数学实验第六次实验报告

计 76　张翔　2017011568

2020 年 4 月 19 日

1　实验目的

1. 掌握用 MATLAB 优化工具箱和 LINGO 解线性/非线性规划的方法。
2. 练习建立实际问题的线性/非线性规划模型。

2　Ch8-P10 污水处理

2.1　问题分析与模型建立

首先，对于题目描述的情景，可以有下列近似和假设

- 工厂之间不存在其他任何排污源，且不考虑江水的自然蒸发、补充；
- 工厂 i 和居民点 i 的上游、下游等价，它们在地理位置上是两岸正对；
- 工厂在上下游交界处对污水的处理能够瞬间完成，且污水处理不改变污水体积，污水排出后与江水能够立即均匀混合。

基于上述简化，设共有 n 个如题目所述的工厂和居民点，第 i 个工厂上游江水流量为 I_i，下游流量 O_i，排污流量 P_i，上游、下游污水浓度分别为 u_i, d_i，而处理前后的排污浓度分别为 b_i, a_i。在每个工厂处，根据污水总量守恒关系有

$$I_i u_i + P_i a_i = O_i d_i$$

上下游、工厂排污处流量守恒，有

$$I_i = O_{i-1}$$

$$O_i = I_i + P_i$$

考虑江水的自净功能，设第 i 与第 $i+1$ 个工厂的江面之间自净系数为 k_i，则有

$$u_i = k_{i-1} d_{i-1}$$

特别地，对于工厂 1，初始江水流量 I_1 和污水浓度 u_1 是给定值。
设第 i 个工厂污水处理系数为 e_i，那么总污水处理费用为

$$z = \sum_{i=1}^{n} e_i P_i (b_i - a_i)$$

对于问题 (1)，设规定的污染浓度阈值为 ϵ，注意到由于江水的自净作用，每段江的上游水的污染浓度一定低于前段下游的污染浓度，因此只需要约束每个工厂下游的污染浓度即可

$$d_i \le \epsilon, \forall i \in [1, n], i \in \mathbb{Z}$$

对于问题 (2)，只约束上游的水污染浓度即可

$$I_i \leq \epsilon, \forall i \in [1, n], i \in \mathbb{Z}$$

注意到上面大部分变量是已知常数，问题可以转化为

$$\min_{a_i, \forall i} z, \; s.t. \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ 表示每个问题对应的约束条件。

2.2 算法设计

在题目中，$n = 3$ 时，问题简化为

$$\min_{a_i, \forall i} z = 5(\sum_{i=1}^{3}(b_i - a_i)), \; s.t. \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ 中通用约束为

$$0 \leq a_i \leq b_i, \; i = 1, 2, 3$$

对于问 (1)，约束 $\mathcal{C}$ 增加如下条件

$$d_1 = \frac{1000 \times 0.8 + 5a_1}{1005} \leq 1$$

$$d_2 = \frac{1005 \times 0.9 \times d_1 + 5a_2}{1010} \leq 1$$

$$d_3 = \frac{1010 \times 0.6 \times d_2 + 5a_3}{1015} \leq 1$$

对于问 (2)，只需要约束居民点上游的污染浓度，约束 $\mathcal{C}$ 中增加的条件改为

$$d_1 \times 0.9 \leq 1$$

$$d_2 \times 0.6 \leq 1$$

这里 d_1, d_2 的表达式与问 (1) 相同，不再赘述。显然，所有约束与目标函数均为线性，因此上述问题是线性规划模型，可以使用 LINGO 求解与分析。

2.3 LINGO 代码

第 (1) 问的求解代码如下：

```
MODEL:
TITLE Pollution;
SETS:
n/1..3/: b, d, a;
ENDSETS
DATA:
b = 100 60 50;
ENDDATA
[OBJ] min = 5 * @sum(n: b - a);
a(1) <= b(1);
a(2) <= b(2);
a(3) <= b(3);
```

```
d(1) = (1000 * 0.8 + 5 * a(1)) / 1005.0;
d(2) = (1005 * 0.9 * d(1) + 5 * a(2)) / 1010.0;
d(3) = (1010 * 0.6 * d(2) + 5 * a(3)) / 1015.0;
d(1) <= 1;
d(2) <= 1;
d(3) <= 1;
END
```

