浅谈最小比率环及其应用

南京外国语学校 魏佳泽

摘 要

本文介绍了最小比率环及其思想的应用，并利用最小比率环在一类最短路问题上获得了比已知解法更优的算法。

1 前言

比率问题是一类经典问题，有一套成熟的解法。最小比率环的思想在信息学竞赛中大量使用，却很少有资料对其进行总结。为此，文章介绍了最小比率环及其思想在各种问题上的应用。

文章第 2 节介绍了最小比率环的相关定义，第 3 节介绍了最小比率环的求解方法，第 4 节以最短路问题为例介绍了最小比率环的应用，第 5 节介绍了几个其它类型的比率问题的解法。

2 定义

假定读者已经掌握了最基本的图论术语，文章只对核心定义进行阐述。

在不引起歧义时，记 n 表示图的点数，m 表示图的边数。

定义 2.1 (途径)**.** 连接一串结点的序列称为**途径**（*Walk*），用点序列 $v_{0..k}$ 和边序列 $e_{1..k}$ 描述，其中 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$。

定义 2.2 (途径长度)**.** 定义途径 W 的**长度**为边数 k，记作 $|W|$。

说明：除 4.2 小节涉及无穷长途径以外，文章其它所有地方讨论的途径均为有限长，包括但不限于无特殊说明的，由途径引出的定义及相关定理。

定义 2.3 (途径权值)**.** 定义途径 W 的**权值**为其所有边的权值之和 $\sum_{i=1}^{k} w(e_i)$，记作 $w(W)$。

以上是途径权值的最常见定义，不符合该定义的情况会进行特殊说明，例如途径长度无穷长的情况。

定义 2.4 (环，负环与零环)**.** 除起点等于终点以外，所有点互不相同的途径称为**环**或**圈**（*Cycle*）。权值为负数的环称为**负环**。权值为 0 的环称为**零环**。

定义 2.5 (路径)**.** 所有点互不相同的途径称为**路径**（*Path*）。

特别注意：在信息学竞赛中，通常使用“路径”代指“途径”，用“环”代指“起点等于终点的途径”，这两组概念的区别均仅在于途径上的点是否可重。由于这种代指已被广泛采用，为避免繁琐的说明，文章接下来将立刻采用同样的代指。当需要强调路径上的点互不相同或路径上除了起点等于终点以外其它点互不相同时，文章将相对应地称呼为**简单路径**和**简单环**。

定义 2.6 (比率)**.** 定义一个非空途径 W 的**比率**（*Ratio*）为它的权值除以长度，记作 $r(W) = \frac{w(W)}{|W|}$。

定义 2.7 (最小比率环和最小环比率)**.** 称图上比率最小的环为**最小比率环**，记作 $C_{\min}(G)$，对应权值称为**最小环比率**，记作 $r_{\min}(G)$。类似定义**最大比率环** $C_{\max}(G)$ 和**最大环比率** $r_{\max}(G)$。

定义 2.8 (路径的连接)**.** 若路径 P' 的终点等于 Q 的起点，则将 P' 的终点和 Q 的起点连接在一起得到的路径 P 称为 P' 和 Q 的**连接**，记作 $P = P'Q$。

定义 2.9 (环的重复)**.** 对于环 C，将 k 个 C 连接在一起得到的环称为 C 的 k **重复**，记作 C^k。特别地，将无穷多个 C 连接在一起得到的路径称为环的无限重复，记作 C^∞。

3 最小比率环的求法

3.1 分数规划

给出定义在集合 $\boldsymbol{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$ 上的实函数 $f, g, h_{1..m}$，设 $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}_0 : h_j(\boldsymbol{x}) \le 0, j = 1, \cdots, m\}$，最大化 $\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ 的问题称为**分数规划**。

信息学竞赛中研究的分数规划一般形如给定一组 (a_i, b_i)，求一组 $c_i \in \{0, 1\}$ 最小化 $\frac{\sum a_i c_i}{\sum b_i c_i}$，其中 $b_i > 0$ 且要求 c_i 不全为 0，即选择一些物品（不可以不选），使得选中物品的 a_i 之和除以 b_i 之和最小。方便起见，文章称 a_i 为**权值**，b_i 为**权重**，$\frac{\sum a_i w_i}{\sum b_i w_i}$ 为**比率**。因系数 c_i 只有 0 和 1 两种取值，问题也称 0/1 分数规划。

