数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2019 年 4 月 7 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.
参考：教材二第3章。
拓展：教材四第2章。(拓展材料除了讲义中包含的内容之外，不属于作业、考试范围。)

4 微分方程选讲：变分原理简介

For since the fabric of the universe is most perfect, and is the work of a most wise Creator, nothing whatsoever takes place in the universe in which some relation of maximum and minimum does not appear.

——Leonhard Euler

皮埃尔·德·费马（Pierre de Fermat）于1662年发表了费马原理。这原理阐明：光传播的正确路径，所需的时间必定是极值。这原理在物理学界造成了很大的震撼。不同于牛顿运动定律的机械性，现今，一个物理系统的运动拥有了展望与目标。

1744年，皮埃尔·莫佩尔蒂发表了最小作用量原理：光选择的传播路径，作用量最小。他定义作用量为移动速度与移动距离的乘积。用这原理，他证明了费马原理：光传播的正确路径，所需的时间是极值；他也计算出光在反射与同介质传播时的正确路径。莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）在同年发表了一篇论文，表明物体的运动遵守某种物理量极值定律。

微分方程时常被用来表述物理定律。微分方程指定出，随着极小的时间、位置、或其他变数的变化，一个物理变数如何改变。总合这些极小的改变，再加上这物理变数在某些点的已知数值或已知导数值，就能求得物理变数在任何点的数值。

4.1 引言：微积分中的极值问题和泛函

我们回忆一下微积分中的极值问题，对于光滑的目标函数 $f(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$，它在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}*$ 取到极值点，则存在一个 $\boldsymbol{x}*$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}^*)$，使得

$$f(\boldsymbol{x})\le(\ge)f(\boldsymbol{x}^*),\quad \forall \boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}^*).$$

它的必要条件是，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}*)=\mathbf{0}. \tag{4.1}$$

而充分性则需要考虑目标函数的高阶导数等其他条件。

那么，如果自变量是一个函数呢？或者说，目标仍然是一个标量，而我们需要在一个元素为函数的集合中挑选出一些特殊的函数，使得目标达到极值呢？为了做这个推广，我们首先引入 **泛函**

的概念。简单的说，泛函就是把函数映成标量的映射。一些泛函是以积分的形式给出的。例如，对于任意一个给定的函数 $y(x)$，$0 \le x \le 1$，曲线下面面积和曲线的弧长，

$$A(y) = \int_0^1 y(x)dx, \quad S(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

我们主要考虑如下形式的泛函，它是一个函数及其导数的定积分，

$$J(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots)dx. \tag{4.2}$$

这里，被积函数称为拉格朗日量（named after Joseph Lagrange (1736–1813)）。

现在，考虑目标泛函的极小化问题：泛函 $J(y)$ 对于函数 $y_*(x)$ 取极小值，如果对于 $\varepsilon \to 0$ 和所有“可容许的”扰动函数 $h(x)$，总有

$$J(y_*(x)) \le J(y_*(x) + \varepsilon h(x)).$$

这里，$h(x)$ 仍是未指明的用来刻画最优解 $y_*(x)$ 的在函数空间中的邻域。

4.2 波动现象

4.2.1 欧拉-拉格朗日方程（Euler-Lagrange equation）

哈密顿变分原理或最小作用量原理（*least action principle*）：一个力学系统中，设动能为$T(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})$，势能为$U(t,\boldsymbol{q})$，质点在 t_1 时刻始于 $\boldsymbol{q}_1$，在 t_2 时刻止于 $\boldsymbol{q}_2$，则运动轨迹取作用量积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{v}(t))dt$$

的极值。其中，（在常见的经典系统里面）$L(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) = T - U$ 为系统的拉格朗日量（Lagrangian function）。这里，t表示时间，$\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_s)$ 表示系统指点的坐标，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}} := d\boldsymbol{q}/dt$表示速度。

注意，运动轨迹是S的极值和经典系统里面$L(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) = T - U$是两个模型假设，我们不需要了解原因。但是我们接下来会做一些数学演算，之后大家会发现这背后的数学思想其实是一个全体到局部的过程（或者说积分到微分的过程）。

