



Procesamiento digital de señales

Semana 9.

Filtros Digitales

Dra. María del Pilar Gómez Gil
Otoño 2017
Coordinación de computación
INAOE

Versión: 24 de Octubre 2017

(c) P. Gómez Gil, INAOE 2017



Tema

Filtros digitales

(tarea: leer los capítulo 8 y 9 del libro de texto)

Gran parte del material de esta presentación fue tomado de:

Smith, Steven [The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing](#)
W. , Second Edition, 1999, California Technical Publishing

Smith, Steven W. Digital Signal Processing. A Practical Guide for Engineers and
Scientist. Amsterdam: Newnes, Elsevier Science. 2003. ISBN: 0-750674-44-X.

Conceptos básicos

- o Los filtros son herramientas muy útiles en PDS
- o Sirven principalmente para 2 actividades:
 - o Separar señales,
 - o Restaurar (arreglar, corregir, limpiar) señales
- o Existen dos grandes tipos: digitales y analógicos
- o Los filtros analógicos son mas baratos y rápidos; los digitales tienen mucho mejor desempeño que los analógicos.
- o Las entradas y salidas de los filtros se representan en el dominio del tiempo (o su equivalente, ejemplo espacio)
- o La manera mas fácil de implementar un filtro es convolucionar la señal de entrada con la respuesta al impulso del filtro.

Ejemplo de filtrado: eliminando ruido de un EEG

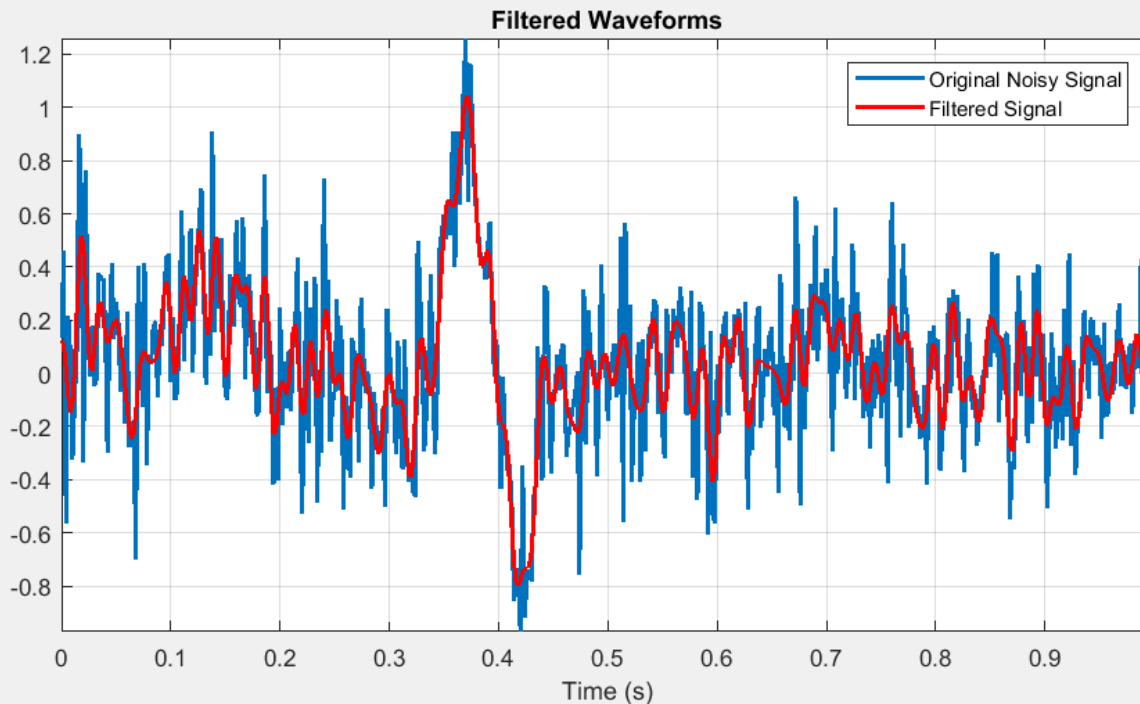


Figura generada con código disponible en: Matlab Help V R2017a, "Practical introduction to digital filters"

Tipos de filtros digitales

1. Implementados en el dominio de la frecuencia (usando FFT)
 - o Dada $x(n)$, se calcula su FFT $X(u)$ la cual se multiplica por un kernel y al resultado se le obtiene su FFT inversa .
 - o No pueden usarse en “tiempo real”
2. Implementados en el dominio del tiempo.
 - o Pueden usarse en tiempo real
 - o Hay de dos tipos:
 - o Por convolución (FIR)
 - o Recursivos (IIR)

Filtros FIR y filtros IIR

- Los filtros que se implementan con convolución realizan sumas de multiplicaciones ponderadas entre la señal y el kernel. La respuesta al impulso de este tipo de filtros es finita, por lo que se conocen como filtros FIR (*Finite impulse response*)
- También se pueden diseñar filtros usando ecuaciones recursivas del tipo;

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + a_3 x[n-3] + \dots$$

- Este tipo de filtros presenta una respuesta al impulso que decae en amplitud infinitamente, por lo que se conocen como filtro IIR (*Infinite Impulse Response*)

Relación entre DFT y Filtrado

(1/2)

Sea $x(n)$ una señal y $\mathbf{X}(n)$ su DFT, $n=0, 1 \dots N-1$

Recordar que el valor “útil” de $\mathbf{X}(n)$ está entre 0 y $F_s/2$, donde F_s es la frecuencia de muestreo.

