

形式语言与自动机理论

上下文无关语言的性质

王春宇

计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

上下文无关语言的性质

- 上下文无关语言的泵引理
 - 上下文无关语言的泵引理
 - 泵引理的应用
- 上下文无关语言的封闭性
- 上下文无关语言的判定性质
- 乔姆斯基文法体系

上下文无关语言的泵引理

定理 33

如果语言 L 是 CFL, 那么存在正整数 N , 对 $\forall z \in L$, 只要 $|z| \geq N$, 就可以将 z 分为五部分 $z = uvwxy$ 满足:

- ① $vx \neq \varepsilon$ (或 $|vx| > 0$);
- ② $|vwx| \leq N$;
- ③ $\forall i \geq 0, uv^iwx^iy \in L$.

$uvwxy$
 $vx \neq \varepsilon \quad |vwx| \leq N$
 $uv^iwx^iy \in L$

xyz
 $|xy| < N$
 $y \neq \varepsilon$
 $xy^kz \in L$

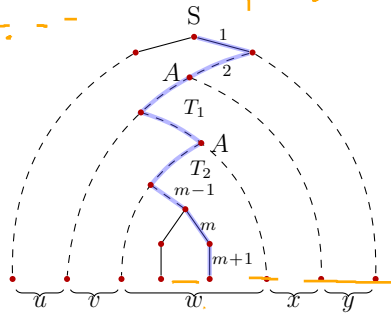
→ AA
→ G

- $N = 2^m$ 若有 $z \in L(G)$, 且 $|z| \geq N$.

- 则 z 的派生树内节点是二叉树, 最长路径长度至少 $m+1$, 节点至少 $m+2$ 个.

- 该路径由下至上 $m+1$ 个内节点中, 必有两个 T_2 和 T_1 标记了相同的变元 A .

- 若记 T_2 产物为 w , 且是 T_1 的子树, T_1 的产物可记为 $vw x$, 则有 $A \xRightarrow{*} vAx$ 和 $A \xRightarrow{*} w$.



- (3) ⑤ 那么 $\forall i \geq 0, A \xRightarrow{*} v^i w x^i$. 不妨设 $z = uvwxy$, 则 $S \xRightarrow{*} uAy \xRightarrow{*} uv^i w x^i y$.

- ⑥ T_1 路径长不超过 $m+1$, 那么 T_1 产物长不超过 2^m , 所以 $|vwx| \leq 2^m$.

- ⑦ T_2 必在 T_1 的左/右儿子中, 所以 v 和 x 不可能同时为空, 即 $vx \neq \varepsilon$.

$$A \rightarrow BC$$

T_2 不在 B 就在 C

泵引理的应用

例 1. 证明 $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$ 不是上下文无关语言.

证明:

- ① 假设 L 是 CFL, 那么存在整数 N , 对 $\forall z \in L (|z| \geq N)$ 满足泵引理.
- ② 从 L 中取 $z = 0^N 1^N 2^N$, 则显然 $z \in L$ 且 $|z| = 3N \geq N$.
- ③ 由泵引理, z 可被分为 $z = uvwxy$, 且有 $|vwx| \leq N$ 和 $vx \neq \varepsilon$.
- ④ 那么 vw 可能
 - i 只包含 0, 1 或 2, 那么 $uw^2y \notin L$;
 - ii 只包含 0 和 1, 或只包含 1 和 2, 那么也有 $uw^2y \notin L$;
- ⑤ 与泵引理 $uw^2y = uv^0wx^0y \in L$ 矛盾, 假设不成立.
- ⑥ L 不是上下文无关的.



例2. 证明 $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ 不是上下文无关的.

(错误的) 证明: 假设 L 是 CFL. 取 $z = 0^N 1 0^N 1$, 那么 $z = uvwxy$ 为

$$z = \underbrace{00 \cdots 00}_u \underbrace{0}_v \underbrace{1}_w \underbrace{0}_x \underbrace{00 \cdots 01}_y$$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{0^N 1} \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{0^N 1}$

则对任意 $i \geq 0$, 有 $uv^iwx^i y \in L$, 满足泵引理. □

(正确的) 证明: 假设 L 是 CFL. 取 $z = 0^N 1^N 0^N 1^N$, 将 z 分为 $z = uvwxy$ 时

- ① 若 $vw x$ 在 z 中点的一侧, uv^0wx^0y 显然不可能属于 L ;
- ② 若 $vw x$ 包括 z 中点, 那么 uv^0wx^0y 为 $0^N 1^i 0^j 1^N$, 也不可能属于 L .

所以假设不成立, L 不是 CFL. □