

综合考试

修格致

2019 年 11 月 12 日

目录

第一章 绪论	5
第二章 空间生长模型	7
2.1 城市的规模	8
2.1.1 基于偶发过程的城市局部交互标度律模型	9
2.1.2 随机几何模型	10
2.1.3 基于距离衰减的长程模型	10
2.2 城市活动的空间分布	11
2.2.1 城市内部的标度律	11
2.2.2 城市空间分隔的物理背景	11
2.3 城市交通系统的性质	12
2.4 跨尺度模型	13
2.4.1 生长模型的记忆效应	13
第三章 空间生态系统模型	15
3.1 人群交互模型	17
3.2 局部交互背景下的注意力流动模型	17
3.2.1 社群结构的新理解	17
3.3 社会网络的层级结构	18
第四章 总结与展望	19

第一章 绪论

人类在不同尺度上都存在交互。而不同尺度上的交互使得人类社会在不同层次上呈现出不同的模式。在长期演化过程中，城市尺度逐渐显示出了自己的独特之处。这个尺度是相对固定的，城市内部与城市间的增长规律有显著的区别。在城市间尺度上，城市的在经济、人口、基础设施建设等方面的增长速度关于城市规模呈现非线性关系，这导致在大尺度上，城市规模的频率正比于城市的排名的一个方幂（Zipf's law）；而在城市内部，人与人的交互、政府对有限的城市资源的配置导致城市空间异质性的出现，形成单中心或者多中心的模式。

世界（尤其是在新兴国家）快速城市化带来的挑战包括对能源的依赖日益增加，空气污染，社会空间不平等以及环境和可持续性问题。因此，对城市的结构和演变进行建模至关重要，因为决策者需要强有力的理论和新的范式来缓解这些问题。近年来，有关城市系统的可用数据不断增加，这使得我们有可能构建量化的城市科学，以识别和建模城市的种种基本现象。统计物理学通过引入能够沟通理论和实证结果的工具和概念，在这项工作中发挥了重要作用。我们关注城市的一些基本问题：城市人口的分布；偏析现象和自旋模型活动组织的多中心过渡；受重力和辐射概念启发的关于流动性和模型的能量考虑；运输过程中排放的二氧化碳；最后，比例尺描述了城市发展时各种社会经济和基础设施的发展方式。

物理学理解复杂系统的一种方法是，构建一个微观模型，从而得出可以在经验数据上进行检验的大规模预测和分析。这种思路已经取得了许多成功，单严重依赖于经验观察和普适规律的存在性。近些年来，随着大家的数据意识逐渐增强，地理学在传统研究方式之外增添了很多量化的做法。通过获得有关技术社会系统的大量数据，我们可以开启对社会总体状态的定量分析。特别是，信息和通信技术已经成为有关城市数据的重要来源，这些新技术也很可能会影响城市动态。

另一方面，城市增长的动态模式在很大程度上是不确定的。

第二章 空间生长模型

微观增长动态如何塑造区域增长的宏观趋势的固有性质引起了经济学家，城市研究，流行病传播和统计物理学研究的极大兴趣。这种复杂系统的空间异质性和自组织使其能够产生聚集效应 [13]。城市作为人类栖息地的密集结构，在工业和金融等领域发挥着微妙的作用，同时为公民提供有效的生活方式。城市的这种优势吸引人们进入城市地区，这加速了城市问题的发展，例如道路网络发展，城市扩张以及它们之间的共同点。除了个人层面的群体动态之外，维度空间上的社区也不同于优先依恋。例如，在城市内部，个人倾向于靠近，形成现代城市，而他们可以很好地适应某些等级结构，但在空间上相隔很远的距离。这些事实表明复杂系统的空间性质解释了观察水平之间的矛盾。虽然这种复杂性带来了系统能力的大量信息和机会，但考虑到共同增长动态的多维约束，预测社区之间的趋势和相互作用一直是困难的。

在错综复杂的城市现象中，空间统计学家们抽象出了以标度律、城市分形为代表的一些理解角度，它们可以解释不同尺度上都成立的一些普适规律。另一方面，这些城市规律可以用随机过程的方法得到复现，这些方法也在一定程度上克服了城市发展难以通过实验验证的困境。此类数理模型的大量研究使得我们有理由相信，这些城市规律可以由更微观的机制来生成，而且这些方法对于未来的预测都是有意义的。本章将综述不同的城市现象对应的统计物理模型，并给出其中重要的原理阐释。

