

# 基于热传递学分析的高温作业专用服装设计

## 摘要

本文针对高温作业专用服装的设计问题，构造了高温条件下的包含三种材料，假人和两者间空气层组成的系统，基于热传递学分析给出了系统各层热传递微分方程以及初边值条件得出了高温作业专用服装的热传递模型，并针对不同材料层和空气层的厚度变化对高温作业专用服装进行优化设计。

**针对问题一**，根据傅立叶定律和热传导方程对该系统进行分析，将题目系统简化为一个一维非稳态导热的系统，将题目中给出的材料及空气的热导率，密度，比热容，厚度代入热传递方程中，得到一个二阶偏微分方程，根据有限差分法将这个连续的传热过程离散为多点的传热过程进行求解，得到高温作业专用服装的热传递模型为

$$\begin{pmatrix} 1-2r & -r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1-2r & -r & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{pmatrix}_{(M-1) \times (M-1)} \begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{n-1} + r \cdot T_0^n \\ T_2^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{M-2}^{n-1} \\ T_{M-1}^{n-1} + r \cdot T_M^n \end{pmatrix}$$

接着，使用 MATLAB 计算出温度分布，该计算结果与已知的数据一致，从而验证了模型的可靠性。

**针对问题二**，利用第一问中得到的热传递模型，在环境温度为 65°C、IV 层的厚度为 5.5 mm 的条件下，以确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C，超过 44°C 的时间不超过 5 分钟，且考虑重量和费用问题，II 层的厚度尽可能的小为约束条件，II 层的厚度为决策变量，用有限差分法求最优解为  $L_2=8.7\text{mm}$ 。

**针对问题三**，利用第一问中得到的热传递模型，在环境温度为 80°C 的条件下，以确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟为约束条件，且考虑成本和重量问题，在约束条件下，II 层的厚度要尽可能小。以 II 层厚度和 IV 层厚度为决策变量，用有限差分法求最优解为  $L_2=7.6\text{mm}$ ， $L_4=6.3\text{mm}$ 。

**关键词：**热传递学 一维非稳态导热 偏微分方程 有限差分法 线性规划

## 一、问题重述

### 1.1 问题引言

在高温环境下工作时，人们需要穿着专用服装以避免灼伤，高温作业专用服作为重要的专业装备，必须具备良好的防热性能以满足工作人员的需求。与此同时在考虑衣服的防热性能的同时也应该考虑衣服的质量问题和成本问题。专用服装通常由三层织物材料构成，记为 I、II、III 层，其中 III 层与外界环境接触，层与皮肤之间还存在空隙，将此空隙记为 IV 层。为设计专用服装，将体内温度控制在  $37^{\circ}\text{C}$  的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度。为了降低研发成本、缩短研发周期，利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并解决以下问题。

### 1.2 问题的提出

(1) 专用服装材料的某些参数给出，对环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度。建立数学模型，计算温度分布。

(2) 当环境温度为  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时，确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

(3) 当环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$  时，确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

## 二、问题分析

### 2.1 题目中给出的数据

附件 1. 专用服装材料的参数值

分层	密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	比热 ( $\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ )	热传导率 ( $\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ )	厚度 (mm)
I 层	300	1377	0.082	0.6
II 层	862	2100	0.37	0.6-25
III 层	74.2	1726	0.045	3.6
IV 层	1.18	1005	0.028	0.6-6.4

## 2.2 针对问题一的分析

构造了专用服装-空气层-假人系统，为了简化过程，将该系统考虑为一个一维非稳态导热系统，根据所给的三层材料的厚度，密度，比热容，热传导率利用傅里叶定律和热传导方程式将问题转化为一个求解偏微分方程的问题，然后使用有限差分法在 MATLAB 中将方程求解，得到高温作业专用服装的热传递模型。接着，使用该模型计算出各层随时间变化的温度分布，该计算结果与已知的数据一致，从而验证了模型的可靠性。