- o Un **filtro pasa bajas (LPF)** deja pasar solo las frecuencias bajas, lo que implicaría multiplicar la señal $x(n)$ por una señal escalón con amplitud 1, cuya anchura corresponde a las frecuencias que se desean mantener.
- o Filtrar implica entonces multiplicar la DFT por alguna función, llamada “función de transferencia”

Relación entre DFT y Filtrado

(2/2)

- Multiplicar en el dominio de la frecuencia implica convolucionar en el dominio del tiempo, y viceversa.
- Entonces, filtrar es multiplicar $X(u)$ por algún $H(u)$ adecuado que elimine las frecuencias deseadas.
- Diseñar un filtro es hallar $H(u)$

Tarea

Demostrar que si:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

entonces:

$$Y(u) = X(u)H(u)$$

(Programa que muestra un ejemplo de esta relación)

Parámetros principales de un filtro lineal (1/3)

1. Respuesta al impulso (*impulse response*)
 2. Respuesta al escalón (*step response*)
 3. Respuesta a la frecuencia (*frequency response*)
- o Los tres parámetros caracterizan completamente a un filtro; si se conoce uno de ellos, pueden calcularse los demás
 - o La respuesta al impulso de filtros lineales se conoce como el “kernel” (núcleo) del filtro

Parámetros principales de un filtro lineal (2/3)

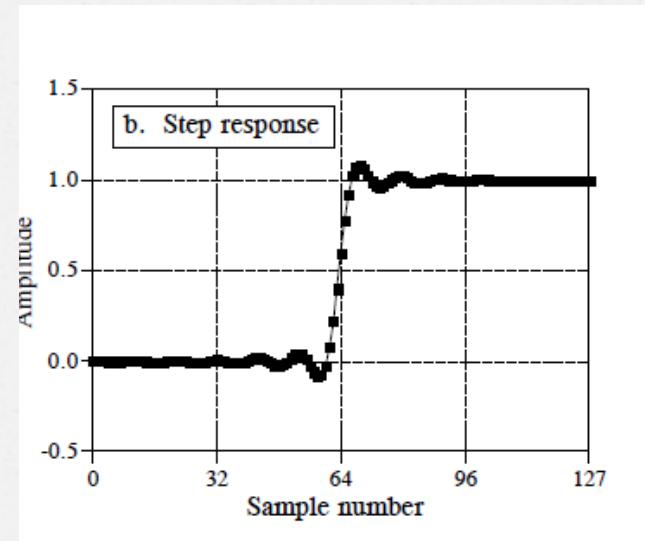
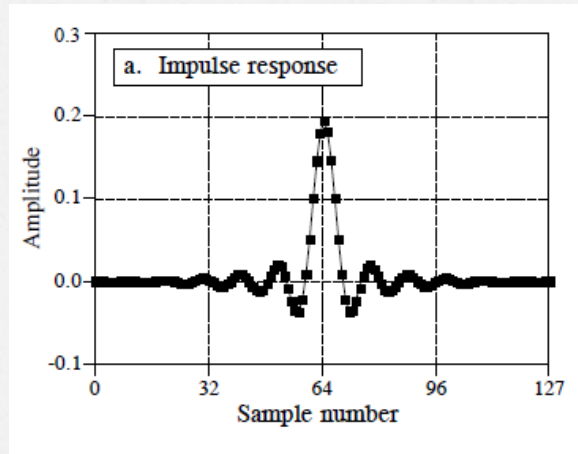


Figura 14.1 (Smith, 1999)

Parámetros principales de un filtro lineal (3/3)

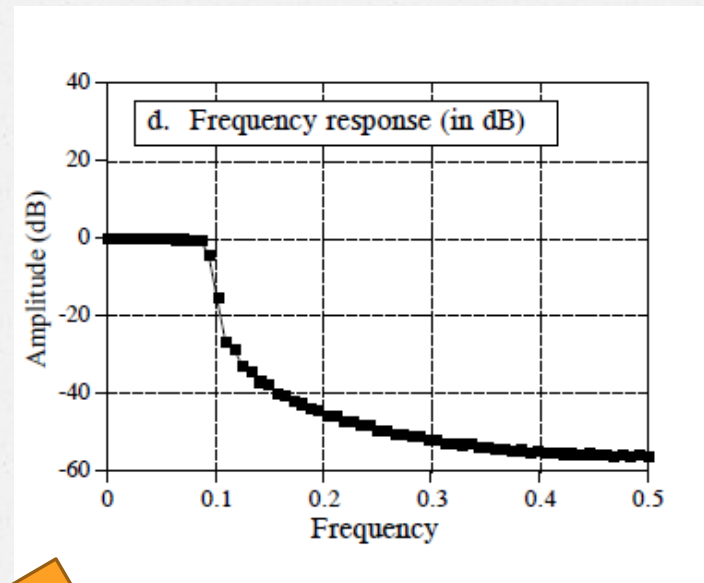
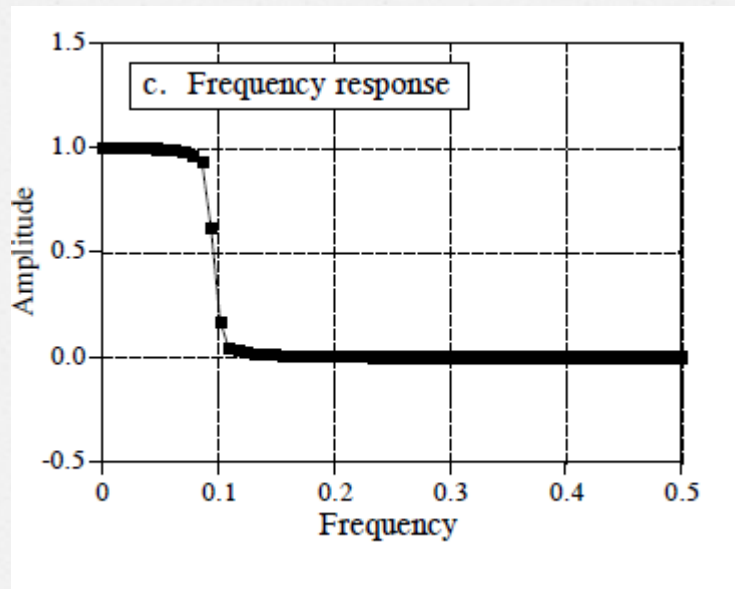


Figura 14.1 (Smith, 1999)

Nótese que la amplitud está dada en decibeles

Decibeleles (1/2)

o Según la sabia Wikipedia:

Decibel = Unidad logarítmica que expresa la relación entre dos valores físicos

EQUATION 14-1

Definition of decibels. Decibels are a way of expressing a *ratio* between two signals. Ratios of power (P_1 & P_2) use a different equation from ratios of amplitude (A_1 & A_2).

