Matrix Analysis and Applications (Autumn 2022) **Homework: 1**

矩阵分析基础 (1)

Lecturer: Feng Chen `chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn`

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao `zhangtr22,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn`

1. 设 $\mathbb{R}^3$ 中, 线性变换 $\mathcal{A}$ 满足: $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i, i=1,2,3$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$; $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,1)^T$, 求:

(1) $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵;

(2) $\mathcal{A}$ 在标准基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T$, $\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵。

2. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 是 4 维线性空间 V^4 的一组基, V^4 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1'=e_1-2e_2+e_4, e_2'=3e_2-e_3-e_4, e_3'=e_3+e_4, e_4'=2e_4$ 下的矩阵;

(2) 计算 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 和 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$。

3. 设线性空间 V^4 的基（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和基（II）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_4\\ \boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4 \end{cases}$$

(1) 求由基（I）变到基（II）的过渡矩阵（请学习过渡矩阵定义）;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$ 在基（I）下的坐标;

4. 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 用如下两种思路证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$:

(1) 考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 迹与秩的性质。

(2) 考虑线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的解。

5. 证明如下行列式计算结果：$2\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+a & c & c \\ b & a+c & b \\ a & a & c+b \end{vmatrix}$

6. 已知 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$。若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩为 $r_{\boldsymbol{X}}$，且 $\boldsymbol{y}$ 是一个正态分布的随机向量，其均值向量为 $\boldsymbol{Xb}$，协方差矩阵为 $\sigma^2\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{y}\sim N(\boldsymbol{Xb},\sigma^2\boldsymbol{I})$，证明：

(1) $\mathbf{E}\{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My}\}=(n-r_{\boldsymbol{X}})\sigma^2$；

(2) $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My}/\sigma^2$ 服从自由度为 $(n-r_{\boldsymbol{X}})$ 的 χ^2 分布，即 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My}/\sigma^2\sim\chi^2_{n-r_{\boldsymbol{X}}}$。

提示：借助性质 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}$ 作特征值分解。

7. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为一实对称矩阵，而 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 为二次型。

(1) 证明：f 半正定（即 $\boldsymbol{A}\succeq 0$），当且仅当存在 $\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{k\times n}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{Fx}\|^2$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 l_2 范数。若 $\boldsymbol{A}$ 半正定，试说明如何求解矩阵 $\boldsymbol{F}$? 又如何确定最小 k 值?

(2) 证明：$f(\boldsymbol{x})$ 可表示为

$$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{Fx}\|^2-\|\boldsymbol{Gx}\|^2$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 为合适的矩阵。试确定 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的最小维数。

(3) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

时，利用 Matlab 画出 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 对应的空间曲面。同时研究并解释 f 取不同值时的等高线形状。