数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2019 年 5 月 1 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.

5 边值问题及其应用

Science is a differential equation. Religion is a boundary condition.

—-Alan Turing

在微分方程中，边值问题是一个微分方程和一组称之为边界条件的约束条件。边值问题的解通常是符合约束条件的微分方程的解。

物理学中经常遇到边值问题，例如波动方程等。许多重要的边值问题属于Sturm-Liouville问题。这类问题的分析会和微分算子的特征（本征）函数有关。

5.1 初值问题和边值问题

在微分方程模型中，一个初值问题由一个微分方程

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t)) \quad \text{with} \quad f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

和初值条件 $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ 组成。这里，变化率函数的定义域 Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 中的一个开集，而初值条件可以看作是这个定义域中的一个点，即 $(t_0, y_0) \in \Omega$。

Example. 考虑方程 $\phi'' + \lambda\phi = 0$, 和初值条件 $\phi(0) = a$ and $\phi'(0) = b$。如果我们令 $y_1 = \phi$， $y_2 = \phi'$，则我们有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\lambda y_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

边值问题（Boundary value problems，BVP）和初值问题有相似之处，他们都包含一个微分方程。但是，一个初值问题的条件是在自变量的边界上给出的，而初值问题的条件都在自变量的同一点给出。

在本章中，我们只考虑一维的二阶微分方程的边值问题。

Example (5.1). 考虑下面的边值问题

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, \quad 0 < x < L, \\ \text{B.C.（边值条件）：} \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0. \end{cases}$$

显然，方程有一个满足边值条件的解 $\phi(x) = 0$，这个解是平凡解，我们希望寻找非平凡解。这个方程的特征方程为（这类方程的通解的形式为 e^{cx}）：$c^2 + \lambda = 0$。

- 当 $\lambda < 0$ 时，通解可以表示为 $\phi = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。而由边界条件知 $c_1 = c_2 = 0$。（这时候只有平凡解。）

- 当 $\lambda=0$ 时，通解可以表示为 $\phi=c_1x+c_2$。而由边界条件知 $c_1=c_2=0$。(这时候只有平凡解。)

- 当 $\lambda>0$ 时，通解可以表示为 $\phi=c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$。有边界条件知，$c_2=0$ 和 $c_1\sin(\sqrt{\lambda}L)=0$。于是我们得到一族非平凡解和他们对应的 λ 的值

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad \phi_n=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

这个BVP其实是一个 Sturm-Liouville 特征值问题。

我们假设 ϕ 在区间 (a,b) 上满足某个二阶的微分方程，在边界上，我们一般有如下几类的边界条件：

- $\phi=c$, first kind / Dirichlet （第一类/狄利克雷）.

- $\phi'=c$, second kind / Neumann （第二类/诺伊曼）.

- $g\phi'+h\phi=c$, third kind / Robin（第三类）.

- $\phi(a)=\phi(b)$ and $\phi'(a)=\phi'(b)$, periodic（周期）.

特别地，对于前三类B.C.，当 $c=0$ 时，我们称 B.C. 是齐次的（homogeneous）。

5.2 热传导方程的初边值问题

我们假设 $u(x,t)$ 表示一个一维导热杆 $0<x<L$ 的温度，它的时间演化满足如下的热传导方程

$$u_t=ku_{xx},\quad u(x,0)=u_0(x),\quad 0<x<L$$

这里 k 是导热系数。我们回忆知，这是一个守恒律模型，而通量函数是 $-ku_x$。除了初值条件之外，在 $x=0,L$ 这两处，我们需要给出边界条件，从而这个完整的问题是一个初边值问题。这里，我们以 $x=0$ 这端为例，来看一些具体的边值条件：

- **给定温度，Prescribed temperature at $x=0$.** $u(0,t)=u_B(t)$.

