

# 数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2019 年 5 月 13 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.

参考：教材二第6章。

## 7 微扰法和渐进分析简介

I think that it is a relatively good approximation to truth — which is much too complicated to allow anything but approximations — that mathematical ideas originate in empirics

— John von Neumann, *The Mathematician*.

在上一章中，我们学了无量纲化，即把有量纲的物理问题转化成无量纲的数学模型。我们知道，无量纲的参数反映了各种物理效果的相对重要性。在不知道这些无量纲参数的大小时，我们可以通过解析的或者数值的方法求出问题的通解。但是，如果我们已知一些无量纲参数是相对的大，或者相对的小，所谓的渐进方法可以帮助我们求解问题的近似解。

渐进方法提供了一套系统的手段来构造形如下面问题的近似解：

$$F(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = H(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad \text{when } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

这里， $\varepsilon$  叫做渐进参数，我们感兴趣的是  $\varepsilon \ll 1$  的情形。构造近似解是通过引入渐进展开来实现的，即原问题可以分解为一序列的子问题。子问题往往更容易求解，而且我们可以把子问题的解组合成原问题的近似解。

注意，虽然以上的步骤听起来很像线性叠加原理，但事实上，渐进方法的强大之处在于它可以处理很多的非线性问题。

### 7.1 渐进展开

首先我们回顾一些微积分中一些有关极限的定义和理解。注意，一些定义的名称也许会 and 微积分中的有所不同。

- $f(\varepsilon)$  和  $g(\varepsilon)$  在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时被称为是渐进等价的，如果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1.$$

我们记作  $f \sim g$  当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时。注意，渐进等价关系方便我们表示一类等价的函数，例如在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时， $\cos(\sqrt{\varepsilon}) \sim (1 - \varepsilon/2) \sim (1 + \varepsilon) \sim e^\varepsilon$ 。

- 在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时， $f = O(g)$ ，如果存在有限的  $A$ ，使得对于足够小的  $\varepsilon$  有

$$|f| \leq A|g|.$$

这使得我们方便更精确地刻画极限值有限、极限值为无穷时的函数的渐进行为，例如  $f = O(1)$ ,  $f = (\varepsilon^{-1})$ ,  $f = O(\varepsilon^2)$ 。

- 在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $f = o(g)$ , 如果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0.$$

我们常用  $o(\cdot)$  表示高阶小项。

下面我们引入渐近展开。考虑函数  $x(t, \varepsilon)$ , 它有如下“分离变量”类型的级数展开

$$x(t, \varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)x_0(t) + \delta_1(\varepsilon)x_1(t) + \delta_2(\varepsilon)x_2(t) + \cdots \quad (7.2)$$

这里, 我们假设所有的系数  $x_n = O(1)$ , 而度规函数  $\{\delta_n(\varepsilon)\}$  满足下面的序列关系

$$\delta_0(\varepsilon) \gg \delta_1(\varepsilon) \gg \delta_2(\varepsilon) \gg \cdots \quad (7.3)$$

我们称 (7.2) 和 (7.3) 为渐近展开 (Asymptotic expansion, AE) 的基本形式。在 AE 中的第一项被称为首项 (或首阶项), 而我们显然有,  $x \sim \delta_0 x_0$ 。

关于, 对于 AE 的理解, 我们需要注意下面几个方面

1. 对于简单的渐近展开, 我们通过求 Taylor 级数得到。
2. 对于一般的情况, 度规函数不一定是由  $\varepsilon^n$  组成。此时, 我们需要同时求解度规函数和系数。
3. (可能是最反直觉的一点) 渐近展开中的级数有可能是发散的。但是在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 其部分和仍然可能提供了很精确的近似。

为了解渐近展开的第三条性质, 我们考虑下面的例子。如下的积分

$$I(\varepsilon) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon t} dt, \quad (7.4)$$

在很多积分变换和特殊函数中非常常见。(如有兴趣了解更多, 请参考教材二。)

如果我们对 (7.4) 中的被积函数进行 Taylor 展开, 然后通过积分, 我们就会得到如下渐近展开

$$I(\varepsilon) \sim 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 6\varepsilon^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \varepsilon^n. \quad (7.5)$$

