a>b$, $\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=b$ e $\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=x$, calcule o valor de $b^2x^4-2bx^2$.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Dica: Multiplique as igualdades

60) Quais dos valores abaixo não podemos adotar para x, de tal modo que na equação $x^2+2xy+4y^2+4x+8y+20=0$,

y seja sempre real?

(a) -2,73 (b) 0,75 (c) 1,74 (d) -3,59 (e) 99,9

61) O número total de pares de números reais (x, y) que satisfazem a equação $(x^2+y^2-1)^2+(xy)^2=0$ é:

(a) infinito (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 4

62) Se (x_0, y_0, z_0) é uma solução do sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ xy+z^2=1 \end{cases}$, encontre o valor de $x_0^2+y_0^2-2z_0^2$.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Dica: Elevar a primeira equação ao quadrado e subtrair do dobro da segunda equação.

63) Se ϕ é o número real positivo tal que $\phi^2=\phi+1$, então ϕ^8 é igual a

(a) $20+\phi$ (b) $32+21\phi$ (c) $13+21\phi$ (d) $13+8\phi$ (e) $8+8\phi$

64) A soma $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}$ é igual a

(a) 50 (b) 78 (c) 99 (d) 200 (e) 2010

65) Se x e y são reais positivos, o maior valor que a expressão $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pode assumir é

(a) 1/4 (b) 1/3 (c) 1/2 (d) 1 (e) 2

Dica: Relação entre as médias aritmética e geométrica entre os números x^2 e y^2

66) O seguinte número $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ é um número natural? Qual?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

67) A equação $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$ possui quantas soluções reais?

(a) Nenhuma (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) infinitas

68) Se $\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=b$

$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=x$

Calcule o valor de $b^2x^4-2bx^2$.

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Dica: (1) Multiplique as equações;

(2) Eleve o resultado obtido ao quadrado e obtenha o valor de bx^2;

(3) Fatore a expressão colocando bx^2 em evidência e substitua bx^2 pelo valor encontrado no passo anterior.

69) Se $x=\dfrac{1+\sqrt{1996}}{2}$, então $4x^3 - 1999x - 1997$ é igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2 (e) -2

70) Dado $P(x)=\sqrt{2}x^5+x^4-2\sqrt{2}x^3+4x^2-\sqrt{2}x-8$, calcule $P\left(\sqrt{2}\right)$.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

71)Determine o resto da divisão $\dfrac{(x-1)^{10}+(x+1)^9}{(x-1)(x+1)}$

(a) $2^8(3-x)$ (b) $2^8(3+x)$ (c) $2^8(3-2x)$
(d) $2^9(3+2x)$ (e) $2^3(3+x)$

72) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^5+\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^4+\left(12\sqrt{2}-18\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ é igual a :

(a) 0 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 3 (d) 2 (e) $1-\sqrt{2}$

73) A soma dos coeficientes do polinômio $(x^2+3x-3)^{50}$ é :

(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 25 (e) 50

74) Calcular a soma : $\dfrac{1}{1\times 4}+\dfrac{1}{4\times 7}+\dfrac{1}{7\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{2998\times 3001}$

75) O desenvolvimento da expressão $\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}+1\right)^2$ toma forma $a\sqrt{3}+b$; então o valor numérico de $a+b$ é :

(a) 49 (b) 19 (c) 57 (d) 60 (e) 8

76) A identidade: $\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo real

x □ -1. Então $b+c$ é igual a:

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

77) Sejam a e b números reais positivos, a > b, tais que $a^2+b^2=6ab$. Se $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} = \frac{p}{q}\sqrt{2}$ onde p e q são primos entre si, o valor de p+q é igual a :

(a) 11 (b) 13 (c) 15 (d) 17 (e) 19

78) Isaac observou que utilizando os seus conhecimentos adquiridos nas aulas sobre fatoração poderia determinar as raízes reais da equação $x\left(x^2-4x+4\right)=1$ e ao determinar as raízes , notou que uma delas é da forma $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$.

Determine o valor de $a+b+c$.

