# 形式语言与自动机理论

上下文无关语言的性质

王春宇

计算机科学与技术学院 哈尔滨工业大学

## 上下文无关语言的性质

- 上下文无关语言的泵引理
  - 上下文无关语言的泵引理
  - 泵引理的应用
- 上下文无关语言的封闭性
- 上下文无关语言的判定性质
- 乔姆斯基文法体系

## 上下文无关语言的泵引理

#### 定理 33

如果语言 L 是 CFL, 那么存在正整数 N, 对  $\forall z \in L$ , 只要  $|z| \ge N$ , 就可以将 z 分为五部分 z = uvwxy 满足:

- $\bullet \ vx \neq \varepsilon \ (\mathfrak{A}|vx| > 0);$
- $|vwx| \leq \sqrt{k};$
- $\exists \forall i \ge 0, \ uv^i w x^i y \in L.$



证明:

 $|\mathcal{V}| = \mathcal{W}$   $\mathcal{N} = \mathcal{I}_{\mathcal{W}}$ 

① 设 CNF 格式 CFG G 中变元数 |V|=m, 令  $\mathcal{L}(G)$   $|\mathcal{L}|\mathcal{L}(G)$  $N=2^m$ , 若有 $z\in L(G)$ , 且  $|z|\geq N$ .

② 则 z 的派生树内节点是二叉树, 最长路径长 度至少 m+1, 节点至少 m+2 个.

3 该路径由下至上 m+1 个内节点中, 必有两 个  $T_2$  和  $T_1$  标记了相同的变元 A.

 $\bullet$  若记  $T_2$  产物为 w, 且是  $T_1$  的子树,  $T_1$  的产 物可记为 uux 则有  $A \Rightarrow vAx$  和  $A \Rightarrow w$ .

**6** 那么  $\forall i > 0$ ,  $A \Rightarrow v^i w x^i$ . 不妨设 z = uvwxy, 则  $S \Rightarrow uAy \Rightarrow uv^i w x^i y$ .

**6**  $T_1$  路径长不超过 m+1, 那么  $T_1$  产物长不超过  $2^m$ , 所以  $|vwx| < 2^m$ .

**①**  $T_2$  必在  $T_1$  的左/右儿子中, 所以 v 和 x 不可能同时为空, 即  $vx \neq \varepsilon$ .

## 泵引理的应用

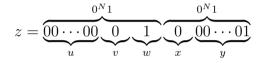
例 1. 证明  $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \ge 1\}$  不是上下文无关语言.

### 证明:

- 假设 L 是 CFL, 那么存在整数 N, 对  $\forall z \in L(|z| \ge N)$  满足泵引理.
- ② 从 L 中取  $z = 0^N 1^N 2^N$ , 则显然  $z \in L$  且  $|z| = 3N \ge N$ .
- 3 由泵引理, z 可被分为 z = uvwxy, 且有  $|vwx| \le N$  和  $vx \ne \varepsilon$ .
- 那么 vwx 可能

  - **●** 只包含 0 和 1, 或只包含 1 和 2, 那么也有  $uwy \notin L$ ;
- **⑤** 与泵引理  $uwy = uv^0wx^0y \in L$  矛盾, 假设不成立.
- **⑥** *L* 不是上下文无关的.

例 2. 证明  $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$  不是上下文无关的. (错误的) 证明: 假设 L 是 CFL. 取  $z = 0^N 10^N 1$ , 那么 z = uvwxy 为



则对任意  $i \geq 0$ , 有  $uv^i w x^i y \in L$ , 满足泵引理.

- (正确的) 证明: 假设 L 是 CFL. 取  $z = 0^N 1^N 0^N 1^N$ , 将 z 分为 z = uvwxy 时
  - ① 若 vwx 在 z 中点的一侧,  $uv^0wx^0y$  显然不可能属于 L;
- ② 若 vwx 包括 z 中点, 那么  $uv^0wx^0y$  为  $0^N1^i0^j1^N$ , 也不可能属于 L. 所以假设不成立, L 不是 CFL.