

城市中流行病的涌现与 Allee 效应

修格致

北京大学遥感与地理信息系统研究所

xiugz@pku.edu.com

2020 年 7 月 17 日



目录

- ① 概念阐述
 - Allee 效应
- ② 相关工作
 - 研究现状
 - 问题归纳
- ③ 研究内容
 - Allee 效应可以给疾病传播的一些概念一些启示
 - 城市空间异质性的一种新解释：临界交互密度
- ④ 问题



Intuitions

不同物种/基因型的人口在空间上扩张 (Range Expansion) 是人口动力学 (Population dynamics) 的重要研究对象。

城市中的扩张现象也有很多类似的现象，比如城市蔓延 (urban sprawl)、去中心化 (decentralization)、传播过程等。

在城市内部尺度的疾病传播过程中，传统的同速传播模型对此类问题刻画能力有限，我们需要在关键尺度、



Allee 效应：生态学背景

- 自然对生物物种进行选择的时候，会考虑一个 Tradeoff：探索更多的区域（Dispersal）还是生更多的孩子（grow cooperatively）
- 初始扩张期间，快速生长的细胞有选择性优势；
- 渐近到后期，二者平衡才是最成功的。



Allee 效应：生态学背景

- 数学表达：基本的，某个位置的人口数变化可以用一个偏微分方程表达

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \rho g(\rho), \quad (1)$$

- 等号左边：某处的人口密度随时间的变化；
- 等号右边第一项：扩散速度
- 等号右边第二项：生长函数



Allee 效应：生态学背景

- 数学表达：基本的，某个位置的人口数变化可以用一个偏微分方程表达

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \rho g(\rho), \quad (1)$$

- 等号左边：某处的人口密度随时间的变化；
 - 等号右边第一项：扩散速度
 - 等号右边第二项：生长函数
- 常用的生长函数假设：

$$g(\rho) = r(K - \rho)(\rho - \rho^*) / K^2 \quad (2)$$

- r 决定时间标度， K 是环境容纳量， ρ^* 是合作程度
- $(\rho^*$ 被称为 Allee threshold)。



Allee 效应：生态学背景

ρ^* 的讨论：

- $\rho^* < -K$: 非合作增长，因为 $g(\rho)$ 单调递减
- $\rho^* \uparrow$: 合作程度增加，如果有 $\rho^* > 0$ ，则会出现一个合作增长效应。



现有研究及广泛意义

- **数学模型**

- 基于 SEIR 等模型的元人口/网络模型研究

- **城市动态演化**

- 长时间尺度上流行病的时空动态与城市模式的关系

- **效率与韧性，城市的鸡尾酒瓶**

- 控制论、复杂网络理论给生态系统结构及其鲁棒性的研究提供了强有力的工具



Allee 效应的形成原因

- cubic model: 来自 Volterra 的工作，三次多项式作为 f 的形式。它的原因是：两种性别之间的产生交互的频率正比于 ρ^2 。形式为：

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -a_1\rho + (a_2 - a_3\rho)\rho^2 = -a_1\rho + a_2\rho^2 - a_3\rho^3.$$

- 少伴侣的逻辑斯蒂找到伴侣的概率

$$\mathcal{P} = \frac{\rho}{\rho + \theta}.$$

其中 θ 是人口中以 $1/2$ 概率找到伴侣的人口数。显然这是一个可以找得到 Allee 效应的方式。

- ...