Temporal profiles of avalanches on networks 一个事件引起一个或多个后续事件时，就会发生雪崩或级联，进而可能导致连锁反应中的其他事件。在许多学科中研究雪崩动力学，最近集中在平均雪崩形状上，即固定持续时间的雪崩的时间分布。在动力学的关键点，不同持续时间的重新缩放的平均雪崩形状会塌陷到一条通用曲线上。我们应用马尔可夫分支过程理论来推导控制网络级联动力学的平均雪崩形状的方程。临界状态下的方程分析表

明, 对于某些动力学和网络拓扑组合, 会出现非对称平均雪崩形状 (在某些实验中观察到)。我们使用模型的数值模拟来给出示例, 以进行信息传播, 神经动力学和行为采用, 并提出简单的实验测试来量化级联系统是否处于临界状态。Diffusion in networks and the virtue of burstiness 疾病的蔓延和信息的传播取决于个人的接触。人们并不总是能够与周围的人互动, 并且人们活动的时机决定了人们是否有机会会面和传播细菌, 想法等, 并最终决定是否广泛传播或传播。我们显示, 在一个简单的传染或扩散模型中, 当活动模式存在异质性时, 最大程度的传播发生: 有些人长时间处于活动状态, 然后长时间不活动, 仅偶尔改变其可用性, 而其他人经常在活跃和不活跃之间交替。这种观察对限制传染性疾病以及促进信息传播具有政策意义。Effects of Network Structure, Competition and Memory Time on Social Spreading Phenomena 在线社交媒体极大地影响了我们彼此交流的方式。但是, 人们对什么基本机制驱动在线社交系统中的动态信息流知之甚少。在这里, 我们介绍了一种在线共享行为的生成模型, 该模型在分析上易于处理, 并且可以重现有关标签使用情况的经验微博数据的多个特征, 例如 (时间相关的) 模因流行度的重尾分布。所提出的框架构成了社交传播现象的无效模型, 与纯粹的经验研究或基于模拟的模型相比, 该模型清楚地区分了影响模因流行的两个不同因素的作用: 用户的记忆时间和社交网络的连通性结构。

2.1 城市的规模

人的空间分布表现出从家庭 (~ 0.01 km) 到洲际 (~ 10000 km) 的各种尺度的聚类。通过对经验数据的研究, 科学家发现了针对城市规模分布的简单幂律规律 (称为齐普夫定律) 以及人口密度波动是规模的函数。即

$$n(N) \propto N^{-2}.$$

这个函数形式的意义在于, 规模越大的城市频率越小, 并且随城市的位次是一个幂指数为 -2 的幂律衰减形式。在这里, 城市的规模主要指的是人口规模。那么各个城市人口的变化规律

使用随机场理论和统计物理学的技术, 我们证明这些幂定律从根本上来说是人类无标度空间集群的结果, 也是人类居住在二维表面上的事实。从这个意义上说, 两个空间尺度上尺度不变的对称性与城市社会学密切相关。我们通过经验地测量人口密度波动的功率谱来检验我们的理论, 并表明对

数斜率 $\alpha = 2.04 \pm 0.09$ ，与我们的理论预测 $\alpha = 2$ 非常吻合。该模型通过导入随机场的数学形式主义。

2.1.1 基于偶发过程的城市局部交互标度律模型

Manrubia, Susanna C. 团队在 1998 年的两篇工作 [15, 20] 继承了 Zel-dovich 在随机网络的工作，并引领了这个机制在城市科学的相关研究。在人口系统中，地理相关性通常被称为相关场，作为局部人口迁移的动力学机制解释。在总人口为确定值的二维方形格网区域内，记录每一个时刻 t 的每个格点 x 上的人口为 $n(x, t)$ 。则下一个时刻的人口分布符合

$$n(x, t') = \begin{cases} (1 - q)n(x, t)/p, & \text{概率为 } p \\ qn(x, t)/(1 - p), & \text{概率为 } p \end{cases} \quad (2.1)$$