0/1 分数规划的常用解法是二分法，通过二分答案将最优化问题转化为判定性问题。具体地，二分答案 mid，并比较答案与 mid 的大小。这相当于检查是否存在一组方案 $c_i \in \{0, 1\}$ 使得

$$\frac{\sum a_i c_i}{\sum b_i c_i} \le mid$$

变形后得

$$\sum c_i(a_i - mid \cdot b_i) \le 0$$

若无特殊限制，则只需检查是否存在 $a_i - mid \cdot b_i \le 0$，即 $\frac{a_i}{b_i} \le mid$。这很容易理解：如果任意选择均合法，选择比率最小的物品一定最优，再选其它任何物品均会让比率变大。

因此，题目会对 c_i 的选择进行限制，只有满足特殊条件的方案才合法。基于不同的限制条件，0/1 分数规划引出了最小比率环，最小比率背包，最小比率生成树，最大密度子图等一系列比率问题。文章重点研究最小比率环，其它比率问题将一并在文末提及。

3.2 二分法

例题 3.1 (最小圈[1]). 给定一张边带实数权的有向图，求最小环比率，或报告无解。

$2 \le n \le 3 \times 10^3$，$1 \le m \le 10^4$，$|w(u, v)| \le 10^7$。

写成分数规划的形式，元素是图上的每一条边 $e \in E$，每个元素的权值 a_i 为其边权 $w(e)$，权重 $b_i = 1$，要求选出的所有元素构成环。

对于最小比率环问题，可以借助分数规划的思路，使用二分法求解。二分答案 mid，比较最小环比率 $r_{\min}(G)$ 和 mid 的大小。

一个环的比率反映了其上所有边的边权的平均值。如果 $r_{\min}(G) < mid$，说明最小比率环的边权平均值小于 mid。此时将图上所有边的边权减去 mid，最小比率环变为负环；否则所有环的边权平均值不小于 mid，操作不会导致任何负环。

将所有边的边权减去 mid 并使用 Bellman-Ford 算法或 Shortest Path Faster Algorithm (SPFA) 算法求负环。若图上存在负环，则 $r_{\min}(G) < mid$，否则 $r_{\min}(G) \ge mid$。算法的时间复杂度为 $O(nm(\log \frac{w}{\epsilon}))$。

引理 3.1. 若一张图存在负环（零环），则存在简单负环（零环）。

证明. 假设图有负环 C，则 C 的长度有限。

若 C 不是简单环，则将 C 拆成两个非空环 C_1, C_2，方法是将重复出现的点的相邻两次出现对应的环 C_1 从 C 中取出，剩余部分头尾相接得到另一个环 C_2。

因为 $w(C) = w(C_1) + w(C_2) < 0$，所以 C_1 和 C_2 至少一个是负环。根据一个非简单负环，总能得到长度更小的负环。

不断进行上述操作，因负环长度不小于 1，所以过程总会停止。停止时对应的环一定是简单负环，否则与过程停止矛盾。

同理可证若存在零环，则存在简单零环。 □

引理 3.1 是使用 BF 算法或 SPFA 算法求负环的正确性保证。

定理 3.1. 总存在最小比率环是简单环。

[1]https://www.luogu.com.cn/problem/P3199，HNOI2009

证明. 将图上所有边的权值减去 $r_{\min}(G)$，则图上存在零环。由引理 3.1，存在简单零环，对应原图比率为 $r_{\min}(G)$ 的简单最小比率环。

该定理也可以通过糖水不等式

$$\min\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) \le \frac{a+c}{b+d} \le \max\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) \quad (b,d>0)$$

结合比率的定义和拆分非简单环的思想证明。 □

关于二分法的精度问题：直接在实数域上二分并不能求出精确解，只在题目限制较松，仅要求答案保留一定位小数时有效。

当边权是非负整数时（若边权有负数，则将所有边权全部加上边权最小值的绝对值），若题目要求用分数表示的精确解，可以考虑在有理数域上二分。一般的有理数域二分法超出了本文的讨论范围，感兴趣的读者可自行学习 Stern-Brocot 树。由于问题形式限制了 n 的规模不会太大，甚至只是检查负环的时间复杂度就已经达到了 $O(nm)$，这使得可以根据本题的特殊情况设计相对应的最优秀的解法。

