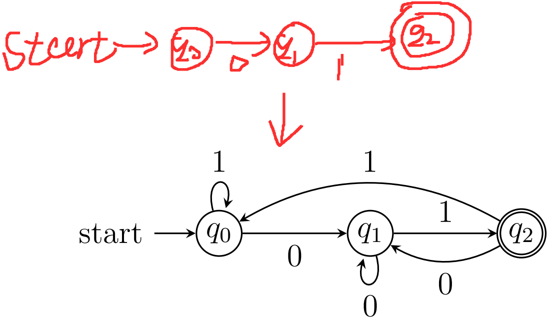
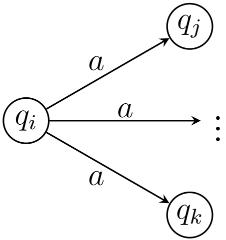
有穷自动机

- 确定的有穷自动机
- 非确定有穷自动机
  - 形式语言
  - 扩展转移函数与 NFA 的语言
  - DFA 与 NFA 的等价性
- 带有空转移的非确定有穷自动机

例 7. 由 0 和 1 构成的串中，接受全部以 01 结尾的串，如何设计 DFA?

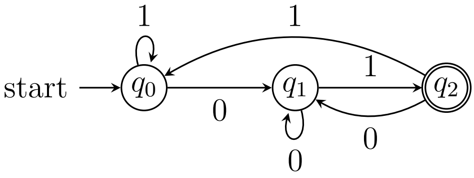


状态的非确定转移

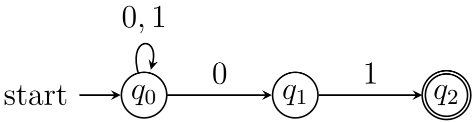


- 同一个状态在相同的输入下，可以有多个转移状态
- 自动机可以处在多个当前状态
- 使自动机的设计更容易

续例 7. 由 0 和 1 构成的串中, 接受全部以 01 结尾的串.



确定的



非

思考题

有穷自动机有了非确定性，能否增加它识别语言的能力？

非确定有穷自动机的形式定义

定义

非确定有穷自动机(NFA, *Nondeterministic Finite Automaton*) A 为五元组

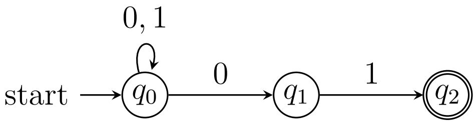
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$\delta(q_1, a) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots\}$

1. Q : 有穷状态集;
2. Σ : 有穷输入符号集或字母表;
3. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ 状态转移函数;
4. $q_0 \in Q$: 为初始状态;
5. $F \subseteq Q$: 为终结状态集或接受状态集.

$2^Q = \{S \mid S \subseteq Q\}$ 幂集

续例 7. 接受全部以 01 结尾的串的 NFA.

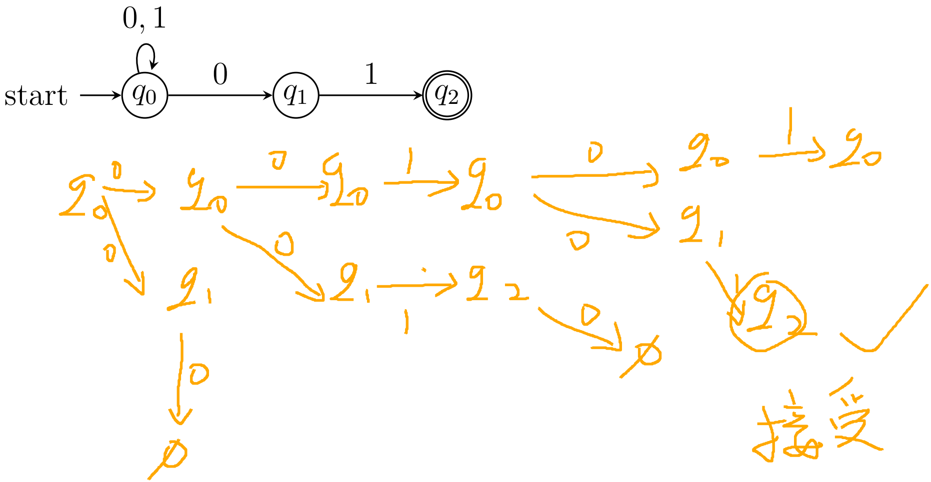


五元组为 $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, 转移函数 δ:

