形式语言与自动机理论

下推自动机

王春宇

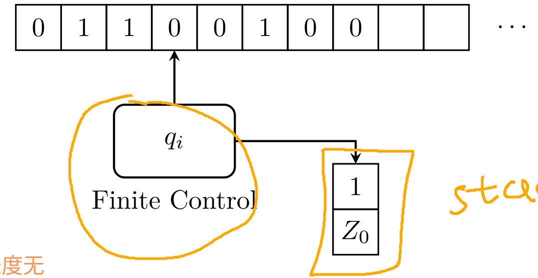
计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

下推自动机

- 下推自动机
  - 形式定义
  - 瞬时描述和转移符号
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机

下推自动机

ε-NFA：有限状态，非确定，ε转移



stack

栈：后进先出，只用栈顶，长度无限。
Pop: 仅弹出栈顶的一个符号
Push: 可压入一串符号

下推自动机的形式定义

定义

下推自动机(*PDA*, *Pushdown Automata*) P 为七元组

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

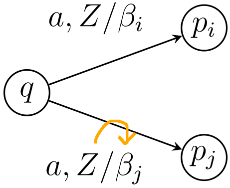
$Q\ \Sigma\ \Gamma\ \delta\ q_0\ Z_0\ F$

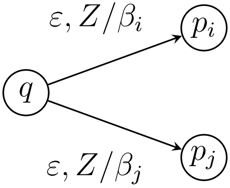
1. Q, 有穷状态集;
2. Σ, 有穷输入符号集;
3. Γ, 有穷栈符号集;
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q\times\Gamma^*}$, 状态转移函数;
5. $q_0 \in Q$, 初始状态;
6. $Z_0 \in \Gamma - \Sigma$, 栈底符号;
7. $F \subseteq Q$, 接收状态集或终态集.

PDA 的动作和状态转移图

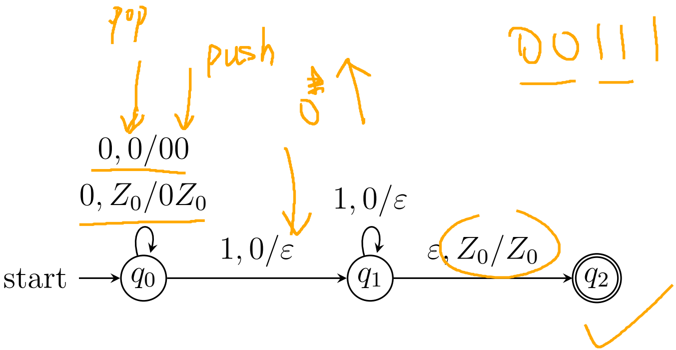
如果 $q, p_i \in Q\ (1 \le i \le m)$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$, $\beta_i \in \Gamma^*$,
可以有动作:

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_m, \beta_m)\}, \text{ 或}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_m, \beta_m)\}.$$

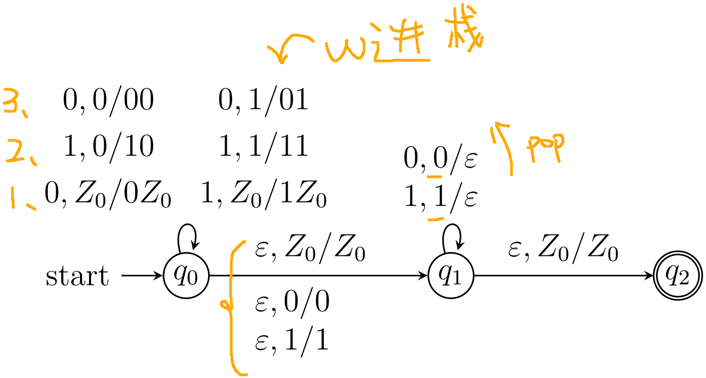




例 1. 设计识别 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA.



例 2. 设计识别 $L_{wwr} = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$ 的 PDA.



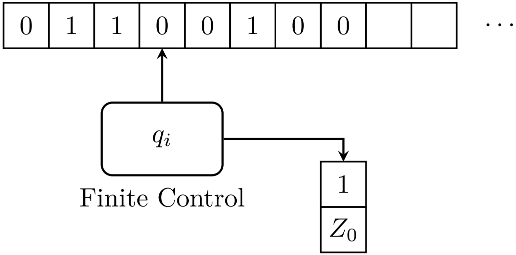
瞬时描述

定义

为描述 *PDA* 瞬间的格局，定义 $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ 中三元组

$$(q, w, \gamma)$$

为瞬时描述(*ID, Instantaneous Description*)，表示此时 *PDA* 处于状态 q，剩余输入串 w，栈为 γ.



转移符号

定义

在 PDA P 中如果 $(p,\beta)\in\delta(q,a,Z)$，由 $(q,aw,Z\alpha)$ 到 $(p,w,\beta\alpha)$ 的变化，称为 ID 的转移 $\vdash_P$，记为

$$(q,aw,Z\alpha)\vdash_P(p,w,\beta\alpha)$$

其中 $w\in\Sigma^*$, $\alpha\in\Gamma^*$.

若有 ID I, J 和 K，递归定义 $\vdash_P^*$ 为：

1. $I\vdash_P^* I$;
2. 若 $I\vdash_P J$, $J\vdash_P^* K$，则 $I\vdash_P^* K$.

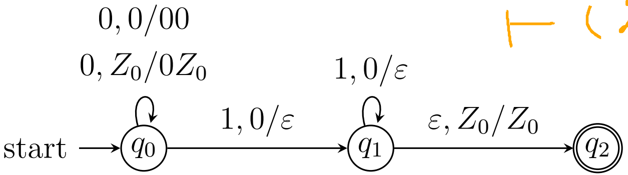
若 P 已知，可省略，记为 $\vdash$ 和 $\vdash^*$.

续例 1. 语言 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA, 识别 0011 时的 ID 序列.

$$(q_0, 0011, Z_0) \vdash_P (q_0, 011, 0Z_0) \vdash (q_0, 11, 00Z_0) \vdash (q_1, 1, 0Z_0)$$

I1)

$$\vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \checkmark$$



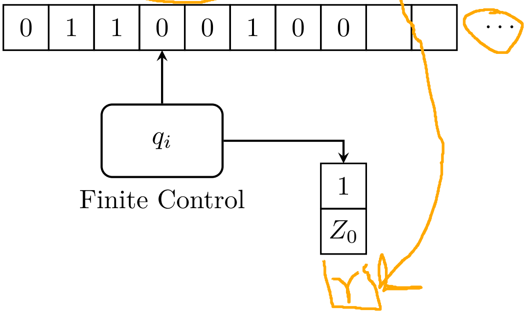
定理 23

对 $\forall w \in \Sigma^*, \forall \gamma \in \Gamma^*$，如果

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta),$$

那么

$$(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (p, yw, \beta\gamma).$$



定理 24

对 $\forall w \in \Sigma^*$, 如果

$$(q, xw, \alpha) \vdash_P^* (p, yw, \beta),$$

那么

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta).$$