## 2.3 针对问题二的分析

利用第一问中得到的热传递模型，在环境温度为  $65^\circ\text{C}$ 、IV 层的厚度为  $5.5\text{ mm}$  的条件下，以确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^\circ\text{C}$ ，超过  $44^\circ\text{C}$  的时间不超过 5 分钟，且考虑重量和费用问题，II 层的厚度尽可能的小为约束条件，II 层的厚度为决策变量，用有限差分法求最优解。

## 2.4 针对问题三的分析

利用第一问中得到的热传递模型，在环境温度为  $80^\circ\text{C}$  的条件下，以确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^\circ\text{C}$ ，且超过  $44^\circ\text{C}$  的时间不超过 5 分钟为约束条件，且考虑成本和重量问题，在约束条件下，II 层的厚度要尽可能小。以 II 层厚度和 IV 层厚度为决策变量，用有限差分法求最优解。

## 三、模型假设

1. 假设三种材料都为非多孔材料即不考虑水蒸气和孔隙率，不考虑该问题的不考虑该问题的热湿耦合情况，只考虑外界恒温温度场与系统的热传递。
2. 不考虑外界恒温温度场和 I 层材料之间的热对流并且 IV 层材料厚度值最大为  $6.4\text{mm}$ ，热对流影响小，不考虑 IV 层材料与假人之间的热对流的影响。
3. I 层材料阻挡了大部分的热辐射，所以在三层材料和假人之间传播时可以忽

略热辐射的影响。

4. 在实验开始前 I、II、III、IV 层温度同假人体表温度一致为  $37^{\circ}\text{C}$ 。
5. 高温作业专用服装的表面积与厚度比很大，边缘处的热量损失可以忽略。
6. 假设 I、II、III、IV 层的热传导率、比热容、密度不随温度的变化而改变则一侧的换热系数一定，外界温度场的温度恒定，换热流体温度一定，看成第三类边界点，将问题看为一维问题处理。
7. 假设 I、II、III 层材料之间无缝隙。
8. 在热传递过程中，I、II、III、IV 层不涉及相变。
9. 热量传递只沿着平面的法线方向，不考虑其他方向的热量传递及同一平面内的热传递。
10. 在数理方程中，假设误差在允许的范围内。

#### 四、符号说明

符号表示	文字说明	单位
$L_i$	第 $i$ 层的材料厚度	mm
$r_i$	第 $i$ 层的热传导率	$\text{W}/\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C}$
$c_i$	第 $i$ 层的比热容	$\text{J}/\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}$
$\rho_i$	第 $i$ 层的密度	$\text{Kg}/\text{m}^3$
$k_i$	第 $i$ 层的热扩散率	$\text{m}^2/\text{s}$
$Q$	导热量	J
$T$	温度	K
$h$	热对流系数	$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
$\lambda$	热导率	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$