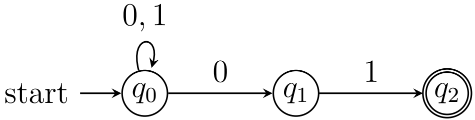
$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\} & \delta(q_1, 0) = \emptyset & \delta(q_2, 0) = \emptyset \\
\delta(q_0, 1) = \{q_0\} & \delta(q_1, 1) = \{q_2\} & \delta(q_2, 1) = \emptyset
\end{array}
$$

Stuck

续例 7. 接受全部以 01 结尾的串的 NFA. 识别字符串 00101 的过程.



续例 7. 接受全部以 01 结尾的串的 NFA.



状态转移表:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

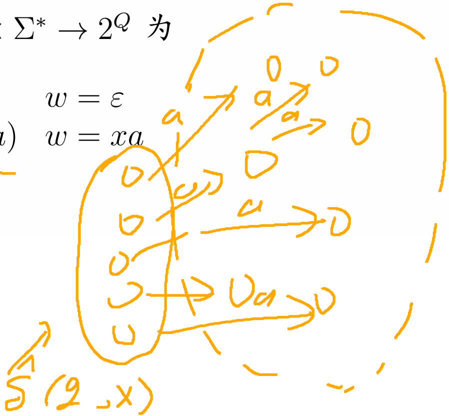
扩展转移函数

定义

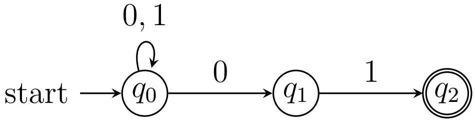
扩展 δ 到字符串，定义扩展转移函数 $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ 为

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \{q\} & w = \varepsilon \\ \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a) & w = xa \end{cases}$$

其中 $a \in \Sigma$, $w, x \in \Sigma^*$.



续例 7. 接受 01 结尾的串的 NFA, $\hat{\delta}$ 处理 00101 时每步的状态转移.



❶ $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

❷ $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

❸ $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

❹ $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

❺ $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

❻ $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

因为 q_2 是接受状态, 所以 NFA 接受 00101.

回顾

若 $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 是一个 DFA, 则 D 接受的语言为

$$\mathbf{L}(D) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

定义

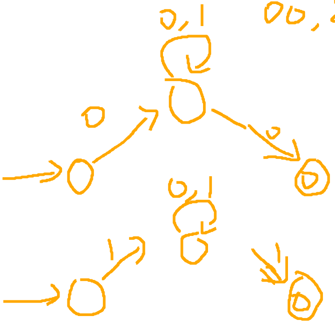
若 $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 是一个*NFA*, 则 N **接受的语言**为

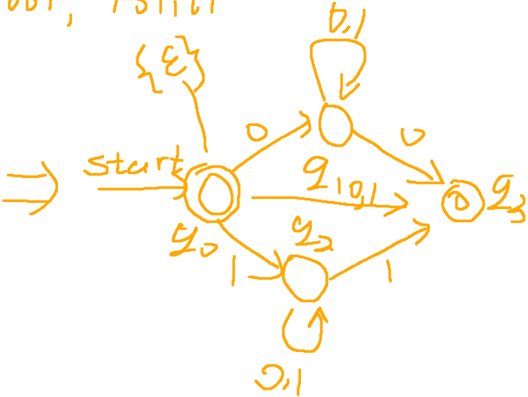
$$\mathbf{L}(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

例 8. 设计 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 的首尾字符相同.$\}$ 的 NFA.