- **绝热条件，Insulated boundary at $x=0$.** 有时我们可以限定通量函数 $-ku_x(0,t)=\phi(t)$. 特别的，当这一端是完美绝热的时候，我们有 $u_x(0,t)=0$。

- **牛顿冷却定律：Newton's law of cooling at $x=0$.** 如果我们假设在 $x=0$ 处的热通量正比于，这一端的温度和环境温度的差别，那么就有 $-ku_x(0,t)=-H\big[u(0,t)-u_B(t)\big]$，这里 H 被称为传热系数。

特别地，如果 B.C. 是不依赖于时间的（time independent）或称作是稳定的（steady），那么方程的解也许会渐进地趋向一个平衡态（稳态），那么对于平衡态，显然我们有 $u_t=0$。

例如，如果我们给出如下的 B.C.:

$$u(0,t)=T_1,\quad u(L,t)=T_2.$$

那么，稳态解 $u(x,t)=u(x)$ 就满足如下的 BVP

$$u_{xx}=0,\quad u(0)=T_1\quad u(L)=T_2.$$

（这时候的稳态解是什么呢？对应怎么样的解读呢？）

另外一种得到 BVP 的情况是通过分离变量法（method of separation of variables）。我们考虑一维二阶波方程的初边值问题，这里 $u = u(x,t)$ 表示弹性绳索在时间t距离平衡位置x的位移（参考4.2节的推导）。

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ \text{B.C.}: \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \\ \text{I.C.}: \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

我们考虑一种特殊的解的形式，分别依赖于 x 和 t 的两个一元函数的乘积，

$$u(x,t) = \phi(x)h(t).$$

代入方程，我们得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} := -\lambda.$$

注意到，上式的左端是一个 t 的函数，中间是一个 x 的函数，所以，这个等式成立的唯一可能是，它们都是常值函数。我们设这个常数叫做 $-\lambda$，再通过匹配 B.C.'s 我们得到下面的 BVP

$$\phi_{xx} + \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0.$$

这个 BVP 正是我们在 5.1 节考虑的第一个 BVP 例子。

5.3 Sturm-Liouville Problems（施图姆-刘维尔，S-L）

Definition. S-L微分方程

$$\mathscr{L}\phi + \lambda\sigma\phi = 0, \quad \text{where} \quad \mathscr{L}\phi = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi}{dx}\right) + q\phi.$$

Definition. Regular S-L 特征值问题：求满足 S-L 微分方程的非平凡解（$\phi \equiv 0$ 是平凡解），使得它们满足下面的 B.C.'s

$$\beta_1\phi(a) + \beta_2\phi'(a) = 0, \quad \beta_3\phi(b) + \beta_4\phi'(b) = 0,$$

这里，β_i 是实数，q, p 和 σ 是实值连续函数，并且在 $[a,b]$ 这个闭区间上 $p > 0$ $\sigma > 0$。

注意，

1. 这里考虑的边界条件都是齐次的。
2. 这里的 λ 是未指定的。事实上，只有对一些特殊的 λ，这个边值问题才有非平凡的解。我们把这些存在非平凡解的 λ 称为特征值，记为 λ_n，而这些非平凡的解称为特征函数，记为 $\phi_n(x)$。

注意，一般来说，$\phi_n(x)$ 可以是复数值的，但是为了简化分析，这章里面，此后我们只考虑$\phi_n(x)$是实数值的情况。我们来总结一些 Regular S-L 特征问题的性质：

Property 1. 特征值 λ_n 都是实的。

Property 2. 特征值序列满足 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$，并且当 $n \to \infty$ 时，$\lambda_n \to \infty$

Property 3. $\phi_n(x)$ 构成一组“完备”的集合，即对于定义在 $[a,b]$ 上的“充分好”的任意函数 $f(x)$，我们有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x).$$

（“完备”和“充分好”的具体定义超出了本课程的范围。）

Property 4. 属于不同特征值的特征函数关于权函数 σ 正交，即

$$\int_a^b \phi_n \phi_m \sigma\, dx = 0, \quad \text{if} \quad \lambda_n \neq \lambda_m.$$

第3、4条性质结合在一起，我们可以利用正交性求解系数 c_n，即

$$\int_a^b \phi_n f \sigma\, dx = c_n \int_a^b \phi_n \phi_n \sigma\, dx.$$

我们回忆知，在 Example (5.1) 中，$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $\phi_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$。于是上面这些性质都可以轻松检验。而此时的级数展开正是一种正弦级数。