这种机制保证了总人口的恒定，同时增加人口分布的矩 $\mu_k(t) = \sum_k n(x, t)^k$ 。它的实际意义是不断增加的空间异质性。由于总人口的恒定，该模型可以解释为一个人口迁移模型，即人口不断从乡村区域迁移到城市，迁移到不同城市的速率正比于城市的规模。为了使这个机制得以实现，我们还需要假设对于每一个位置，迁出的人口是该处人口数的一个固定比例 α 。该模型可以导

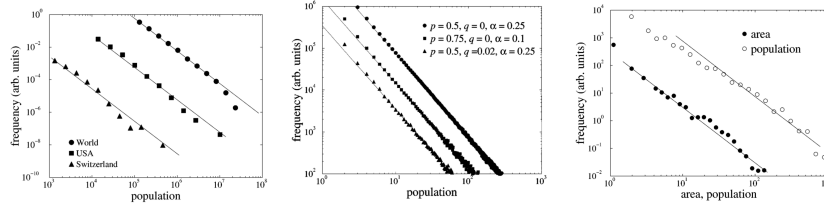


图 2.1: 左图：全球 2700 个最大城市，美国的 2400 个最大城市和瑞士的 1300 个最大的自治市的人口分布 [20]。图中斜率为 -2 右图是该文中对于不同的参数的三组模拟结果。我们发现，该模型下不同参数导出的城市人口分布都服从一个参数为 2 的幂律分布。

出的另一个结果是城市面积的频率。通过假设人口密度高于总人口密度的区域为城市区域，连通的城市区域可以进行面积的统计。城市人口的聚集效应导致城市面积趋近于稳定大小。边际区域上面得到的补充人口与扩散人口数维持动态平衡。结果如图三所示。

基于此类模型，笔者总结了较为一般的模型规律。即反应-扩散模型 (reaction-diffusion models) 导出空间异质性的基本原理。

在此我们额外总结一下人类移动性的模式。通常我们会认为人类的行动是一个连续时间的随机游走 (continuous time random walk, 即 CTRW), 与此相关的是数学模型是扩散过程 (diffusion limit models)。扩散过程的一个问题是难以解释人类移动的厚尾情形, 即现代社会中跨城市尺度的移动。基于此, Mandelbrot 提出了列维飞行的概念 [5] 来解释人类移动性的厚尾分布。这两种方式有一个共同的优点, 即可以通过随机微分方程的方式得到很多有趣的结论。这两类问题的常用工具 Fokker-Planck 方程在物理中的意义是粒子在势能场中受到随机力后, 随时间演化的位置或是速度的分布函数。这对于我们探究人类移动性对于偶发事件的反应也是有很大帮助的。Chaoming Song 于 2010 年提出的一种双机制模型 [18] 是笔者看到的解释力最强的人类移动性模型。

近年来, 相关研究仍在继续。统计规律在新的数据集上并不成立, 使得人们对已有模型的动力学机制产生了怀疑。一些研究 [8] 表明, 列维飞行无法解释私家车轨迹数据集上体现出的行进时间和速度的行为。

而如今, 人类移动的模式仍然不能被完全理解。虽然我们仍然对此不解, 但却已经是在更高的层次上不解了。人类移动的扩散效应建模的假设里, 人的大小是忽略不计的。在进一步研究中, 我认为可以将爱因斯坦关系 [6] 融入移动性建模之中, 即考虑社会经济条件对人产生的粘性。此时在低雷诺数的极限下, 迁移率是阻力系数的倒数。我们即可以根据城市的社会经济条件定义城市吸引力, 以统一人类移动性在不同城市间的差异性。其中, 随机时间点上的加速而引起的速度变化。将该机制与行程时间的指数衰减结合起来, 会导致出行距离的短尾分布, 这可能被误解为带截断的幂律分布。这些结果说明了纯描述性模型的局限性, 并提供了移动性的机制解释。

升矩过程

2.1.2 随机几何模型

Mathematics and morphogenesis of cities: A geometrical approach

2.1.3 基于距离衰减的长程模型

根据 Jürgen P. Kropp 在 2013 年提出的模型 [17], 增长更可能发生在居住空间附近。该模型涉及一个参数, 该参数是确定吸引力随距离衰减的强

度的指数。此外，该模型是迭代运行的，因此现有群集可以（一起）增长，并且可以出现新的群集。该模型能够再现最大聚类边界的大小分布和分形。尽管幂律分布取决于施加的指数和迭代，但分形似乎独立于前者，而仅取决于后者。