第 (2) 问的代码只需把 (1) 的后三个约束修改为下面的

```
d(1) * 0.9 <= 1;
d(2) * 0.6 <= 1;
```

2.4 计算结果与分析

(1) 限制江面所有地段水质时，求解得到目标函数最优为 489.5 万元，其中各变量值为

$$a_1 = 41.0, a_2 = 21.1, a_3 = 50.0$$

它们的 Reduced cost 均为 0，说明它们均为基变量。求解器迭代 1 次后即得到最终解。约束条件中，条件 $a_3 \le b_3$，$d_1 \le 1$，$d_2 \le 1$ 的松弛变量为 0，说明它们在取最优解时起作用。

(2) 只限制居民区上游水质时，求解得到目标函数最优为 183.33 万元，其中各变量值为

$$a_1 = 63.3, a_2 = 60.0, a_3 = 50.0$$

类似地，它们的 Reduced cost 均为 0，说明它们均为基变量。求解器迭代 0 次后即得到最终解。约束条件中，条件 $a_2 \le b_2$，$a_3 \le b_3$，$d_1 \times 0.9 \le 1$ 的松弛变量为 0，说明它们在取最优解时起作用。

另外，可以对上述问题进行敏感度分析，讨论单位浓度处理价格 e_iP_i 对结果的影响。对于题 (2)，LINGO 仅给出 $e_iP_i > 0$ 的要求，相当于在该种情况下，最优解的取值点与单位浓度处理价格无关；对于题 (1)，则要求 $e_1P_1 > 4.5, 0 < e_2P_2 < 5.56, e_3P_3 > 0$，说明此种情况下，如果工厂 1，2 的单位浓度处理价格发生变化，最终方案需要改变才能适应实际情况。

对比 (1)(2) 两问的情形，可以发现只考虑居民点上游水质时，总处理费用明显减少。这种方案充分受益于江水的自净机制，如果江水不存在自净能力，则二者的差距将减小。考虑极端情况，自净系数 $k = 1$，则限制居民点上游污水浓度等效于限制所有河段污水浓度，二者的差别将不复存在。

2.5 结论

限制所有河段水质时，最小花费 489.5 万元；只限制居民点上游水质时，最小花费为 183.33 万元。

3 Ch9-P4 液体混合

3.1 问题分析与模型建立

假设购买原料甲、乙、丙分别为 a, b, c 吨，甲、乙混合后的原料中分别有 x, y 吨用于生产 A、B，丙中分别有 u, v 吨用于生产 A、B。记甲乙混合后浓度为 k。

根据题意，可以建立下列约束关系

- 原料约束

$$0 \le a \le 500$$
$$0 \le b \le 500$$
$$0 \le c \le 500$$

- 原料、产品质量守恒

$$a + b = x + y,\ c = u + v$$

- 甲乙混合物浓度

$$k = \frac{0.03a + 0.01b}{a + b}$$

- 产品 A，B 最终含硫量约束

$$\frac{kx + 0.02u}{x + u} \le 0.025$$
$$\frac{ky + 0.02v}{y + v} \le 0.015$$

- 最大需求量约束

$$x + u \le 100,\ y + v \le 200$$

为了更好地安排生产，应使得总利润最大，即目标函数为

$$\max z = 9(x + u) + 15(y + v) - 6a - 16b - 10c$$

对于第 (2) 问，只需更新需求量条件为

$$x + u \le 600$$

对于 (3)，在前两问的基础上，更新目标函数为

$$\max z = 9(x + u) + 15(y + v) - 6a - 13b - 10c$$

求解上述问题即可得到需要的结果。

3.2 算法设计

注意到上述约束条件除了甲乙混合物浓度之外均是或者可以化为线性条件，如含硫量约束可以写成诸如

$$kx + 0.02u \le 0.025(x + u)$$

但由于甲乙混合物浓度这个等式约束的存在，无法将所有约束化成线性，因此这里只能用非线性规划的方法求解。上述问题可以使用 LINGO 进行求解，求解时需要开启全局最优解的选项。

3.3 LINGO 代码

第 (1) 问的代码如下

```
MODEL:
TITLE Production Decision;
max = 9*(x+u)+15*(y+v)-6*a-16*b-10*c;
a<=500;
b<=500;
c<=500;
```

```
a+b=x+y;
c=u+v;
k=(0.03*a+0.01*b)/(a+b);
(k*x+0.02*u)<=0.025*(x+u);
(k*y+0.02*v)<=0.015*(y+v);
x+u<=100;
y+v<=200;
```

