

形式语言与自动机理论

下推自动机

王春宇

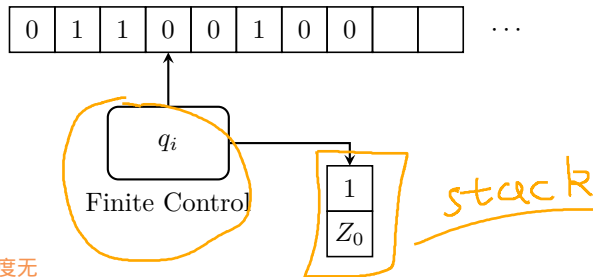
计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

下推自动机

- 下推自动机
 - 形式定义
 - 瞬时描述和转移符号
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机

下推自动机

ϵ -NFA: 有限状态, 非确定, 无转移



栈：后进先出，只用栈顶，长度无限。

Pop: 仅弹出栈顶的一个符号

Push: 可压入一串符号

下推自动机的形式定义

定义

下推自动机 (*PDA*, *Pushdown Automata*) P 为七元组

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

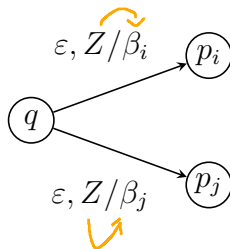
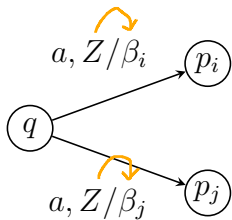
- ① Q , 有穷状态集;
- ② Σ , 有穷输入符号集;
- ③ Γ , 有穷栈符号集;
- ④ $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$, 状态转移函数;
- ⑤ $q_0 \in Q$, 初始状态;
- ⑥ $Z_0 \in \Gamma - \Sigma$, 栈底符号;
- ⑦ $F \subseteq Q$, 接收状态集或终态集.

$$Q \subseteq \Gamma \delta q_0 z_0 \Gamma$$

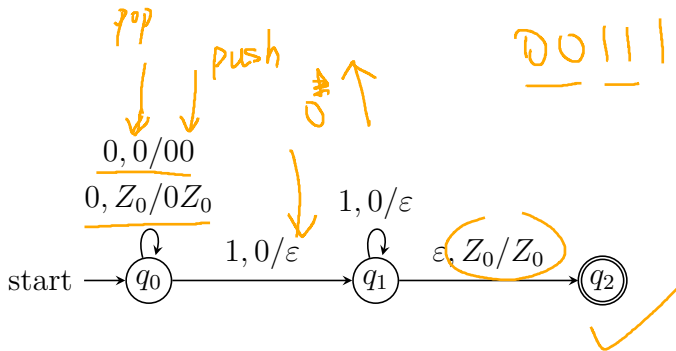
PDA 的动作和状态转移图

如果 $q, p_i \in Q$ ($1 \leq i \leq m$), $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$, $\beta_i \in \Gamma^*$,
可以有动作:

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \dots, (p_m, \beta_m)\}, \text{ 或}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \dots, (p_m, \beta_m)\}.$$



例 1. 设计识别 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA.



例2. 设计识别 $L_{ww^R} = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$ 的 PDA.

✓ 进栈

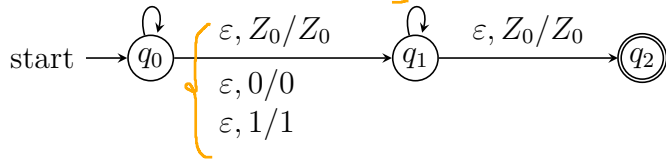
3、 0, 0/00 0, 1/01

2、 1, 0/10 1, 1/11

1、 0, Z_0 /0 Z_0 1, Z_0 /1 Z_0

0, 0/ε ↗ pop

1, 1/ε



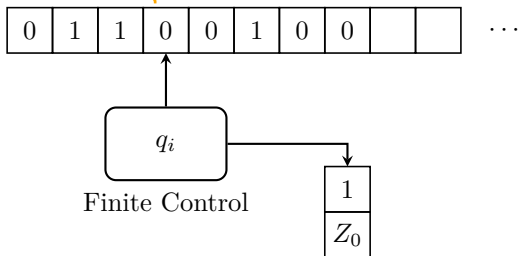
瞬时描述

定义

为描述 PDA 瞬间的格局, 定义 $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ 中三元组

$$(q, w, \gamma)$$

为瞬时描述 (ID, Instantaneous Description), 表示此时 PDA 处于状态 q , 剩余输入串 w , 栈为 γ .



转移符号

定义

在 PDA P 中如果 $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$, 由 $(q, aw, Z\alpha)$ 到 $(p, w, \beta\alpha)$ 的变化, 称为 ID 的转移 \vdash_P , 记为

$$(q, aw, Z\alpha) \vdash_P (p, w, \beta\alpha)$$

其中 $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$.

若有 ID I, J 和 K , 递归定义 \vdash_P^* 为:

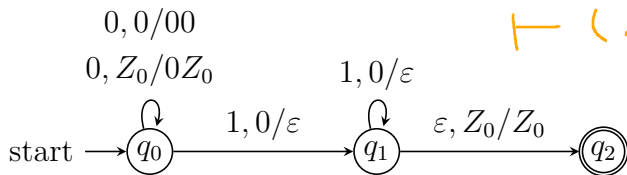
① $I \vdash_P^* I$;

② 若 $I \vdash_P J$, $J \vdash_P^* K$, 则 $I \vdash_P^* K$.

若 P 已知, 可省略, 记为 \vdash 和 \vdash^* .

续例 1. 语言 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA, 识别 0011 时的 ID 序列.

$(q_0, 0011, Z_0) \vdash_p (q_0, 011, Z_0) \vdash$
 $\vdash (q_0, 11, 0Z_0) \vdash (q_1, 1, 0Z_0)$
 $\vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash$
 $(q_2, \varepsilon, Z_0) \checkmark$



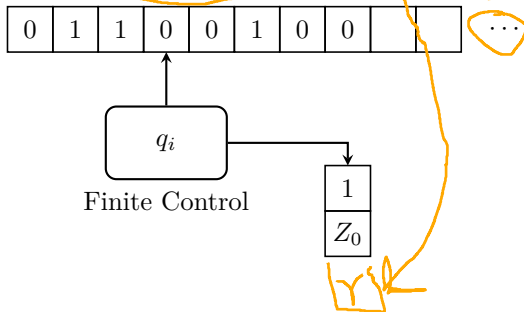
定理 23

对 $\forall w \in \Sigma^*, \forall \gamma \in \Gamma^*$, 如果

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta),$$

那么

$$(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (p, yw, \beta\gamma).$$



定理 24

对 $\forall w \in \Sigma^*$, 如果

$$(q, \underline{xw}, \alpha) \vdash_P^* (p, \underline{yw}, \beta),$$

那么

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta).$$

