Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

"回顾"

⑧ 二阶常系数 非齐次方程

$\leftarrow y''+py'+qy=0$ 二阶常系数齐次

non-homogeneous homogeneous

非齐次: $y''+py'+qy=f(x)$

多项式，正余弦函数，e^x

~~① 若 $f(x)$ 是多项式 $f(x)=P_m(x)$~~

~~多项式最高次数为 m~~

解的结构:

其对应的齐次 $y''+py'+qy=0$

$Y=c_1y_1+c_2y_2$

通解

找 特解 y^*

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{非齐次通解: } y=Y+y^* \quad \Rightarrow \text{分类讨论}}$

① $\boxed{\text{若 } f(x) \text{ 是多项式}}$，$f(x)=P_m(x)$ → 多项式最高次数为 m

case 1° 当 $q\neq0$，令 $y^*=Q_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$

待定系数法 → 代入 $y''+py'+qy=f(x)$ 求 $a_0, a_1, a_2 \cdots a_m$

Mo | Tu | We | Th | Fr | Sa | Su

Memo No.

Date / /

② $q=0,\ p\neq 0$ $\quad \boxed{y''+py'=P_m(x)}$

令 $\boxed{y^* = x\cdot Q_m(x)}$ $\left(=Q_{m+1}(x)\right)$

与右边同次

③ $q=0,\ p=0$ $\quad y''=P_m(x)$ 两次积分

例:

$$y''+3y'-4y=4x+5$$

step1:

$$y''+3y'-4y=0$$

$$\lambda^2+3\lambda-4=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-4\end{cases} \Rightarrow Y=c_1e^{x}+c_2e^{-4x}$$

$\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}$

step2: $p\neq 0,\ q\neq 0$

令 $y^*=Ax+B$

$$0+3A-4(Ax+B)=4x+5$$

$$-4Ax+3A-4B=4x+5$$

$$\Rightarrow A=-1,\ B=-2$$

$$\therefore\ y = c_1e^{x}+c_2e^{-4x}+(-x-2)$$
$$= c_1e^{x}+c_2e^{-4x}-(x+2)$$

例2)

$$y''+y'=3x^2+2x$$

$\Rightarrow q=0$

Step 2: $y''+y'=0$ 通解:

$$\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1$$
$$Y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x} = c_1+c_2e^{-x}$$

特解:

设 $y^* = (Ax^2+Bx+C)x = Ax^3+Bx^2+Cx$

$$\cancel{\Rightarrow 2A+(2Ax+B)=3x^2+2x}$$

$$3Ax^2+2Bx+C+6Ax+2B=3x^2+2x$$
$$\Rightarrow 3A=3,\ A=1,\ 2B+6A=2$$
$$B=-2,\ C=4$$
$$\therefore\ y=c_1+c_2e^{-x}+x^3-2x^2+4x$$

Memo No.
Date / /

~~例3~~

case ② $f(x) = P_m(x)\cos bx$

↓多项式 ↓常数

1° 当 ib 不是特征根

$y^* = Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx$

2° 当 ib 是特征根

$y^* = x\,[Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx]$

例:

$f(x)$ $y'' - 3y' = \underline{(18x-12)\cos 3x}$

$\Rightarrow$ ① $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\quad Y = C_1 + C_2 e^{3x}$

② 设 $y^* = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x$

$(y^*)' = A\cos 3x + (-3Ax\sin 3x) + (-3B\sin 3x)$

$+ C\sin 3x + Cx\cos 3x + 3D\cos 3x$

$(y^*)'' = -3A\sin 3x + A(-3\sin 3x) + (Ax+B)(-9\cos 3x)$

$+ C\cos 3x + C\cdot 3\cos 3x + (Cx+D)(-9\sin 3x)$

Memo No. ______

Date / /

$\Rightarrow \quad y'' - 3y' = +[-(9A-9C)x + (-9B+6C-9D-3A)]$

$\cos 3x + [(-9C+9A)x + (-9D-6A+9B-3C)]\sin 3x$

$= (18x-12)\cos x$

$\Rightarrow \quad A=-1,\ C=-1,\ B=0,\ D=2$

$y^* = -x\cos 3x + (-x+1)\sin 3x$

$\Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{3x} + (-x\cos 3x + (-x+1)\sin 3x)$

例2：$\cancel{y'' + 9y' = -6\sin 3x}$

$\cancel{\lambda^2 + 9\lambda = 0, \quad \Rightarrow \lambda = 0, -9}$

$y'' + 9y = -6\sin 3x$

$\lambda^2 + 9 = 0, \quad \lambda = \pm 3i, \quad \alpha = 0, \beta = 3$

$Y\ \cancel{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

设 $y^* = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$

$\Rightarrow$ 代入 $\Rightarrow \quad y^* = x\sin 3x$

$\Rightarrow y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\cos 3x$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.
Date / /

9 二阶常系数微分方程 continue

$$y''+py'+qy=\begin{cases} P_m(x) & ① \\ P_m(x)\cos\beta x\ (P_m(x)\sin(x)) & ② \end{cases}$$

③ $y''+py'+qy=e^{rx}\cdot f(x)$ 其中 $f(x)$

step1: 通解

step2: $\boxed{y^* = z(x)\cdot e^{rx}}$ 代入

$(y^*)' = z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx}$

~~$(y^*)''=e^{rx}[z''(x)+(2r+$~~

$\Rightarrow e^{rx}[\underbrace{z''+\boxed{(2r+p)}z'+\boxed{(r^2+pr+q)}z}_{\text{二阶常系数 非齐次线性}}] = e^{rx}\cdot f(x)$

" $f(x)$

例: $y''-5y'+6y=(2x-1)e^{4x}$

① $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$

$\therefore Y = C_1 e^{2x}+C_2 e^{3x}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

③ 设 $y^* = z(x) \cdot e^{4x}$

$\Rightarrow p=-5,\ q=6,\ r=4$

$$z'' + \underbrace{3}_{2r+p} z' + \underbrace{2}_{r^2+pr+q} z = 2x-1$$

$z^* = Ax+B$

$3A + 2Ax + 2B = 2x-1,\quad A=1,\ B=-2$

$z^* = x-2 \quad \therefore y^* = (x-2)e^{4x}$

$\therefore y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (x-2)e^{4x}$

Summary

① 多项式 $P_m(x)$

② 三角函数 $\cos bx \quad \sin bx$

③ 指数函数 $e^{rx} \quad f(x)=1$

④ $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$

⇒ 拆解 一个一个求

$y^*_k \quad y'' + py' + qy = f_k(x) \Rightarrow Y + y_1^* + y_2^* + \cdots + y_k^*$

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su

Memo No.

Date / /

例: $y''-2y'+y=50\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$y''-2y'+y=25-25\cos 2x$$

① $f_1(x)=25$ ② $f_2(x)=-25\cos 2x$

① $y''-2y'+y=25$

$y_1^* = A \Rightarrow A=25$

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ $\lambda_1=\lambda_2=1$

$Y=c_1e^x+c_2xe^x$

② $y_2^* = A\cos 2x + B\sin 2x$

$\cdots \Rightarrow A=3, B=4$

$y_2^* = 3\cos 2x+4\sin 2x$

$\therefore y=c_1e^x+c_2xe^x+25+3\cos 2x+4\sin 2x$

$y^* = Q_m(x)$

$xQ_m(x)$ $(q=0)$ $(2r+p)$, (r^2+pr+q)

$z(x)\cdot e^{rx}$

$[Q_m(x)\cdot\cos bx + R_m(x)\cdot\sin bx](x)$