研究现状：与扩散和流行病学的关系

扩散过程

- 多种基因型的共存
- 扩张的节律
-

增加对流行病学的理解

- 最小人口单元问题
- 改变局部密度对流行病的影响



流行病的时空传播规律

时空传播规律与医疗系统设计和对新疫情出现时的理解息息相关。流行病的具体传播规律，不光是参数的设定，更是大类模型的选择。要关注非线性、时空异质性、非马氏性等重要因素。

- Travelling waves and spatial hierarchies in measles epidemics, Bryan Grenfell et. al., Nature 2001
- Power laws governing epidemics in isolated populations, C. J. Rhodes and R. M. Anderson
 - 与稀树草原-森林演化的林火模型之间的关系
- Synchrony, Waves, and Spatial Hierarchies in the Spread of Influenza, Science 2006
 - 小波相位分析，可以实现动态非平稳性的探测
- From individuals to epidemics



流行病的时空传播规律

Travelling waves and spatial hierarchies in measles epidemics, Bryan Grenfell et. al., Nature 2001

- 考虑两个相关的城镇，都有着双年的麻疹周期。进一步假设一个城市够大，超过 CCS（大约是 300,000），另一个城市规模比 CCS 小。我们有：
 - 在一次大型流行病之后， S 的密度构成了一个确定性的阈值，在阈值之上的话，另一场大流行就会到来。
 - 在大城镇中，麻疹依然会地区性地不时出现，所以只要有效 R_0 在某一瞬间超过 1 时，疫情就会马上爆发。这个阈值与适龄儿童的积累有关系，并且用季节性传染率来修正。
 - 小城市：在 epidemic 后 I 在局部消失，所以，另一个大流行只会在接收到 infective spark 的时候出现，通常来自于更大的城镇。



模型

- 作者给出了下面三个假设：
 - 大小城镇的空间镶嵌 (spatial mosaic) 对疾病的时滞有影响, 如果有一组小城镇在大城市周围, 那就会生成层次性的流行病行波。
 - 作为推论, 大城市的组合 (都在 CCS 之上), 就会生成高度同步的流行病。因为非线性相会锁住季节性增强的震荡子。
 - 最后, 弱耦合的/距离较远的中心应该有更强的倾向来进入相反的双年吸引子。



生物入侵

- Johnson, D., Liebhold, A., Tobin, P. et al. Allee effects and pulsed invasion by the gypsy moth. *Nature* 444, 361–363 (2006)
 - periodic pulsed invasions
 - how an interaction between strong Allee effects (negative population growth at low densities) and stratified diffusion (most individuals disperse locally, but a few seed new colonies by long-range movement) can explain the invasion pulses
 - Adult female gypsy moths are flightless, and ballooning of 1st instars usually occurs only over short distances. This leads to stratified diffusion.
 - Strong Allee effects can influence species ranges by prohibiting range expansion, termed ‘invasion pinning’.
- Impacts of preference and geography on epidemic spreading, Xin-Jian Xu, et. al. *Phys. Rev. E* 76, 056109 2007
- Epidemic thresholds in dynamic contact networks, J. R. Soc. Interface (2009) 6, 233–241, Erik Volz, and Lauren Ancel Meyers



问题归纳

- ① Allee Threshold 对于城市的意义：
 - 临界密切接触人口单元
- ② 移动性限制与疾病最优阈值



Allee 效应可以给疾病传播的一些概念一些启示

- 传统的流行病学模型，如 SIS、SIR 和 SEIR 模型中，交互强度的假设都依赖于人口密度。关停人流密集场所的效果相当于降低最大密度区域的人口密度。
- 这同时会带来新的高密度地区，如小区、等。



Allee 效应可以给疾病传播的一些概念一些启示

- 传统的流行病学模型，如 SIS、SIR 和 SEIR 模型中，交互强度的假设都依赖于人口密度。关停人流密集场所的效果相当于降低最大密度区域的人口密度。
- 这同时会带来新的高密度地区，如小区、等。
- critical community size (CCS)
 - Bartlett, M. (1960). The Critical Community Size for Measles in the United States. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General), 123(1), 37-44. doi:10.2307/2343186 PDF 链接
- 随着城市化的推进和高层建筑的增加，该概念可能是时候该重新定义了。



城市空间异质性的一种新解释：临界交互密度

本次抗疫过程中，群体层面主要的限制手段是限制个体出行。实际作用是减小了大部分人的活动半径。需要注意的是，该措施同时会使得局部交互有较大提升。本研究试图探究缩小活动尺度带来的非线性效应。