#### 五、建立与求解

##### 5.1 模型一的建立与求解

5.1.1 数据处理

将题中给出的时间和假人体表温度的数据作为 x 轴和 y 轴建立坐标系，得到图 1 假人体表温度与时间关系图 1



图 1 假人温度与时间关系图（1）

根据观察易得，时间在 1645s 后假人温度恒定在 48.08°C 不变，对 0s 到 1645s 再进行一次画图得到图 2 假人体表温度与时间关系图 2

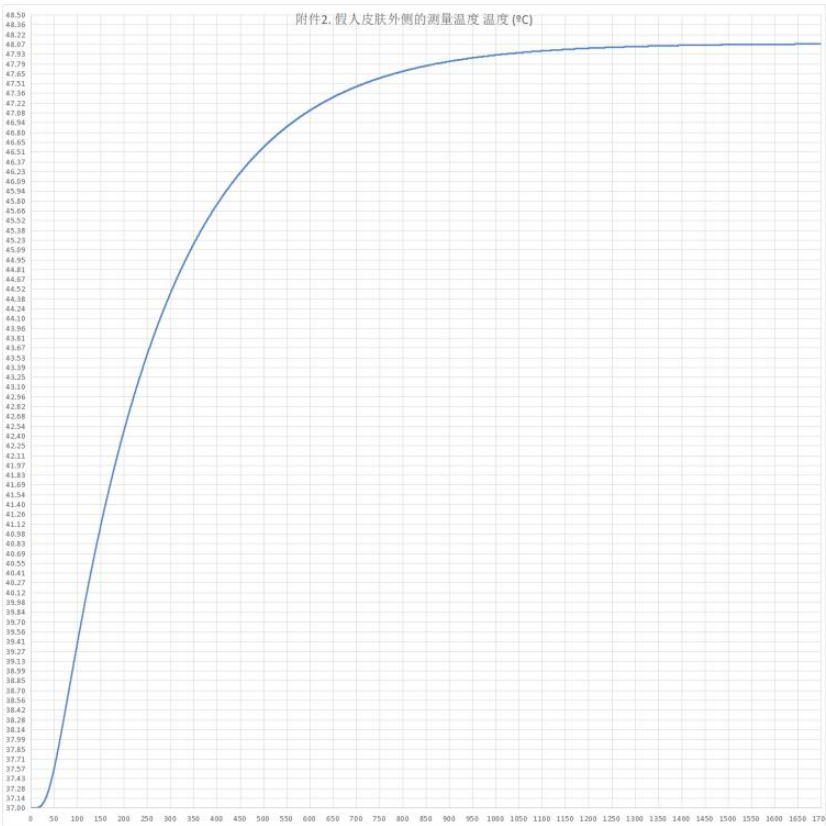


图 2 假人温度与时间关系图（2）

### 5.1.2 化简热传递模型

为了方便计算,本文将体温恒定为  $37^{\circ}\text{C}$  的假人假定为一个高为  $1.7\text{m}$  的圆柱体,图 3 是由三层高温作业专用服、假人皮肤及假人皮肤-高温作业服的空气层组成的简易系统模型。

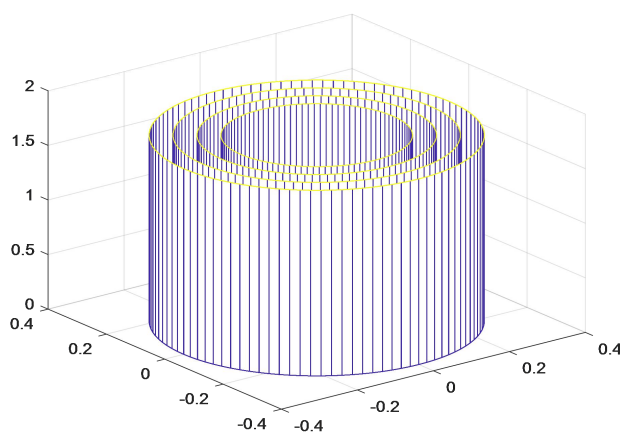


图 3 简易高温作业专用服、假人皮肤及空气层系统模型

考虑到圆筒壁较大,可以忽略弧度对问题的影响,转化成水平壁的传热模型。因为在之前的假设中,假设该系统符合第三类边界点,所以该系统可以看成是一个以维非稳态传热模型,并且只考虑热量传递只沿着平面的法线方向,不考虑其方向的热量传递及同一平面内的热传递。得到一个简易热传递模型如图 4。

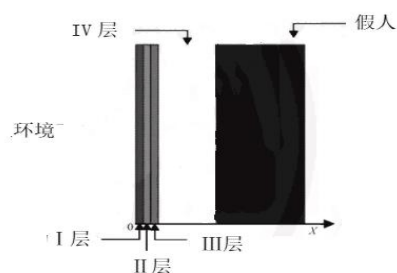


图 4 简易热传递模型

### 5.1.3 热传递模型的建立与求解

首先,我们由 Fourier 定律推导出热传递方程:

dt 时间内，通过面积元 ds 流入小体积元的热量 dQ 与沿面积元外法线方向的温

度变化率  $\frac{\partial u}{\partial n}$  成正比也与 ds 和 dt 成正比，即：

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial n} ds dt = -k \Delta T \cdot ds dt$$