我们不难验证, 这个级数的收敛半径为 0, 换句话说, 这个级数对于所有的  $|\varepsilon| > 0$  都是发散的。但是在图 [1] 中, 我们又观察到, 在  $\varepsilon$  较小时, 部分和对真实值的逼近效果是非常好的。从图 [1] 中, 我们也观察到, 对于  $\varepsilon = 0.1$  时, 前 10 项左右的部分和的逼近效果是最好的。

总结来看的话, 渐近展开在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时总是精确的, 但是对于有限大小的  $\varepsilon$ , 存在能够减少误差的最优截断。而事实上, 在多数情况下, 渐近展开的前几项和已经能够给出很好的逼近了。渐近展开的逼近理论很多时候跟  $\varepsilon \rightarrow 0$  和  $n \rightarrow \infty$  这两个极限的关系有关。本门课中, 我们不细究逼近理论, 而是着重于学习如何用这套方法解方程。

## 7.2 渐近展开的计算

我们希望构造形如 (7.1) 中问题的渐近展开解。我们先考虑形如  $F(x, \varepsilon) = 0$  的代数方程。这时候, 渐近展开 (7.2) 中的系数  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  只是常数。在  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限下, 问题的解, 按照其渐近展开的形式, 一般可以分成如下几类

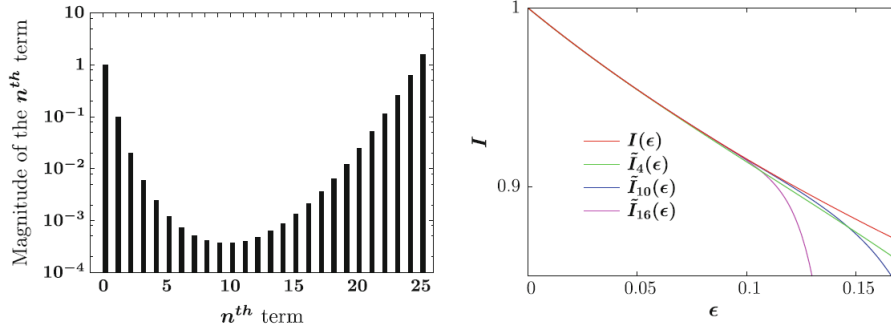


图 1: 左图:  $\varepsilon = 0.1$  时, 各阶项的大小。右图: 部分和和真实值的比较。

- **Regular** (非奇异) solutions.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = x_0$ , 即解有限的极限。如果  $x_0 \neq 0$ , 则首项的度规函数  $\delta_0 = 1$ 。
- **Vanishing solutions**.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = 0$ , 即解的极限为 0。此时, 首相的度规函数  $\delta_0 \ll 1$ 。
- **Singular** (奇异) solutions.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |x| = \infty$ 。我们一般认为这种情况对应了有限大小的  $x_0$  而  $\delta_0(\varepsilon) \gg 1$ 。

下面, 我们介绍构造渐近展开解的两种方法: 展开法和迭代法。

考虑如下的二次方程

$$x^2 - x + \frac{1}{4}\varepsilon = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.6)$$

它的精确解是

$$X_A = \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{2}, \quad X_B = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{2}.$$

我们通过 Taylor 展开得到

$$X_A = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots = O(1), \quad (7.7)$$

$$X_B = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots = O(\varepsilon). \quad (7.8)$$

我们注意到当  $\varepsilon \ll 1$  时, 方程 (7.6) 可以近似看成是  $x^2 - x \approx 0$ , 于是有  $x \approx 0, 1$ 。也就是说, 方程 (7.6) 的前两项的平衡决定了解的大体位置, 而第三项只是稍微修改了解的值。

这是一个典型的 **regular** (非奇异) 微扰 (或称摄动, **perturbation**) 问题, 在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 只有良定义的非奇异解。对这个问题, 我们已经知道了解的所有信息, 现在我们以这个问题为例, 介绍这两种方法。

### 展开法

在不知道精确解的情况下, 我们假设, 解是非奇异的, 并且  $\delta_n = \varepsilon^n, n = 0, 1, \dots$ , 于是我们相当于假设解具有下面的形式

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (7.9)$$

将 (7.9) 代入 (7.6), 得

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 - (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + \frac{1}{4}\varepsilon = 0.$$

