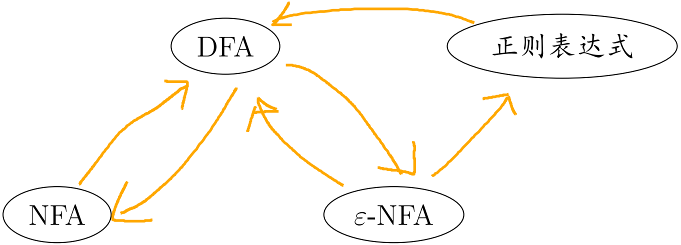
正则表达式

- 正则表达式
- 自动机和正则表达式
  - 由自动机到正则表达式
  - 由正则表达式到自动机
- 正则表达式的代数定律

DFA, NFA, ε-NFA 和正则表达式在表示语言的能力上等价.



由 DFA 到正则表达式，递归表达式法

定理 3

若 $L = \mathbf{L}(A)$ 是某 *DFA* A 的语言，那么存在正则表达式 R 满足 $L = \mathbf{L}(R)$.

证明：对 DFA A 的状态编号，令 1 为开始状态，即

$$A = (\{1, 2, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F),$$

设正则表达式 $R_{ij}^{(k)}$ 表示从 i 到 j 但中间节点不超过 k 全部路径的字符串集：

$$R_{ij}^{(k)} = \{x \mid \hat{\delta}(i, x) = j, x \text{ 经过的状态除两端外都不超过 } k\}.$$

R = X + Y

$R_{ij} = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}(R_{kk}) R_{kj}$

那么与 $A=(\{1,2,\ldots,n\},\Sigma,\delta,1,F)$ 等价的正则表达式为

$$\bigcup_{j\in F} R_{1j}^{(n)}$$

且递归式为

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i,a)=q_j\} & i\neq j \\ \{a \mid \delta(q_i,a)=q_j\}\cup\{\varepsilon\} & i=j \end{cases}$$

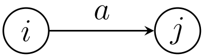
下面对 k 归纳，证明可用以上递归式求得 $R_{ij}^{(k)}$.

归纳基础：当 $i \neq j, k = 0$ 时，即 i 到 j 没经过任何中间节点

- 没有 i 到 j 的状态转移

$$R_{ij}^{(0)} = \boldsymbol{\emptyset}$$

- 有一个 i 到 j 的状态转移

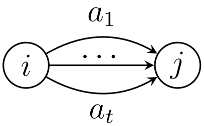


$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

- 有多个 i 到 j 的状态转移



$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_t$$

归纳基础 (续): 当 $i = j, k = 0$ 时, 即从 i 到自身没经过任何中间节点

- 状态 i 没有到自己的转移

$$R_{ii}^{(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

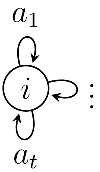
- 状态 i 有一个到自身的转移

$$R_{ii}^{(0)} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

- 状态 i 有多个到自身的转移



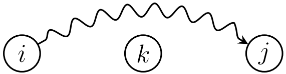
$$R_{ii}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_t + \boldsymbol{\varepsilon}$$

归纳假设: 已知 $R_{ij}^{(k-1)}$ 是从 i 到 j 但中间节点不超过 $k-1$ 的全部路径,

同理已知 $R_{ik}^{(k-1)}$, $R_{kk}^{(k-1)}$ 和 $R_{kj}^{(k-1)}$.

归纳递推: 那么 $R_{ij}^{(k)}$ 中全部路径, 可用节点 k 分为两部分

- 从 i 到 j 不经过 k 的

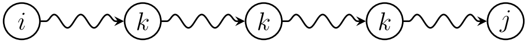


$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

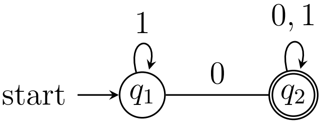
- 从 i 到 j 经过 k 的



$$R_{ij}^{(k)} = R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

因此 $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$.

例 8. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



- 计算 $R_{ij}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=0$
$R_{11}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

续例 8.

- 计算 $R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{1j}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 0$
$R_{11}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 1$
$R_{11}^{(1)}$	$(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1}) + (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0} + (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset + \emptyset(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})$
$R_{22}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \emptyset(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$

续例 8.