2.2 城市活动的空间分布

Spatial ecology of territorial populations

从植被到生物膜的许多生态系统都是由争夺养分和物理空间的领土人口组成的。这种空间组织对生物多样性有何影响？为了解决这个问题，我们开发并分析了区域资源竞争的模型。在该模型中，所有物种都在新陈代谢的生物物理约束下获得了权衡；该物种占据非重叠领土，而营养物质则在太空中扩散。我们发现养分扩散时间是生物多样性和人口动态时间尺度的重要控制参数。有趣的是，快速的营养扩散使某些物种的种群波动为零，从而导致物种灭绝。此外，领土竞争会自发地产生多重稳定性和 Allee 效应（在其中需要最少的人口才能生存），因此小规模扰动会对生态产生重大影响。权衡的假设允许比营养物质数量更多的物种共存（从而违反了竞争排斥的原则），但总体上生物多样性却受到“寡养”物种的控制。重要的是，与充分混合的模型相比，空间结构使多样性对于代谢权衡不平等具有鲁棒性。我们的结果表明，仅由于空间社区中资源的竞争，领土生态系统就可以显示出高生物多样性和丰富的动态。

2.2.1 城市内部的标度律

2.2.2 城市空间分隔的物理背景

1971 年，谢林（Schelling）提出了一种模型，如果有太多相反类型的邻居，他们的家庭就会搬家。在本文中，我们将考虑模型的一个总体种群版本，其中将一个城市划分为 N 个街区，每个街区都有 L 座房屋。对于某些 $< 1/2$ ，有 NL 红色族和 NL 蓝色族。如果邻里有对等类型的 cL 个家庭，他们会感到幸福，否则，他们会感到不高兴。每个家庭搬到每个空置房屋的速度取决于他们当前所在位置和目的地的幸福感。我们的主要结果是，如果邻域较大，则将存在临界值 $b < d < c$ ，因此对于 $< b$ ，这两种类型会随机地均衡分布。当 $> b$ 时，出现一个新的隔离平衡。对于 $b < d$ ，存在双

稳态,但是当 c 超过 d 时,随机状态不再稳定。当 c 足够小时,当 c 接近 $1/2$ 时,随机状态将再次成为平稳分布。如果是这样,则在其之前是双稳态区域。

Hernan A. Makse, Shlomo Havlin 和 H. Eugene Stanley 在 1995 年引领了 Diffusion-limit aggregation (DLA) 模型在城市科学中的研究 [14]。该模型认为城市的增长方式可能类似于二维粒子聚集体的增长,也有几篇工作 [2, 1] 使用聚类统计物理学的思想对城市增长进行建模。DLA 模型预测应该只存在一个大的分形城市,并且可以不使用传入的“发展单位”(例如,代表人员,资金或资源),因此集群的几乎所有增长都发生在城市边缘的尖端。该工作改进了 DLA 模型。其中与发展单位相关而不是随机添加到集群中的模型,能够更好地再现观察到的城市形态和城市中心子集群(“城镇”)的区域分布系统,也可以描述城市增长动态。我们的物理模型与存在密度梯度时的相关渗滤模型相对应,其动机是由于城市地区的发展吸引了进一步的发展。该模型提供了预测城市形态的全局属性(例如缩放行为)的可能性。

2.3 城市交通系统的性质

弹性的概念在自然和工程系统中都有很广泛的应用。它表示了系统从不同的干扰中适应和恢复的能力。尽管弹性是一个在交通系统中管理风险和理解其是如何崩溃的重要概念,但是这个概念在交通系统中的定义和它的统计性质还是缺失的。

本文基于交通堵塞的时空组团,定义了城市中交通弹性的概念。并发现,在 2 维城市路网和 1 维高速公路中,弹性的概率分布是无标度的,并且有着相同的标度指数。交通弹性也揭示了时空堵塞组团和恢复时间的关系。这种关系是与微观机制独立的。我们的结果表明,全局的交通弹性可以提供更好的设计复杂工程系统的理解。

