数学实验第一次实验报告

计 76　张翔　2017011568

2020 年 2 月 29 日

1　实验目的

- 掌握用 MATLAB 计算拉格朗日、分段线性、三次样条三种插值的方法，改变节点的数目，对三种插值结果进行初步分析。
- 掌握用 MATLAB 及梯形公式、辛普森公式计算数值积分。
- 通过实例学习用插值和数值积分解决实际问题。

2　计算题

2.1　Ch3-P5 数值积分方法计算 π

2.1.1　算法设计

该问题可以转化为使用数值积分方法计算如下积分

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$$

可使用梯形、辛普森和 Gauss-Lobatto 三种方法来计算。

2.1.2　程序

```
step = 50;
tol = 1e-6; % tolerance
while 1
    x = 0:1/step:1;
    y = 4 * sqrt(1 - x.^2);
    % trapzoid method
    ans1 = trapz(x, y);
    if(abs(ans1 - pi) > 10 * tol)
        step = step * 10;
    else
        fprintf("Current steps: %d\n", step);
        ans_simp = simpson(x, y);
        break;
    end
end
```

```
fprintf("%.8f\n", ans1);
fprintf("%.8f\n", ans_simp);

% simpson method
ans2 = quad('4*sqrt(1 - x.^2)', 0, 1, tol);
fprintf("%.8f\n", ans2);

% gauss-lobatto method
ans3 = quadl('4*sqrt(1 - x.^2)', 0, 1, tol);
fprintf("%.8f\n", ans3);
```

其中等距点 Simpson 求积分的函数如下

```
function y = simpson(X, Y)
% simpson: Calc the numerical integral via Simpson method
% Input X, Y are discrete points where len(X), len(Y) are odd
% X points are evenly distributed
if length(X) ~= length(Y) || length(X) < 2 || mod(length(X), 2) ~= 1
    fprintf(1, "Invalid array length\n");
    y = NaN;
    return;
end
m = (length(X) - 1) / 2;
h = (max(X) - min(X)) / (2 * m);
y = Y(1) + Y(2 * m + 1) + 4 * Y(2);
for i = 1 : (m - 1)
    y = y + 4 * Y(2 * i + 2) + 2 * Y(2 * i + 1);
end
y = y * h /3;

end
```

2.1.3 计算结果

计算时，我设置结果误差小于 10^{-5}。为了对比梯形积分与 Simpson 积分对于相同数据点情况下的积分结果，我还编写了一个等距点 Simpson 积分的函数（见上面的代码），结果如下

积分方法	Trapzoid	Simpson	Matlab Simpson(quad)	Matlab Gauss-Lobatto(quadl)
结果	3.14158933	3.14159135	3.14158753	3.14159244
误差	0.00000333	0.00000130	0.00000512	0.00000021

2.2 结果分析

从结果可以看出，将区间 [0, 1] 等分为 5000 个小区间后，使用梯形积分与 Simpson 积分均能得到和 Matlab 自带的自适应 Simpson 和 Gauss-Lobatto 类似的结果。当数据点相同时，使用 Simpson 积分能有更小的误差，而 Matlab 的自适应 Gauss-Lobatto 计算结果的误差最小。

2.3 结论

误差在 10^{-5} 以内时，使用上述方法得到 π 为 3.14159。

2.4 Ch3-P10 机翼断面

2.4.1 算法设计

该题给点稀疏，而加工时需要 x 坐标间隔为 0.1 的点，因此需要使用插值方法对数据进行加密。所给机翼分为上轮廓线与下轮廓线，可以对它们分别进行插值，即对 y_1 和 y_2 分别插值，这里使用了 Lagrange 插值、分段线性插值和三次样条插值，并对不同结果进行对比。

