

## Tutoriumsvorbereitung 2

Prof. Dr. Olaf Hellwich und Mitarbeiter

01.05.2017 - 03.05.2017

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>KV-Tafeln</b>	<b>2</b>
1.1	Erstellen von KV-Tafeln aus Ausdrücken . . . . .	2
1.1.1	Erstellen einer KV-Tafel aus einer DNF . . . . .	3
1.1.2	Erstellen einer KV-Tafel aus einer KNF . . . . .	3
1.2	Ableiten von Ausdrücken aus KV-Tafeln . . . . .	4
1.2.1	Umwandeln einer KV-Tafel zu einer DNF . . . . .	4
1.2.2	Umwandeln einer KV-Tafel zu einer KNF . . . . .	5
1.3	Vereinfachen einer Schaltung . . . . .	5

## 1 KV-Tafeln

Zur Veranschaulichung logischer Funktionen eignen sich graphische Darstellungen bzw. Diagramme. Eine gute Verbildlichung bietet die sogenannte Karnaugh-Veitch-Tafel (KV-Tafel). Diese grafische Form bietet Vorteile bei der Behandlung der Normalformen. Beispielsweise können Normalformen daraus zum Teil direkt abgelesen werden. Zudem dient das Verfahren zur Vereinfachung von Normalformen in einen minimalen logischen Ausdruck.

### 1.1 Erstellen von KV-Tafeln aus Ausdrücken

Die KV-Tafel ist eine Matrix von Wahrheitswerten. Jedem Element der Matrix ist eindeutig eine Belegung der Variablen der Funktionen zugeordnet, die am Rand des Schemas eingetragen werden.

Vorgehen:

- Zunächst wird für die erste Variable je ein Feld für das positive und negative Literal erstellt.
- Für jede weitere Variable wird die komplette Tafel an der längsten Kante gespiegelt. Der Originalhälfte und der Spiegelhälfte werden wieder je das positive und das negative Literal der weiteren Variablen zugewiesen.

Nehmen wir zum Beispiel die bekannte Wahrheitstabelle einer Disjunktion:

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Die zugehörige KV-Tafel könnte somit folgendermaßen aussehen:

x+y:		y	
		0	1
x	1	1	1

Jede Variable kommt dabei in einfacher und negierter Form vor. In den Zeilen/Spalten, wo sich die Balken befinden, wird den Variablen der Wahrheitswert 1 zugeordnet. Dadurch besteht die untere Zeile und die letzte Spalte nur aus Feldern mit dem Wert 1. Nur in dem Feld, bei dem beide Variablen negiert sind, wird der Wahrheitswert 0 eingetragen.

Jedes Feld repräsentiert eine mögliche Kombination der Eingangsvariablen ( $\hat{=}$  Zeile in einer Wertetabelle). Die Anzahl der Felder lässt sich dabei folgendermaßen bestimmen:  $2^{(\text{Anzahl der Eingangsvariablen})}$ . In dem vorigen Beispiel waren die Eingangsvariablen x und y. Die Gesamtzahl der Felder ist also  $2^2 = 4$ .

**Aufgabe:** Wie viele Felder hat die KV-Tafel für folgenden booleschen Ausdruck?

$$y = (\overline{x_0} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) + (\overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (\overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3)$$

### 1.1.1 Erstellen einer KV-Tafel aus einer DNF

Für jeden Konjunktionsterm: In die Felder eine 1 eintragen, für die der Konjunktionsterm wahr ist. In alle anderen Felder wird anschließend eine 0 eingetragen. Betrachten Sie folgenden Ausdruck:

$$y_0 = (\overline{x_0} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) + (\overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (\overline{x_0} \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3)$$

Es ergibt sich also folgendes KV-Diagramm (die Farben zeigen, welche Einsen aus welchen Konjunktionstermen entstanden sind):

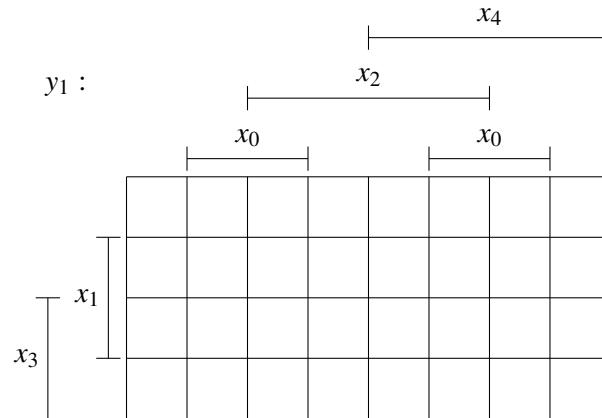
Anmerkung: Aus der KV-Tafel kann man erkennen, dass das gegebene  $y_0$  nicht minimal ist. Es können mit Hilfe der KV-Tafel bequem Terme zusammengefasst werden, sodass  $y_0$  minimal wird. Rechtecke müssen dafür maximal groß gewählt werden.