为了求作用量 S 的极值，我们学习一下泛函导数 (functional derivative) 的基本知识：

考虑一个元素为函数 ρ 的空间 M （也就是说空间的每一个元素是一个函数，我们不妨假设 $\boldsymbol{\rho}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s$）, 和定义在上面的泛函

$$J: \quad M \to \mathbb{R} \quad \text{or} \quad \mathbb{C}.$$

需要提醒大家的是，我们不讨论一般泛函的定义，虽然泛函可以很抽象，但是在很多具体的问题中，泛函其实就是一个函数在某一点的赋值，一个函数的积分，或者函数的函数的积分。

$J(\rho)$ 的泛函导数，表示为 $\delta J/\delta\rho$，是如下定义的

$$\int_a^b \frac{\delta J}{\delta \boldsymbol{\rho}}(x) \cdot \boldsymbol{h}(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J[\boldsymbol{\rho} + \varepsilon \boldsymbol{h}] - J[\boldsymbol{\rho}]}{\varepsilon} = \left[\frac{d}{d\varepsilon} J[\boldsymbol{\rho} + \varepsilon \boldsymbol{h}]\right]_{\varepsilon=0},$$

这里，我们取 $\boldsymbol{h}(x) \in \mathbb{R}^s$ 是在端点为 0 的任意函数（对应了在最小作用量原理中，初态和终态中位置的确定），而 $\varepsilon\boldsymbol{h}$ 称为 $\boldsymbol{\rho}$ 的变分。在形式演算中，我们可以通过泰勒展开来求泛函导数。

注意到 $S=\int_{t_1}^{t_2} L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})dt$，那么

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\delta S}{\delta q}(t)\cdot h(t)dt &= \left[\frac{d}{d\varepsilon}S[\boldsymbol{q}+\varepsilon\boldsymbol{h}]\right]_{\varepsilon=0}\\ &= \left[\frac{d}{d\varepsilon}\int L(t,\boldsymbol{q}+\varepsilon\boldsymbol{h},\dot{\boldsymbol{q}}+\varepsilon\dot{\boldsymbol{h}})dt\right]_{\varepsilon=0}\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{h}+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\dot{\boldsymbol{h}}\right)dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{h}-\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right)_t\cdot\boldsymbol{h}\right)dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}-\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right)_t\right)\cdot\boldsymbol{h}dt.\end{aligned}$$

这里，分部积分的边界项消失了，因为 h 在边界处为0。最终，我们通过最小作用量原理和变分函数的任意性（Fundamental Lemma of the Calculus of Variations），推导出了著名的 Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right)=0.$$

注意，这里 $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^s$ 是 t 的一元向量值函数。

如果自变量也是多维的，我们也可以类似的推导 Euler-Lagrange 方程。基于之前的假设，如果把 $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^s$ 改为是 $x=(x_1,\cdots,x_d)$ 的函数，即 $\boldsymbol{q}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^s$，那么对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}-\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_{x_j}}\right)=0.$$

注意，这里的 $\boldsymbol{q}_{x_j}=\partial\boldsymbol{q}/\partial x_j$.

我们先看两个泛函导数相关的例子：

Example 1 考虑连接 $(0,0)$ $(1,b)$ 两点的最短路径。令 $y(x), 0\le x\le 1$ 满足

$$y(0)=0,\quad y(1)=b.$$

我们考虑弧长

$$J(y)=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx$$

的极值。我们求变分易得

$$\int_0^1\frac{\delta J}{\delta y}hdx=\int_0^1-\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)'hdx.$$

令 $\frac{\delta J}{\delta y}=0$，我们得到 y' 恒等于一个常数。最后，由边界条件，我们得到，连接 $(0,0)$ $(1,b)$ 两点的最短路径是 $y=bx$ 上的线段。

Example 2. For the classical part of the electron-electron interaction, Thomas and Fermi employed the Coulomb potential energy functional

$$J[\rho]=\frac{1}{2}\int\int\frac{\rho(r)\rho(r')}{|r-r'|}drdr'.$$

From the definition of the functional derivative,

$$\begin{aligned}\int \frac{\delta J}{\delta \rho}\phi dr &= \left[\frac{d}{d\varepsilon}J[\rho+\varepsilon h]\right]_{\varepsilon=0}\\ &= \left[\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}\int\int \frac{(\rho(r)+\varepsilon h(r))(\rho(r')+\varepsilon h(r'))}{|r-r'|}drdr'\right]_{\varepsilon=0}\\ &= \frac{1}{2}\int\int \frac{h(r)\rho(r')}{|r-r'|}drdr' + \frac{1}{2}\int\int \frac{\rho(r)h(r')}{|r-r'|}drdr'\\ &= \int\left(\int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}dr'\right)h(r)dr.\end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{\delta J}{\delta \rho} = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}dr'.$$

