INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

LISTA DE EJERCICIOS 1-12

SEMANA 7

NOMBRE DEL ALUMNO: GARCÍA QUIROZ GUSTAVO IVAN

GRUPO: 4CV3

MATERIA: MATEMATICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERIA

NOMBRE DEL PROFESOR: MARTINEZ NUÑO JESUS ALFREDO

FECHA: 24/04/2023

Libro: Schaum

Ejercicio 1

5.30 Evalúe $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}\,dz$ si C es: a) la circunferencia $|z|=3$ b) la circunferencia $|z|=1$.

a) $z_0 = 2$ $f(z_0) = e^2$

$\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz = \boxed{2e^2\pi i}$

$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\left(2e^2\pi i\right) = \boxed{e^2}$

b) $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2}\,dz = \boxed{0}$

Ejercicio 2

5.34 Moestre que $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\cos \pi^2}{z^2-1}\,dz$ a) $2 \pm i, -2 \pm i$ b) $-i, 2-i, 2+i, i$

$C: |z| = 2$

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{\cos \pi^2}{z-1}}{z+1}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{\cos \pi^2}{z+1}}{z-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\cos \pi^2}{-2} + \frac{\cos \pi^2}{2}\right] = \boxed{0}$

b) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=1} \frac{\cos z^2}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\cos \pi^2}{z+1}}{z-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left[-\frac{2\pi i(1)}{2}\right] = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Ejercicio 3

5.35 Evalúe $\oint_C \frac{e^{iz}dz}{z^3}$, donde C es la circunferencia $|z|=2$

$$z_0=0$$

$$=\int_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{(e^{iz})\,dz}{(z)^3} = \frac{2\pi i}{(3-1)!} f^{(3-1)}(0)$$

$$= \frac{2}{2}\pi i\,(i^2 e^{iz}) = \boxed{-\pi i}$$

Ejercicio 4

5.36. Suponga que C es una curva simple cerrada que encierra a $z=a$ y que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre C. DEMUESTRE QUE $f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^4}$

Segun

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^n} = 2\pi i\left[\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}\right]$$

$$\frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^4} = 2\pi i\left[\frac{f^{(4-1)}(a)}{(4-1)!}\right]\left[\frac{3!}{2\pi i}\right] = f'''(a)$$

$$\boxed{f'''(a) = f^{3}(a)}$$

Ejercicio 5

5.39 Evalue $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}dz}{(z^2+1)^2}$ si $t>0$ y C es la circunferencia $|z|=3$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i\, t e^{z_0 t}}{(2-1)!}\right]$$

$$z^2=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$z=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)}=e^{\left(\frac{i}{2}(\pi+2k\pi)\right)}$$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad z_1=e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z=\sqrt{-1}=i$$

$$te^{z_0 t}=te^{it}=t(\cos(t)+i\operatorname{sen}(t))=\boxed{te^{it}}$$

Ejercicio 6

5.38 Sea C la circunferencia $|z|=1$. Encuentre el valor de a) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z\,dz}{z-\frac{\pi}{6}}$. b) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z\,dz}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}$

a) $$\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z\,dz}{z-\frac{\pi}{6}} = 2\pi i\operatorname{sen}^6\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi i}{64}=\frac{\pi i}{32}$$

b) $$\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z\,dz}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3} = 2\pi i\frac{f^{(3-1)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{(n-1)!}=\frac{2\pi i}{(3-1)!}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=30\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{6}\right)=15\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\left(\frac{2\pi i}{2!}\right)\left(\frac{15}{8}\right)=\boxed{\frac{15\pi i}{8}}$$

Ejercicio 7

184. $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{z}{4}}\,dz}{(z^2+4)^2} = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{4}\right) e^{\frac{4}{4}} (0) = 0$

Ejercicio 8

185. $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} z}{z^2}\,dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(1)!}(-\cos(0)) = \boxed{-2\pi i}$