式中 k 是导热系数，

其中 n 为曲面 ds 的外法向向量，k 为热传导系数。故从  $t_1$  到  $t_2$  这段时刻流入曲面内部的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_s k \frac{\partial T}{\partial n} \cdot ds \right] dt$$

又区域  $\Omega$  内温度升高吸收的热量为

$$\begin{aligned} Q_2 &= \iiint_{\Omega} c\rho [T(x, y, z, t_2) - T(x, y, z, t_1)] dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} c\rho \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z, t) dt \right] dx dy dz \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz \right] dt \\ Q_2 &= \iiint_{\Omega} c\rho [T(x, y, z, t_2) - T(x, y, z, t_1)] dx dy dz \end{aligned}$$

其中 c 为比热， $\rho$  为密度

由能量守恒定律， $Q_1 = Q_2$

由高斯公式有

$$\begin{aligned} \iint_s k \frac{\partial T}{\partial n} dS &= \iint_s k \nabla T \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} k \Delta T dx dy dz \end{aligned}$$

故有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\Omega} k \Delta T dx dy dz \right] dt$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a^2 \Delta u$$

其中,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

当内部有热源时, 设单位时间内, 单位体积内所产生的热量为  $F(x, y, z, t)$

则相应的热传导方程为  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$  其中  $f = \frac{F}{c\rho}$

因此我们建立如下的热传递模型:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in (0, L_1) \times (0, t)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in (L_1, L_1 + L_2) \times (0, t)$$

$$c_3 \rho_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( k_3 \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in (L_1 + L_2, L_{fab}) \times (0, t)$$

初始条件为

$$T(x, 0) = T_0$$

左右边界条件满足

$$h[T(x, t) - t_{\infty}]_{x=0} = -\lambda_1 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

第 I 层与第 II 层之间的接触面满足

$$T_2|_{x=L_1} = T_1|_{x=L_1}$$



第II层与第III层之间的接触面满足

$$-k_3 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2} = -k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2}$$

$$T_3 \Big|_{x=l_1+l_2} = T_2 \Big|_{x=L_1+l_2}$$

利用  $T(x,t)$  关于  $t$  的向后差商： $\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_j^n - T_j^{n-1}}{\Delta t}$ ，关于  $t$  的二阶中心差商：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$
，对方程进行离散。离散后的方程为：

$$\frac{T_j^n - T_j^{n-1}}{\Delta t} = a^2 \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

令： $r = \frac{a^2 \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$ ，即  $(1+2r)t_j^n - r \cdot t_{j+1}^n - r \cdot t_{j-1}^n = t_j^{n-1}$ 。

可化为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 1-2r & -r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1-2r & -r & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{pmatrix}_{(M-1) \times (M-1)} \begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{M-2}^n \\ T_{M-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{n-1} + r \cdot T_0^n \\ T_2^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{M-2}^{n-1} \\ T_{M-1}^{n-1} + r \cdot T_M^n \end{pmatrix}$$