4.2.2 绳索的微小振动

考虑在时间t距离平衡位置x的位移$u=u(x,t)$的微分方程。这里，$x\in\mathbb{R}$。我们仅考虑微小振动，$u(x,t)$及其导数的高阶项将被忽略 。

令$\rho(x)$表示绳索的线密度，在时间t在位置x的动能密度为

$$T=\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2.$$

微积分我们知道绳索微元长度 $ds=\sqrt{1+u_x^2}dx$, 所以形变长度为

$$ds-dx=(\sqrt{1+u_x^2}-1)dx\approx \frac{1}{2}u_x^2dx.$$

所以（with some elasticity theory）势能密度的表达式是

$$U=\frac{1}{2}\mu u_x^2,$$

这里μ是弹性系数。势能模型的建立需要更多的物理知识，所以我们只是把它当作一个模型假设。

绳索的作用积分为

$$S=\int Ldtdx=\int(T-U)dtdx=\int\left(\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2-\frac{1}{2}\mu u_x^2\right)dtdx.$$

对应的 Euler-Lagrange equation 为

$$\frac{\partial L}{\partial u}-\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)_t-\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)_x=0.$$

经过计算，我们得到

$$\frac{\partial L}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial u_t}=\rho(x)u_t,\quad \frac{\partial L}{\partial u_x}=-\mu u_x,$$
$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)_t=\rho(x)u_{tt},\quad \left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)_x=-\mu u_{xx}.$$

于是我们得到一维波动方程

$$\rho(x)u_{tt}=\mu u_{xx}.$$

如果绳索收到外力$f(x,t)$, 那么动能密度不变，势能密度变为

$$U=\frac{1}{2}\mu u_x^2-f(x,t)u,$$

（势能模型的建立需要更多的物理知识，所以我们只是把它当作一个模型假设。）于是，我们可以得到一维受迫振动方程

$$\rho(x)u_{tt}=\mu u_{xx}+f(x,t).$$

4.2.3 极小曲面

考虑一个膜$(x, y, u(x, y))$, $\quad (x, y) \in V$，当这个膜的表面积

$$\int_V \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy$$

有最小值的时候，极小曲面问题需要确定所有可能的膜外形。这个问题对应的拉格朗日量

$$L = \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}.$$

为了得到对应的Euler-Lagrange equation，我们计算

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_x} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial u_y} = \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}.$$

于是我们得到

$$\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)_x + \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)_y = 0,$$

或者化简为

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0.$$

我们可以线性化此方程（扔掉高阶项），得到拉普拉斯方程（Laplace equation）：

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

4.3 边界条件的影响：自然边界条件

我们回顾一下，在用变分法推导 Euler-Lagrange 方程的时候，边界条件所产生的作用。例如，在最小作用量原理中，我们考虑的泛函和边界条件是，

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))\,dt, \quad \boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{q}(t_2) = \boldsymbol{q}_2.$$

边界条件的影响主要表现在下面三个方面

- 给出了 Euler-Lagrangian 方程的边界条件。（$\boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{q}(t_2) = \boldsymbol{q}_2$）
- 给出了扰动函数 $\boldsymbol{h}(t)$ 的边界条件。（$\boldsymbol{h}(t_1) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{h}(t_2) = \boldsymbol{0}$）
- 在求变分的过程中，使分部积分中产生的边界项消失。

其中，第三条尤为关键，否则我们不能由变分推出微分方程。

我们在上面的例子中考虑的边界条件被称为 Dirichlet 边界条件（第一类边界条件）。下面我们考虑一些其他的边界条件，和它们产生的效应。

4.3.1 有一个自由边界的问题

我们考虑一个稍微修改后的最短路径问题：寻找从原点 $(0,0)$ 出发，到达竖直直线 $x=1$ 的最短路径。令 $y(x), 0 \le x \le 1$ 为连接 $(0,0)$ 和 $x=1$ 的曲线，我们仍然要考虑弧长

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

的极值。但是，根据题目，我们只有在 $x=0$ 处的边值条件 $y(0)=0$，而我们在 $x=1$ 处，我们没有对 y 有具体的要求，所以这一端称为被自由边界。相应的，我们得到对扰动函数的约束 $h(0)=0$，而 $h(x)$ 在 $x=1$ 处是无限制的。

