Apéndice A

Cálculo de raices

Resolviendo ecuaciones cuárticas.

Un método para resolver ecuaciones cuárticas es el llamado método de Ferrari [1] y prosigue de la siguiente manera. Si se parte de la forma general de la ecuación cuártica, es decir:

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{A.1}$$

Entonces, se propone el cambio de variable $z = x - \frac{a}{4}$, lo que da como resultado:

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}a^2x^2 - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{256}a^4 + ax^3 - \frac{3}{4}a^2x^2 + \frac{3}{16}a^3x \\ - \frac{1}{64}a^4 + bx^2 - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}a^2b + cx - \frac{1}{4}ac + d = 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Que al agrupar términos queda:

$$x^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)x + \left(d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4\right) \tag{A.3}$$

Se llega entonces a una ecuación cuártica reducida, de la forma:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{A.4}$$

El siguiente paso en introducir un término auxiliar α, por lo que se reescribe la ecuación A.4 como:

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2x^2\alpha - p\alpha = 0 \tag{A.5}$$

O bien:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha x^2 - qx + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0 \tag{A.6}$$

Entonces, se escoge el valor de α tal que complete el cuadrado dentro de los corchetes. Esto es que tenga una raíz doble, por lo que su discriminante sería cero. Se requiere entonces que α cumpla con:

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0 \tag{A.7}$$

La cual es una ecuación cúbica con tres raíces. Tomamos entonces una de esas raíces, por ejemplo α_0. Se tiene entonces que la raíz dentro de los corchetes es $q/4\alpha_0$. Por lo que la ecuación A.6 se reescribe como:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - 2\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right)^2 = 0 \tag{A.8}$$

La cual es una diferencia de cuadrados. Entonces podemos ver ecuación anterior como:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0 - \sqrt{2}\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right)\right)\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0 + \sqrt{2}\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right)\right) = 0 \tag{A.9}$$

Se llega entonces a dos raíces cuadráticas:

$$x^2 - \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0 \tag{A.10}$$

$$x^2 + \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0 \tag{A.11}$$

De las cuales se pueden encontrar sus dos raíces, que debido a que se llegó a A.10 y a A.11 por medio de identidades, resultan ser raíces de la ecuación A.4, de la cual se pueden recuperar las raíces de A.1 al aplicar el cambio de variable.
La forma explícita de las raíces de A.10 y A.11 son:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\alpha_0} \pm \sqrt{2\alpha_0 - 4\left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)}\right) \tag{A.12}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2\alpha_0} \pm \sqrt{2\alpha_0 - 4\left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)}\right) \tag{A.13}$$

Que al aplicar el cambio de variable resulta en:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{2\alpha_0} \pm \sqrt{2\alpha_0 - 4\left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)}\right) \tag{A.14}$$

$$z_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{2} - \sqrt{2\alpha_0} \pm \sqrt{2\alpha_0 - 4\left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)}\right) \tag{A.15}$$

Donde se recuerda que

$$p = \left(b - \frac{3}{8}a^2\right) \tag{A.16}$$

$$q = \left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right) \tag{A.17}$$

La expresión explícita de α_0 se obtiene a partir de la llamada ecuación de Cardan [1]. El procedimiento es el siguiente:
Partiendo de la ecuación A.7, la cual es una ecuación cúbica.

$$\alpha_0^3 + p\alpha_0^2 + \alpha_0\left(\frac{p^2}{4} - r\right) - \frac{q^2}{8} = 0 \tag{A.18}$$

Se vuelve a usar un cambio de variable similar al de la ecuación cuártica de la forma $\alpha_0 = y - \frac{p}{3}$.

$$y^3 + y\left(-\frac{p^2}{12} - r\right) + \left(\frac{pr}{3} - \frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{108}\right) = 0 \tag{A.19}$$

Ahora bien, si nombramos

$$p' = \left(-\frac{p^2}{12} - r\right) \tag{A.20}$$

$$q' = \left(\frac{pr}{3} - \frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{108}\right) \tag{A.21}$$

La ecuación A.19 se puede reescribir entonces como:

$$y^3 + p'y + q' = 0 \tag{A.22}$$

Donde la ecuación de Cardan [1] índica que las raíces son de la forma:

$$y = \left(-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{1/3} \tag{A.23}$$

Entonces, al recuperar el cambio de variable se tiene:

$$\alpha_0 = \left(-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}\right)^{1/3} - \frac{p}{3} \tag{A.24}$$