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

$$\text{dB} = 20 \log_{10} \frac{A_2}{A_1}$$

Decibeleles (2/2)

Chapter 14- Introduction to Digital Filters

265

therefore reduced to 0.5). Second, memorize the following conversions between decibels and *amplitude* ratios:

60dB	=	1000
40dB	=	100
20dB	=	10
0dB	=	1
-20dB	=	0.1
-40dB	=	0.01
-60dB	=	0.001

(Smith, 1999)

Modulación (1/2)

- o La información puede representarse en una señal en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia o en el dominio de la fase.
- o La representación en tiempo y frecuencia es encontrada en la naturaleza
- o Modular significa poner información en una señal portadora, por ejemplo una señal coseno.
- o Cada valor en el tiempo contiene algo de información, independientemente de los otros valores
- o Para obtener información dominio de la frecuencia, se requiere conocer de varios puntos

Modulación (2/2)

o $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Si se representa en:	Se llama:
A	Amplitud modulada (AM)
W	Frecuencia modulada (FM)
φ	Fase modulada (PM)

Parámetros en el dominio del tiempo

- o La respuesta al **escalón** en un filtro es importante, pues indica como se responde a cambios entre regiones no similares, por ejemplo cuando un evento empieza o termina.
- o La respuesta al escalón indica que tan bien se desempeña un filtro en el dominio del tiempo
- o Parámetros importantes:
 1. Velocidad de transición (*risetime*)
 2. Cambio en la amplitud del escalón (*Overshoot*)
 3. Simetría entre las mitades superior e inferior de un pulso (*Linealidad de la fase*)

Respuesta lenta/rápida

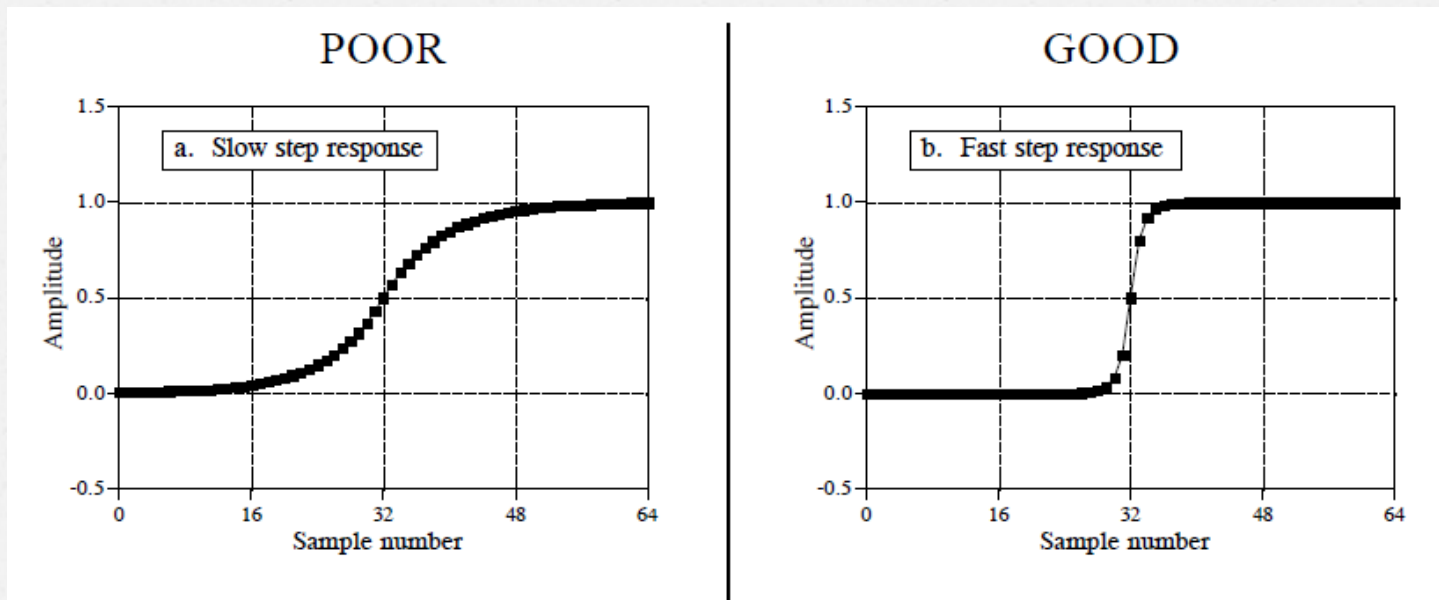


Figura 14.2, Smith 1999.

“Overshoot”