做出  $T(L,t)$  ( $L=15.2$ ) 图像和数据图像，如图 5

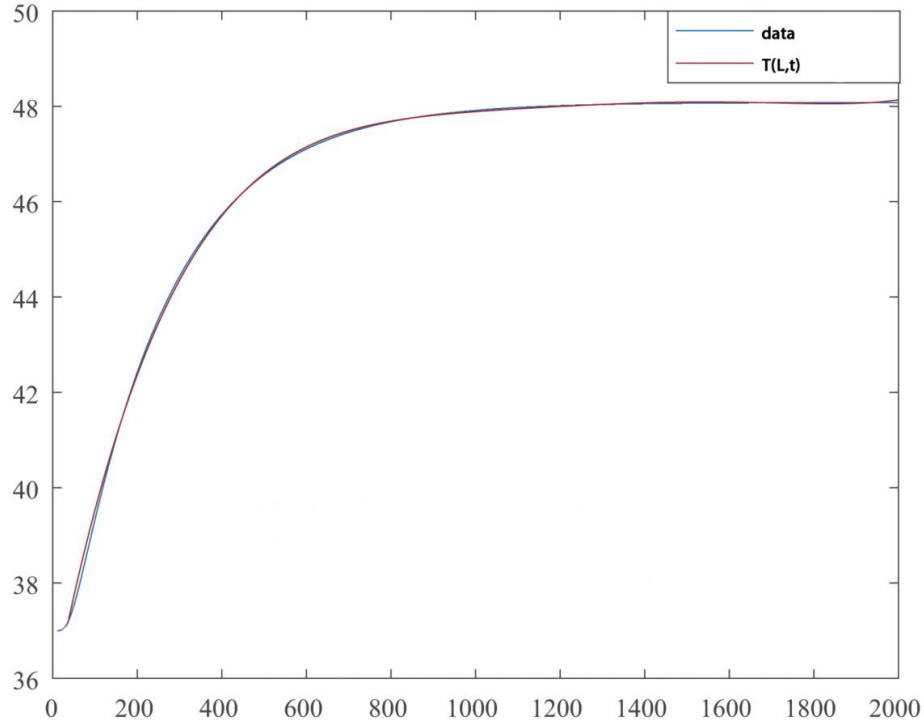


图5 函数图像与数据图像

## 5.2 问题二模型的建立与求解

### 5.1.1 模型二的建立

对于问题二，将  $L_2$  设定为自变量，在环境温度  $T^{(2)}=65^{\circ}\text{C}$ ,  $L_4=5.5\text{mm}$ , 问题要求在时间  $t=3600\text{s}$  时,  $T_4 \leq 47^{\circ}\text{C}$ , 且当空气层的温度  $T_4(L, t) = 44^{\circ}\text{C}$ , 维持  $44^{\circ}\text{C}$  的时间  $\Delta t < 300\text{s}$  时, 求出所有符合约束条件的温度分布的  $L_2$ , 并比较求出最优解。

### 5.2.2 模型二的求解

这是一个线性规划问题，我们采用有限差分法来求解：

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \partial \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ T_2(0, t) = 65 \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 \frac{L_i}{\tau_i}} \end{cases}$$

考虑到节约成本的实际问题，尽可能降低第二层作业服的质量  $m_2 = \rho L_2 \bullet S$ , 所得

$L_2$  范围取最小值。

利用 MATLAB 求解得：  $L_2=8.7\text{mm}$ 。所得温度分布图如图 6。

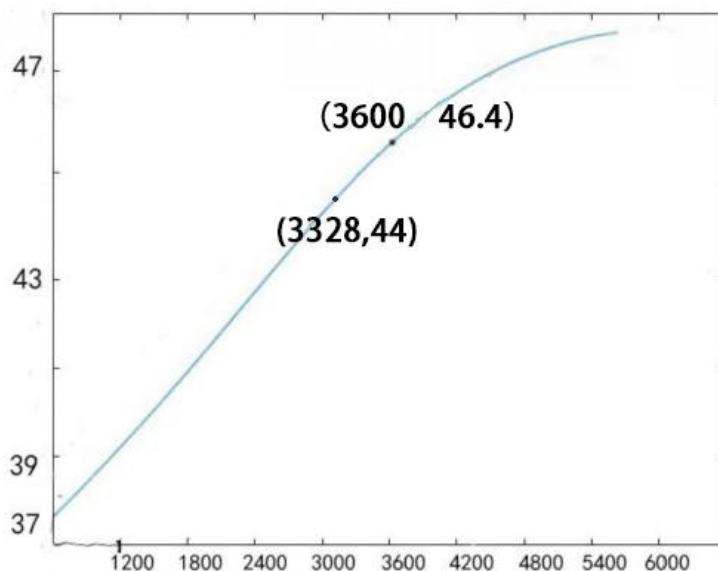


图 6 温度分布曲线图 (1)