00, ε, 1001, 1011101

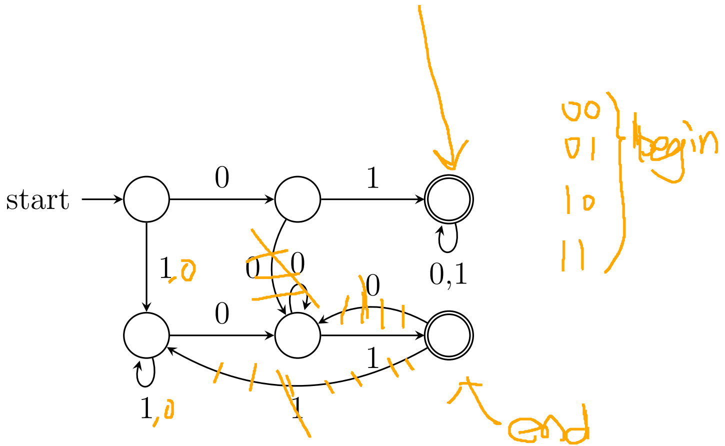
NFA





$\delta(q_3, 0) = \delta(q_3, 1) = \emptyset$

例 9. 设计 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ either begin or ends with 01.}\}$ 的 NFA.



DFA 与 NFA 的等价性

定理 1

如果语言 L 被 *NFA* 接受，当且仅当 L 被 *DFA* 接受.

子集构造法

如果 NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ 构造 DFA

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$$

1. $Q_D = 2^{Q_N}$; $\{S \mid S \subseteq Q_N\}$
2. $F_D = \{S \mid S \subseteq Q_N, S \cap F_N \neq \emptyset\}$;
3. $\forall S \subseteq Q_N$, $\forall a \in \Sigma$:

$$\boxed{\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).}$$

那么有 $\mathbf{L}(D) = \mathbf{L}(N)$.

证明: 为证明 $\mathbf{L}(D)=\mathbf{L}(N)$, 对 $|w|$ 用归纳法, 往证

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\},w)=\hat{\delta}_N(q_0,w).$$

❶ 归纳基础: 当 $|w|=0$ 即 $w=\varepsilon$,

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\},\varepsilon)=\{q_0\}=\hat{\delta}_N(q_0,\varepsilon)$$

❷ 归纳假设: 假设 $|w|=n$ 时, 命题成立

❸ 归纳递推: 当 $|w|=n+1$ 则 $w=xa\ (a\in\Sigma)$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_N(q_0,xa) &= \cup_{p\in\hat{\delta}_N(q_0,x)}\delta_N(p,a) && \text{NFA 的 } \hat{\delta} \text{ 定义}\\
&= \cup_{p\in\hat{\delta}_D(\{q_0\},x)}\delta_N(p,a) && \text{归纳假设}\\
&= \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\},x),a) && D \text{ 的构造}\\
&= \hat{\delta}_D(\{q_0\},xa) && \text{DFA 的 } \hat{\delta} \text{ 定义}
\end{aligned}$$

因此上式成立.

因为

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

所以

$$\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(N) &\iff \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset && \text{NFA 的语言} \\
&\iff \hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) \cap F_N \neq \emptyset && \text{刚证明的} \\
&\iff \hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) \in F_D && D\ \text{的构造} \\
&\iff w \in \mathbf{L}(D) && \text{DFA 的语言}
\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{L}(D) = \mathbf{L}(N). \quad \square$$

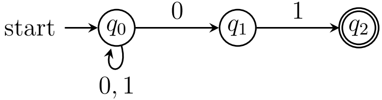
思考题

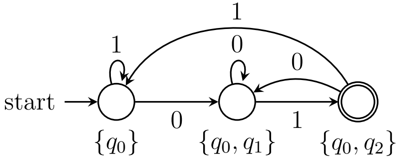
非确定性没能增加有穷自动机的能力，原因是什么呢？

子集构造法：构造与 NFA 等价的 DFA

NFA → DFA

续例 7. 接受全部以 01 结尾的串的 NFA.





	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\cancel{\{q_1\}}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\cancel{\{q_2\}}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\cancel{\{q_1, q_2\}}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\cancel{\{q_0, q_1, q_2\}}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

例 10. 设计 NFA 识别 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数第 3 个字符是 $1\}$.