答案可表示为分数 $\frac{x}{y}$，其中 $0 \le x \le nV$，$1 \le y \le n$，V 是边权的值域。由于分母不会超过 n，所以考虑实数二分，但用有理数表示边界。当 $mid' = \frac{l+r}{2}$ 的分母大于 n 时，寻找距离 mid' 最近的分母不超过 n 的有理数作为 mid。寻找最接近的有理数可以枚举每个分母计算，时间复杂度 $O(n)$。也可以使用 Stern-Brocot 树做到 $O(\log^2 n)$。

3.3 Karp 算法

Richard M. Karp 在 1977 年提出了快速求解**有向强连通图**最小平均权回路（最小比率环）的算法。不同于分数规划的二分法，Karp 算法是最小比率环问题的特化解法。它利用了有向图的性质，因此时间复杂度更优秀。

任取起点 s，设 $F_k(v)$ 为从 s 到 v 经过 k 条边的最短路，若不存在则为 $+\infty$。

引理 3.2. 若 $r_{\min}(G)=0$，则

$$\min_{v\in V}\max_{k=0}^{n-1}\frac{F_n(v)-F_k(v)}{n-k}=0$$

证明. 因为图中无负环，所以 s 到 v 存在一条边数不超过 $n-1$ 的最短路。设 s 到 v 的最短路权值为 $\pi(v)$，则 $F_n(v) \ge \pi(v)$ 且 $\min_{k=0}^{n-1} F_k(v)=\pi(v)$。于是

$$\max_{k=0}^{n-1}\frac{F_n(v)-F_k(v)}{n-k}=\frac{F_n(v)-\pi(v)}{n-k}\ge 0$$

只需证明存在 v 使得 $F_n(v)=\pi(v)$。设 C 是一个零环，v 是 C 上任意一点。设 $P(v)$ 是 s 到 v 的最短路，则 $P(v)C, P(v)CC, \cdots$ 也是 s 到 v 的最短路，因为它们的权值为 $w(P(v))=\pi(v)$。

最短路的每个前缀都是 s 到对应点的最短路，所以 $P(v)C^n$ 的长度为 n 的前缀是 s 到某个点 v' 的边数为 n 的最短路，则 v' 满足 $F_n(v')=\pi(v')$。 □

因此，考虑

$$f(G) = \min_{v\in V, F_n(v)\neq+\infty} \max_{k=0}^{n-1} \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n-k}$$

设 $\lambda = r_{\min}(G)$，将所有边的边权减去 λ 得到新图 G'，则 $r_{\min}(G') = 0$ 且

$$f(G') = \min_{v\in V, F_n(v)\neq+\infty} \max_{k=0}^{n-1} \frac{(F_n(v) - \lambda n) - (F_k(v) - \lambda k)}{n-k} = f(G) - \lambda$$

根据引理 3.2，$f(G') = r_{\min}(G') = 0$，所以 $f(G) = f(G') + \lambda = r_{\min}(G)$。一张有向强连通图的最小环比率可按照 f 的定义计算求出。

递推计算 $F_k(v)$ 的时间复杂度为 $O(nm)$，根据 $F_k(v)$ 计算 $f(G)$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$，算法的总时间复杂度为 $O(nm)$。

若图不是强连通图，使用 Tarjan 算法做强连通分量分解，并对每个强连通分量运行 Karp 算法。另一种解法：从证明可以看出，只要 s 可达最小比率环，算法就能求出正确结果。因此，新建超级源点 s' 向每个点连权值为 0 的边，这不改变答案，但使得 s' 一定可达最小比率环，前提是图上存在环。