第 (2) 问只需要修改需求量约束为

```
x+u<=600;
```

第 (2) 问只需要修改目标函数为

```
max = 9*(x+u)+15*(y+v)-6*a-13*b-10*c;
```

3.4 计算结果与分析

(1) 使用 LINGO 求解上述模型，显示模型种类为 NLP，说明确实为非线性规划问题。解得全局最优解为

$$x = 0,\ y = 100,\ u = 0,\ v = 100$$

$$a = 0,\ b = 100,\ c = 100,\ k = 0.01$$

最优目标函数值为 400.1，求解器迭代次数 2138。不等式约束中，除了 $x + u \leq 100$，其余的松弛变量均为 0，说明取最优解时它们是有效的。

(2) 全局最优解为

$$x = 300,\ y = 0,\ u = 300,\ v = 0$$

$$a = 300,\ b = 0,\ c = 300,\ k = 0.03$$

最优目标函数值为 600.1，求解器迭代次数 8132。不等式约束中，除了 $y + v \leq 200$，其余的松弛变量均为 0，说明取最优解时它们是有效的。

(3) 对于第 (1) 问的情况，全局最优解为

$$x = 0,\ y = 200,\ u = 0,\ v = 0$$

$$a = 50,\ b = 150,\ c = 0,\ k = 0.015$$

最优目标函数值为 750.0，求解器迭代次数 768。不等式约束中，除了 $x + u \leq 100$，其余的松弛变量均为 0，说明取最优解时它们是有效的。

对于第 (2) 问的情况，全局最优解为

$$x = 600,\ y = 0,\ u = 0,\ v = 0$$

$$a = 450,\ b = 150,\ c = 0,\ k = 0.025$$

最优目标函数值为 750.0，求解器迭代次数 9543。不等式约束中，除了 $y + v \leq 200$，其余的松弛变量均为 0，说明取最优解时它们是有效的。

可以看出，产品 A 的售价低于 B，更偏向于薄利多销类型，当市场需求量较小时，如第 (1) 问的情况，不生产 A 是更好的选择，但当需求增大时，如第 (2) 问的情况，生产它则能获取更高利润。对于三种原料来说，乙的含硫量最低，但进价最高，当它的进价降低时，使用更多的乙可能对利润更有帮助。不过，生产计划变化时的具体阈值需要结合数据进行推算。

3.5 结论

- 第 (1) 问：只采购 100 吨乙原料、100 吨丙原料，只用于生产 200 吨 B，可以获得最大利润为 40 万元；
- (2) 问条件下，只采购 300 吨甲、300 吨丙原料，混合后只生产 600 吨 A，可以获得最大利润为 60 万元；
- 乙原料的进价下降后，在第 (1) 问的条件下，只采购 50 吨甲、150 吨乙原料，只生产 200 吨 B，最大利润为 75 万元；在第 (2) 问的条件下，只采购 450 吨甲、150 吨乙原料，只生产 600 吨 A，最大利润为 75 万元。

4 Ch9-P8 股票投资

4.1 问题分析与模型建立

视总股权为 1 个单位，设三种股票 A，B，C 投资占比（或各自股权量）分别为 a, b, c，它们在 1955 年的年末年初价值比为 P_a, P_b, P_c。这个比值是随机变量，可以使用 1943-1954 的情况对它们的分布进行估计，得到期望和 (协) 方差等。1955 年期望的总收益比为

$$EP = aEP_a + bEP_b + cEP_c$$

使用方差表示投资的风险

$$DP = D(aP_a+bP_b+cP_c) = a^2DP_a+b^2DP_b+c^2DP_c+2abCov(P_a, P_b)+2acCov(P_a, P_c)+2bcCov(P_b, P_c)$$