(a) 0 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 10

79) Sejam a,b,c e k números reais diferentes de zero satisfazendo as relações $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Qual é o número de possíveis valores que *k* pode assumir?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

80) Quantos são os possíveis valores inteiros de *x* para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?

(a) 5 (b) 10 (c) 20 (d) 30 (e) 40

81) Sendo x, y e z números reais que satisfazem a igualdade $3x^2 + y^2 + z^2 = 2xy - 2xz$, determine o valor de xyz.

Dica: Escrever o $3x^2 = x^2 + x^2 + x^2$ e irá aparecer três quadrados perfeitos

82) Se x, y e z são positivos, qual é o valor mínimo de $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$?

83) Dada a expressão

$$\lambda = \sqrt{1+\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2} - \sqrt{1+\left(x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}\right)^2},$$

determine o valor de λ para $x = 2^{2010}$ e $y = 2^{2011}$.

Dica: adotar $a = x\sqrt{1+y^2}$, $b = y\sqrt{1+x^2}$ e calcular a^2+b^2 e a^2-b^2.

84) $\dfrac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}}{2}$ está entre

(a) 1 e 1,5

(b) 1,5 e 1,6

(c) 1,6 e 1,7

(d) 1,7 e 1,8

(e) 1,8 e 1,9

85) O menor valor inteiro da expressão $E=\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{y}+48x^2y+10$, dado que x e y são reais positivos, é:

(a) 46 (b) 44 (c) $\sqrt{2}$ (d) 61 (e) 48

86) Sejam os polinômios com coeficientes reais :

$P(x)=4x^3+bx^2+cx+d$ e $Q(x)=mx^2+nx-3$. Sabe-se que $P(x)=(2x-6).Q(x)+(x-10)$.

Considere as afirmativas:

(I) Se 10 é raiz de Q(x) , então 10 também é raiz de P(x).

(II) É verdade que P(3) = -7.

(III) O valor de d é -23.

(IV) O valor de m é 2.

O número de afirmativas corretas é :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

87) Uma raiz da equação $\frac{2\sqrt{2x-23}+3x-2\sqrt{x-63}-101-2\sqrt{(2x-23)(x-63)}}{\sqrt{2x-23}-3-\sqrt{x-63}}=13$ se encontra no intervalo :

(a)(67,74) (b)(74, 89] (c)[90, 99)

(d)[100, 107] (e)(108, 128)

88) Sejam $a<b<c<d$ as raízes do polinômio $P(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$. Fatore o polinômio e determine $(b-d)^a \times c$.

(a) 1/8 (b) 2 (c) -1/2 (d) -1/8 (e) 1/2

89) Sejam x e y números reais positivos e $xy=1$, o valor mínimo de $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{4y^4}$ ocorre quando x é igual a :

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[4]{2}$ (c) 1 (d) 0,5 (e) 0,25

90) Considere o menor valor de p, p > 0, de forma que o sistema a seguir seja indeterminado.

$$\begin{cases}(4-p^2)x+2y=0\\ 2x+(7-p^2)y=0\end{cases}$$

Para este valor de p, determine x/y.

(a) -1/4 (b) -2 (c) 2/3 (d) 2 (e) 4

91) A razão entre as raízes positivas da equação $ax^2+bx+c=0$ é $\frac{m}{n}$. Podemos afirmar que $\frac{b^2}{ac}$ é :

(a) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

(b) $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$

(c) $(\frac{n}{m}+\frac{m}{n})^2$

(d) $\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}$

(e) $\left(\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2$

DICA 1 : Considerar $x_1=\left(\frac{m}{n}\right)\bullet x_2$ e desenvolver.