- 几个基本的化简规则

如果 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 是两个正则表达式

$$(\varepsilon + \mathbf{r})^* = \mathbf{r}^* = \{\varepsilon, r, r^2, r^3, \ldots\}$$

$$(\varepsilon + \mathbf{r})\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^* = \{\varepsilon, \ldots\}$$

$$\mathbf{r} + \mathbf{rs}^* = \mathbf{rs}^*$$

$$\emptyset\mathbf{r} = \mathbf{r}\emptyset = \emptyset \qquad \text{(零元)}$$

$$\emptyset + \mathbf{r} = \mathbf{r} + \emptyset = \mathbf{r} \qquad \text{(单位元)}$$

续例 8.

- 化简 $R_{ij}^{(1)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$	化简
$R_{11}^{(1)}$	$(\varepsilon+\mathbf{1})+(\varepsilon+\mathbf{1})(\varepsilon+\mathbf{1})^*(\varepsilon+\mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0}+(\varepsilon+\mathbf{1})(\varepsilon+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset+\emptyset(\varepsilon+\mathbf{1})^*(\varepsilon+\mathbf{1})$	$\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1}+\emptyset(\varepsilon+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

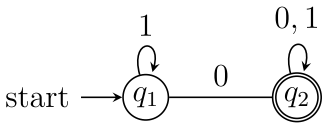
$\{\varepsilon, 0, 1\}$

续例 8.

- 计算 $R_{ij}^{(2)} = R_{ij}^{(1)} + R_{i2}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^* R_{2j}^{(1)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$	$R_{ij}^{(k)}$	$k=2$
$R_{11}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*$	$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$	$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset$	$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1}$	$R_{22}^{(2)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1} + (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1})$

续例 8.



- 化简 $R_{ij}^{(2)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=2$	化简
$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$	$\emptyset$
$R_{22}^{(2)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1} + (\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$	$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$

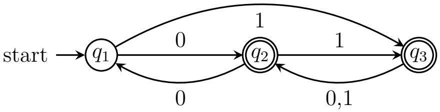
$\{0,1\}^*$

- 因只有 q_2 是接受状态，所以该 DFA 正则表达式为

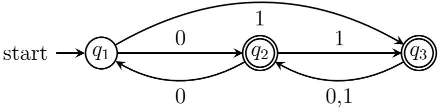
$$R_{12}^{(2)} = \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*.$$

$1 \to 2$

例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



续例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$R_{11}^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$(\mathbf{00})^*$
$R_{12}^{(k)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{13}^{(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{21}^{(k)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{22}^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{00}$	$(\mathbf{00})^*$
$R_{23}^{(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}+\mathbf{01}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{31}^{(k)}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*\mathbf{0}$
$R_{32}^{(k)}$	$\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*$
$R_{33}^{(k)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1}$

仅状态 2 和 3 是接受状态:

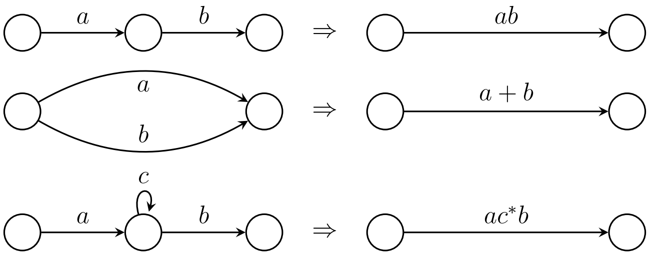
$$\begin{aligned}
R_{12}^{(3)} &= R_{12}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{32}^{(2)} \\
&= \mathbf{0}(\mathbf{00})^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^* \\
&= \mathbf{0}(\mathbf{00})^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1}((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{13}^{(3)} &= R_{13}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{33}^{(2)} \\
&= \mathbf{0}^*\mathbf{1} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1}) \\
&= \mathbf{0}^*\mathbf{1}((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*
\end{aligned}$$

