形式语言与自动机理论

正则语言的性质

王春宇

计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

正则语言的性质

- 正则语言的泵引理
- 正则语言的封闭性
- 正则语言的判定性质
- 自动机的最小化

例 1. $L = \{0^m1^n \mid m, n \geq 0\}$ 是否是正则语言?

0^*1^* ✓

例 2. $L = \{0^m1^n \mid m \geq 2, n \geq 4\}$ 是否是正则语言?

000^*11111^* ✓

例 3. $L_{01} = \{0^n1^n | n \geq 0\}$ 是否是正则语言?

✗

正则语言的泵引理

定理 5 (正则语言的泵引理)

P

如果语言 L 是正则的，那么存在正整数 N，对 $\forall w \in L$，
只要 $|w| \geq N$，就可以将 w 分为三部分 $w = xyz$ 满足：

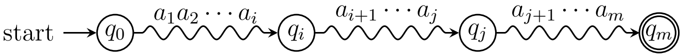
pumping lemma

1. $y \neq \varepsilon \ (|y| > 0)$;
2. $|xy| \leq N$;
3. $\forall k \geq 0,\ xy^k z \in L$.

证明:

❶ 如果 L 正则, 那么存在有 n 个状态 DFA A 使 $\mathbf{L}(A) = L$;

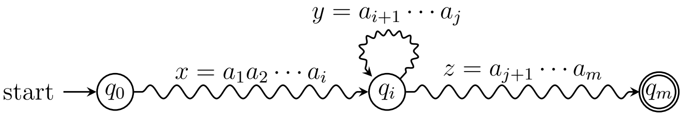
❷ 取 $w = a_1 \ldots a_m \in L$ $(m \geq n)$, 定义 $q_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \ldots a_i)$;



❸ 由鸽巢原理, 必有两状态相同 $q_i = q_j$ $(0 \leq i < j \leq n)$;

❹ 那么 $w = xyz$ 如图, 且有 $\forall k > 0$, $xy^k z \in L$;

to 3 parts



❺ 而因为 $i < j$ 所以 $y \neq \varepsilon$ (即 $|y| > 0$), 因为 $j \leq n$ 所以 $|xy| \leq n$. □

泵引理的应用

续例 3. 证明 $L_{01} = \{0^n1^n | n \geq 0\}$ 不是正则语言.

证明:

❶ 假设 L_{01} 是正则的.

❷ 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L_{01}\,(|w| \geq N)$ 满足泵引理.

❸ 从 L_{01} 中取 $w = 0^N1^N$, 显然 $w \in L_{01}$ 且 $|w| = 2N \geq N$.

❹ 那么, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$ 和 $y \neq \varepsilon$.

❺ 因此 y 只能是 0^m 且 $m > 0$.

❻ 那么 $xy^2z = 0^{N+m}1^N \notin L_{01}$, 而由泵引理 $xy^2z \in L_{01}$, 矛盾.

❼ 所以假设不成立, L_{01} 不是正则的. $\square$

例 4. 证明 $L_{eq} = \{w \mid w$ 由数量相等的 0 和 1 构成$\}$ 不是正则的.

思考题

刚刚已经证明了

$$L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

不是正则语言, 那么能否使用

$$L_{01} \subseteq L_{eq}$$

来说明 L_{eq} 也不是正则的呢?

续例 4. 证明 $L_{eq} = \{w \mid w$ 由数量相等的 0 和 1 构成$\}$ 不是正则的.

证明:

❶ 假设 L_{eq} 是正则的.

❷ 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L_{eq}\,(|w| \geq N)$ 满足泵引理.

❸ 从 L_{eq} 中取 $w = 0^N 1^N$, 显然 $w \in L_{eq}$ 且 $|w| = 2N \geq N$.

❹ 那么, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$ 和 $y \neq \varepsilon$.

❺ 因此 y 只能是 0^m 且 $m > 0$.

❻ 那么 $xy^2z = 0^{N+m}1^N \notin L_{eq}$, 而由泵引理 $xy^2z \in L_{eq}$, 矛盾.

❼ 所以假设不成立, L_{eq} 不是正则的. $\square$

例 5. 证明 $L = \{0^i 1^j \mid i > j\}$ 不是正则的.

证明:

1. 假设 L 是正则的.
2. 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L\,(|w| \geq N)$ 满足泵引理.
3. 从 L 中取 $w = 0^{N+1}1^N$, 则 $w \in L$ 且 $|w| = 2N + 1 \geq N$.
4. 由泵引理, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$ 和 $y \neq \varepsilon$.
5. 那么, y 只能是 0^m 且 $m \geq 1$. pump out/in
6. 那么, $xz = xy^0z = 0^{N+1-m}1^N \notin L$, 因为 $N + 1 - m \leq N$, 而由泵引理 $xy^0z \in L$, 矛盾.
7. 所以假设不成立, L 不是正则的. $\square$

例 6. Prove $L = \{a^3b^nc^{n-3} \mid n \geq 3\}$ is not regular.

证明:

❶ 假设 L 是正则的.

❷ 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L\,(|w| \geq N)$ 满足泵引理.

❸ 从 L 中取 $w = a^3b^Nc^{N-3}$, 则 $w \in L$ 且 $|w| = 2N > N$.

❹ 由泵引理, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$ 和 $y \neq \varepsilon$.

❺ 那么, 则 y 只可能有 3 种情况 $(m > 0, r > 0, s > 0)$:

- ❶ $y = a^m$, 则 $xy^2z = a^{3+m}b^Nc^{N-3} \notin L$;
- ❷ $y = b^m$, 则 $xy^2z = a^3b^{N+m}c^{N-3} \notin L$;
- ❸ $y = a^rb^s$, 则 $xy^2z = a^3b^sa^rb^Nc^{N-3} \notin L$.

❻ 无论 y 为何种情况, xy^2z 都不可能在 L 中, 与泵引理矛盾.

❼ 所以假设不成立, L 不是正则的. □

思考题

- $L = \{0^n 1^n \mid 0 \leq n \leq 100\}$ 是否是正则语言？
- 有限的语言，是否符合泵引理呢？
  - $\emptyset$
  - $\{\varepsilon\}$
  - $\{0, 00\}$

this means I choose a P bigger than the length of language, so I can't find w >= P, so the lemma is constant

泵引理只是必要条件

- 泵引理只是正则语言的必要条件
- 只能用来证明某个语言不是正则的
- 与正则语言等价的定理 — Myhill-Nerode Theorem

泵引理只是必要条件

不符合泵引理 → 不是正则

例 7. 语言 L 不是正则的，但每个串都可以应用泵引理

$$L = \{ca^nb^n \mid n \geq 1\} \cup \{c^kw \mid k \neq 1, w \in \{a, b\}^*\}$$

- 其中 $A = \{ca^nb^n \mid n \geq 1\}$ 部分不是正则的
- 而 $B = \{c^kw \mid k \neq 1, w \in \{a, b\}^*\}$ 部分是正则的
- 而 A 的任何串 $w = ca^ib^i$，都可应用泵引理，因为

$$w = (\varepsilon)(c)(a^ib^i)$$

重复字符 c 生成的新串都会落入 B 中

思考题

泵引理中的正整数 N 与 DFA 的状态数 n 之间有何关系? 与 NFA 的状态数之间呢?

思考题

语言

$$L = \{0^n x 1^n \mid n \geq 1, x \in \{0,1\}^*\}$$

是否是正则语言?