4 在最短路问题上的应用

最小比率环的思想可应用于一类最短路问题：给定起点 s，求从 s 出发到每个点 v 经过恰好 k 条边的最短路权值。不妨规定 $s = 1$。

根据路径长度是否有限，可将问题分为两类，文章将分别进行研究。

4.1 路径长度有限

路径长度有限，即 k 为给定值。

4.1.1 矩阵快速幂解法

限制经过 k 条边且 k 较大的图论问题，经典解法是转化为线性代数的矩阵语言。

构造 $n\times n$ 的矩阵 $A_{i,j}$，满足第 i 行第 j 列的值为边 $i\to j$ 的权值，若不存在则为 $+\infty$，若有重边则取最小权。定义 $(\min,+)$ 矩阵乘法 $A\times B = C$ 为

$$C_{i,j} = \min(A_{i,k} + B_{k,j})$$

容易验证这样定义的矩阵乘法满足结合律，则问题相当于计算

$$\begin{bmatrix} 0 & +\infty & +\infty & \cdots & +\infty \end{bmatrix} \times A^k$$

结果是一个 n 维行向量，第 v 个位置的值为从 s 到 v 经过恰好 k 条边的最短路权值。若值为 $+\infty$，说明这样的路径不存在。时间复杂度 $O(n^3\log k)$。

4.1.2 最小比率环解法

例题 4.1 (矩阵快速幂[2]). 给定一张边带整数权的有向图，可能有重边和自环。求从 1 出发到每个点经过恰好 k 条边的路径权值的最小值对 998244353 取模后的结果。若路径不存在则输出 -1。

$1 \le n \le 300$，$1 \le m \le 2n$，$1 \le k \le 10^{64}$，$1 \le w(u, v) \le 10^{18}$。

这是笔者自主命制的集训队互测题。$O(n^3 \log k)$ 矩阵快速幂解法在本题并不可行，因为精确值的数量级达到了 10^{82}。选手必须使用高精度维护权值，导致算法常数过大，无法通过本题。

问题可以做到几乎和 k 无关。

定义 4.1 (点的最小比率环). 定义**点 v 的最小比率环**为所有经过点 v 的**简单环**中，比率最小的一个，记作 $C_{\min}(v)$，对应权值记作 $r_{\min}(v)$。类似定义点 v 的最大比率环 $C_{\max}(v)$，对应权值记作 $r_{\max}(v)$。

注意: 必须要求环为简单环。考虑图 $G = \{(1, 2, 1), (2, 2, 0), (2, 1, 1)\}$, $C_{\min}(1) = 1 \to 2 \to 1$。若不要求环为简单环，假设有限长的 $C_{\min}(1)$ 存在，则往环上添加自环 $(2, 2)$ 可得比率更小的环，与 $C_{\min}(1)$ 的最小比率性质矛盾。这样的情况在全局最小比率环上不会发生，但证明全局最小比率环一定可以是简单环的调整法不再适用于限制经过某一点的最小比率环，因为调整后无法保证新的最小比率环满足限制。

定义 4.2 (点集的最小比率环). 定义**点集 V 的最小比率环**为经过 V 中**任意**一点的最小比率简单环，记作 $C_{\min}(V)$，对应权值记作 $r_{\min}(V)$。类似定义点集 V 的最大比率环 $C_{\max}(V)$，对应权值记作 $r_{\max}(V)$。

若最小比率环不存在（唯一的可能是不存在经过 v 的环），则认为 $r_{\min}(v) = +\infty$。

当 $k \ge 2n^2$ 时，有以下结论：

引理 4.1. 考虑任意一条 s 到 v 的经过 k ($k \ge 2n^2$) 条边的最短路 $P(v)$。若 $P(v)$ 存在，设 $P(v)$ 经过的所有点的集合为 S。

那么，总存在一条 s 到 v 的经过 k 条边的最短路 $P'(v)$ 形如：从 s 出发，先走不超过 n^2 条边到达某个点集 S 的最小比率环 $C = C_{\min}(S)$，然后在 C 上不断绕整圈直到剩余步数不超过 n^2，最后走到 v，同时满足 C 上所有点均属于 S。

证明. 调整法。

设取到最小比率环对应的点为 $x \in S$。

任取 x 在路径中的某一次出现，将路径分为前半部分和后半部分。若前半部分的步数超过 n，根据抽屉原理，可以在前 n 步找到一个简单环。以此类推，可以在前 n^2 步找到 n 个