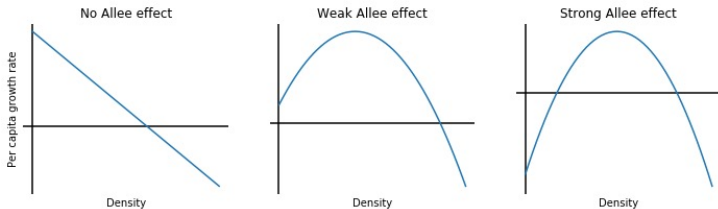
我们提出了一个基于复杂人口分布的 SIER 模型，该模型中，每个结点的人口数将不再固定，每个结点的状态将由总人口和患病人口比例两个量来决定。传播规律除了结点间传播之外，还有结点内的高速传播，以模拟小区传播的过程。

在人口的高度异质性假设下，本研究试图证明限制出行并不一定是最优解，而是在小区传播出现之前/患病比例比较低的时期的较优解。



城市空间异质性的一种新解释：临界交互密度

与 Allee 效应的联系



Model

我们首先抽象一下疾病在城市空间内交互的模式：

- 城市空间用 $L \times L$ 的方格表示，每个格子上的 residential 人口是一个常数 $a_{ij} = s_{ij} + i_{ij} + r_{ij}$ ，格子之间的交互用矩阵 $M_{L^2 \times L^2}$ 来表示（要求 $M_{kk} > \delta \sum_l M_{kl}$, δ 是一个大于 0 的常数）；
- 假设交互对每对人是同质的：任意两个人一次接触产生传染的概率都相等，为 μ ；
 - 作为两个地块 a, b ，产生疾病传播的期望数为 $\mu(s_a i_b + s_b i_a)$
- 每个患病个体恢复的时间都是 r_i
- (为了易于收敛，我们不妨假设恢复之后的个体都具有免疫力)。



Insight

- 由于有患病的因素存在，城市地块之间的交互是非对称的，有交配的性质；
- 人口密集处处于高危险状态的概率较高，如果有疫情，在人口密集处优先出现疫情的概率比较大。
- 局部链接本身很强 ($M_{kk} > \delta \sum_l M_{kl}$)，限制出行后会更强，同时会出现新的人口密集处。

量化模型：

$$\lambda_{n+1} = \beta_n S_n (I_n + \theta_n)^\alpha$$

- 其中， n 为时刻， β_n 是局部传染率， α 是混合率， θ_n 是（随机）接触率，假设是泊松分布 $\text{Poi}(m\bar{l}_n)$ 的， m 是空间耦合率， \bar{l}_n 是上一个时刻邻居们染病的数量。这样的话，疾病生灭过程就由下面的负二项分布刻画：

$$I_{n+1} \sim \text{NegBin}(\lambda_{n+1}, I_n).$$



Insight

- 这样非对称会出现时间上的不同步性，由于现代城市的发展，CCS (Critical Community Size) 可能会在城市内部出现。镶嵌结构可能会在城市内部出现。
- 高密度地块可能会长期留存病毒，并且容易产生新的爆发。
- 防疫时，除了切分地块，注意降低地块上人口密度亦是问题关键。



通勤模式对城市空间中疾病传播的影响

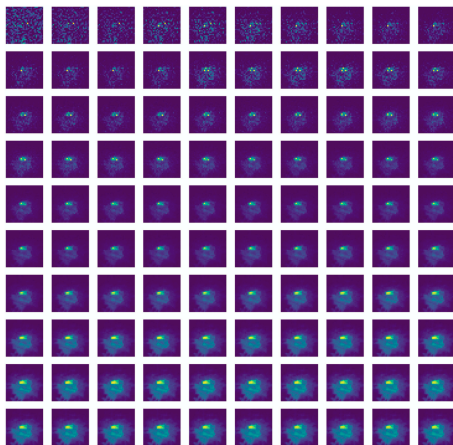


图: A simulation



展望



谢谢大家!