交通堵塞是城市健康的顽疾。但正如生态系统有康复的能力,在几种情况下,交通也可以逐渐从混乱中恢复。为了描述这种恢复,我们定义了弹性度量,作为描述时空堵塞集团的标准(它也可以被用于其他网络系统)。基于大尺度的 GPS 数据机,我们从恢复行为中揭示了三个 scaling laws,这些 law 对于任何 congestion scale 都是通用的。他们在微观尺度上是独立的,包括交通需求的波动与相关的管理机制。我们的弹性 scaling 结果可以更好地刻画/提高城市交通对于不同类型堵塞的的适应性。Synchronized flow in

oversaturated city traffic 基于具有随机三相交通流模型的数值模拟，我们揭示了过饱和城市交通中的移动队列（移动拥堵）在交通信号上游一定距离处溶解，同时转换为同步流。已发现，与高速公路交通一样 [Kerner, Phys. Rev. E 85, 036110 (2012)]，这种交通拥堵的吸收作用可以通过强有力的驾驶员速度适应性来解释：车辆之间的时间间隔（空隙）在行进队列（行进拥堵）的上游增加，导致移动队列解散。事实证明，在给定的交通信号参数下，速度适应效果越强，信号位置与道路位置之间的平均距离越短，移动队列在该位置处完全溶解，过饱和的交通仅由同步流组成。将本简报中的城市交通同步流与公路交通同步流进行了比较。

有研究显示，城市交通系统的异质性是由不同城市景观的异质性导致的 []

2.4 跨尺度模型

这个部分里，我们主要叙述与尤尔西蒙模型相关的生长机制。尤尔模型最早见于对种群数量分布的解释 [19]。

空间依附效应是尤尔模型可以解决人口分布问题的一个出路 [4]

城市规模研究发现 [13]，集聚效应（大城市的产出高于预期）遵循跨行业数据中鲁棒的“超线性”关系。但是我们还希望这种模式可以预测的更多的领域，涉及各个城市在许多时间点的动态标度律，我们还期望随着城市人口的增长，各个城市之间出现平行的超线性增长。此预测尚未经过严格测试。我使用地理编码的微数据估算了 1990-2012 年瑞典 73 个劳动力市场区域中城市规模对人均工资的影响。数据支持所有瑞典城市群的超线性比例尺制度。但是，与系统层次上的“富人致富”过程相呼应，超线性增长的轨迹仅对于在城市层次结构中占据主导地位的城市而言才非常稳健。

2.4.1 生长模型的记忆效应

城市的发展是历史累积的，是在高度异质性和差异性的环境中不断演化的。而生长模型中，如果将大多数机制建立在无记忆性的指数增长过程中，模型对于复杂历史状况的城市演化规律的解释能力就会有所下降。

生长模型本身的研究过程也在不断引入新的改进机制，从而使得模型仍能预测出较为确定的指标（可解析性，以及更多的考察要素，如 Taylor 定律 [9] ），也能得到更符合实际状况的预测效果。

第三章 空间生态系统模型

Gardner 和 Ashby 提出，大型复杂系统只能在一定临界程度的连通性上面是稳定的。他们的结论是基于大小为 4, 7, 10 的系统的计算机模拟研究。May 在自己的工作中通过更多的变量来完善这个研究。找到稳定与不稳定的界限仍然是研究问题的关键。

本实验中，作者采用的记号有：连通率 C ，物种数 n 。

物种之间的关系通常是非线性的。但是这样的系统都可以在均衡点附近做 Taylor expanding。这样的话，这些系统的均衡就可以由这个方程刻画：

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

矩阵 A 的对角线元素设置为 -1 ，这是为了考虑进时间因素。每个元素都等概率的是正数或者是负数。然后取各种值的概率都是相等的。我们将他们的均值设置为 0 ，方差的均值设置为 α 。方差可以作为平均交互强度的代表。

随机性只在选择物种的时候出现。之后的演化过程中，系统就是完全确定的了。

- 系统是稳定的，当且仅当 A 的所有特征值都有负的实部。那么交互矩阵是随机的，两个参数满足什么关系的时候系统是稳定的呢？稳定的概率 $P(n, \alpha)$ 又是多大呢？
 - 如果 $\alpha\sqrt{n} < 1$ ，系统几乎一定是稳定的；
 - 如果 $\alpha\sqrt{n} > 1$ ，系统几乎一定是不稳定的。
 - 相变区域的宽度正比于 $n^{-2/3}$
- 连通度 C