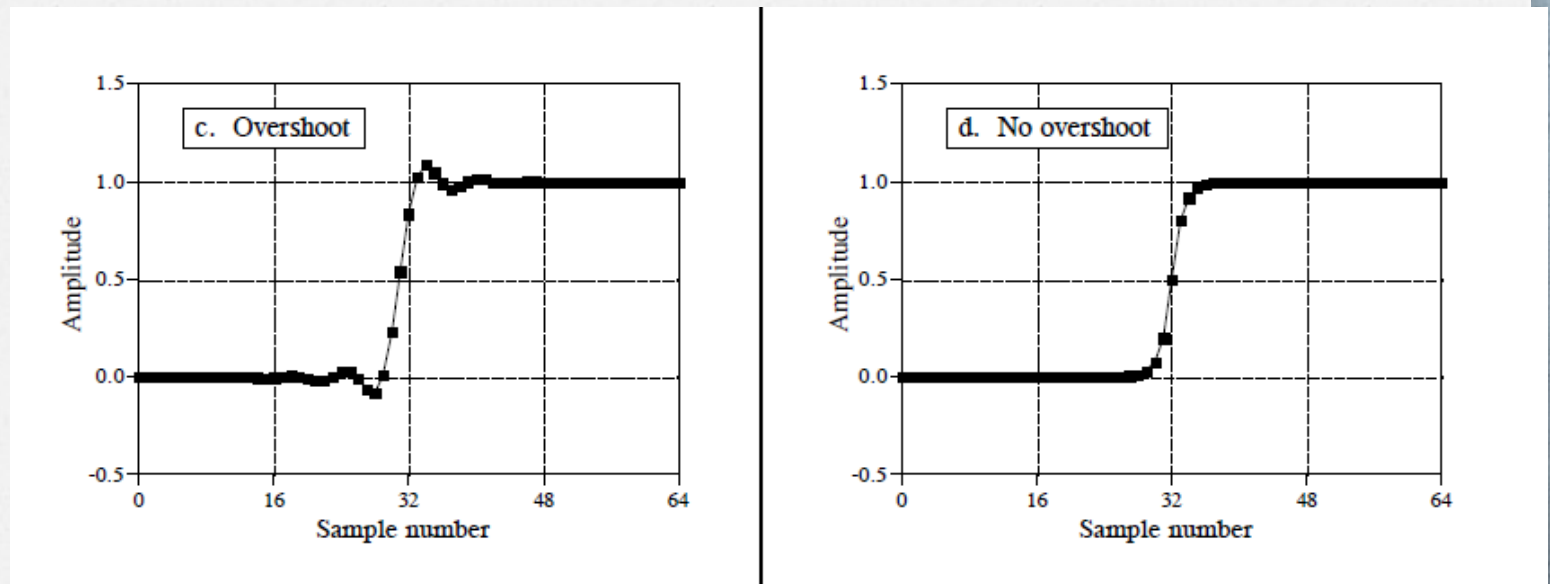


Figura 14.2, Smith 1999.

Fase no lineal/lineal

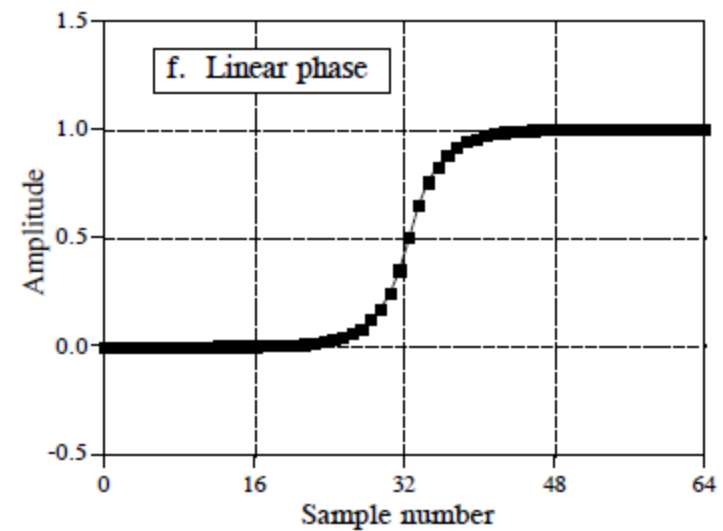
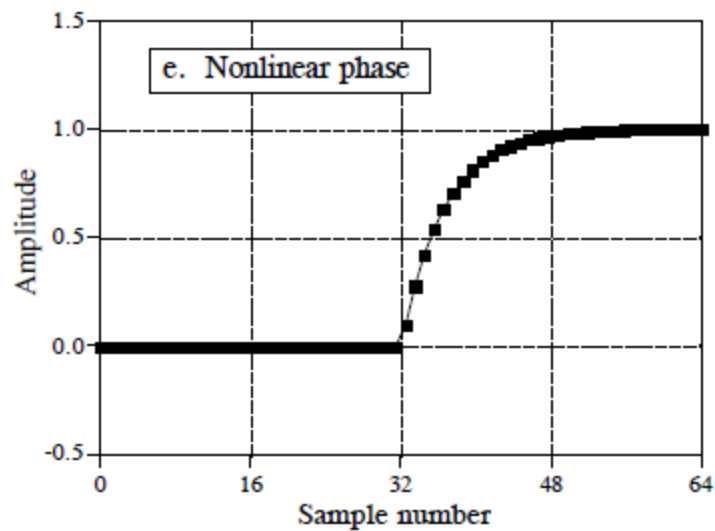
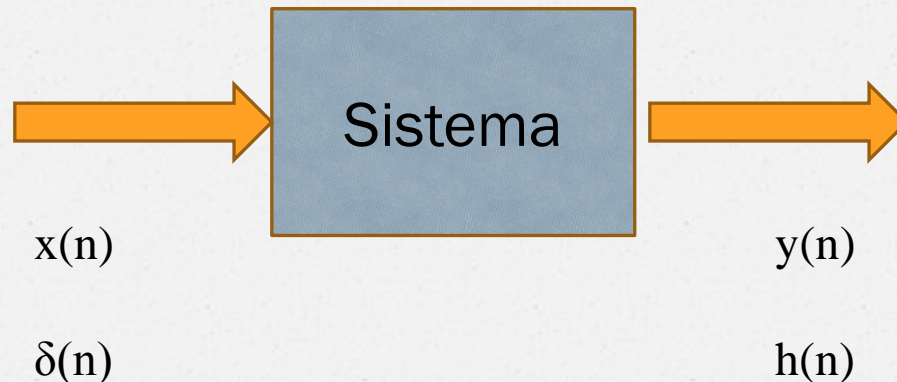


Figura 14.2, Smith 1999.