这些性质的证明主要依赖于regular S-L 微分算子的自伴性。需要强调的是，正如边值问题包括微分方程和边界条件两部分，我们一般说的 regular S-L 微分算子或者 regular S-L （特征值）问题是包括微分公式和边界条件两部分的。

我们容易直接验证如下的格林公式。

Green's formula. 对于任意的光滑函数 $u(x), v(x)$，我们有

$$\int_a^b [u\mathscr{L} v - v\mathscr{L} u]\, dx = p(uv' - vu')|_a^b.$$

如果我们进一步假设 u, v 满足 regular S-L eigenvalue problem 的边值条件，那么就有

$$\int_a^b [u\mathscr{L} v - v\mathscr{L} u]\, dx = 0.$$

有时候，我更习惯把上式写成内积的形式 $\langle u, \mathscr{L} v\rangle = \langle \mathscr{L} u, v\rangle$，并且我们称算子 $\mathscr{L}$ 是自伴的，但是我们自伴的严格定义超出了本课程的范围，我们就不讨论了。

现在我们证明一下 Property 1. 注意，虽然我们已经假设了只考虑实值的特征函数，但是下面的证明中，我们更广义地考虑复数值的特征函数。(但是在其他推理和证明中，我们仍然只考虑实值的特征函数。)

Proof. 我们设 λ 是 regular S-L eigenvalue problem 的一个特征值，而 ϕ 是相应的特征函数。于是我们有

$$\mathscr{L}\phi + \lambda\sigma\phi = 0. \tag{5.1}$$

如果我们对上式 (5.1) 取复共轭，就会得到

$$\mathscr{L}\bar{\phi} + \bar{\lambda}\sigma\bar{\phi} = 0, \tag{5.2}$$

这里我们用到了 p, q, σ 是实的，而这个结果说明 $\bar{\lambda}$ 是也是一个特征值，而 $\bar{\phi}$ 是 $\bar{\lambda}$ 的一个特征函数。

如果我们将 (5.1) (5.2) 分别乘以 $\bar{\phi}$、ϕ，在 $[a, b]$ 上积分，再相减，就能得到

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b |\phi|^2 \sigma\, dx = 0.$$

由于 $\int_a^b |\phi|^2 \sigma\, dx > 0$, 那么我们得出 $\lambda = \bar{\lambda}$。于是，我们得到 λ 是实的。(证毕。)

你能模仿这个证明的思路去证明Property 4吗？不需要掌握性质2、3的证明。

基于 Property 3、4，我们下面介绍特征函数展开法（the method of eigenfunction expansions）。

我们考虑一个由微分方程 $\mathscr{L} u = f$ 和某些齐次边值条件给出的边值问题（BVP）。这里，微分算子 $\mathscr{L}$ （含边界条件）满足 Regular S-L 的假设。

于是，我们可以求解满足相同边界条件的特征值问题

$$\mathscr{L}\phi_n + \lambda_n \sigma \phi_n = 0,$$

并利用特征函数将方程的解展开成级数的形式

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

由$\mathscr{L}$的线性，（并假设 $\mathscr{L}$ 和级数的求和可以交换顺序）可得

$$\mathscr{L}u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathscr{L}\phi_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n.$$

再由正交性，我们有

$$a_n = \frac{\int_a^b f\phi_n dx}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx},$$

并且

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \int_a^b f(x_0) G(x, x_0) dx_0,$$

这里

$$G(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(x_0)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2(x')\sigma(x')dx'}.$$

5.4 含时的薛定谔方程，柯西（Cauchy）问题*

很多时候，一些含时的 PDE 模型的状态变量是很难给出有物理意义的边界条件的，或者天真地给出边界条件很容易造成数学上的不相容。有时候，为了避开有限区间的边值条件问题，我们会考虑全空间的柯西问题，这种柯西问题可以看作是 ODE 模型中，初值问题的推广。比如一维的含时薛定谔方程

$$i\hbar u_t = Hu = -\frac{\hbar^2}{2m} u_{xx} + V(x)u, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad u(x,0) = u_0(x).$$