Se recuerda también que:

$$r = \left(d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4\right) \tag{A.25}$$

Por último, cabe mencionar que α_0 se obtiene de la suma de dos raíces cúbicas, es decir de la forma:

$$\alpha_0 = s + t - \frac{p}{3} \tag{A.26}$$

Se tiene entonces que para obtener un valor válido de α_0 solo se pueden escoger ciertos valores de los tres posibles para s y t. Estos valores son:

$$\alpha_0 = s_1 + t_1 - \frac{p}{3} \tag{A.27}$$

$$\alpha_0 = s_2 + t_3 - \frac{p}{3} \tag{A.28}$$

$$\alpha_0 = s_3 + t_2 - \frac{p}{3} \tag{A.29}$$

Caso misma $\omega_{p\sigma}$ con una especie incidente y la otra estacionaria.

Expandiendo la ecuación **??** se obtiene:

$$z^4 - 2\lambda z^3 + (\lambda^2 - 2)z^2 + 2\lambda z - \lambda^2 = 0 \tag{A.30}$$

Para resolver está ecuación se sigue entonces el método de Ferrari, donde se empieza por el cambio de variable $z = x + \frac{\lambda}{2}$, para obtener una expresión simplificada

$$x^4 - \frac{1}{2}(4+\lambda^2)x^2 + \frac{1}{16}\lambda^2(\lambda^2 - 8) = 0 \tag{A.31}$$

Donde, al recordar la ecuación A.17 se tiene que el término de primer orden se cancela. Pues $q = -\lambda^3 + \lambda(\lambda^2 - 2) + \lambda$. De esto, se obtiene lo que resulta ser una ecuación bicuadrática, es decir una expresión cuadrática para x^2. Cuyas raíces son entonces:

$$x^2 = \frac{1}{4}(4 + \lambda^2 \pm 4\sqrt{\lambda^2 + 1}) \tag{A.32}$$

Por lo que las raíces cuárticas son:

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 + \lambda^2 \pm 4\sqrt{\lambda^2 + 1}} \tag{A.33}$$

Que recordando el cambio de variable se recupera entonces las raíces para la ecuación A.30.

$$z = \frac{1}{2}\left(\lambda \pm \sqrt{4 + \lambda^2 \pm 4\sqrt{\lambda^2 + 1}}\right) \tag{A.34}$$

Ahora bien, la elección de signos es de acuerdo a la necesidad de una solución con su parte imaginaria positiva, la cual se obtiene tomando el primer signo como positivo y el segundo como negativo.

Caso plasma estacionario y plasma incidente (cuatro especies)

Al expandir la ecuación **??** se obtiene:

$$z^4 - 2\lambda z^3 + (\lambda^2 - 2 - 2\epsilon_1)z^2 + (2\lambda + \epsilon_1\lambda)z + \lambda^2(-1 - \epsilon_1) = 0 \tag{A.35}$$

Y nuevamente haciendo la sustitución $z = x + \frac{\lambda}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} &x^4 + 2x^3\lambda + \frac{3}{2}x^2\lambda^2 + \frac{1}{2}x\lambda^3 + \frac{1}{16}\lambda^4 - 2x^3\lambda - 3x^2\lambda^2 - \frac{3}{2}x\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda^4 + x^2\lambda^2 + x\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^4 \\ &- 2x^2 - 2x\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 - 2x^2\epsilon_1 - 2x\lambda\epsilon_1 - \frac{1}{2}\lambda^2\epsilon_1 + 2x\lambda + 2x\epsilon_1\lambda + \lambda^2\epsilon_1\lambda^2 + \lambda^2(-1 - \epsilon_1) = 0 \end{aligned} \tag{A.36}$$

La cual se puede reescribir como:

$$x^4 - \frac{1}{2}(\lambda^2 + 4\epsilon_1 + 4)x^2 + \frac{1}{16}\lambda^2(\lambda^2 - 8\epsilon - 8) = 0 \tag{A.37}$$

La cual resulta una ecuación bicuártica, se puede entonces sacar para x^2 el siguiente resultado:

$$x^2 = \frac{1}{4}\left(4 + 4\epsilon_1 + \lambda^2 \pm 4\sqrt{1 + 2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \lambda^2 + \epsilon_1\lambda^2}\right) \tag{A.38}$$

Se tiene entonces que x es:

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\epsilon_1 + \lambda^2 \pm 4\sqrt{1 + 2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \lambda^2 + \epsilon_1\lambda^2}} \tag{A.39}$$

Y recuperando la variable z se tiene que las raíces son de la forma:

$$z = \frac{1}{2}\left(\lambda \pm \sqrt{4 + 4\epsilon_1 + \lambda^2 \pm 4\sqrt{1 + 2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \lambda^2 + \epsilon_1\lambda^2}}\right) \tag{A.40}$$

Caso con especies de $\omega_{p\sigma}$ diferentes con una incidente y la otra en reposo.