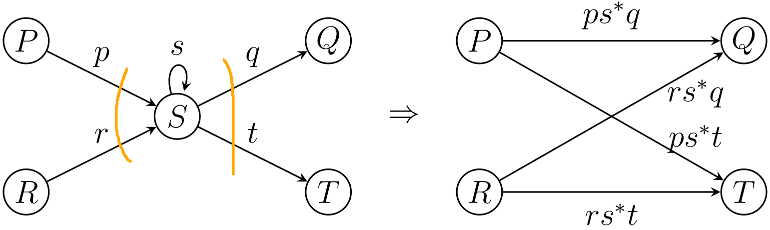
$$R_{12}^{(3)} + R_{13}^{(3)} = \mathbf{0}^*\mathbf{1}((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*) + \mathbf{0}(\mathbf{00})^*.$$

由 DFA 到正则表达式, 状态消除法

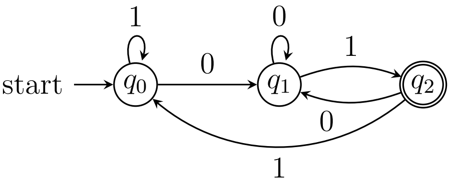
- 从 DFA 中逐个删除状态
- 用标记了正则表达式的新路径替换被删掉的路径
- 保持 “自动机” 等价.



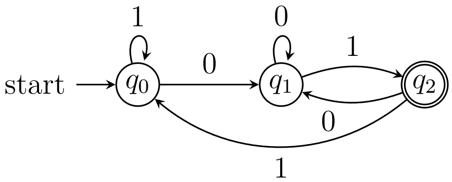
- 更一般的情况如图
- 若要删除状态 S, 需添加相应路径



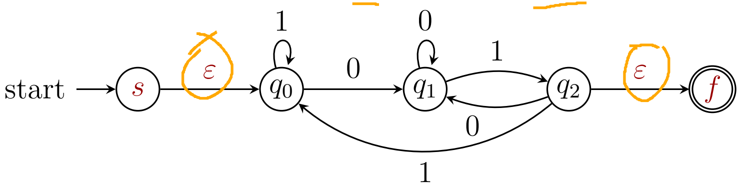
例 9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.



续例 9. 利用状态消除法，构造下图自动机的正则表达式.

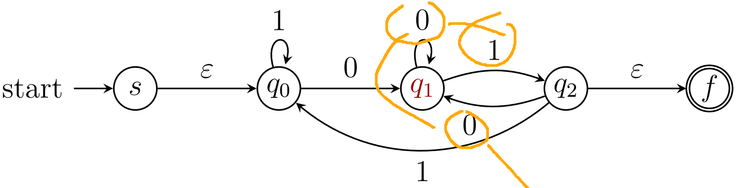


❶ 利用空转移，添加新的开始 s 和结束状态 f：

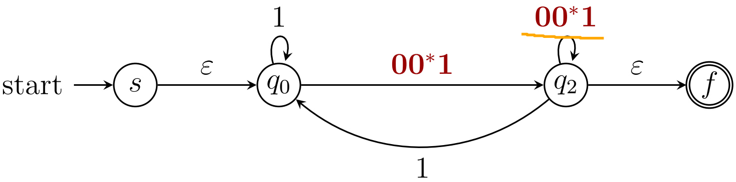


续例 9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

❶ 利用空转移, 添加新的开始 s 和结束状态 f :

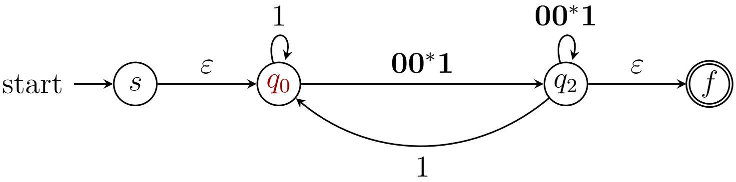


❷ 消除状态 q_1, 添加路径 $q_0 \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

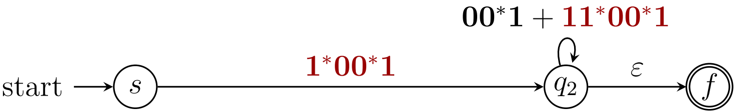


续例 9. 利用状态消除法，构造下图自动机的正则表达式.

