

Ising模型与社会现象

摘要

前言

方法

Ising模型的简介

Ising模型的简单阐释

Ising模型与社会现象

种族隔离

舆论场

结果与讨论

物理学的社会意义

岳鑫事件的思考

参考文献

Ising模型与社会现象

修格致 5.25

摘要

本文简述了Ising模型的概念、原理、求解方式，以及其对社会现象的阐释。笔者尝试用Ising模型的工具，用定性的方法解释舆论场的演化规律，并用之前学校里岳鑫事件作为例子加以叙述。提出了人群中减少被舆论导向控制的方法。这也是本文的创新之处。

前言

Ising模型最早是德国物理学家Lenz提出的理论模型。它用以解决铁磁体到顺磁体的转换问题，即磁铁在加热到一定临界温度（即居里温度， T_c ）以上会出现磁性消失的现象，而降温到临界温度下面又会表现出磁性。其构造方法将在本文第二章给出简介。Lenz的学生Ising在1925年给出了一维Ising模型的解，并说明了一维Ising模型不存在相变，并取得了Ising模型的命名权；而二维Ising模型的求解则是复杂得多的问题。Onsager在1944年给出了一个矩阵元方法的解法，解析地解决了无外磁场的二维Ising模型求解。并证明了相变的存在。随后杨振宁用雅可比椭圆函数理论的方法解决了存在外磁场的二维Ising模型的解析求解。三维以上的Ising模型现在并没有解析解。我们通常的处理方法是使用蒙特卡洛模拟以及平均场近似。但由于在二维情形中，平均场近似法的解显示，二维Ising模型不存在相变，即与精确解得到的结果不一样。所以平均场理论的解释性并不好。

Ising模型在统计物理上的意义，是解决了铁磁体到顺磁体的连续相变问题。在一个磁性体系中，如果局部的大部分微粒的磁性朝向都相同，那么整体上，系统也会有相同的磁性朝向；而局部的微粒磁性朝向很均匀的分配的话，那么整个系统就不会对外展现出磁性。而如果对这个系统加上一个外磁场，那么这个体系对外会展现这个外磁场的朝向。也就是，这个体系成为了顺磁体。这个问题与舆论场情况很像：在通常状况下，一个区域里的人的意见都是各有不同的。我们以英国的大选为例：将政治讯息当作选举体系中的能量，那么能量是如何在系统中分配的呢？这与Ising模型有着很多的相似之处：每个个体都受两种因素支配：与邻居的交流，和整个舆论场的影响。类比于Ising模型，我们可以问，

在舆论场的混乱程度达到什么程度的时候，一点点轻微的舆论动向就可以左右整个选举结果？

方法

本文使用的主要方法是Ising模型及其物理意义的社会解读。

Ising模型的简介

我们先以二维Ising模型为例子，给出一个简单的叙述。在二维欧氏空间的每一个横纵坐标都放置一个小磁针，它可能取两种状态，分别是向上和向下。我们忽略长程的关系，只考虑每个小磁针与最近邻小磁针的相互关系（在二维平面上，就是该小磁针与上、下、左、右四个结点的相互关系）。每一对相互关系会为系统贡献一份能量：如果两个小磁针的状态相同，那么会为系统贡献 $+J$ 的能量；如果两个小磁针的状态相反，则会为系统贡献 $-J$ 的能量。系统的总能量决定于系统内粒子的相互作用和外磁场对每个粒子的作用。即系统的Hamilton量为

$$H(\sigma) = -J \sum_{i,j}^n \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i \quad (1)$$

右边的第一项代表内部相互作用，第二项代表外磁场对系统的作用。它的求解是通过对配分函数 $Z(\beta)$ 的计算得到的。 $Z = \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{-H/kT} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-H/kT}$. 可见它是一个与温度有关的量。本文略去求解过程。最后的求解结果为 $T_c = \frac{2.269J}{k}$. 外磁场强度为0时，热容和平均磁矩都产生了相变，在相变点附近，磁矩还产生了幂律行为： $\mathcal{M}(T, 0) \sim (T_c - T)^{\frac{1}{8}}$.

