Espacios vectoriales.

Definición.

Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial que cuenta con dos operaciones, suma y multiplicación por un escalar. La suma es una regla que asocia dos elementos del espacio vectorial, por ejemplo, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ con un tercero, la suma de u y v, la cual representaremos con $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. La multiplicación por un escalar es una regla que asocia cualquier número real, que llamaremos escalar, y cualquier elemento $\boldsymbol{u}$ de $\boldsymbol{V}$ con otro de $\boldsymbol{V}$, el múltiplo escalar de $\boldsymbol{u}$ por c, lo representaremos como c$\boldsymbol{u}$. Este conjunto $\boldsymbol{V}$ se denomina espacio vectorial real las dos operaciones cumplen con los axiomas siguientes.

Axiomas de la suma:

1. $u + v \in V$ para todos $u, v \ \in V$.
2. $u + v = v + u$ para todos $u, v \ \in V$.
3. $(u + v) + w = \ u + (v + w)$ para todos $u, v, w \ \in V$.
4. Para todo $\boldsymbol{u}$ que pertenece a $\boldsymbol{V}$ existe un elemento único $0 \ \in V$, llamado cero de $\boldsymbol{V}$, tal que para todo $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{V}$ se cumple: $u + 0 = 0 + u = u$
5. Para cada elemento $\boldsymbol{u}$ que pertenece a $\boldsymbol{V}$ existe un elemento único $-u \in V$, llamado negativo de $\boldsymbol{u}$ y cumple con: $u + (-u) = (-u) + u = 0$

Axiomas de la multiplicación por escalar:

6. c$\boldsymbol{u}$ pertenece a $\boldsymbol{V}$ para todo $u \in V$ y toda $c \ \in \mathbb{R}$.
7. $c(u + v) = cu + cv$ para todos $u, v \ \in V$ y toda $c \ \in \mathbb{R}$.
8. $(c + d)u = cu + du$ para todo $u \in V$ y todas $c, d \ \in \mathbb{R}$.
9. $c(bu) = (cd)u$ para todo $u \in V$ y todas $c, d \ \in \mathbb{R}$.
10. $1u = u$ para todo $u \in V$.

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores. Los axiomas 1 y 6 también se pueden expresar diciendo que $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar.

Independencia lineal.

Definición.

Un conjunto de vectores $v_1, \ldots., v_n$ de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ es linealmente dependiente si hay escalares $c_1, \ldots., c_n$, no todos cero, tal que:

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$$

El conjunto de vectores $v_1, \ldots., v_n$ es linealmente independiente si ***no es*** linealmente dependiente.

Base.

Definición.

Un subconjunto $\boldsymbol{B}$ no vacío de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ distinto de cero es una base de $\boldsymbol{V}$ si:

i. $\boldsymbol{B}$ es linealmente independiente, y si
ii. $\boldsymbol{B}$ genera a $\boldsymbol{V}$.

Todo espacio vectorial tiene al menos una base.