机翼断面的面积可以用下面的式子表示

$$S = \int_{y=y_1(x)} dx - \int_{y=y_2(x)} dx$$

插值完成后，得到了加密的 y_1, y_2 点值，可以使用 Matlab 自带的 `trapz` 函数，利用梯形积分来估算机翼断面的面积，也可以使用上一题中编写的等距 Simpson 积分函数来估算。

2.4.2 程序

```matlab
% Ch3 P10

% Original data
x = [0, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15];
y1 = [0, 1.8, 2.2, 2.7, 3.0, 3.1, 2.9, 2.5, 2.0, 1.6];
y2 = [0, 1.2, 1.7, 2.0, 2.1, 2.0, 1.8, 1.2, 1.0, 1.6];

x_interp = 0:0.1:15;
% lagrange interpolation
y1_interp_lgr = lagrange(x, y1, x_interp);
y2_interp_lgr = lagrange(x, y2, x_interp);

% linear interpolation
y1_interp_linear = interp1(x, y1, x_interp);
y2_interp_linear = interp1(x, y2, x_interp);

% spline interpolation
y1_interp_spline = interp1(x, y1, x_interp, 'spline');
y2_interp_spline = interp1(x, y2, x_interp, 'spline');

figure;
hold on;
scatter(x, y1, 'r');
scatter(x, y2, 'r');
plot(x_interp, y1_interp_lgr, 'b-');
plot(x_interp, y2_interp_lgr, 'b-');

```

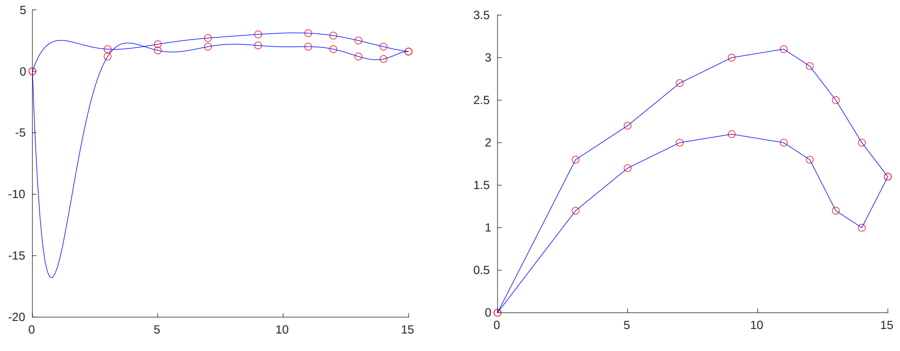
```
figure;
hold on;
scatter(x, y1, 'r');
scatter(x, y2, 'r');
plot(x_interp, y1_interp_linear, 'b-');
plot(x_interp, y2_interp_linear, 'b-');

figure;
hold on;
scatter(x, y1, 'r');
scatter(x, y2, 'r');
plot(x_interp, y1_interp_spline, 'b-');
plot(x_interp, y2_interp_spline, 'b-');

% calc area
area_lgr = trapz(x_interp, y1_interp_lgr) - trapz(x_interp, y2_interp_lgr);
area_linear = trapz(x_interp, y1_interp_linear) - trapz(x_interp, y2_interp_linear);
area_spline = trapz(x_interp, y1_interp_spline) - trapz(x_interp, y2_interp_spline);

% calc area by simpson
area_lgr_sp = simpson(x_interp, y1_interp_lgr) - simpson(x_interp, y2_interp_lgr);
area_linear_sp = simpson(x_interp, y1_interp_linear) - simpson(x_interp, y2_interp_linear);
area_spline_sp = simpson(x_interp, y1_interp_spline) - simpson(x_interp, y2_interp_spline);
```