### 1.1.2 Erstellen einer KV-Tafel aus einer KNF

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, geben die Balken diejenigen Bereiche an, wo der Wahrheitswert 1 zugeordnet wird. Bei der KNF werden Einträge mit dem Wahrheitswert 1 jedoch mit den negierten Variablen gebildet. Damit folgt für jeden Disjunktionsterm: In die Felder eine 0 eintragen, für die der Disjunktionsterm falsch ist. In alle anderen Felder wird anschließend eine 1 eingetragen.

**Aufgabe:** Erstellen Sie zu folgendem booleschen Ausdruck das zugehörige KV-Diagramm!

$$y_1 = (\overline{x_0} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_4) \cdot (\overline{x_1} + x_3 + x_4) \cdot (x_0 + x_2 + x_1) \cdot (x_0 + x_3 + \overline{x_4})$$



Anmerkung 1: Es ist zu beachten, dass manche Rechtecke über den Rand gehen (**braun**) oder aufgespalten werden (**rot**, **violett**).

Anmerkung 2: Weiterhin könnte der dritte Term auch  $(\overline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4)$  lauten, um alle 0en abzudecken. Er wäre dann aber nicht minimal. Rechtecke und gesplante Rechtecke müssen also maximal gewählt werden, um den minimalen Term und damit das minimale  $y_1$  zu finden.

## 1.2 Ableiten von Ausdrücken aus KV-Tafeln

Um von einer KV-Tafel zu einer zugehörigen DNF (bzw. KNF) zu kommen, müssen alle Einsen (bzw. Nullen) zusammengefasst werden. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

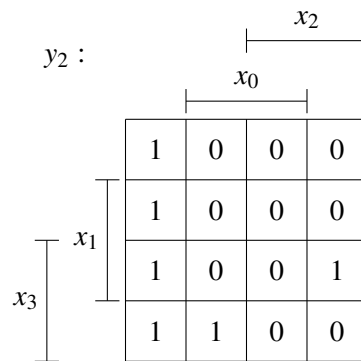
- Die einzelnen Felder können zu Rechtecken zusammengefasst werden, wobei in einem Rechteck, was aus mehreren Feldern bestehen kann, sich nur Einsen (bzw. Nullen) befinden dürfen
- Maximal große Rechtecke müssen gewählt werden, um Terme zusammenzufassen.
- Die Größe eines Rechtecks muss  $2^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sein (sie darf z.B. nicht 3, 5 oder 7 betragen).
- Rechtecke können auch über den Rand gehen (z.B. links raus aus der Tafel und rechts in der gleichen Zeile wieder rein oder bei größeren Tafeln auch gespalten werden (z.B. in den Ecken liegen - siehe obiges **KNF-Beispiel** dazu))
- Die verschiedenen Rechtecke dürfen sich überlappen, sodass mit maximalgroßen Rechtecken so viele Terme wie möglich zusammengefasst werden.

Zur DNF: Aus jedem Rechteck einen Konjunktionsterm erstellen. Die Konjunktionsterme durch Disjunktionen verknüpfen.

Zur KNF: Aus jedem Rechteck einen Disjunktionsterm erstellen. Die Disjunktionsterme durch Konjunktionen verknüpfen.

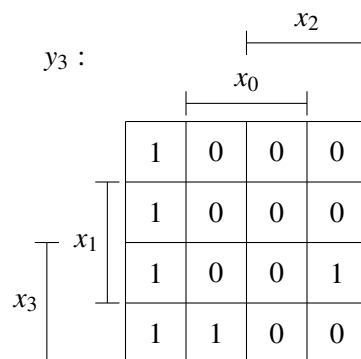
### 1.2.1 Umwandeln einer KV-Tafel zu einer DNF

**Aufgabe:** Erstellen Sie aus folgender KV-Tafel einen möglichst minimalen booleschen Ausdruck in DNF.



### 1.2.2 Umwandeln einer KV-Tafel zu einer KNF

**Aufgabe:** Erstellen Sie aus folgender KV-Tafel einen möglichst minimalen booleschen Ausdruck in KNF.



### 1.3 Vereinfachen einer Schaltung

**Aufgabe:** Vereinfachen Sie die folgende Schaltung mit Hilfe einer KV-Tafel.

Hinweis: Wenn Sie keine Idee haben, wie Sie hierbei vorgehen sollen, fragen Sie bei Ihrem Tutor nach.