El concepto de filtro



El concepto de sistema lineal



Un filtro es un sistema, con un $h(n)$ tal, que produce los Cambios que pueden observarse en los parámetros

Tipos de respuestas de frecuencia de los filtros (1/2)

- o Pasa bajas (*Low-pass*)
 - o Pasa altas (*high-pass*)
 - o Pasa banda (*band-pass*)
 - o Rechaza banda (*band-reject*)
-
- o Se pueden generar filtros pasa-altas, pasa-bandas y rechaza-bandas a través de convertir un **filtro pasa-bajas** en el tipo deseado.

Tipos de respuestas de frecuencia de los filtros (2/2)

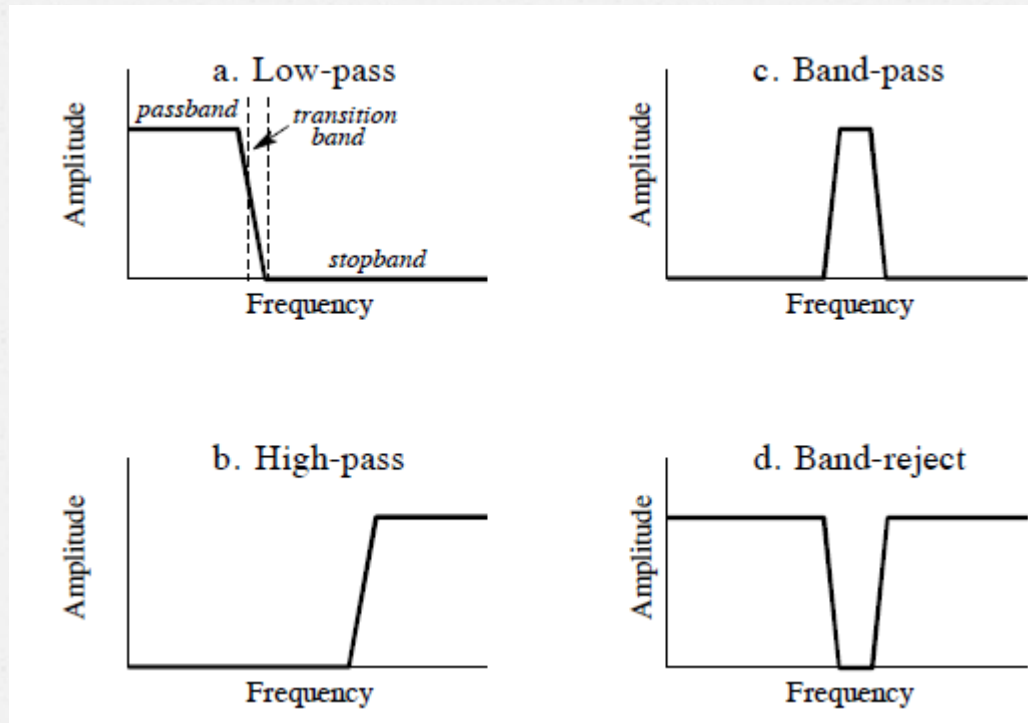


Fig. 14.3, (Smith 1999)

Características relacionadas a la frecuencia

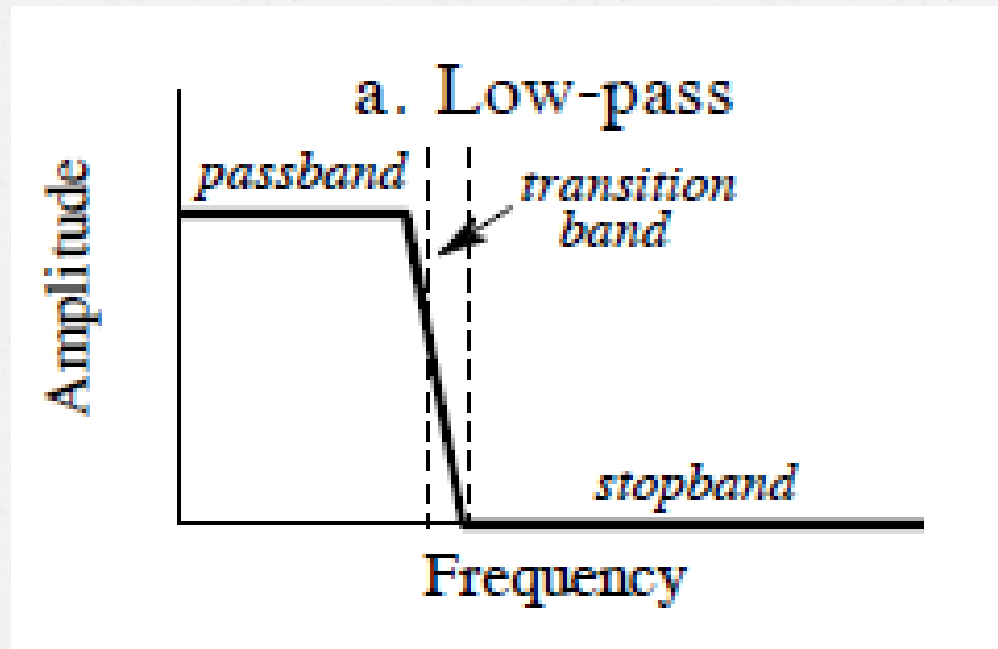


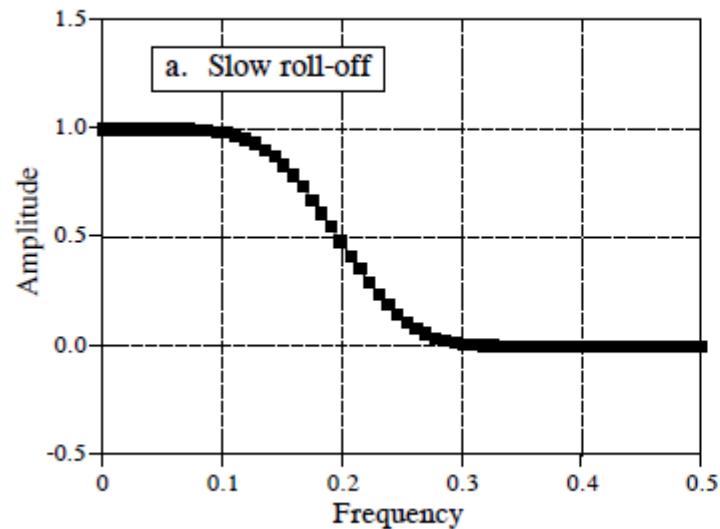
Fig. 14.3-a (Smith 1999)