虽然缺少在无穷远初边界条件，但是我们希望势能函数 $V(x)$ 在无穷远附近增长地足够快，而使得方程的解在无穷远附近下降到 0 的速度足够快。

我们也可以考虑相应的特征值问题，即不含时的薛定谔方程，

$$H\Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x).$$

并且规定特征函数 $\Psi_n(x)$ 在无穷远附近下降到 0 的速度足够快。这样的特征函数也叫做束缚本征态。可惜的是，只有在极少数的情况，人们才能解析的求出这些特征值和特征函数。最著名特例之一就是量子谐振子问题，这时候势能项是一个二次函数，$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$，这时候的特征值和特征函数为

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad \Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right).$$

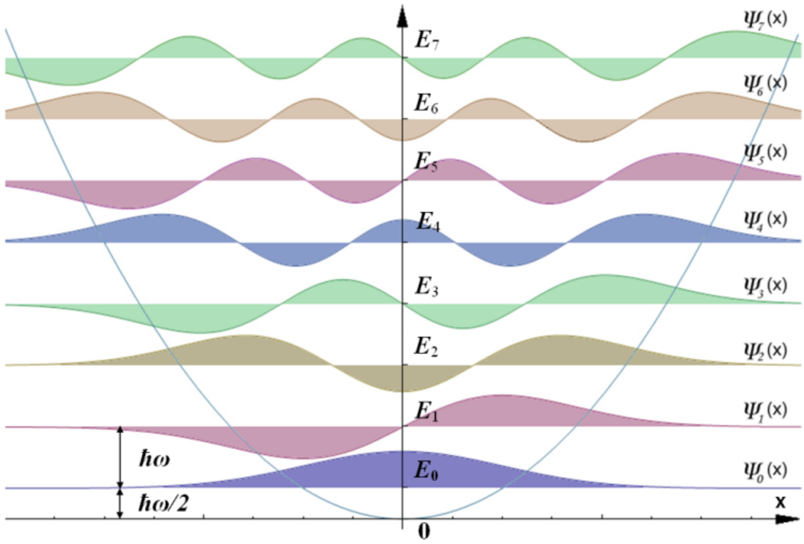
这里，H_n 是 Hermite 多项式，而 Ψ_n 是 Hermite 函数，$\{\Psi_n\}$ 形成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组规范正交基（见下图）。

对于量子谐振子问题，我们也可以使用特征函数展开法求解含时的薛定谔方程，令

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \Psi_n(x).$$

领用初值条件和 $\{\Phi_n\}$ 的规范正交性，我们可得

$$c_n(t) = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \Psi_n(x) dx.$$



5.5 Green's function and Fredholm alternative (格林函数和弗雷德霍姆二择一)

回顾一下 5.3 节中的例子，$[a,b]$区间上的两点边值问题：$\mathscr{L}u=f$ 加上某些边界条件。我们最终把解表示为了

$$u(x)=\int_a^b f(x_0)G(x,x_0)dx_0.$$

我们可以对这个解的表示形式做如下的解读：

- $u(x)$ 是解在x处的值；
- 我们把f(x)看作源（source，或者是原因），$f(x_0)$ 是源在x_0处的值；
- $G(x,x_0)$ 是x_0处的源对于x处的解的影响大小（这种影响可正可负）；
- 这种解的表示，说明，解在x处的值受整个区间$[a,b]$内所有源的影响，这种影响在汇总过程（积分）中又被影响函数$G(x,x_0)$所修正。

从上个例子来看，这种影响函数只跟微分算子$\mathscr{L}$和边界条件有关，而跟源函数f无关。如果能求出来$G(x,x_0)$，对于方程的求解和分析都有很大的好处。我们把$G(x,x_0)$叫做格林函数（Green's function）。

为了介绍Green's function，我们需要先引入Dirac-delta function（或者简称delta function）。Delta function是一种广义函数，我们这里不研究他的严格数学定义，而是直观的做一个理解。

首先我们定义一个一维的示性函数

$$\chi_{x_i,\Delta x}(x)=\begin{cases}1, & x_i<x<x_i+\Delta x;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