按照  $\varepsilon$  的幂函数的阶数分类, 我们得到

$$(x_0^2 - x_0) + \varepsilon(2x_0x_1 - x_1 + \frac{1}{4}) + \varepsilon^2(x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2) + \cdots = 0.$$

我们假设所有的系数都是  $O(1)$  的，那么，为了使每一阶  $\varepsilon^n$  的系数平衡，我们依次得到下面的方程组

$$O(\varepsilon^0): x_0^2 - x_0 = 0, \quad (7.10)$$

$$O(\varepsilon^1): 2x_0x_1 - x_1 + \frac{1}{4} = 0, \quad (7.11)$$

$$O(\varepsilon^2): x_1^2 + 2x_0x_2 - x_2 = 0 \cdots \quad (7.12)$$

$$(7.13)$$

通过依次求解，我们得到

$$x_0 = 1, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = -\frac{1}{16} \cdots \quad \text{or} \quad x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{16} \cdots$$

对照精确解可以验证，我们得到了原问题两个解的渐进展开。

展开法非常简单，但是非常依赖于对解的假设。例如下面的问题

$$(x-1)^2 - 9\varepsilon = 0, \quad (7.14)$$

就不能通过展开法求解。显然，此问题的精确解是  $x = 1 \pm 3\sqrt{\varepsilon}$ ，并不满足我们对度规函数的假设。

### 迭代法

不同于展开法，迭代法不再假设渐近展开的形式，而系数和度规函数都是（依次）待定的。这里我们先做两个基本假设

- 每个非平凡的解（平凡解是  $x \equiv 0$ ，即所有的  $x_n = 0$ ）的首项是非平凡的： $x_0 \neq 0$  且  $\delta_0 \neq 0$ 。
- 首项的系数是有限的，即在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $x_0 = O(1)$ 。

我们还是以 (7.6) 为例，先设  $x \sim x_0\delta_0(\varepsilon)$ ，代入方程得

$$x_0^2\delta_0^2 - x_0\delta_0 + \frac{1}{4}\varepsilon = 0.$$

我们认为此方程中不是所有的项都是同样重要的，否则这也不是一个微扰问题了。为了近似求解此方程，我们使用如下的主项平衡原理（**principle of dominant balance**）：方程中的一些项为主项，它们的平衡给出领阶方程；剩下的项是次要项，它们在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时是主项的高阶小量。如果这种平衡存在，我们也把它称为 **distinguished limit**。

显然，如果主项只有一项的话，只有无解或者平凡解的情况，如果主项是全部三项的话，方程也是无解的。（想想为什么）

对于主项有两项的情况，我们考虑下面三种可能性（注意，由于系数都是  $O(1)$  的，我们要先保证阶数的匹配）

$$(a) \quad \text{Term (1,2)}: \delta_0^2 = \delta_0 \Rightarrow \delta_0 = 1$$

$$(b) \quad \text{Term (1,3)}: \delta_0^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta_0 = \sqrt{\varepsilon}$$

$$(c) \quad \text{Term (2,3)}: \delta_0 = \varepsilon \Rightarrow \delta_0 = \varepsilon$$

下面，我们要继续验证，是不是余下的项是不是真的是次要项。容易发现，(b) 违反了主项平衡原理，而 (a) 和 (c) 是两个合理的主项平衡（我们也说，(a) 和 (c) 是 **distinguished limits**）。

而对于 (a) 和 (c)，我们可以进一步的通过领阶方程得到首项系数  $x_0$ ，即

$$(a): x \sim 1, \quad (c): x \sim \frac{1}{4}\varepsilon.$$

我们发现, (a) 和 (c) 分别对应了精确解  $x_A$  和  $x_B$ , 即  $x_A \sim 1$ ,  $x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon$ 。

更高阶的项可以通过重复上述的步骤得到, 得到寻找主项平衡 (distinguished limits) 找到度规函数  $\delta_i(\varepsilon)$  并找到对应的系数  $x_i$ 。但是要注意, 依次找到的度规函数需要满足渐进的序列关系。例如, 对于  $x_B$ , 在求得了  $x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon$  之后, 可以依次地假设并求解

$$x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon + \delta_{1B}x_{1B}, \quad x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon + \delta_{1B}x_{1B} + \delta_{2B}x_{2B} \cdots$$

