Les suites numériques : cours de matsh en terminale S

I . Comportement d'une suite numérique :

Définition :

Une suite est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}(U_n):\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\\ n\longrightarrow U_n\end{array}\right| .$$

Définitions :

• Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\leq U_{n+1}$.

• Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\geq U_{n+1}$.

• Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone signifie qu'elle est soit croissante soit décroissante.

Remarques :

• On parle aussi de suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante à partir d'un rang $n_0\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $\forall n\geq n_0,\ U_n\geq U_{n+1}$

• On définit aussi les suites strictement croissantes ou décroissante en remplacant les inégalités par des inégalités strictes .

Exemples :

•**Methode 1 :**

Considérons la suite (U_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=n^2$ (car n est un entier naturel donc positif) donc $U_{n+1}-U_n>0\Leftrightarrow U_{n+1}>U_n$ donc la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

•Methode 2 :

Pour une suite (U_n) à termes strictement positifs : comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

Considérons la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = e^{n^2}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = e^{(n+1)^2 - n^2} = e^{n^2+2n+1-n^2} = e^{2n+1} > e^0$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 2n+1 >0 .

donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ car $e^0 =$

ainsi $\frac{U_{n+1} \times U_n}{U_n} > 1 \times U_n$

car (U_n) est à termes strictement positifs .

$U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Définitions :

• Une suite (U_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M (un majorant) tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.

• Une suite (U_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq M$.

• Une suite (U_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée .

Remarques :

· Si (U_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme U_0 :
$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq .... \leq U_n \leq ....$

· Si (U_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme U_0 :
$U_0 \geq U_1 \geq U_2 \geq .... \geq U_n \leq ....$

Exemple :

· La suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = e^n + 1$ est strictement croissante, elle est minorée par 1 par contre, elle n'est pas majorée.

· La suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = -2n - 4$ est strictement décroissante, majorée par -4, par contre elle n'est pas minorée .

· La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \sin n$ est bornée, majorée par 1 et minorée par -1.

Théorème :

• Une suite croissante et majorée est convergente .

• Une suite décroissante et minorée est convergente .

Théorème :

• Toute suite croissante non majorée, diverge vers $+\infty$.

• Tout suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Exemple :

· La suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = e^n + 1$ est strictement croissante, elle n'est pas majorée donc diverge vers $+\infty$.

· La suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = -2n - 4$ est strictement décroissante, elle n'est pas minorée donc diverge vers $-\infty$.

· La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \sin n$ est bornée, elle est dite **divergente** .
Théorème :

Soit (U_n) définie par U_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$,$U_n =$.

Si (U_n)converge vers l et si f est continue en l

alors

cette limite $l$vérifie $f(l) = l$.

Exemple :

Considérons (U_n) définie par $U_0 =$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n^2}{3}$.

(U_n) est **décroissante et minorée par 0** (à montrer...).

Donc (U_n) converge vers l d'après le théorème précédent .

Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{x^2}{3}$

On est amené à résoudre $f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l^2}{3} = l \Leftrightarrow l \times (\frac{l}{3} - 1) = 0 \Leftrightarrow l =$

or

$\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n \leq 2{,}5$

donc $l \neq 0$

d'où

$l = 0 =$

II . Suites adjacentes :

Définition :

Dire que deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes signifie que :

- L'une est croissante.
- L'autre est décroissante.
- $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0.$

Exemple :

Considérons les deux suites numériques suivantes :

$\forall n \geq 1, \; U_n =$

$\forall n \geq 1, \; U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$

Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1^2} > 0$

donc (U_n) est croissante .

$\forall n \geq 1, \; V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = U_{n+1} - U_n - \frac{1}{n(n+1)}.$

$\forall n \geq 1, \; V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1^2} - \frac{1}{n(n+1)}$

$\forall n \geq 1, \; V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n+1}{n(n+1)^2}$

$\forall n \geq 1, \; V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$

donc (V_n) est décroissante .
$V_n - U_n = \frac{1}{n}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n)=0}$$

Conclusion :

Les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes .

Définition :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Exemple :

Reprenons notre exemple précédente :

$\forall n \geq 1,\ U_n =$

Les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes donc elles sont convergentes et convergent vers la même limite .

Nous pourrions montrer que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(V_n)=\lim_{n\to+\infty}(U_n)=\frac{\pi^2}{6}}$$