### 5.3 问题三模型的建立与求解

同(2), 自变量未知层的厚度有两个  $L_2, L_4$ 。在  $T^{(3)}=80^\circ\text{C}, t=1800\text{s}$  时,  $T_4 \leq 47^\circ\text{C}$ , 且当空气层的温度  $T_4(L, t) = 44^\circ\text{C}$ , 维持  $44^\circ\text{C}$  的时间  $\Delta t < 300\text{s}$  时, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \partial \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ T_2(0, t) = 80 \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 \frac{L_i}{\tau_i}} \end{cases}$$

利用有限差分法, 同时考虑节约成本的实际问题,  $L_2=7.6\text{mm}$ ,  $L_4=6.3\text{mm}$ 。

所得温度分布如图 7

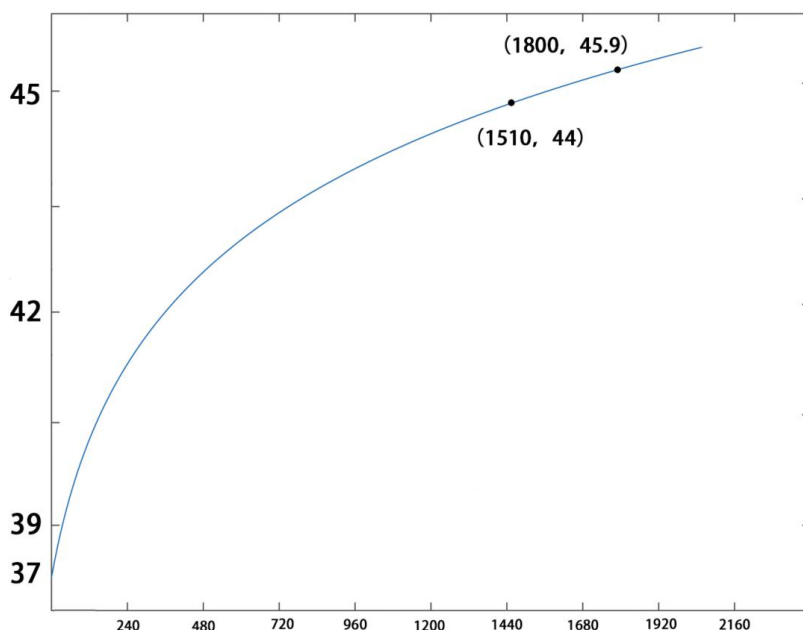


图7 温度分布曲线图(2)

## 六、模型的评价与改进

### 6.1 模型优点

1. 简化了热传递模型，将一个三维的非稳态热传递模型简化为一维非稳态热传递模型，有利于模型的分析与计算。
2. 本模型建立在热传递学的基础上，具有普适性。
3. 在求解二阶偏微分方程的过程中，运用了有限差分法，将一个连续的传热过程离散为多点的传热过程，便于求解。

### 6.2 模型的缺点

1. 考虑到材料的比热容，热传导率会随温度变化，与实际情况可能稍有出入。
2. 忽略了热对流对实验的影响。
3. 忽略了热量在边界的损耗以及热量在平面内的交换和沿着非法线方向的传递，与实际情况可能稍有出入。

### 6.3 模型的改进

1. 考虑温度对材料特性的影响。
2. 考虑热对流对实验的影响。
3. 考虑三维的热传递以及热量在边界的损耗。

## 七、模型的推广

1. 可以推广到多层高温专业作用服装设计。
2. 可以推广到其他的防高温设备。
3. 可以推广到其他的保温设备。

## 八、参考文献

- [1] 司守奎, 孙玺菁. 数学建模算法与应用. 北京国防工业出版社, 2011. 8.
- [2] 张德丰等, MATLAB 程序设计与综合应用, 清华大学出版社, 2012. 1.
- [3] 戴锅生, 传热学, 高等教育出版社, 1999. 9.
- [4] 曹玉璋, 传热学, 北京航空航天大学出版社, 2001. 7.
- [5] 谷超豪, 李大潜等, 数学物理方程, 高等教育出版社, 2012. 7.
- [6] 董光昌, 线性二阶偏微分方程, 浙江大学出版社, 1987. 8.
- [7] 卢琳珍, 应用三层热防护服热传递改进模型的皮肤烧伤度预测, 纺织学报第 39 卷第 1 期, 2018. 1.