在逐项求解中, 除了要注意逐项平衡原理, 还应该注意  $\varepsilon \gg \delta_{1B} \gg \delta_{2B}$ 。

回到问题 (7.14), 虽然展开法不再好用, 但是使用迭代法, 我们可以依次得到  $x \sim x_0\delta_0(\varepsilon) + x_1\delta_1(\varepsilon)$ 。这里度规函数为  $\delta_0 = 1$ ,  $\delta_1 = \sqrt{\varepsilon}$ , 而系数为  $x_0 = 1, 1$ ,  $x_1 = \pm 3$ 。而更高阶项的系数只有  $x_i = 0, i = 2, 3, \dots$ 。(练习)

### 7.3 ODE 问题的非奇异展开

我们可以讲展开法和迭代法推广到 ODE 和 PDE 问题中。需要注意的是, 跟上一节的代数方程不同, 对微分方程问题解求渐进展开的时候, 在每一阶中, 我们需要确定一个方程, 而不只是一个常数。

我们回顾上一章节学习的抛射问题, 在无量纲化之后, 我们可以得到如下的含参数的 ODE 初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = \alpha.$$

注意, 这里的初值条件跟上一章中略有不同, 但是所有的参数都是无量纲的。我们考虑  $\varepsilon \rightarrow 0$  的情形, 利用展开法, 假设有如下的渐进展开形式

$$x(t) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots,$$

下一步要将这个展开形式代入方程和初值条件中。

ODE 的左端部分如下

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_0''(t) + \varepsilon x_1''(t) + \varepsilon^2 x_2''(t) + \cdots,$$

对于 ODE 的右端, 我们先按照  $\varepsilon$  对其展开

$$-\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2} = -1 + 2\varepsilon x - 3\varepsilon^2 x^2 + \cdots$$

然后我们利用这个展开形式将右端进一步展开

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -1 + 2\varepsilon (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots) - 3\varepsilon^2 (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots)^2 + \cdots \\ &= -1 + \varepsilon (2x_0) + \varepsilon^2 (2x_1 - 3x_0^2) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

我们也对初值进行渐进展开, 从而推导出  $x_n$  满足的初值条件:

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &\Rightarrow x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + \cdots = 1 + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \cdots \\ x'(0) = \alpha &\Rightarrow x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon^2 x_2'(0) + \cdots = \alpha + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \cdots. \end{aligned}$$

这样, 我们就可以把原 ODE 问题按照  $\varepsilon$  的阶数, 分解成了若干的子问题

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0): & \quad x_0'' = -1, \quad x_0(0) = 1, \quad x_0'(0) = \alpha; \\ O(\varepsilon^1): & \quad x_1'' = -2x_0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0; \\ O(\varepsilon^2): & \quad x_2'' = 2x_1 - 3x_0^2, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2'(0) = 0; \quad \cdots \end{aligned}$$

我们注意到，高阶问题依赖于低阶问题的解，所以我们可以由低到高地依次求解子问题。

我们先求解  $O(\varepsilon^0)$  的问题，就会得到领阶问题的解

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + 1.$$

将  $x_0$  代入  $O(\varepsilon^1)$  的问题，就会得到

$$x_1'' = -t^2 + 2\alpha t + 2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0.$$

求解此子问题，我们得到

$$x_1(t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{\alpha}{3}t^3 + t^2.$$

类似地，我们可以求解更高阶的子问题。

于是，我们可以将渐近展开的解整合成如下的形式

$$x(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + 1\right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{12}t^4 + \frac{\alpha}{3}t^3 + t^2\right) + O(\varepsilon^2).$$

作为本节的结束，我们考虑如下的问题：当我们对 ODE 求渐进展开解的时候，是否这个渐进展开对于所有的  $t$  都成立呢？这个答案显然是否定的。例如，在这个例子中，当  $t = O(1/\sqrt{\varepsilon})$  时，

$$O(x_0) = O(\varepsilon x_1) = O(1/\varepsilon).$$

这时候，我们渐进展开的假设已经被违反了。这种渐进展开的破缺，往往伴随了问题中一个新的尺度的出现。我们在下一节的奇异微扰问题中，会进一步讨论这个问题。

## 7.4 奇异微扰问题

如果问题的一个或者多个解在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时表现出奇异（发散）的行为，那么这样的问题是奇异微扰问题。