2.4.3 计算结果



(a) Lagrange

(b) Linear

图 1: 插值结果

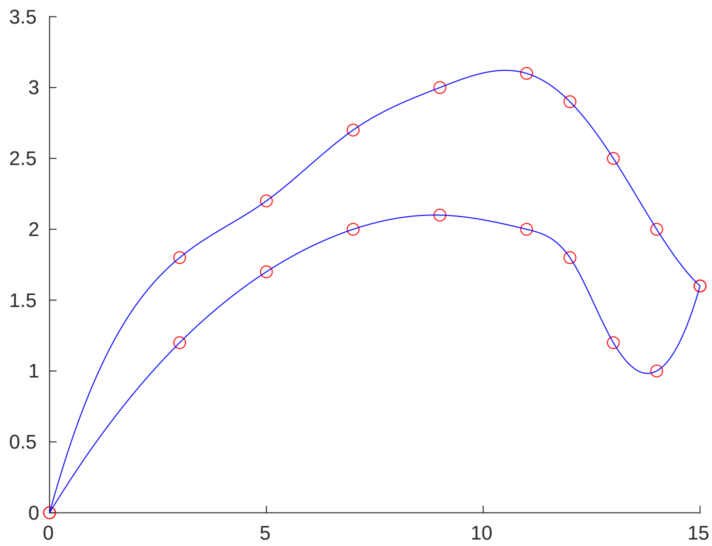


图 2: 插值结果 (续) Spline

表 1: 三种插值方法得到的数据点示例 (第一行为 x，后三行为 y_1)

Interpolation Method	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	...	14.4	14.5	14.6	14.7	14.8	14.9	15
Lagrange	0	0.55	1.01	1.39	1.70	1.95	2.14	...	1.81	1.77	1.73	1.70	1.66	1.63	1.60
Linear	0	0.06	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	...	1.84	1.80	1.76	1.72	1.68	1.64	1.60
Spline	0	0.11	0.21	0.31	0.41	0.50	0.59	...	1.82	1.77	1.73	1.70	1.66	1.63	1.60

表 2: 两种积分方法计算三种方式插值的机翼断面面积

Interpolation Method	Area by Trapzoid	Area by Simpson
Lagrange	40.30	40.36
Linear	10.75	10.75
Spline	11.34	11.35

2.4.4 结果分析

由上述图表可以看出，使用 Lagrange 插值时出现了“龙格现象”，震荡严重，尤其是在 $x \in [0, 0.5]$ 上，y_2 值出现了极大偏差，使得结果曲线完全无法被实际加工所采用。采用分段线性插值和三次样条插值的结果均能展现出机翼的大致形状，但线性插值的结果不够光滑，可能影响机翼性能，因此实际生产时最好采用三次样条插值的结果。

对于面积计算的结果，两种积分方法相差不大，Simpson 方法比梯形方法略为准确一点。

2.4.5 结论

实际加工时所采用的曲线应使用三次样条插值得到的结果，其面积为 11.35。

3 应用题

3.1 Ch3-P12 车流量估算

3.1.1 问题分析

题目要求估计一天内的车流量，但只给出了采样点处一分钟内的车流量，需要设法求处非采样点处的车流量。

3.1.2 模型假设与建立

题目中的车流量可抽象为关于时刻 t（以分钟为单位）的函数 $f(t)$，它表示 $[t, t+1)$ 内的车流量。对 $f(t)$ 主要有两个约束:

连续 $f \in C\,[0, +\infty)$

非负 $\forall t \in [0, +\infty), f(t) \geq 0$

那么目标就是求解

$$\int_0^{1439} f(t)dt$$

3.1.3 算法设计

由于我们仅知道题目采样时刻的车流量情况，如果认为单位时间车流量随时间变化均匀 ($f(t)$ 分段线性)，就可以直接对所给数据点积分；如果认为车流量随时间变化平滑 ($\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \in C\,[0, +\infty)$)，则可以使用三次样条插值，插值完成后，使用 Matlab 的 `trapz` 函数，就可以计算出 $f(t)$ 的数值积分。