## 附录

以下附件均为 Matlab 软件代码

### 附录 1. 建立假人模型

```
R1=0.20;%半径
```

```
h=1.7;%圆柱高度
```

```
m=100;%分割线的条数
```

```
[x1,y1,z1]=cylinder(R1,m);
```

```
z1=h*z1;%高度放大 h 倍
```

```
mesh(x1,y1,z1);
```

```
hold on
```

```
R2=0.25;%半径
```

```
h=1.7;%圆柱高度
```

```
m=100;%分割线的条数
```

```
[x2,y2,z2]=cylinder(R2,m);
```

z2=h\*z2;%高度放大 h 倍

mesh(x2, y2, z2);

hold on

R3=0.30;%半径

h=1.7;%圆柱高度

m=100;%分割线的条数

[x3, y3, z3]=cylinder(R3, m);

z3=h\*z3;%高度放大 h 倍

mesh(x3, y3, z3);

hold on

R4=0.35;%半径

h=1.7;%圆柱高度

m=100;%分割线的条数

[x4, y4, z4]=cylinder(R4, m);

z4=h\*z4;%高度放大 h 倍

mesh(x4, y4, z4);

hold on

R5=0.40;%半径

h=1.7;%圆柱高度

m=100;%分割线的条数

[x5, y5, z5]=cylinder(R4, m);

z5=h\*z5;%高度放大 h 倍

mesh(x5, y5, z5);

一问的程序

附录 2. 针对第一问，用有限差分法求解热传导方程

u=zeros(10,25);%t=1 x=pi 构建一个 10X25 列的矩阵(初始化为 0)用于存放时间 t 和变量 x 横

```

坐标为 x 纵坐标为 t
s=(1/25)/(pi/10)^2;
fprintf('稳定性系数 S 为:\n');
disp(s);
for i=2:9
    u(i,1)=100;
end;
for j=1:25
    u(1,j)=0;
    u(10,j)=0;
end;
for j=1:24
    for i=2:9
        u(i,j+1)=s*u(i+1,j)+(1-2*s)*u(i,j)+s*u(i-1,j);
    end
end
disp(u);
[x,t]=meshgrid(1:25,1:10);
surf(x,t,u);
xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('T');
title('有限差分法解');

```

附录 3. 修改参数，添加约束条件，求出 II 层的最优厚度以及 II 和 IV 层的最优厚度

```

function TEM=fitness(length)
lambda=10;%导热系数
cp=1377;%热容
rou=300;%密度
qw=21000;%bimianreliu
a=lambda/rou/qw;%定义中间系数
c=qw/lambda;
xspan=[0 15.2];%轴向坐标起止位置
tspan=[0 50];%仿真时间起止
ngrid=[1000 20];%空间网格数和时间网格数
%调用子函数
[T, x, t]=rechuan dao(a, c, xspan, tspan, ngrid);
%画图
[x, t]=meshgrid(x, t);
figure(1)
mesh(x, t, T);
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('T')

```

```

figure(2)
plot(t(:, 20), T(:, 20));
ylabel('t')
xlabel('T')
%TEM=i(1000, 20)
TEM=aba(T(1000, 20)-45)
n=ngrid(1);
m=ngrid(2);
h=range(xspan)/(m-1);
x=linspace(xspan(1), xspan(2), m);
k=range(tspan)/(n-1);
t=linspace(tspan(1), tspan(2), n);
r=a*k/h^2;
%两个中间系数
s1=1-2*r;
s2=c*h;
U=zeros(ngrid);
U(1, :)=20
for j=2:n
for i=2:m-1
    U(j, i)=s*U(j-1, i)+r*(U(j-1, i-1)+U(j-1, i+1));
end
U(j, i)=50;
U(j, m)=U(j, m-1);
end

```