DICA 2:

$$\frac{b^2}{ac}=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{c}{a}\right)=\left(x_1+x_2\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$$

92) A desigualdade $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$ se verifica

(a) quaisquer que sejam os reais x e y

(b) para $x\neq 0$

(c) para quaisquer x e y de mesmo sinal

(d) para quaisquer x e y de sinais contrários

(e) todas as respostas anteriores são incorretas

93) Sejam p e q ($p, q \in \mathbb{R}$) os catetos de um triângulo retângulo cuja altura relativa à hipotenusa é a. Podemos afirmar que a equação

$$\frac{2x^2}{p} - \frac{2x}{a} + \frac{1}{q} = 0$$

(a) não admite raízes reais

(b) admite sempre raízes reais

(c) terá duas raízes reais e distintas se um dos catetos formar com a hipotenusa um ângulo de 45^0

(d) todas as afirmativas anteriores são falsas

DICA: Aplicar as relações num triângulo retângulo qualquer : teorema de Pitágoras e ah = bc . Em seguida calcule o discriminante.

94) Se k > 0 é tal que a equação $kx^2 - 4x + 1 = 0$ possui raízes reais cujo produto é mínimo, então,

(a) k = -4

(b) k = 1

(c) k = 1/4

(d)k = 4

(e) é impossível determinar k

95) Sendo a, b, c números inteiros positivos e

$abc+ab+ac+bc+a+b+c=1000$, sobre o valor de $a+b+c$

podemos afirmar que :

(a) possui 12 divisores inteiros

(b) é um múltiplo de 56

(c) é divisor de 7

(d) possui 8 divisores positivos

(e) é um múltiplo de 8

96) Seja x um número real tal que $x \geq 127$, determine todas as soluções reais de $\sqrt[7]{(x+127)^6} - 8.\sqrt[7]{(x-127)^6} = 7.\sqrt[7]{(x^2-127^2)^3}$

97) O conjunto dos números reais x para os quais $(x-1)^2(x-4)^2 < (x-2)^2$ é verdadeira satisfaz a :

(a) $2-\sqrt{2} < x < 3-\sqrt{3}$ ou $2+\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{3}$

(b) $2-\sqrt{3} < x < 3-\sqrt{2}$ ou $2+\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{2}$

(c) $1-\sqrt{3} < x < 2-\sqrt{3}$ ou $1+\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$

(d) $x < 2-\sqrt{2}$ ou $3-\sqrt{3} < \mathrm{x} < 2+\sqrt{2}$ ou $x > 3+\sqrt{3}$

(e) $2+\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{3}$

98) Determine a soma das raízes reais da equação

$$\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{3}{2x^2-x+3}=\frac{10}{2x^2-x+7}.$$

(a) -1 (b) -1/2 (c) 1/2 (d) -3/2 (e) 1

99) Sendo a um número real positivo, sobre as raízes reais da equação $x(x-a)(x+a)(x+2a)=3a^4$, podemos afirmar que:

(a) a soma das raízes é um número racional positivo

(b) a soma das raízes é um número real positivo

(c) o produto das raízes é um número real positivo

(d) o produto das raízes é um número inteiro negativo

(e) a soma das raízes pode ser um número inteiro negativo

Dica: Multiplique o primeiro fator pelo terceiro e o segundo pelo quarto.

Adotar $x^2+ax=\alpha$ resolver a eq. do segundo grau em α.

100) Se $x+\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=20$ então

$x^2+\sqrt{x^4-1}+\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$ é igual a :

(a)5,05 (b) 20 (c) 51,005 (d) 61,25 (e) 400

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) a

Resolução : (i)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc$$

$$(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+(b^2c+bc^2)=0$$

$$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=0$$

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0$$

(ii)

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3}=\frac{(a+b+c)^3-3\overbrace{(a+b)(b+c)(a+c)}^{=0}}{(a+b+c)^3}=\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3}=1$$

2) C

Resolução :

$$x^2 + 2y^2 + 2 = 2x(y+1)$$

$$\underbrace{x^2 - (2y+2)x + (2y^2+2) = 0}_{\text{equação do segundo grau em x}}$$

$$\Delta = -4(y-1)^2 \leq 0$$

Como $x \in \mathbb{R}$, $\quad -4(y-1)^2 = 0$; logo, $y = 1$.

Substituindo $y = 1$ em $x^2 + 2y^2 + 2 = 2x(y+1)$, obtemos $x = 2$.