如果我们将$[a,b]$区间以Δx为间隔剖分成N份，令剖分格点为x_i，于是

$$x_i=a+i\Delta x,\quad i=0,\cdots,N,\quad \Delta x=\frac{b-a}{N}.$$

这样，我们就可以对$[a,b]$区间上的函数$f(x)$做分片常数的逼近

$$f(x)\approx\sum_i f(x_i)\chi_{x_i,\Delta x}(x)=\sum_i f(x_i)\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x}\Delta x.$$

注意，上述最右端是一个黎曼和的形式，而且我们自然的期待

$$\sum_i f(x_i)\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x}\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} f(x).$$

同时我们也期待上式的左端可以表达成一个（广义）积分的形式。于是我们形式上定义

$$\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x\to 0} \delta(x-x_i)=\begin{cases}\infty, & x=x_i;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases},$$

同时我们要求

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\delta(x-x_i)dx_i.$$

这样，我们完成了Dirac-delta function的形式定义。它的严格定义同学们会在更高级的分析课上学习。

现在我们介绍一些Dirac-delta function的性质。

- 我们有 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')dx'$. 事实上，$\forall\varepsilon>0, 1=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\delta(x-x')dx'$.
- 我们有 $\delta(c(x-x'))=\frac{1}{|c|}\delta(x-x')$。特别的，$\delta(x-x')=\delta(x'-x)$。
- 定义：Heaviside step function

  $$H(x-x')=\begin{cases}0, & x<x',\\ 1, & x>x'.\end{cases}$$

  显然我们有，

  $$H(x-x')=\int_{-\infty}^{x}\delta(x_0-x')dx_0.$$

  于是，在一种弱的意义下，我们可以有

  $$\frac{d}{dx}H(x-x')=\delta(x-x').$$

- 考虑$[a,b]$上的两点边值问题 $\mathscr{L}u=f$ 加一定的齐次边界条件。我们希望问题的解可以表示为

  $$u(x)=\int_a^b f(x')G(x,x')dx'. \tag{5.3}$$

  特别的，如果我们令$f(x)=\delta(x-x_s)$, 这可以解读为聚集在 $x=x_s\in(a,b)$ 的源。那么，

  $$u(x)=\int_a^b\delta(x'-x_s)G(x,x')dx'=G(x,x_s).$$

  于是，我们推出了

  $$\begin{cases}\mathscr{L}G(x,x_s)=\delta(x-x_s), & a<x<b,\\ G(x,x_s) & \text{satisfies the same (homogeneous) B.C.'s as the original BVP.}\end{cases} \tag{5.4}$$

  事实上，我们可以把(5.4)看作格林函数的定义。下面，我们用(5.4)和原BVP来反过来推出(5.3)。

  我们回忆知道，如果u, v满足相同的齐次边界条件，那么根据 Green's formula

  $$\int_a^b[u\mathscr{L}v-v\mathscr{L}u]dx=0.$$

  于是，如果我们令

  $$v=G(x,x'),\quad \text{then}\quad \mathscr{L}v=\delta(x-x'),$$

于是我们得到

$$\int_a^b [u(x)\delta(x-x') - G(x,x')\mathscr{L}u(x)]\,dx = 0.$$

如果 $u(x)$ 是BVP的解，那么 $\mathscr{L}u(x) = f(x)$, 于是，我们推出了

$$u(x') = \int_a^b G(x,x')f(x)\,dx.$$

事实上，我们还可以证明格林函数是对称的，$G(x,x') = G(x',x)$。（大家自己思考一下怎么通过(5.4)来证明。）于是，最终我们证明了

$$u(x') = \int_a^b G(x',x)f(x)\,dx.$$

Example. 考虑如下的 BVP

$$u'' = f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0.$$

利用 (5.4) 的定义方式直接求解 Green's function $G(x,x')$。

$G(x,x')$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}G(x,x') = \delta(x-x'), & 0 < x < L, \\ G(0,x') = 0, \quad G(L,x') = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq x'$ 时，我们有 $G'' = 0$，于是

$$G(x,x') = \begin{cases} a + bx, & 0 < x < x', \\ c + dx, & x' < x < L. \end{cases}$$

由边界条件，我们得

$$G(x,x') = \begin{cases} bx, & 0 < x < x', \\ d(x-L), & x' < x < L. \end{cases}$$