如果我们用非奇异的问题的渐进展开来求解奇异的问题时，奇异解是无法得到的，于是只能得到原问题的部分解，甚至什么解都得不到。

这种行为在所有类别的奇异微扰问题中是普遍存在的：

- 对于代数方程来说，如果一个  $N$  阶多项式在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时，它的领阶方程退化为了一个  $M$  ( $M < N$ ) 阶的多项式，那么这是一个奇异微扰问题，而方程只有  $M$  个非奇异解。
- 对于微分方程来说，如果在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时出现了高阶导数的消失，那么领阶方程的解一般不能满足所有的初值或者边值条件。
- 在其他一些情况中， $\varepsilon = 0$  时的领阶问题会和原问题 ( $\varepsilon > 0$  时) 有更本质的不同，比如，一个奇异的 PDE 问题退化成 ODE 问题，一个奇异的 ODE 问题退化问代数方程问题，甚至一个方程组退化成一个方程。

事实上，奇异的解并没有真的丢失掉，而是可以通过适当的尺度调节 (rescaling) 将它们复原出来。换句话说，尺度的选择，和渐近展开的形式决定了你能得到什么样的解。

我们还是先以一个可以直接求解的例子来来演绎尺度条件的方法。考虑在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时，如下的代数方程

$$\varepsilon x^2 - 2x + 1 = 0. \tag{7.15}$$

如果我们直接将  $\varepsilon = 0$  代入的话，就得到了

$$-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

可见，领阶方程只有一个根，而原问题有两个根。利用求根公式，我们知道，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon}.$$

于是，我们直接得到两个根的渐进展开

$$x_A \sim \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8}, \quad x_B \sim \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

我们观察，领阶方程只能得到非奇异解  $x_B$  的首项，而  $x_A$  在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时是发散的，并不能被非奇异的渐近展开表示出来。

我们讲这两个根的首项代入原方程，得到

$$x_A: \quad \varepsilon \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 - 2 \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) + 1 = 0, \quad x_B: \quad \varepsilon \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{2} \right) + 1 = 0.$$

这使得我们可以进一步观察差别的原因。

我们注意到，这两个解对应了不同的主项平衡。对于  $x_A$  来说，前两项是主项，而对于  $x_B$  来说，后两项是主项。而如果解非奇异，我们也会得到后两项是主项，这对应了  $x_B$  的确是奇异解。

下面我们介绍处理奇异解的系统步骤：

1. 令  $x = \delta_0(\varepsilon)X$ ，并代入原问题。
2. 根据主项平衡原理选取  $\delta_0(x)$ （包括验证被忽略的项的确是次要项）。考虑所有  $\delta_0(x)$  的可能性，这对应了原问题的所有非奇异解和奇异解。
3. 对于给定的  $\delta_0(x)$ ，得到关于  $X$  的非奇异扰动问题。利用非奇异扰动问题的方法求解。（展开法或者迭代法。）
4. 通过  $\delta_0$  的调整，得到  $x$  解的最终形式。

下面我们通过上面的例子来演示这个方法。将  $x = \delta_0(\varepsilon)X$  代入 (7.15)，我们得

$$\varepsilon \delta_0^2 X^2 - 2\delta_0 X + 1 = 0. \quad (7.16)$$

对于主项有两项的情况，我们考虑下面三种可能性（注意，由于系数都是  $O(1)$  的，我们要先保证阶数的匹配）

- (a) Term (1,2) :  $\varepsilon \delta_0^2 = \delta_0 \Rightarrow \delta_0 = 1/\varepsilon$
- (b) Term (1,3) :  $\varepsilon \delta_0^2 = 1 \Rightarrow \delta_0 = 1/\sqrt{\varepsilon}$
- (c) Term (2,3) :  $\delta_0 = 1 \Rightarrow \delta_0 = 1.$