在这些条件下，通过变分，我们得到

$$\int_0^1 \frac{\delta J}{\delta y} h dx = \frac{y'(1)h(1)}{\sqrt{1+(y'(1))^2}} + \int_0^1 -\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)' h dx.$$

为了令边界项的贡献完全消失，我们令

$$\frac{y'(1)h(1)}{\sqrt{1+(y'(1))^2}} = 0.$$

由于 $h(1)$ 的任意性，我们推导出来最优解需要满足一个 **自然边界条件**：$y'(1)=0$。

总结来看，最优解满足 Euler-Lagrange 方程和边值条件

$$-\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)' = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(1)=0.$$

而我们可以求解得到，最优解为 $y(x)=0$。

4.3.2 有一个变化边界的问题

另一个版本的最短路径问题是，寻找从原点到曲线 $y=f(x)$ 的最短路径。对于连接路径，在 $x=0$ 处的边界条件 $y(0)=0$ 依然成立，但是另外一个端点可能是落在 $y=f(x)$ 的任意一点。我们设这个未知的端点在 $x=b$ 处，因而，这里的边界条件为

$$y(b) = f(b). \tag{4.3}$$

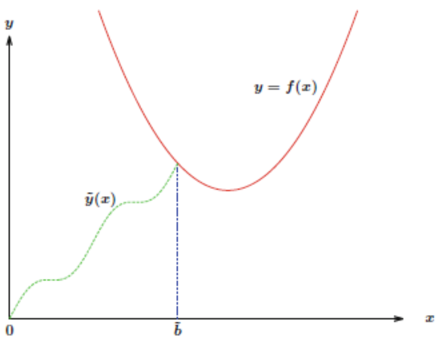

Fig. 3.3 A trial solution, $\tilde{y}(x)$ on $0 \le x \le \tilde{b}$, for the "shortest path to a given *curve*" variable endpoint problem (3.26)

我们的目标泛函仍然为

$$J(y) = \int_0^b \sqrt{1+(y')^2} dx,$$

但是，现在 y 和 b 都是未知量。于是，我们需要对每一个未知量引入相应的扰动

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon h(x), \quad \tilde{b} = b + \varepsilon c.$$

这里，$h(x)$ 满足 $h(0)=0$，而 c 是一个待定的常数。于是，经过扰动的目标泛函是

$$J^\varepsilon = \int_0^{b+\varepsilon c} \sqrt{1+(y'+\varepsilon h')^2} dx,$$

通过计算我们得到

$$\frac{dJ^\varepsilon}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = c\sqrt{1+(y'(b))^2} + \frac{y'(b)h(b)}{\sqrt{1+(y'(b))^2}} + \int_0^b -\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)' h dx.$$

注意到，现在有两个边界项，其中一个是由于变动边界得来的。我们仍然希望选取最优解使得边界项消失，然后通过积分项推出 Euler-Lagrange 方程。

这时候，我们考虑对边界条件 (4.3) 的扰动

$$y(b+\varepsilon c)+\varepsilon h(b+\varepsilon c)=f(b+\varepsilon c),$$

通过 Taylor 展开，匹配 $O(1)$ 项，我们得到 $y(b)=f(b)$。再通过匹配 $O(\varepsilon)$ 项，我们得到，

$$y'(b)c+h(b)=f'(b)c,$$

于是求解得到

$$c=\frac{h(b)}{f'(b)-y'(b)}.$$

于是，代入泛函导数中，我们得到边界项化简为

$$\left(\frac{y'(b)}{\sqrt{1+(y'(b))^2}}+\frac{\sqrt{1+(y'(b))^2}}{f'(b)-y'(b)}\right)h(b).$$

由于 $h(b)$ 的任意性，我们令上式中括号内的部分为 0，并化简得到如下的自然边界条件

$$y'(b)=-\frac{1}{f'(b)}.$$

这也说明，最短路径与给定曲线 $y=f(x)$ 垂直相交。

总结来看，最优解满足 Euler-Lagrange 方程和边值条件

$$-\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)'=0,\quad y(0)=1,\quad y(b)=f(b),\quad y'(b)=-\frac{1}{f'(b)}.$$

