

Ejercicios de Álgebra Lineal

I. Transformaciones lineales.

Determina cuáles de las siguientes transformaciones son lineales. Encuentra, para cada transformación lineal, la matriz de transformación, el núcleo, la nulidad, la imagen y el rango.

$$1. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$2. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ x + y \\ y - 4x \end{pmatrix}$$

$$3. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ z \end{pmatrix}$$

$$4. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z - 2y \\ 4x + 11z \end{pmatrix}$$

$$5. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$6. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + y \\ 0 \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$$

$$7. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x + y \\ y + z \end{pmatrix}$$

$$8. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x + y \\ z \end{pmatrix}$$

$$9. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

$$10. \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

$$11. \quad T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}; T(A) = AB, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12. \quad T: R^2 \rightarrow P_3; T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a + b)x^2 + (a - b)x^3$$

13. Sea una transformación lineal de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 tal que $T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Determinar $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
14. Sea una transformación lineal de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R} tal que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)$, $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2)$ y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (3)$. Determina $T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
15. Sea $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una transformación lineal de la forma $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ calcula $T \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
16. Sea $T: P_1 \rightarrow P_1$ una transformación lineal, de manera que:
 $T(-1 + x) = -7 + 2x$, $T(1 + x) = 4 + x$. Calcula $T(2 + 6x)$