容易验证，case (b) 并不满足主项平衡原理，应该舍去。而 case (a) 和 (c) 满足主项平衡原理，期中 case (c) 对应了非奇异解，case (a) 对应了奇异解。我们下面只看奇异解的情况。将  $x = X/\varepsilon$  代入原问题，得到调整尺度后的非奇异问题

$$X^2 - 2X + \varepsilon = 0.$$

下面我们用展开法，设  $X(\epsilon)$  满足如下的渐进展开形式

$$X \sim X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2.$$

将这个展开代入方程，其首阶部分为

$$X_0^2 - 2X_0 = 0.$$

它的解为  $X_0 = 0$  和  $X_0 = 2$ 。我们舍掉平凡的情况， $X_0 = 0$ ，而只考虑  $X_0 = 2$ 。这样我们就得到了奇异解的首项

$$x_A \sim 2/\epsilon.$$

我们可以比较一下迭代法和这里介绍的尺度调节法的相同与不同。相同点是，他们都需要需要寻找首项的度规函数  $\delta_0$ ，各阶的系数也是一样的。（原因可以由下面的展开容易看出。）

不同的地方是，迭代法是依次求解度规函数和系数，最终解可以表示为

$$x \sim \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdots$$

而尺度调节法是把整个问题转化成另外一个非奇异的微扰问题  $X(\epsilon)$ ，下一步可以用迭代法或者展开法得到

$$X(\epsilon) \sim X_0 + \tilde{\delta}_1 X_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \cdots$$

而经过整合后，则有

$$x \sim \delta_0 (X_0 + \tilde{\delta}_1 X_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \cdots)$$

最后我们看一个 ODE 奇异扰动问题的例子。回顾一下第二章学习的一个简单的酶催化的化学反应过程



这里的  $S$  是底物 ("substrate" reactant) 的浓度， $P$  是最终产物的浓度， $E$  来表示酶的浓度， $C$  是中间产物的浓度。

根据质量作用定律，我们得到反应速率方程组

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= k_3 C, & \frac{dC}{dt} &= k_1 S E - k_2 C - k_3 C. \\ \frac{dC}{dt} &= -k_1 S E + k_2 C, & \frac{dE}{dt} &= -k_1 S E + k_2 C + k_3 C. \end{aligned}$$

我们进一步假设，最初系统里只有底物和酶，因为，我们给出如下的初值

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad C(0) = 0, \quad P(0) = 0.$$

利用质量守恒律，我们容易推出  $E(t) = E_0 - C(t)$ 。再对系统进行无量纲化，我们可以得到无量纲化的初值问题（练习）

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -s(1-c) + \lambda c, & s(0) &= 1, \\ \epsilon \frac{dc}{dt} &= +s(1-c) + \mu c, & c(0) &= 0, \\ \frac{dp}{dt} &= (\mu - \lambda) c, & p(0) &= 0. \end{aligned}$$

这里我们对无量纲参数有如下的假设

$$\epsilon = \frac{E_0}{S_0} \ll 1, \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1 S_0} = O(1), \quad \mu = \frac{k_2 + k_3}{k_1 S_0} = O(1).$$



这个假设说明，初始时刻酶的量远小于底物的量。注意， $s$  和  $c$  的方程并不依赖于  $p$ ，所以我们不妨只考虑  $s$  和  $c$  的初值问题。

在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时，这是一个奇异微扰问题，因为  $c$  的方程会从一个一阶微分方程退化成一个代数方程。我们先假设方程的解满足非奇异的展开

$$s(t) = s_0(t) + O(\varepsilon), \quad c(t) = c_0(t) + O(\varepsilon).$$

将展开代入原问题，我们得到如下的领阶方程

$$\frac{ds_0}{dt} = -s_0(1 - c_0) + \lambda c_0, \quad 0 = s_0(1 - c_0) + \mu c_0.$$

而且我们容易得到首项的初值条件

$$s_0(0) = 1, \quad c_0(0) = 1.$$

显然，这个初值条件和领阶方程中的代数方程是矛盾的。所以非奇异的展开并不能帮我们求解此问题。

更高级的尺度调节法可以帮我们求解这个奇异微扰问题，但是这些方法超出了本课的内容范围。感兴趣的同学欢迎参阅教材二的第7，8，9，10章。另外，也可以参考这个教材

[https://www.amazon.com/Advanced-Mathematical-Methods-Scientists-Engineers/dp/0387989315/ref=la\\_B001IQUJ56\\_1\\_1?s=books&ie=UTF8&qid=1522077321&sr=1-1](https://www.amazon.com/Advanced-Mathematical-Methods-Scientists-Engineers/dp/0387989315/ref=la_B001IQUJ56_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1522077321&sr=1-1)