Ising模型的另一个重要结果是关于关联函数的。我们用 r 来代表物理系统中两个粒子之间的距离， $g(r)$ 代表他们之间的关联函数，即 $g(i, j) = E(\sigma_i - \bar{\sigma}_i)(\sigma_j - \bar{\sigma}_j)$. 我们有结果，关联长度 $\xi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$. 可以看出，在温度接近于临界温度的时候，关联长度会趋近于无穷大。

Ising模型的简单阐释

统计力学不同于传统分析力学的地方，主要在于统计力学研究的对象涉及很多个主体。Ising模型中涉及了很多个粒子的相互作用。我们研究一个个粒子之间的关系的话，一定会觉得手足无措。而在这种情况下，将每个粒子看作随机变量，从而研究整个系统的统计性质就是更合适合理的办法。这在麦克斯韦、玻尔兹曼等人的努力下逐渐建立了一套对应的数学基础。他们通过能量、动量等量在系统中的分配规律，导出了一系列以理想气体为代表的系统的规律。比如著名的Maxwell分布，体现出来气体气压随着海拔高度变化的规律。而后统计物理学的发展则体现了人类高超的抽象能力。从分析角度来讲，统计方法的应用使得研究复杂系统成为了可能。从尺度角度来讲，人们发现了一系列临界现象和突变行为。这些行为使人们摆脱了传统物理学中，必须优先确认研究尺度的禁锢。人们通过统计力学的研究，发现了这些新问题，也给出了新解释。

Ising模型的相变现象，应该解释为，在外界干扰比较大（环境中温度、能量比较高）时，体系内部的自组织结构倾向于消失；而在环境比较稳定（温度比较低）的时候，即使是如此简单的构造，也会产生自组织结构，使得铁磁体内部产生定向磁矩。

Ising模型的假设中，有一点使得它格外特殊：它只假设了每个粒子与与它最近邻的粒子的关系，却在特定的条件下，导出了长程关联，从而影响了整个系统的性质。

Ising模型与社会现象

社会现象中，我们也能找到很多这种性质的系统。这些系统中，也存在着能量的分配，也存在着小组之间的交互，也找不到什么特征尺度，也存在着那么些个临界状态。本文试图举两个例子来阐述这种性质。这些模型都可以利用Ising模型来解释。我们将考察，人类社会的两种机制（结构、自组织的形成，与熵增过程）的对抗在社会自组织现象中的体现。

种族隔离

如果我们将一个白人看作向下的小磁针，黑人看作向上的小磁针，我们可以将城市住宅区的家庭成分分析用Ising模型表示出来。在一个绝大多数住户都是黑人的小区，往往不会有白人新住户想要住进这个小区；已有的白人住户可能会因为周围过多的黑人住户而选择搬家。我们试着对这种现象的显著性做一个解释。

什么会导致白人住户不搬家？如果他的工作地点离这个小区很近可能是一个原因。更一般的，如果整个城市的工作压力非常大，那么大家搬家的概率将会非常低，因为过大的搬迁成本会降低住户搬迁的动机。另一方面，如果整个城市的白人黑人隔阂很弱的话，大概也不会因为邻居住了太多不一样肤色的人而搬迁了。

上述的两个方面，都可以通过Ising模型的参数来解决：第一种情况相当于温度 T 比较高，也即每个粒子的随机（热）运动的倾向，相对于自组织形成的倾向，比较高。第二种情况则相当于体系的Hamilton量中的参数 J 比较小。对应的解的临界温度 $T_c = \frac{2.269J}{k}$ 就会降低，也就是说同样的情况下，高于临界温度就更为容易。

