Ejercicios de Álgebra Lineal.

De los siguientes problemas, 1 al 13, determina si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial al que se refiere.

1. En P_2: $1 - x^2, x$

2. En P_2: $-3x, 1 + x^2, x^2 - 5$

3. En P_2: $-2x, x + 3x^2, x + 2$

4. En P_2: $x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3$

5. En P_3: $1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$

6. En P_3: $1 + x, 2 + x^2, 3 + x^3, 1$

7. En P_3: $3, x^3 - 4x + 6, x^2$

8. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

9. En M_{22}: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donde $abcd \neq 0$

10. En M_{22}: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - y = 0\}$; $(1, 1), (4, 4)$

12. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$; $(1, -1)$

13. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$; $(1, -1), (-3, 3)$

14. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $2x - y - z = 0$.

15. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + z = 0$.

16. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x/2 = y/3 - z/4 = 0$.

17. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 3t, y = -2t, z = 4t$.

18. Demuestre que los únicos subespacios propios en $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen.

En los siguientes problemas encuentra el rango y la nulidad de cada una de las matrices.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas del 1 al 7 escribe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

En los problemas del 8 al 14 escribe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada.

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \end{pmatrix}$, donde $adf \neq 0$

De los problemas siguientes, construye una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con los vectores básicos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$.

3. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - y = 0\}$.

4. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: ax + by = 0\}$.

5. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$.

6. $\pi = \{(x, y, z): 2x - y - z = 0\}$

7. $\pi = \{(x, y, z): 3x - 2y + 6z = 0\}$

8. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y + 3z = 0\}$

9. $L = \{(x, y, z): x/2 = y/3 = z/4\}$

10. $L = \{(x, y, z): x = 3t, y = -2t, z = t; t \text{ real}\}$

11. $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = t, y = 2t, z = -2t; t \in \mathbb{R}\}$

12. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: 2x - y + 3z - w = 0\}$

13. $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$, donde $abc \neq 0$

14. $L = \{(x, y, z): x/a = yb = z/c\}$, donde $abc \neq 0$

15. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$

16. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$

17. H es el espacio de soluciones de

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$