题目中仅有投资收益率的约束，并不要求收益最大化，因此最好是在给定条件下最小化投资风险，因此模型可以建立下面的带约束的优化问题

$$\min DP$$

$$s.t.\ a+b+c=1$$

$$1.15 \leq EP$$

在第 (1) 问中，要求年收益率在 10%-100% 间，只需要改变约束为

$$1.1 \leq EP \leq 2$$

在第 (2) 问中，增加了无风险的投资方式 D，投资比例为 d，它的收益比为 P_d，$EP_d = 1.05$，由于无风险，$DP_d = 0$，上述模型变为

$$\min DP' = D(P + dP_d) = DP$$

$$s.t.\ a+b+c+d=1$$

$$1.15 \leq EP' = EP + dEP_d$$

在第 (3) 问中，由于交易费对于买入或卖出均存在，模型建立时将两种操作分开考虑会较为合适。因此设三种股票分别买入、卖出为 $x_i, y_i\,(i=a, b, c)$。视总股权为 1 个单位，设交易后的股权仍为 $a, , b, c$，考虑到交易费带来的损失，有

$$a+b+c+0.01\left(\sum_{i\in\{a, b, c\}} x_i + y_i\right) = 1$$

根据买入卖出关系有

$$a = 0.5 + x_a - y_a$$

$$b = 0.35 + x_b - y_b$$

$$c = 0.15 + x_c - y_c$$

将持股比例 a, b, c 带入上面的第一个模型求 $\min DP$ 即可。

4.2 算法设计

上述目标函数 DP 是二次型，而约束均为线性，可以使用二次规划的方法求解。对于求最优值的部分，使用 LINGO 可以进行求解，而第 (1) 问中求变化范围则使用 Matlab 求解作图比较方便。

4.3 代码

最优投资的代码

```
MODEL:
TITLE Stock Investment;
[OBJ]min=0.01081 * a * a + 0.058392 * b * b +
0.094227 * c * c + 2 * 0.012407 * a * b +
2 * 0.013075 * a * c + 2 * 0.055426 * b * c;
[SUM] a + b + c = 1;
[PROFIT] 1.08908 * a + 1.21367 * b + 1.23458 * c >= 1.15;
```

第 (1) 问收益率与投资组合、风险关系的 Matlab 代码

```
%% input data
data = [1.3000    1.2250    1.1490
        1.1030    1.2900    1.2600
        1.2160    1.2160    1.4190
        0.9540    0.7280    0.9220
        0.9290    1.1440    1.1690
        1.0560    1.1070    0.9650
        1.0380    1.3210    1.1330
        1.0890    1.3050    1.7320
        1.0900    1.1950    1.0210
        1.0830    1.3900    1.1310
        1.0350    0.9280    1.0060
        1.1760    1.7150    1.9080];

%% quadratic programming
H = 2 * cov(data);
A = -mean(data);
Aeq = ones(1, 3);
Beq = 1;

x_result = [];
d_result = [];
```

```

interval = 0.01;
st = 0.1;
ed = 0.24;

for b=1+st:interval:1+ed
    b_prime = -b;
    x = quadprog(H, zeros(1, 3), A, b_prime, Aeq, Beq, zeros(1,3), ones
        (1,3));
    x_result = [x_result x];
    d = 0.5 * x' * H * x;
    d_result = [d_result d];
end

%% plot
rates = st:interval:ed;
figure(),plot(rates, x_result),
xlabel('Interest Rate'),ylabel('Invest Proportion'),grid on,
set(gca,'ytick', (0:0.1:1.5)),
legend('A','B','C');

figure(),plot(rates, d_result),grid on,
xlabel('Interest Rate'),ylabel('Risk (Variance of Profit)');
```

第 (2) 问加入无风险投资的代码

```
MODEL:
TITLE Stock Investment;
[OBJ]min=0.01081 * a * a + 0.058392 * b * b +
0.094227 * c * c + 2 * 0.012407 * a * b +
2 * 0.013075 * a * c + 2 * 0.055426 * b * c;
[SUM] a + b + c + d = 1;
[PROFIT] 1.08908 * a + 1.21367 * b + 1.23458 * c + 1.05 * d >= 1.15;
```

第 (3) 问加入换手操作的代码

```
MODEL:
TITLE Stock Investment;
[OBJ]min=0.01081 * a * a + 0.058392 * b * b +
0.094227 * c * c + 2 * 0.012407 * a * b +
2 * 0.013075 * a * c + 2 * 0.055426 * b * c;
[SUM] a + b + c + 0.01 * (x_a + x_b + x_c + y_a + y_b + y_c) = 1;
[PROFIT] 1.08908 * a + 1.21367 * b + 1.23458 * c >= 1.15;
0.5 + x_a - y_a = a;
0.35 + x_b - y_b = b;
0.15 + x_c - y_c = c;
```