看起来，二阶方程配有三个边界条件并不自然，而实际上这个问题不是超定的（overdetermined），因为 b 也是一个待求解的未知量。

4.4 带约束的优化问题简介

4.4.1 Lagrange Multiplier 和带约束的优化

现实问题中，我们常需要求满足约束条件的最优解。对于一些约束条件，我们可以之间将它代入目标函数中，而对于另外一些约束条件，我们会用到 Lagrange Multiplier。变分学中的 Lagrange Multiplier 方法可以看作是微积分中 Lagrange Multiplier 方法的拓展。它主要适用于如下几类的问题

- 等周问题（Isoperimetric problem）：给定解的积分的条件，优化目标泛函。
- 完整系统（Holonomic systems）：给定解逐点满足的几何条件，优化目标泛函。
- 优化控制（Optimal Control）：给定解逐点满足的微分方程，优化目标泛函。

在约束优化问题中，可行解只属于所有可能解的一个子集。 Lagrange Multiplier 方法引入了增广目标函数（augmented objective function）$\mathscr{L}$，它包含了原目标函数和约束条件，而所有的关键点依然通过如下的梯度条件给出

$$\nabla\mathscr{L}=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\text{all critical point solutions.}$$

我们这里只讨论等周问题中 Lagrange Multiplier 方法的使用，感兴趣的同学可以参考教材二的3.7，3.8等章节学习其他两类问题。

4.4.2 等周问题

我们考虑如下的优化问题

$$\max_y \left(J = \int_a^b L(x, y, y') dx \right), \quad \text{subject to} \quad G \equiv \int_a^b g(x, y, y') dx = 0.$$

这类问题之所以被称为等周问题，是因为它来源于古老的几何问题：在固定周长的情况下，如何使得曲线包围的面积最大。

在约束 $G \equiv 0$ 的条件下，求泛函 J 的极值，可以表示成一个如下的增广泛函的的极值问题

$$I(y, \lambda) = J - \lambda G,$$

而这里的常数 λ 即为 Lagrange Multiplier。我们也可以相应的引入增广的 Lagrangian 函数 $\mathscr{L}$，满足

$$I = \int_a^b \mathscr{L} dx, \quad \text{where} \quad \mathscr{L}(x, y, y', \lambda) = L(x, y, y') - \lambda g(x, y, y').$$

这样，我们就可以按照之前的方法，对所有的未知量引入扰动

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon h(x), \quad \tilde{\lambda} = \lambda + \varepsilon \gamma.$$

这里我们假设由于边界条件的选取，泛函导数中的边界项都已经消失，因为令泛函导数为0，我们得到

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right) \right) \right] h dx + \gamma \int_a^b g(x, y, y') dx = 0.$$

由于 $h(x)$ 和 γ 的任意性，我们得到 Euler-Lagrange 方程和约束条件

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'}\right) = 0, \quad \int_a^b g(x, y, y') dx = 0.$$

下面我们考虑一个具体的例子：寻找函数 $y(x) > 0, 0 < x < 1$，满足边界条件 $y(0) = 0$ 和 $y(1) = 0$，其对应的弧长 $S = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx$ 为固定值，而曲线和坐标轴包围的面积 $A = \int_0^1 y dx$ 达到最大值。

这里的弧长约束为

$$G \equiv \int_0^1 g dx = 0, \quad \text{where} \quad g = \sqrt{1 + (y')^2} - S.$$

所以，相应的增广的目标泛函和 Lagrange 函数为

$$I = A - \lambda G = \int_0^1 \mathscr{L} dx, \quad \text{where} \quad \mathscr{L} = y - \lambda g = y - \lambda \left(\sqrt{1 + (y')^2} - S \right).$$

于是，我们得到 Euler-Lagrange 方程和约束条件

$$1 + \lambda \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right)' = 0, \quad \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (y')^2} - S \right) dx = 0.$$

通过求解方程，并结合边界条件 $y(0) = 0$ 和 $y(1) = 0$，我们得到

$$y = \sqrt{\lambda^2 - (x - \frac{1}{2})^2} - \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}.$$

此时，相应的面积和弧长为

$$A = \lambda^2 \arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right) - \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}, \quad S = 2\lambda \arcsin\left(\frac{1}{2\lambda}\right).$$

最终，为了完成求解，我们先通过弧长的式子算出 λ ，就可以得出最优解 $y(x)$ 的表达式和此时的面积 A。