3.1.4 程序

```
% data
x = [0 2 4 5 6 7 8 9 10.5 11.5 12.5 14 16 17 18 19 20 21 22 23 24] * 60;
y = [2 2 0 2 5 8 25 12 5 10 12 7 9 28 22 10 9 11 8 9 3] * 60;

% linear approach

tot_linear = trapz(x, y);

% spline approach
x_interp = 0:(24 * 60);
y_interp = interp1(x, y, x_interp, 'spline');
y_interp = max(y_interp, 0); % eradicate negative vals

tot_spline = trapz(x_interp, y_interp);

figure;
xlabel('Time/min');
ylabel('#Cars');
hold on;
```

```
plot(x, y, '-', 'DisplayName', 'Linear');
plot(x_interp, y_interp, '-.', 'DisplayName', 'Spline');
legend('show','Location','NorthWest');
```

3.1.5 计算结果

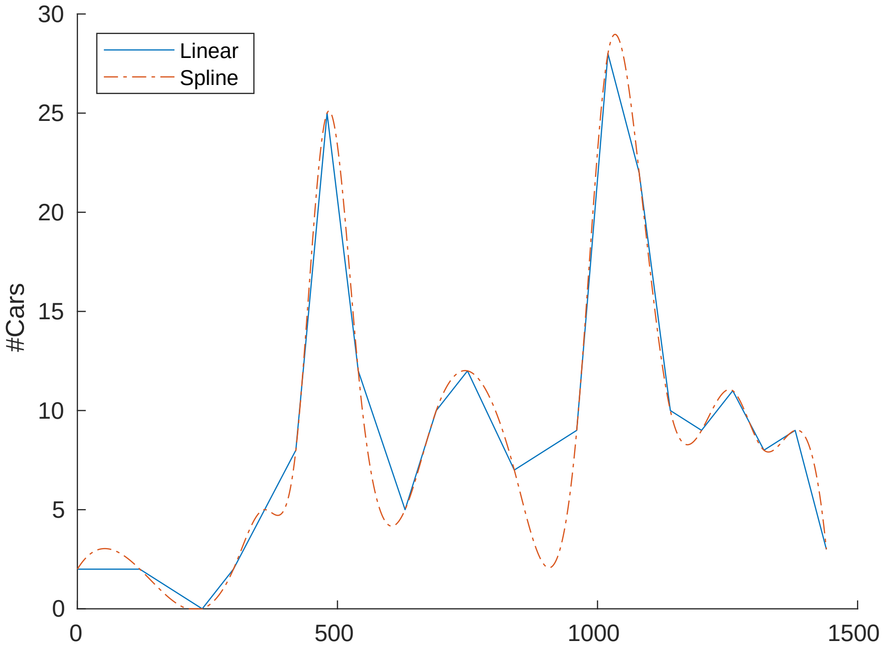


图 3: 线性/三次样条插值得到的单位时间车流量

梯形积分得到的结果为 12990（线性），12670（样条）。

3.2 结果分析

对比上述结果，可以看到车流量在一天内的变化情况，它是符合生活经验的（如 500 附近的早高峰与 1000 附近的晚高峰）。大部分数据点处线性插值与三次样条插值比较接近，但在 $t = 900$（15 时）处三次样条插值出现了比较明显的低谷。由于题目所给的取样点较少，我们对该时刻的情况难以推测，考虑到误差等因素，得到最终结果大致为 $1.27 \sim 1.30$ 万辆。

3.3 结论

一天通过桥梁的车流量约为 $1.27 \sim 1.30$ 万辆。

4 收获与建议

收获：通过这次实验，我熟练掌握了 Matlab 中常用的插值与数值积分函数，也通过编程，对诸如 Lagrange 插值、Simpson 积分法等知识有了更深刻的理解。

建议：课本上介绍的 `quad` 或 `quadl` 函数在新版 Matlab 中已经被标记为 deprecated，推荐使用 `integral` 函数计算数值积分。从 Matlab 手册的介绍可知 `integral` 函数使用的是 Global Adaptive Quadrature 的积分方法，希望老师能够加以介绍。