4.4 计算结果与分析

题给数据的期望为

$$\begin{bmatrix} 1.0891 & 1.2137 & 1.2346 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵为

$$Cov = \begin{bmatrix} 0.0108 & 0.0124 & 0.0131 \\ 0.0124 & 0.0584 & 0.0554 \\ 0.0131 & 0.0554 & 0.0942 \end{bmatrix}$$

使用上述结果，要求年收益率不低于 15% 时，使用 LINGO 计算，得到如下结果

$$a = 0.530, b = 0.357, c = 0.113$$

最小风险为 0.0224。LINGO 显示使用的模型为 QP，符合理论，求解器迭代 10 次得到最优解。

注意本例求解出的风险值比单独购买股票 B(0.0584) 或 C(0.0942) 要低很多，这两只股票虽然平均收益率比 A 高得多，但风险也随之增加。说明通过合理组合投资，可以在博取更高收益的同时尽量降低风险。

第 (1) 问 值得注意的是，无论如何组合投资，总期望收益率不可能超过所有股票中的最高期望收益率，因此实际上期望收益率变动范围比题目要小，为 $10\% - 23.5\%$，而题目中的收益率 100% 显然也是违背常理的。使用 Matlab 作图可以得到利润率 10%-23.5% 变化时的投资组合的变化趋势，如图