- 定义：非零元素的比例。
- 有了这个量之后， $\alpha^2 C$ 就取代了 α^2 的角色。系统稳定的临界概率 $\alpha\sqrt{nC}$ 。

对于生态的话题，这个采样方式有着很普适的作用。

12 物种的群落，连通度是 15%，稳定概率为 0；但是 3 个 4 物种的群落，连通概率是 45%，这样的群落有 35% 的概率是稳定的。

四十年前，May 证明了，足够大或复杂的生态网络持续存在的可能性接近零，与之前的预期相反。可以分析物种随机相互作用的大型网络。然而，在自然系统中，物种对具有明确定义的相互作用（例如捕食者 - 猎物，共生或竞争）。在这里，我们将 May 的结果扩展到这些关系，并发现稳定的**捕食者 - 猎物相互作用**与不稳定的**共生和竞争**相互作用之间存在显著差异。我们为所有案例提供分析稳定性标准。我们使用这些标准来证明，当一个现实的食物网结构被施加或者存在大量弱互动的优势时，捕食者 - 猎物网络的稳定概率会降低。同样，在二分互惠网络中，稳定性受到嵌套性的负面影响。通过将网络结构和相互作用强度的贡献分离到稳定性，可以发现这些结果。只要捕食者 - 猎物对紧密耦合，稳定的捕食者 - 猎物网络可以是任意大而复杂的。稳定性标准可广泛应用，因为它们适用于任何微分方程组。

• May 的定理：

- 交互矩阵 $M_{S \times S}$ 描述了 j 对 i 在均衡点附近的影响。在他的工作中，对角线的系数是 -1 。其余的系数以概率为 C 从一个确定分布中取，以概率为 $1 - C$ 取为 0。对于这样的矩阵，只要复杂度 $\sigma\sqrt{SC} > 1$ ，稳定的概率就是 0。局部稳定性衡量了一个系统经过扰动后回到均衡的概率。对于不稳定的系统，即使极小的扰动，都会使得系统远离均衡。这潜在的会使得一些物种消失。所以我们基本上不可能见到过于丰富的物种丰富度，或者过于高的连通度。数学上，一个均衡是稳定的，如果交互矩阵所有的特征值的实部都是负的。
- 局部稳定性只是均衡点附近的性质。但是自然系统通常被认为是远离均衡的。但是，基于局部稳定性的方法还是很适合分析聚星系统。这些系统的经验的参数化通常是不适用的。这些方法是通用的，所以这些方法可以用到各种微分方程系统中。

- May 的矩阵有着随机的结构。每一对的交互都有着随机的交互可能。但是，这种随机结构也显示，对于大的 S ，我们可以将这种随机性翻译成确定的交互频率。所以这种矩阵可以描述交互的很精确的结构。举例来说，捕食-被捕食交互比自养交互要频繁一倍。

3.1 人群交互模型

这个部分主要基于几篇文章：Simplicial Models of Social Contation[12] 和 Spatially Distributed Social Complex Networks[7]

人类局部交互模型的通常假设是短程交互和长期迁移的组合。每个个体（agent）有一定强度的个人属性，这个属性可能会被其他人影响，进而发生改变。一个例子是人类方言的变迁过程 [3]。

局部交互的方法通常由简单交互过程（基于 Ising 模型）或者博弈分析（基于纳什均衡）[10, 16] 来得到。

3.2 局部交互背景下的注意力流动模型

3.2.1 社群结构的新理解

近十年来，学界对生成模型的研究不仅仅限于联系的建立，更在于社会网络功能的形成。由于社群结构可以被看作城市生活的基本单元，进而划分空间集聚和空间异化效应的特征尺度，社群结构的定义与性质成为了一个很重要的研究对象。我们重点考察的有两个方面，首先是社会网络的层级结构（Hierarchy），其次是社会网络的社群形成规律。

Hébert-Dufresne 等人在 2011 年的文章 [11] 中提出了结构偏好依附模型（Structural Preferential Attachment）。该模型可以生成复杂网络的很多性质。比如尺度无关性、模度性和自相似性。并且将这些性质统一在不以连边为基础的无标度网络系统中。这带来了一个新的观测复杂网络的视角：社区（在结点和边之外的视角）。这个模型可以通过预测其社群结构来复现社会/信息网络。更重要的是，结点和社群是如何连通的。而这通常是一个自相似的结构。