Parámetros de evaluación de filtros

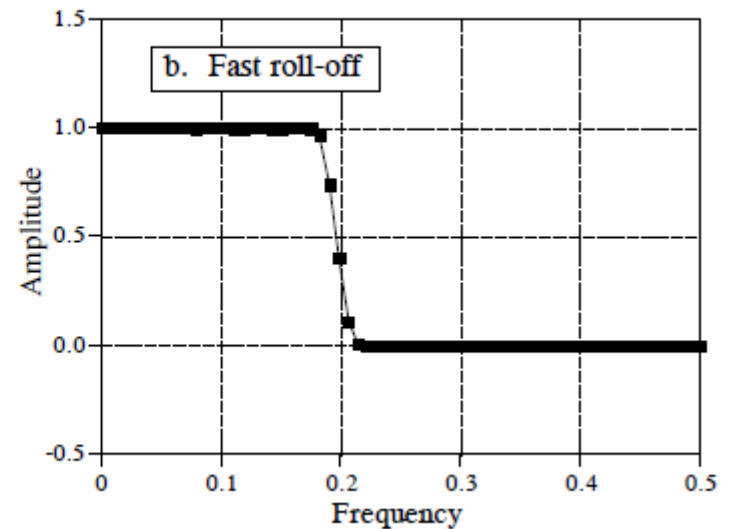
- o Nitidez de Caída de respuesta (*Roll-off sharpness*)
- o Rizo en la banda de paso (*pass-band ripple*)
- o Atenuación en la banda de rechazo (*stopband attenuation*)