Daí, temos $\dfrac{x^2 + 2y^2}{x^2 - 2y^2} = 3.$

3) e

4) d

5) b

6) b

7) c

8) b

9) e

10) d

11) b

12) b

13) b

14) b

15) c

16) e

17) a

18) 9

Resolução:

(i)
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}=1+\left(\frac{x+y}{xy}\right)+\frac{1}{xy}=1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{2}{xy}$$

(ii)
$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{1}{2}\geq\sqrt{xy}>0\Rightarrow\frac{1}{4}\geq xy>0\Rightarrow\frac{1}{xy}\geq 4\Rightarrow\frac{2}{xy}\geq 8\Rightarrow 1+\frac{2}{xy}\geq 9$$

Daí, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$.

19) 2/3

20) 2655/2

21) $b=\pm 10879$

22) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

23) -7

Resposta:

(i) $x^3-x-1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-1\\ \alpha\beta\gamma=1\end{cases}$

(ii)

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+(1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)+(1+\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+9}{-1}=-7$$

24) 24

25) (0,0,0) , (1/2, 1/2, 1/2)

Resolução: x,y e z são números reais, logo

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \geq 0 \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \geq 0 \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \geq 0 \end{cases}.$$

(i) É fácil verificarmos que o terno (0,0,0) é solução do sistema;

(ii) Sendo x, y e z diferentes de zero, temos que $0 < 4x^2 < 4x^2 + 1$.

Dividindo os termos da desigualdade por $4x^2 + 1$, teremos

$0 < \underbrace{\dfrac{4x^2}{4x^2 + 1}}_{y} < 1$; ou seja, $0 < y < 1$.

Analogamente, obtemos que $0 < x < 1$ e $0 < z < 1$.

(iii) Sendo x, y e z diferentes de zero, pela relação entre as médias aritmética e geométrica, teremos:

Analogamente, obtemos que $z \leq y$ e $x \leq z$.

Logo, temos a relação $z \leq y \leq x \leq z$,que somente é válida se $x = y = z$.

Fazendo as devidas substituições na equação 1,por exemplo, teremos $\dfrac{4x^2}{1+4x^2} = x$ onde, facilmente encontramos $x = \dfrac{1}{2}$.

Logo, temos $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

Daí, as soluções do sistema são $(0,0,0);\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Resolução do Alex:

(i) Facilmente podemos verificar que o terno ordenado (0,0,0) é solução do sistema;

(ii) Se x, y, z forem diferentes de zero, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4x^2} + 1 = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{4y^2} + 1 = \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1}{4z^2} + 1 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Fazendo $\dfrac{1}{2x} = a,\ \dfrac{1}{2y} = b,\ \dfrac{1}{2z} = c,$ teremos:

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 2b \\ b^2 + 1 = 2c \\ c^2 + 1 = 2a \end{cases}$$

Somando as três equações, temos: $(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$$

donde, obtemos a=b=c=1.

Daí, temos $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

A solução do sistema são os ternos ordenados (0,0,0) e $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

26) O valor da expressão para -1<x<1 é constante e igual a 2.

Resolução:

(i) $16 - 24x + 9x^2 - x^3 = \underbrace{(1-x)}_{?}\underbrace{(x-4)^2}_{>0}$

Como $-1 < x < 1$, então $0 < 1 - x < 2$.

Daí, $16-24x+9x^2-x^3>0$.

(ii)

$$\varepsilon=\sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$$

$$\varepsilon^3=8-6x+3x\varepsilon$$

$$\varepsilon^3-8+6x-3x\varepsilon=0$$

$$(\varepsilon-2)(\varepsilon^2+2\varepsilon+4)-3x(\varepsilon-2)=0$$

$$(\varepsilon-2)(\varepsilon^2+2\varepsilon-3x+4)=0$$

$*\varepsilon=2$

ou

$*\varepsilon^2+2\varepsilon-3x+4=0$

$$\Delta=4-4(4-3x)=12x-12=\underbrace{12(x-1)}_{?}$$

$-1<x<1\Rightarrow -2<x-1<0\Rightarrow -24<12(x-1)<0,$ logo $\varepsilon\notin\mathbb{R}.$

Logo, o valor de ε no intervalo $-1<x<1$ é constante e igual a 2.