我们首先来理解如何将空间对象抽象成网络。网络可以看作是空间对象的同质个体之间的关联模式。进而一个定义良好的网络抽象应该自然然是无标度的，因为抽象尺度应该与问题本身是无关的。这个理念的正确性

保证了采样在复杂网络研究中的有效性。与此相关的是 [11] 中的一个重要观念：将复杂系统简化为最简单的形式，同时保留其重要属性，有助于独立于其性质对行为进行建模。我们认为，抽象出来的网络可以构建对不同是一个普适类。偏好依附（preferential attachment）就是一个重要的普适类。这个机制可以解释各个领域致富者愈富的情形。

Some features of the spread of epidemics and information on a random graph

随机图是社会和技术网络的有用模型。迄今为止，该领域的大多数研究都涉及图形的几何特性。在这里，我们关注网络上发生的过程。我们特别感兴趣的是，它们在网络上的行为与均匀混合种群或在生态模型中常用的规则格上的行为有何不同。

3.3 社会网络的层级结构

第四章 总结与展望

我这都是写得啥呀……

参考文献

- [1] L. Benguigui. A new aggregation model. application to town growth. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 219(1):13 – 26, 1995.
- [2] L. Benguigui and M. Daoud. Is the suburban railway system a fractal? *Geographical Analysis*, 23(4):362–368, 1991.
- [3] James Burridge. Spatial evolution of human dialects. *Phys. Rev. X*, 7:031008, Jul 2017.
- [4] Willis J. C. Age and area: a study in geographical distribution and origin of species.
- [5] A. A. DUBKOV, B. SPAGNOLO, and V. V. UCHAIKIN. Lévy flight superdiffusion: An introduction. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(09):2649–2672, 2008.
- [6] Adolf Fick. Ueber diffusion. *Annalen der Physik*, 170(1):59–86, 1855.
- [7] Gerald F. Frasco, Jie Sun, Hernán D. Rozenfeld, and Daniel ben Avraham. Spatially distributed social complex networks. *Phys. Rev. X*, 4:011008, Jan 2014.
- [8] Riccardo Gallotti, Armando Bazzani, Sandro Rambaldi, and Marc Barthélemy. A stochastic model of randomly accelerated walkers for human mobility.
- [9] Andrea Giometto, Marco Formentin, Andrea Rinaldo, Joel E. Cohen, and Amos Maritan. Sample and population exponents of generalized taylor’s law. 112(25):7755–7760, 2015.

- [10] Gianluca Grimalda, Andreas Ponderfer, and David P Tracer. Social image concerns promote cooperation more than altruistic punishment. *Nature communications*, 7:12288, 2016.
- [11] Laurent Hébert-Dufresne, Antoine Allard, Vincent Marceau, Pierre-André Noël, and Louis J. Dubé. Structural preferential attachment: Network organization beyond the link. *Phys. Rev. Lett.*, 107:158702, Oct 2011.
- [12] Iacopo Iacopini, Giovanni Petri, Alain Barrat, and Vito Latora. Simplicial models of social contagion.
- [13] Marc Keuschnigg. Scaling trajectories of cities. 116(28):13759–13761, 2019.
- [14] Hernán A. Makse, Shlomo Havlin, and H. Eugene Stanley. Modelling urban growth patterns. 377(6550):608–612.
- [15] Susanna C. Manrubia and Damián H. Zanette. Intermittency model for urban development. *Phys. Rev. E*, 58:295–302, Jul 1998.
- [16] Mariamo Mussa Juane, Luis F. Seoane, Alberto P. Muñuzuri, and Jorge Mira. Urbanity and the dynamics of language shift in galicia. *Nature Communications*, 2019.
- [17] Diego Rybski, Anselmo García Cantú Ros, and Jürgen P. Kropp. Distance-weighted city growth. *Phys. Rev. E*, 87:042114, Apr 2013.
- [18] Chaoming Song, Tal Koren, Pu Wang, and Albert-László Barabási. Modelling the scaling properties of human mobility. *Nature Physics*, 6(10):818, 2010.
- [19] George Udny Yule. Ii.—a mathematical theory of evolution, based on the conclusions of dr. jc willis, fr s. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, containing papers of a biological character*, 213(402-410):21–87, 1925.
- [20] Damián H. Zanette and Susanna C. Manrubia. Role of intermittency in urban development: A model of large-scale city formation. *Phys. Rev. Lett.*, 79:523–526, Jul 1997.