易知 $\frac{d}{dx}G(x,x')$ 在 $x = x'$ 处有一个高度为 1 的跳跃，而 $G(x,x')$ 在 $x = x'$ 处是连续的，于是我们有

$$d = \frac{x'}{L}, \quad b = \frac{x'-L}{L}.$$

最终我们得到了

$$G(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{x(L-x')}{L}, & 0 < x < x', \\ -\dfrac{x'(L-x)}{L}, & x' < x < L. \end{cases}$$

显然，$G(x,x')$的确是关于 x 和 x' 是对称的。

似乎，我们推出一套完成的理论方法，但是，其实这里面有一个明显的“不足”。我们考虑下面两个例子

Example (a). $u'' = e^x$, $u'(0) = 0$, $u'(L) = 0$. 我们会发现，这个BVP无解。

Example (b). $u'' = \cos(x)$, $u'(0) = 0$, $u'(\pi) = 0$. 我们会发现，这个BVP至少有一个解 $u = -\cos(x)$。

那么这两个例子有什么本质不同呢？

我们回顾一下特征函数展开法（the method of eigenfunction expansions）。

我们考虑一个由微分方程 $\mathscr{L}u = f$ 和某些齐次边值条件给出的边值问题（BVP）。我们求解满足相同边界条件的特征值问题

$$\mathscr{L}\phi_n + \lambda_n \sigma \phi_n = 0,$$

并利用特征函数将方程的解展开成级数的形式

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x).$$

于是我们得到

$$-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n\sigma\phi_n=f.$$

之前我们利用ϕ_n正交性算出了所有的系数a_n。但是如果对于某个n'，$\lambda_{n'}=0$呢？

利用正交性，我们可以得到

$$-a_{n'}\lambda_{n'}=\frac{\int_a^b f\phi_{n'}dx}{\int_a^b \phi_{n'}^2\sigma dx}.$$

这里我们注意到两个事实。

- 因为$\lambda_{n'}=0$，那么：如果$\int_a^b f\phi_{n'}dx\neq 0$，则$a_{n'}$无解，进而BVP无解；如果$\int_a^b f\phi_{n'}dx=0$，则任意$a_{n'}$都是解，进而BVP有无穷多解。
- 存在$\lambda_{n'}=0$，可以等价表述为$\mathscr{L}\phi=0$（加上相应的边界条件）有了非平凡的解。

我们总结一下一维BVP的 Fredholm Alternative (F.A., 弗雷德霍姆二择一) 。

我们考虑一个在区间 $[a,b]$ 上，由微分方程 $\mathscr{L}u=f$ 和某些齐次边值条件给出的边值问题（BVP）。令 ϕ_0 为齐次问题的解，即 $\mathscr{L}\phi_0=0$，且 ϕ_0 满足同样的边界条件。

那么

1. 如果齐次问题不存在非平凡解 ϕ_0，则这个 BVP 有唯一的解。
2. 如果齐次问题存在非平凡解 ϕ_0，那么
   (a) 如果 $\int_a^b f\phi_0 dx\neq 0$，此 BVP 没有解。
   (b) 如果 $\int_a^b f\phi_0 dx=0$，则此 BVP 有无穷多个解。

最后我们看一个例子。

Example. 求使得下面的 BVP 有解的 β 的值

$$u''(x)+(\pi/L)^2u(x)=\beta+x,\quad u(0)=0,\quad u(L)=0.$$

考虑齐次问题

$$\phi''(x)+(\pi/L)^2\phi(x)=0,\quad \phi(0)=0,\quad \phi(L)=0.$$

通过求解，我们得到如下的通解

$$\phi(x)=c\sin(\pi x/L).$$

如果原来的BVP有解，那么根据 F.A. (弗雷德霍姆二择一)，我们有

$$\int_0^L(\beta+x)\sin(\pi x/L)dx=0.$$

最终，我们推出 $\beta=-L/2$。

其实遇到无穷多解的情况，我们也能稍作修改的求出更一般的格林函数，不过这门课中我们就不再深究了。有兴趣的同学可以参看下面这本教材：

https://www.amazon.com/Differential-Equations-Boundary-Problems-Featured/dp/0321797051/ref=asap_bc?ie=UTF8