27) e

28) c

29) b

30) 13/6

31) Verdadeira

32) a

33) d

Resolução:

(i)

$$a-b=\frac{1}{a}$$

$$b-c=\frac{1}{b} \qquad \oplus$$

$$c-a=\frac{1}{c}$$

$$0 \qquad =\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$ab+ac+bc=0$$

(ii)

$$ab+ac+bc=0$$

$$\left(a^2-1\right)+\left(c^2-1\right)+\left(b^2-1\right)=0$$

$$a^2+b^2+c^2=3 \quad (*)$$

$$\left(a+b+c\right)^2-2\underbrace{\left(ab+ac+bc\right)}_{=0}=3$$

$$\left(a+b+c\right)^2=3 \quad (**)$$

(iii)

$$a+b+c=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{\overbrace{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}^{\downarrow}+\left(a-b\right)\left(c-a\right)+\overbrace{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}^{\downarrow}}{\underbrace{\left(a-b\right)}_{\frac{1}{a}}\underbrace{\left(b-c\right)}_{\frac{1}{b}}\underbrace{\left(c-a\right)}_{\frac{1}{c}}}$$

$$=\frac{\left(b-c\right)\left(c-b\right)+\left(a-b\right)\left(c-a\right)}{\frac{1}{abc}}=abc\left[\underbrace{\left(ab+ac+bc\right)}_{=0}-\underbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}_{=3}\right]$$

$$a+b+c=-3abc$$

Multiplicando ambos os membros por $a+b+c$, teremos:

$$\underbrace{\left(a+b+c\right)^2}_{=3}=-3abc\left(a+b+c\right)$$

Daí, $\qquad abc\left(a+b+c\right)=-1.$

34) b

Resolução:

*Restrições: $\begin{cases} x^2-5\geq 0 \\ 2x^2-2x+12>0 \Rightarrow x\leq -\sqrt{5} \text{ ou } x\geq \sqrt{5} \\ 5x^2-2x-3\neq 0 \end{cases}$

$(i)\ u=\sqrt{2x^2-2x+12} \Rightarrow u^2=2x^2-2x+12$

$v=\sqrt{x^2-5} \Rightarrow v^2=x^2-5$

Daí, temos que $u^2+3v^2=5x^2-2x-3$.

Fazendo as substituições na equação, teremos:

$$\frac{(u-v)^3}{(u^2+3v^2)u}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{(u-v)^3}{\underbrace{u^3+3uv^2}_{?}}=\frac{2}{9}$$

*Observe que $\dfrac{(u+v)^3+(u-v)^3}{2}=u^3+3uv^2$.

$$\frac{(u-v)^3}{\dfrac{(u+v)^3+(u-v)^3}{2}}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{(u-v)^3}{(u+v)^3+(u-v)^3}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{(u+v)^3+(u-v)^3}{(u-v)^3}=9$$

$$\frac{(u+v)^3}{(u-v)^3}+1=9 \quad \text{se } u\neq v$$

$$\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^3=8$$

$$\frac{u+v}{u-v}=2$$

$u+v=2u-2v$

$u=3v$

$\sqrt{2x^2-2x+12}=3\sqrt{x^2-5}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$7x^2+2x-57=0$

$x=-3$ ou $x=\dfrac{19}{7}$

E se $u=v$?

Fazendo $u=v$, teremos a equação $x^2-2x+17=0$ e, facilmente verificamos que $x\notin\mathbb{R}$.

