Resumen Segundo Parcial Matemática 1

Función Logarítmica

Definición:

$\log_a(b) = c \iff a^c = b$

$\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Propiedades:

- $\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$
- $\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$
- $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$
- $\log_{a^c}(b) = \frac{1}{c} \cdot \log_a(b)$
- $\log_a(b) = \frac{\log_x(b)}{\log_x(a)}$

Gráfico

- $f(x) = \log_a(x + b) \iff f(x) = \mathscr{T}_{-\vec{b}} \log_a(x)$
- $a > 1 \iff f(x)$ es creciente y $a < 1 \iff f(x)$ es decreciente.
- $\begin{cases} (1, 0) \\ (a, 1) \end{cases} \in \quad y = \log_a(x)$

Geometría Analítica

Para una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro $O(\alpha, \beta)$ radio r y diámetro AB:

- $\mathscr{C} : (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$
- $\mathscr{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ tal que $\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ r = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{4} - c} \end{cases}$
- $\mathscr{C} : (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$
- $\mathrm{tg}_P : x_P x + y_P y + a\left(\dfrac{x + x_P}{2}\right) + b\left(\dfrac{y + y_P}{2}\right) + c = 0$
- $d(Q, \mathscr{C}) = d(Q, O) - r$

Para una recta r:

- $r : ax + by + c = 0$
- $r : y = mx + n$ tal que $\begin{cases} m = -\frac{a}{b} \\ n = -\frac{c}{b} \end{cases}$
- $P \in\ r \iff r : y - y_P = m(x - x_P)$
- $A(a, 0)$ y $B(0, b) \in\ r \iff r : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
- $d(P, r) = \dfrac{|x_P a + y_P b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- A y $B \in\ r \iff r : \dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Complejos

Unidad Imaginaria

$i = \sqrt{-1}$

$i^n = i^k \iff n \equiv k \mod 4$

Notación

- Binómica: $z = a + bi$
- Cartesiana: $z = (a, b)$
- Polar: $z = (\rho\angle\theta)$ tal que $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(\dfrac{b}{a}) \end{cases}$
- Trigonométrica $z = (\rho\cos\theta + (\rho\sin\theta)i)$

Operaciones

- Inverso:

  $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}i$
- Conjugado:

  $z = a + bi \iff \bar{z} = a - bi$
- Suma:

  $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
- Producto:

  $z \cdot z' = (aa' + bb') + (ab' + a'b)i$
- Potencia (Teorema de Moivre):

  $z = (\rho\angle\theta) \implies z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i)$
- Raiz:

  $\sqrt[n]{(\rho\angle\theta)} = (\rho'\angle\theta')$ tal que $\begin{cases} \rho' = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta' = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n - 1$