❷ 消除状态 q_1，添加路径 $q_0 \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

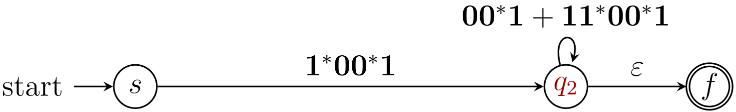


❸ 消除状态 q_0，添加路径 $s \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

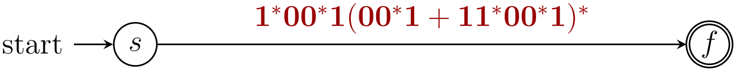


续例 9. 利用状态消除法，构造下图自动机的正则表达式.

❸ 消除状态 q_0, 添加路径 $s \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

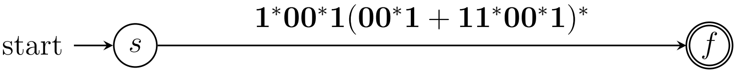


❹ 消除状态 q_2, 添加路径 $s \to f$:



续例 9. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

❹ 消除状态 q_2, 添加路径 $s \to f$:



❺ 因此该自动机的正则表达式为

$$\mathbf{1^*00^*1(00^*1+11^*00^*1)^*}.$$

由正则表达式到自动机

定理 4

正则表达式定义的语言，都可被有穷自动机识别.

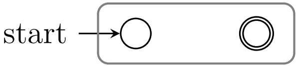
由正则表达式构造 ε-NFA

任何正则表达式 $\mathbf{e}$，都存在与其等价的 ε-NFA A，即 $\mathbf{L}(A) = \mathbf{L}(\mathbf{e})$，并且 A 满足：

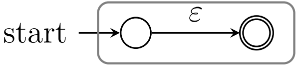
1. 仅有一个接收状态；
2. 没有进入开始状态的边；
3. 没有离开接受状态的边.

归纳基础:

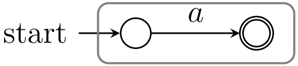
❶ 对于 $\emptyset$, 有 ε-NFA:



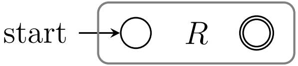
❷ 对于 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 有 ε-NFA:



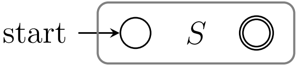
❸ $\forall a \in \Sigma$, 对于 $\mathbf{a}$, 有 ε-NFA:



归纳递推: 若 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 为正则表达式, 则它们对应的 ε-NFA 分别为 R 和 S

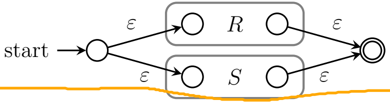


和

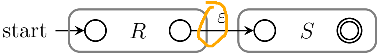


则正则表达式 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, $\mathbf{rs}$ 和 $\mathbf{r}^*$, 可由 R 和 S 分别构造如下:

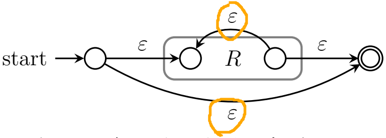
❶ 对于 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, 有 ε-NFA:



❷ 对于 $\mathbf{rs}$, 有 ε-NFA:

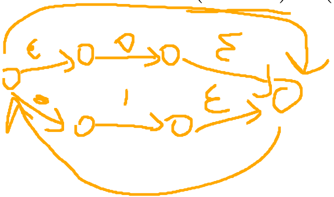


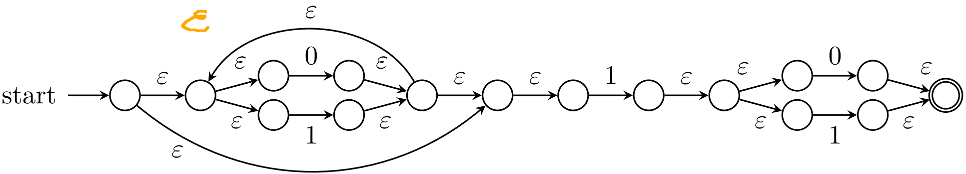
❸ 对于 $\mathbf{r}^*$, 有 ε-NFA:



因此任何结构的正则表达式, 都可递归构造出等价的 ε-NFA.

例 9. 正则表达式 $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$ 构造为 ε-NFA.





思考题

正则表达式到 ε-NFA 构造方法中的 3 个限制条件, 都有必要吗?