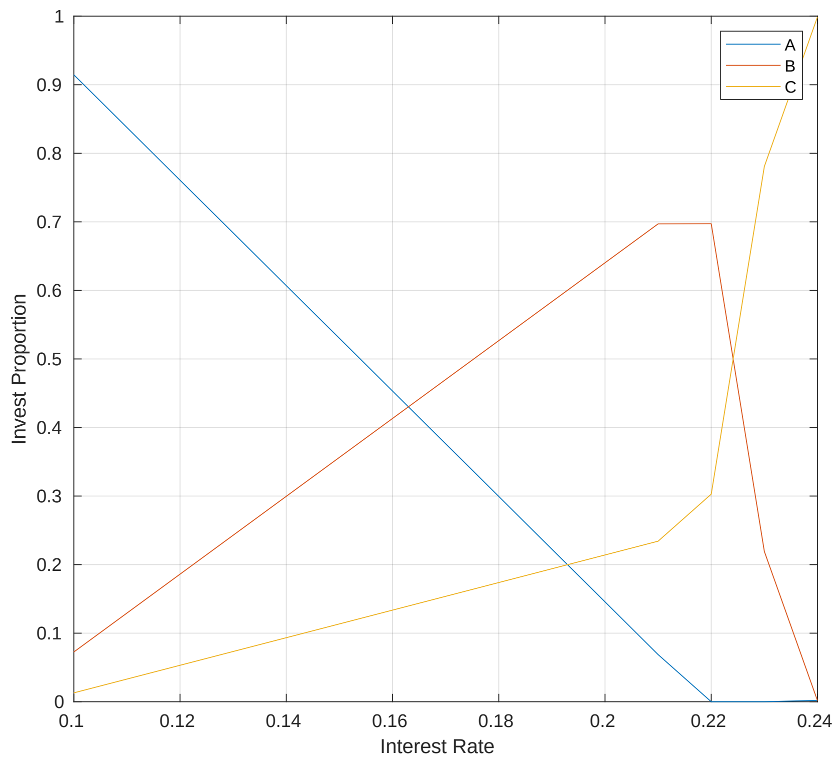

图 1: 收益率变化时的投资组合变化趋势

而投资风险的变化趋势为

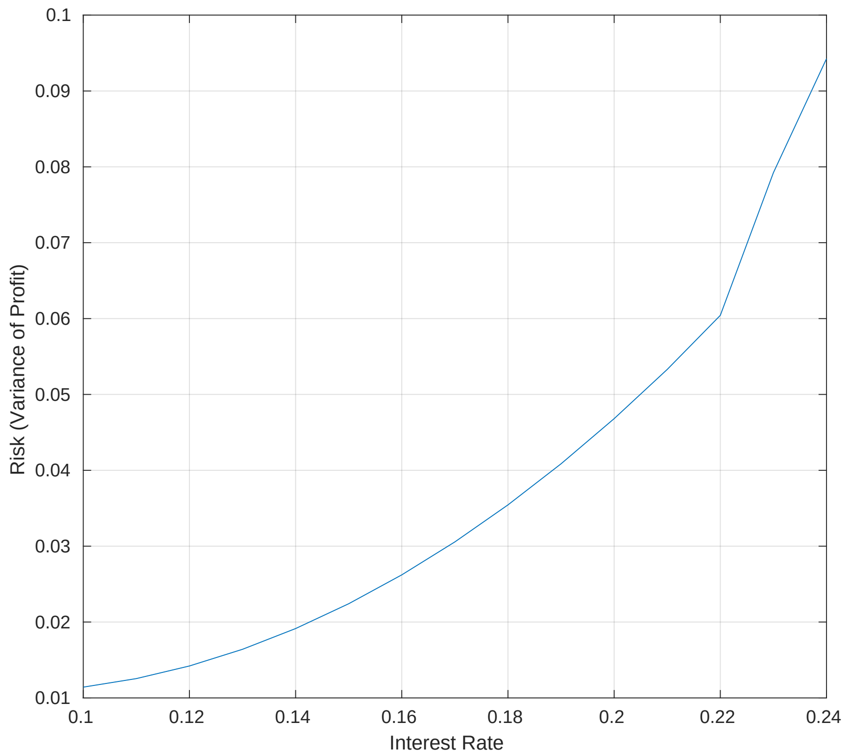

图 2: 收益率变化时的投资风险变化趋势

同过图 (1) 可知，随着要求的期望年收益率不断上升，对于期望收益较低的股票 A 应减少购买，同时对于 B，C 的购买逐步增加。当期望收益约为 22% 时完全不购买 A，购买 B 的量开始下降。随着总期望收益向 C 的期望收益靠近，投资更趋于只购买 C。

由 (2) 可知，收益率 22% 为一个明显的转折点，在此之前风险增长较缓慢，之后则大幅上升，这与上面的投资分配情况是相应的。在 22% 点处，购买股票 A 的量为 0，只购买风险更大的 B、C，使得投资风险剧增。这与日常生活经验相符，期望收益越大，风险越大。对于较为保守的投资者来说，期望收益率不能超过 22%，从而尽量控制风险。

第 (2) 问 增加无风险的国库券投资方式后，使用 LINGO 求解得到如下的结果

$$a = 0.087,\ b = 0.429,\ c = 0.143,\ d = 0.341$$

最小风险为 0.0208。相同的期望收益率下，此时的风险相比只购买股票的情况变小了。

第 (3) 问

$$a = 0.526,\ b = 0.350,\ c = 0.123$$

$$x_a = 0.0265,\ x_b = x_c = y_a = y_b = 0,\ y_c = 0.0270$$

最小风险为 0.0226。可以看出这里的解与前面得到的 15% 期望收益率得到的结果接近，但这里对 C 的持仓略多一些。这里得到的 a, b, c 均是相对于操作前的投资总额来说的，如果要求操作后三种股票的持仓比例，对三者进行规格化后，得到相对持仓比例为 52.65%, 35.04%, 12.31%。

4.5 结论

1. 当期望收益率 15% 时，投资股票 A、B、C 的比例分别为 53.0%, , 35.7%, 11.3% 能最小化风险；

2. 当期望收益率在 10%-100% 变化时，投资变化趋势如图 (1) 所示。如果投资为保守型，应控制收益率在 22% 以内；
3. 如果存在无风险投资，应投资 A、B、C 以及无风险投资的比例分别为 8.7%, 42.9%, 14.3%, 34.1%;
4. 初始持仓为 50%, 35%, 15% 时, 如果需要进行换手操作, 应买入 A 股票 2.65%, 卖出 C 股票 2.70%（相对于原来的总投资额）。操作后，三只股票的相对持仓比例为 52.65%, 35.04%, 12.31%。

通过上述计算可以得出结论，投资的风险随着收益的增加而增加，因此投资时需要谨慎考虑，结合历史数据，使用数学模型进行分析，从而得出最好的投资方案，最大化收益的同时减小风险。

5 收获与建议

通过本次实验，我对使用 LINGO 和 Matlab 软件解决线性规划、非线性规划有了更深刻的理解。希望能够提供更多实例供我们练习，从而对于该部分算法在实际生活中的作用有更多的认识。