35) e

36) c

37) c

38) a

39) a

40) b

41) a

42) b

43) b

44) c

45) a

46) a

47) d

48) c

49) a

50) e

51) c

52) e

53) d

54) e

55) d

56) b

57) d

58)	e
59)	d
60)	b
61)	e
62)	c
63)	c
64)	c
65)	c
66)	b
67)	c
68)	d
69)	e
70)	b
71)	a
72)	e
73)	b
74)	1000/3001
75)	c
76)	e
77)	d
78)	e
79)	c
80)	c
81)	zero
82)	9

83)	2^{4022}
84)	d
85)	a
86)	d
87)	a
88)	a
89)	b
90)	b
91)	e
92)	e
93)	b
94)	d
95)	a
96)	129
97)	a
98)	c
99)	e
100)	c

ALFABETO GREGO

α	Α	alfa	A
β	Β	beta	B
γ	Γ	gama	G, C
δ	Δ	delta	D
ε	Ε	épsilon	E
ζ	Ζ	zeta	Z
η	Η	eta	
θ	Θ	teta	
ι	Ι	iota	I
κ	Κ	capa	
λ	Λ	lambda	L
μ	Μ	mi	
ν	Ν	ni	
ξ	Ξ	xi	
ο	Ο	omicron	
π	Π	pi	P
ρ	Ρ	rô	R
σ	Σ	sigma	S
τ	Τ	tau	T
υ	Υ	upsilon	
φ	Φ	fi	
χ	Χ	qui	C
ψ	Ψ	psi	
ω	Ω	ômega	

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- MORGADO,A.C.; WAGNER,E.; JORGE, M.. ÁLGEBRA I. RIO DE JANEIRO. LIVRARIA FRANCISCO ALVES EDITORA S.A.. 1974.
- FARIAS, SINÉSIO DE .CURSO DE ÁLGEBRA,RIO DE JANEIRO-PORTO ALEGRE-SÃO PAULO, EDIÇÃO DA LIVRARIA DO GLOBO, 1946.
- OBM; REVISTA EUREKA!.
- REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA – SBM.
- PISKOUNOV,N.CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. VOLUME I, 16ª EDIÇÃO. PORTO, EDIÇÕES LOPES DA SILVA, 1993.
- IEZZI,GELSON. FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR, VOLUMES 1 ao 10. 5ª EDIÇÃO,ATUAL EDITORA,1992.
- LIDSKI,V.B.; OVSIANIKOV,L.V.; TULAIKOV,A.N.; SHABUNIN, M.I.. PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS ELEMENTARES. URSS, MOSKU-EDITORIAL MIR. 1972.
- MARISTAS, IRMÃOS. ÁLGEBRA-CURSO SUPERIOR. EDITORA FTD.
- DOMINGUES, HYGINO H. ; IEZZI, GELSON; ÁLGEBRA MODERNA.SÃO PAULO. ATUAL EDITORA.4 ª EDIÇÃO REFORMULADA. 2003.
- SHKLYARSKY,D.O.; CHENTSOV,N.N.; YAGLOM,I.M.; SELECTED PROBLEMS AND THEOREMS IN ELEMENTARY

MATHEMATICS-ARITHMETIC AND ALGEBRA; MIR PUBLISHERS MOSCOW.1976.

- BOYER, CARL B.. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. SÃO PAULO. EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA. 1974.
- GARBI, GILBERTO G.. O ROMANCE DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS. SÃO PAULO. EDITORA LIVRARIA DA FÍSICA. 2007.
- SINGH, SIMON. O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT. RIO DE JANEIRO. EDITORA RECORD. 2008.
- YAGLOM,I.M.. LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS. ÁLGEBRA EXTRAORDINARIA.URSS.EDITORIAL MIR MOSCÚ. SEGUNDA EDIÇÃO.1983.
- KOROVKIN,P.P.. LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS. DESIGUALDADES.URSS.EDITORIAL MIR MOSCÚ.1976.
- LITVINENKO,V.; MORDKÓVICH,A.; PRÁTICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS – ÁLGEBRA E TRIGONOMETRÍA; EDITORA MIR MOSCÚ.1984.
- CARDANO,G.-TRANSLATED BY T.RICHARD WITMER; ARS MAGNA OR THE RULES OF ALGEBRA; DOVER PUBLICATIONS, INC.-NEW YORK-1968.
- ANDREESCU,T.,ENESCU,B.; MATHEMATICAL OLYMPIAD TREASURES; BIRKHÄUSER-1956.