Caída de la respuesta

POOR

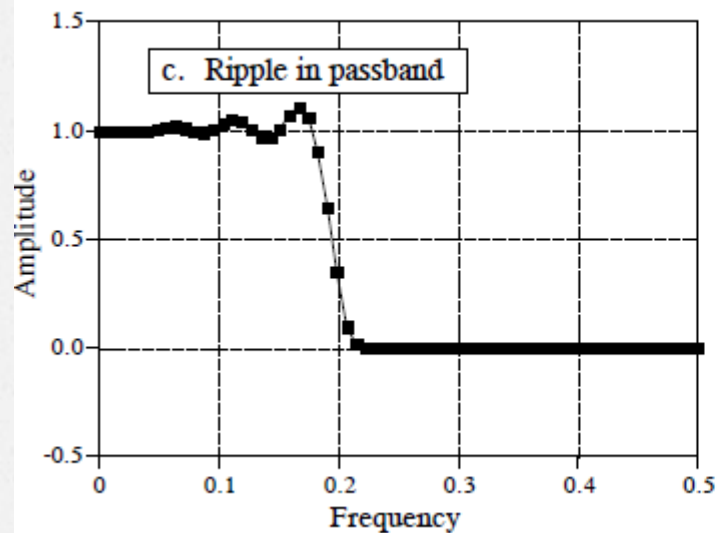


GOOD

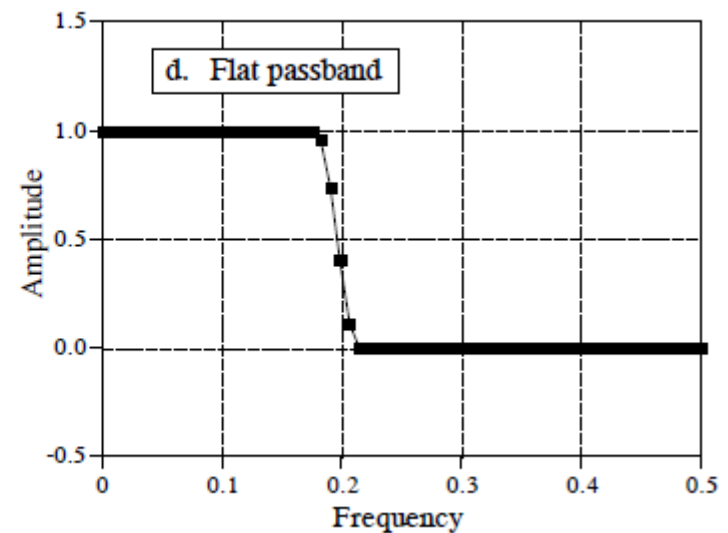


Rizo en la banda de paso

POOR

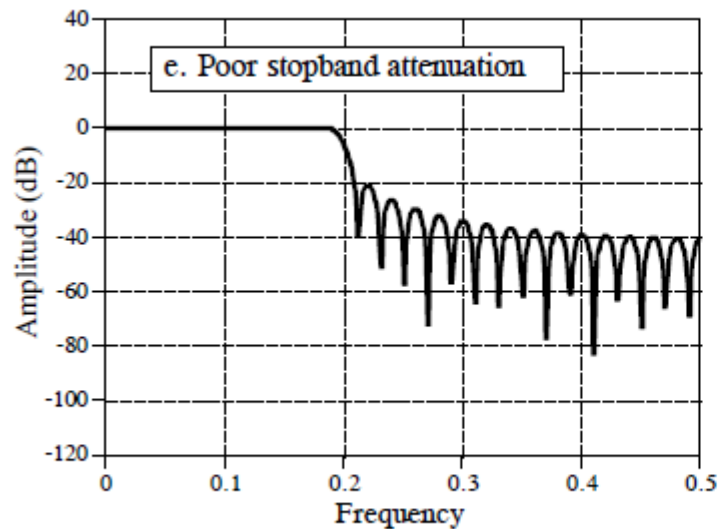


GOOD

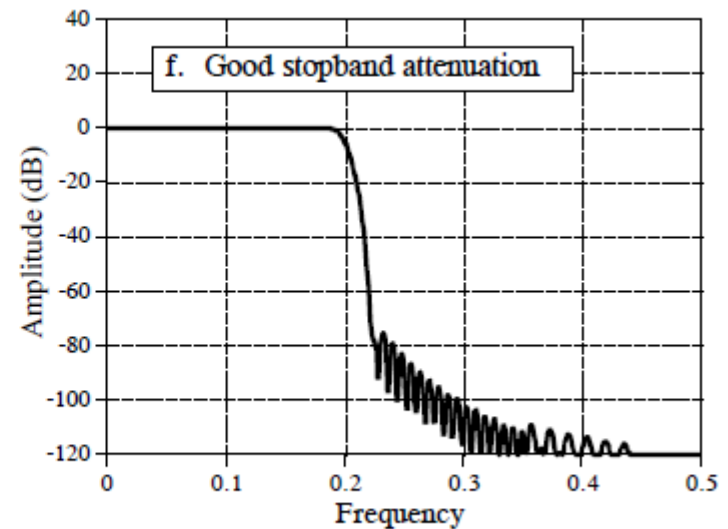


Atenuación en la banda de rechazo

POOR



GOOD



Filtros en el dominio del tiempo

- Por convolución (FIR)
- Recursivos (IIR)

Formas generales de Filtros

o Filtros FIR:

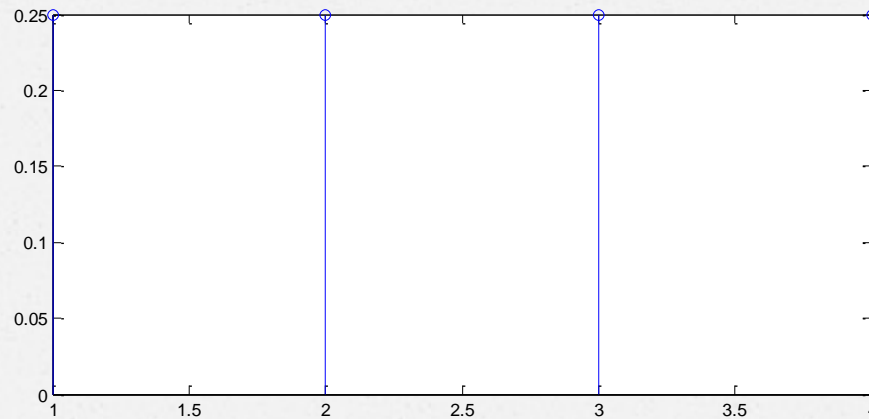
$$y(n) = \sum_m b_m x(n-m)$$

o Filtros IIR:

$$y(n) = \sum_m b_m x(n-m) - \sum_m a_m y(n-m)$$

Ejemplo filtro FIR: *moving average*

$$h = [1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4]$$



Moving average

- o Según la sabia “wikipedia”, *Moving Average* (MA) es “una técnica de estadística para analizar datos, que consiste en crear una serie hecha por los promedios obtenidos de subconjuntos de datos fijos”
- o Este es un tipo de filtros FIR/convolución
- o Los promedios se calculan “desplazando” al subconjuntos. Hay varios tipos o variaciones, por ejemplo:
 - o ARMA : *Auto-regresive moving average*
 - o ARIMA: *Auto regresive integrated moving average*

Ejemplo filtro IIR (1/2)

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

Para encontrar la respuesta al impulso, asumiendo que es un sistema causal o “real”:

$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}h(n-1)$$

$$h(2) = \delta(2) + \frac{1}{2}h(1) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$h(0) = \delta(0) + \frac{1}{2}h(-1) = 1 + \frac{1}{2}0 = 1$$

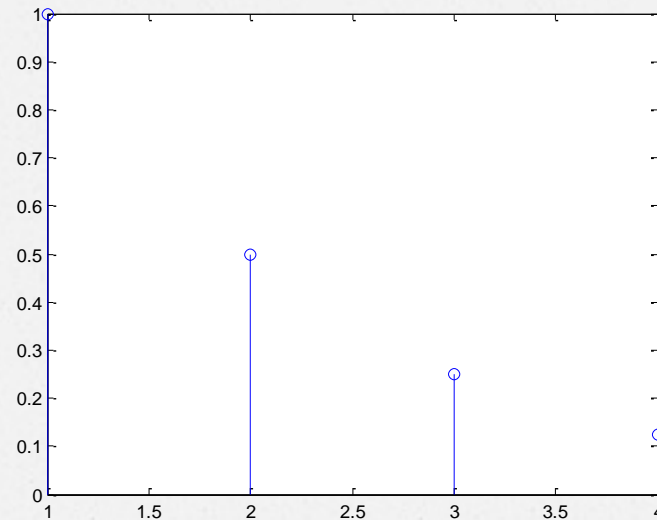
$$h(1) = \delta(1) + \frac{1}{2}h(0) = 0 + \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}$$

$$h(3) = \delta(3) + \frac{1}{2}h(3) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo filtro IIR (2/2)

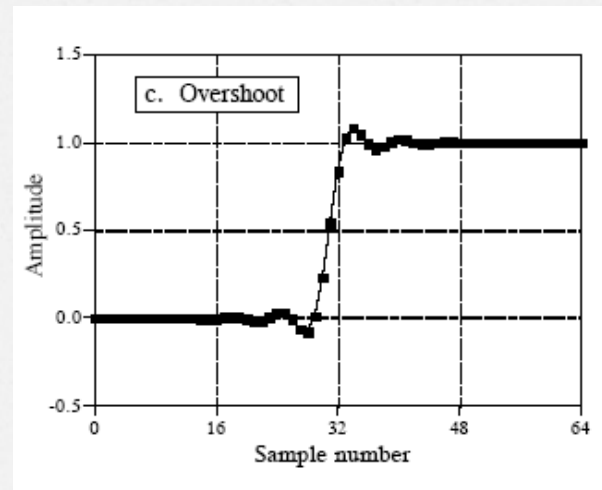
$$h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Es una respuesta infinita!!!