La ecuación a resolver es de la forma:

$$z^4 - 2\lambda z^3 + z^2(\lambda^2 - \epsilon - 1) + 2\epsilon\lambda z - \lambda^2\epsilon = 0 \tag{A.41}$$

Entonces, al aplicar el cambio de variable $z = x + \frac{\lambda}{2}$ queda:

$$x^4 + (-\frac{\lambda^2}{2} - \epsilon - 1)x^2 + (\epsilon\lambda - \lambda)x + \frac{\lambda^4}{16} - \frac{\epsilon\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} = 0 \tag{A.42}$$

Donde los coeficientes p,q y r son entonces:

$$p = -\frac{\lambda^2}{2} - \epsilon - 1 \tag{A.43}$$

$$q = \epsilon\lambda - \lambda \tag{A.44}$$

$$r = \frac{\lambda^4}{16} - \frac{\epsilon\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} \tag{A.45}$$

A diferencia de los casos anteriores, la ecuación A.41 no se reduce a una bicuadrática por lo que se tiene que las raíces de z están expresadas ya sea por la ecuación A.14 o por la ecuación A.15 que se encuentran expresadas en términos de los coeficientes p,q y un término α_0.
El siguiente paso es entonces encontrar una expresión explícita para α_0 la cual debe ser de la misma forma que la ecuación A.24 que a su vez está expresada en términos de los coeficientes p' y q' los cuales están definidos por las ecuaciones A.20 y A.21. Para este caso se tiene entonces que p' y q' son:

$$p' = -\frac{1}{12}\left(1 + \epsilon - \lambda^2\right)^2 \tag{A.46}$$

$$q' = \frac{1}{108}\left[\epsilon^3 - 3\epsilon^2(\lambda^2 - 1) + 3\epsilon(\lambda^4 + 16\lambda^2 + 1) - (\lambda^2 - 1)^3\right] \tag{A.47}$$

α_0 es entonces:

$$\begin{aligned}\alpha_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda^2}{2} + \epsilon + 1\right) \\ &+ \left(\frac{1}{216}\{-\epsilon^3 + 3\epsilon^2(\lambda^2 - 1) - 3\epsilon(\lambda^4 + 16\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 - 1)^3\}\right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{12\sqrt{3}}\{\epsilon[\epsilon^3 - 3\epsilon^2(\lambda^2 - 1) + 3\epsilon(\lambda^4 + 7\lambda^2 + 1) - (\lambda^2 - 1)^3]\}^{1/2}\right)^{1/3} \\ &+ \left(\frac{1}{216}\{-\epsilon^3 + 3\epsilon^2(\lambda^2 - 1) - 3\epsilon(\lambda^4 + 16\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 - 1)^3\}\right. \\ &\left. - \frac{\lambda}{12\sqrt{3}}\{\epsilon[\epsilon^3 - 3\epsilon^2(\lambda^2 - 1) + 3\epsilon(\lambda^4 + 7\lambda^2 + 1) - (\lambda^2 - 1)^3]\}^{1/2}\right)^{1/3}\end{aligned} \tag{A.48}$$

En caso de que los términos elevados a la $1/3$ sean complejos, nótese que son el conjugado del otro, de esta manera, la expresión A.27 nos permite seleccionar las raíces de estos términos de tal manera que se cancele su parte imaginaria haciendo así a α_0 un número real.
Recordando entonces que la raíz de interes es aquella cuya parte imaginaria sea positiva, se escogen

los signos postivos en la ecuación A.14 y se sutituyen los coeficientes p y q. Queda entonces que la raíz es:

$$z = \frac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{2\alpha_0} + \sqrt{2\alpha_0 - 4\left(-\frac{1}{2}(\frac{\lambda^2}{2} + \epsilon + 1) + \alpha_0 + \frac{\epsilon\lambda - \lambda}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)}\right) \tag{A.49}$$

Donde α_0 no se sustituye por simplicidad.

Bibliografía

[1] Aleksandr Gennadievich Kurosh. *Higher algebra.* Mir Publishers, 1972.