这些事件的解释都是容易的。因为种族隔离问题和Ising模型的假设差不多：基本粒子之间的短程关联、多种机制的共同作用、以及热力学系统的相对同质性。

舆论场

下面这个例子是针对近期北京大学校园里的“岳鑫事件”的思考。

在一个朋友的朋友圈中我得到了这些信息：

1. 该朋友的朋友圈中，有很多做学工的同学和老师，也有很多普通的同学和老师，基本代表了两个阵营的人；
2. 学工的老师都比较坚决的一直在维护学校的立场上，而同学们则受舆论影响比较大；
3. 整体来讲大家的立场比较摇摆，虽然口头上很锋利，但面对软文的时候基本还是会把文章中信息默认为真实正确再去评论；
4. 朋友圈是一个比较好的舆论搜集场所和“小世界”行为观测场所，由于其有界可视性和对公众号的无线传播性，它的物理性质与热力学系统非常相似。

朋友圈有一个很好的物理特性，即短程关联性。每个人只能看到自己的一个邻域内的信息。同时大多数人都会看到主流公众号的舆论引导。联系Ising模型的假设，这种舆论引导，实际上相当于一个“外磁场”。Ising模型中，如果环境温度 T 超过临界温度 T_c ，那么铁磁体将会变成顺磁体，即整体磁矩朝向与环境磁矩朝向相同。我们可以想象，在北京大学的这般舆论压力之下，对应的热运动强度参量很容易超过 T_c 。这会导致的结果便是，公众舆论导向会非常倾向于被环境影响。这与我们之前的观测是类似的。在岳鑫事件中，在被约谈、两次在GitHub上发文、出面解释的过程中，穿插着舆论导向的变化实际上是伴随着几篇公众号软文以及各大报社的社论的。校内舆论场瞬间吸收了这些意见并产生了反应。从对学校的愤慨，到对真实性的怀疑，到对岳鑫同学本人的更深层次了解而带来的反思，知道最后随着校庆活动而来的淡化，学校的舆论场实际上也经历了从升温到高于临界温度，到降温以致出现两种（学工派和岳鑫派）阵营的逐渐固定的形态。这实际上体现了“舆论场”这个物理空间的动态变化。

结果与讨论

物理学的社会意义

“我认为统计力学是理论物理中最完美的科目之一，因为它的基本假设是简单的，但它的应用却十分广泛。”

——《统计力学》李政道

物理学的研究目的是探求自然界的基本原理。这种基本原理是简单的，其数学表达形式也不一定复杂，但其应用的领域一定很广泛。包括人类社会的诸多系统，也应该理所当然地应用统计物理中的方法。

但是人类社会也是自然界的重要部分。借助于近百余年发展起来的热力学理论，人类已经成功解决了很多有关人口和城市生长的问题。我们有理由相信，在这个阶段，可能是物理学最深刻影响人类世界的时代。

岳鑫事件的思考

结合Ising模型，我们发现的不应该只是其对舆论场模型的解读，更应该发现它究竟说明了什么问题。

我们在这个事件中，都太容易受到影响了，每一篇软文出来，朋友圈的风向就会变一次。难道我们的逻辑就这么不坚固吗？如果真的是这样，我们可以通过什么办法来改变这个状况呢？

物理模型告诉我们，我们的朋友圈关系的全体，如果看成是广义的Ising模型（即每个人的关系实际上是拓扑的，在连接矩阵的意义上是一个Ising模型），那么我们知道，我们在一种条件下会被舆论控制，也就是 $T > T_c = \frac{2.268J}{k}$ 。那么，如何才能保有自己的逻辑思维不轻易受外磁场影响的？

答案是显然的，就是增高临界温度 T_c 。通过观察公式，我们发现这等价于增加参量 J 的值。这意味着，我们人与人之间的交互强度理应比现在更强。我们多与身边的人交流，不光会使得我们与之关系更为亲密，也会使我们每一个人更不容易被舆论场影响，从而保持自己的理性。

参考文献

《复杂性与临界现象》，Kim Christensen and Nicholas R Moloney

《科学也有为难时》，<https://www.guokr.com/post/792435/>