Sobre diseño de filtros (1/4)

- Cuando se tiene filtros implementados en el dominio de la frecuencia, no es posible diseñarlos “perfectamente”



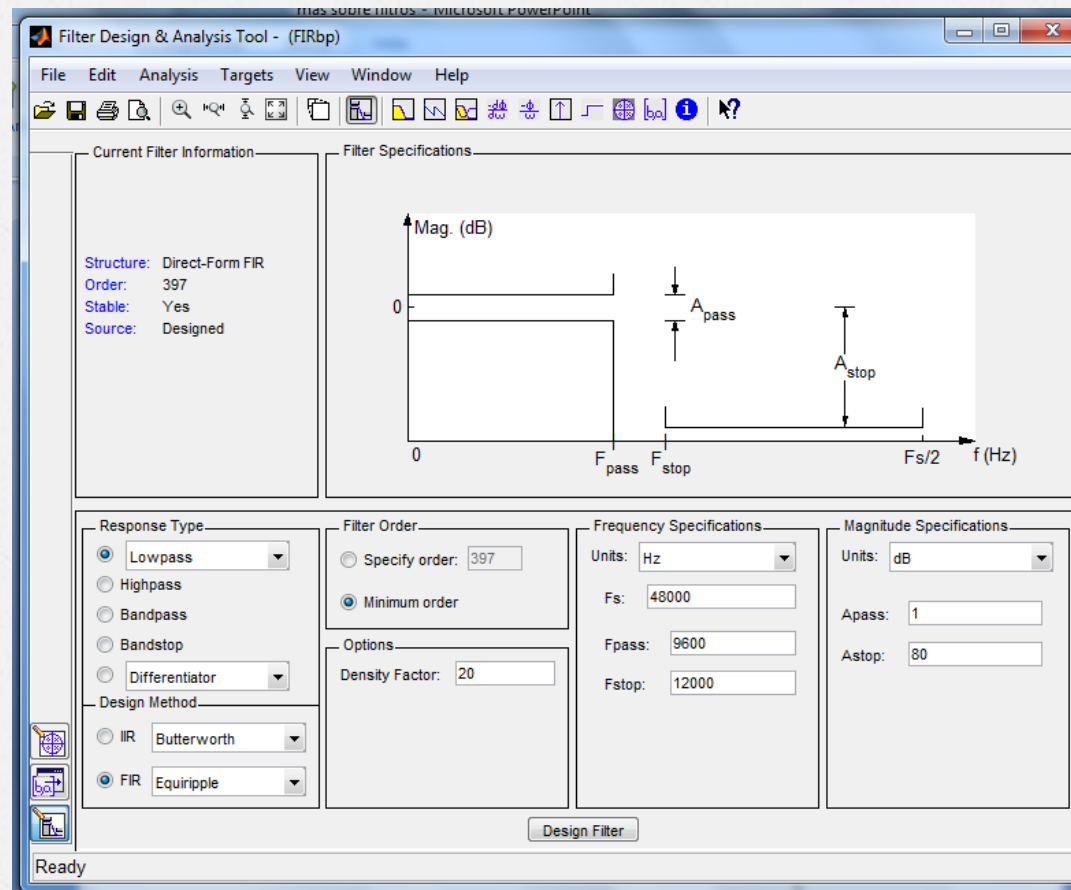
Sobre diseño de filtros (2/4)

- o Se puede escoger entre muchos tipos de diseño, dependiendo de que “exactitud” o “imperfección” estamos dispuestos a tolerar. Esto se define con los “parámetros de especificación”
- o Se deben especificar varias cosas: donde pueden ocurrir rizados, cuanta atenuación de puede soportar, etc.
- o Hay 3 tipos de diseño muy populares:
 - o Butterworth: genera filtros mono-tónicamente decrecientes
 - o Chebyshev, tipo I y II: presenta rizados, aparecen en la banda de paso para el tipo I y en la banda de rechazo para el tipo II
 - o Elíptico: presenta rizados en ambas bandas
 - o El que genera menos valor en el orden del filtro (número de valores del pasado a usarse) es el elíptico; el de mayor orden es el Butterworth.

Sobre diseño de filtros (3/4)

- o En Matlab se usa la herramienta fdatool, o sptool (se puede acceder en el menú “apps”)
- o Para visualizar se puede usar fvtool(b,a) donde b y a son los coeficientes del filtro. Ejemplo:
 - o fvtool(1,[0.5 -1])
- o Las especificaciones pueden darse en decibeles o valores absolutos (linear)
- o Las principales especificaciones son: frecuencia de paso, frecuencia de rechazo y frecuencia de muestro.

Sobre diseño de filtros (4/4)



Un ejemplo del uso de filtros

The screenshot shows the MathWorks website interface. At the top, there is a navigation bar with links for Products, Solutions, Academia, Support, Community, and Events. Below this is a blue header for 'Videos and Webinars' with a search bar and a 'Videos' dropdown menu. The main content area features a video player for 'Signal Processing and Machine Learning Techniques for Sensor Data Analytics' by Gabriele Bunkheila, Technical Marketing – Signal Processing and Audio. To the right, there is a 'Related Products' section highlighting the 'Signal Processing Toolbox' with links for 'Request Trial', 'Get Pricing', and 'Contact Sales'. Below this, there is a section for 'Hybrid Beamforming for 5G Technology' with a 'Download white paper' link.

Disponible en:

https://www.mathworks.com/videos/signal-processing-and-machine-learning-techniques-for-sensor-data-analytics-107549.html?s_v1=21098&elqem=2150047_EM_NA_DIR_17-09_DEMAND-GEN-NEWSLETTER_EDU-NON_TAH-1&elqTrackId=3418ae53651f490288a98b400c328ca3&elq=dde96d5b863a437bb2f1bb74b1470584&elqaid=21098&elqat=1&elqCampaignId=6732