[2]https://www.luogu.com.cn/problem/P10000，集训队互测 2023 第八场

独立的简单环。因为 $1 \le |C| \le n$，根据抽屉原理，可以选出这 n 个环的非空子集，使得它们包含的边数之和是 $|C|$ 的倍数。

根据 C 的最小比率性质，C 的比率不大于经过路径上任意一点的简单环，故不大于路径上的任意简单环。将这些环替换为若干圈 C 的重复，路径权值和不会增大。不断替换直到前半部分的步数不大于 n^2。

类似处理后半部分步数大于 n^2 的情况。

替换过程中可能改变 S，因为删去简单环时可能导致 S 减小，且 C 上的所有点并不一定均属于 S。但如果替换后不满足终止条件，那么新的 $r_{\min}(S)$ 一定更大：假设调整前后 $r_{\min}(S)$ 不变，因为 $k > 2n^2$，所以调整时至少加入了一个 $C_{\min}(S)$，满足终止条件。因为 $r_{\min}(S)$ 仅有不超过 n 种可能的取值（$r_{\min}(v)$ 唯一），所以调整总会结束。 □

根据引理 4.1 设计如下解法：

预处理 $F(u, v, k)$ 表示从 u 到 v 经过恰好 k 条边的最短路权值，其中 $0 \le k \le n$，从而对每个点 v 求出 $r_{\min}(v)$ 的精确值 $\frac{w(C_{\min}(v))}{|C_{\min}(v)|}$，前提是 $r_{\min}(v)$ 存在。

预处理 $f_{i,v}$ 表示 s 走 i 步到 v 的最小权值，其中 $1 \le i \le n^2$，$1 \le v \le n$。当 $k \le 2n^2$ 时，将 f 预处理到 $i \le k$ 即可直接求出答案。

可以认为路径在第 $n^2 - n < i \le n$ 步进入最小比率环，因此枚举 $n^2 - n < i \le n$，$1 \le v \le n$ 且 $r_{\min}(v)$ 存在，表示 s 走 i 步进入经过 v 的最小比率环。通过在环上绕圈直到剩余步数不超过 n^2，根据 $|C_{\min}(v)|$ 求出剩余步数 d，根据 $w(C_{\min}(v))$ 求出路径权值，记录在 $g_{d,v}$ 中。最后根据 g 的所有信息递推回 g_0 求出答案。

$f_i \to f_{i+1}$ 和 $g_{i+1} \to g_i$ 单次转移的复杂度为 $O(m)$，总时间复杂度 $O(n^2 m)$。特别地，枚举 $n^2 - n < i \le n$，$1 \le j \le n$ 的时间复杂度为 $O(n^2)$，所以结论较弱使得这部分带更多 n 的算法也可以勉强通过，例如额外枚举环长 L。

注意：因为 k 过大，所以需要用 $\frac{ak+c}{b}$ 的形式储存答案。同时，代码需要大量使用 __int128，常数较大。经笔者测试，将前后不在最小比率环上的路径边数的阈值设为 $\frac{n^2}{2}$ 也能得到正确结果，但 $\frac{n^2}{3}$ 则不行。感兴趣的读者可以尝试将阈值卡满，或证明路径两端不在最小比率环上的路径边数不超过 $\frac{n^2}{2}$。

该算法给出了在 $(\min, +)$ 矩阵乘法下，$O(n^2 c)$ 计算向量乘以矩阵高次幂的结果，其中 c 是矩阵非空元素个数，复杂度和矩阵的幂次几乎无关。相较于常见的 $O(n^3 \log k)$ 矩阵快速幂，该算法在处理稀疏矩阵时表现更优秀。这也是本题要求 $m \le 2n$ 的原因。

例题 4.2 (Shortest Path[3]). 给定一张边带整数权的无向图，求 1 到 n 的长度为 $1 \sim x$ 的最短路权值之和，若最短路不存在则权值为 0。答案对 998244353 取模。

$1 \le n \le 2 \times 10^3$，$0 \le m \le 5 \times 10^3$，$1 \le x \le 10^9$，$1 \le w(i) \le 10^9$。可能存在自环和重边。

沿用上一题的结论，将无向边拆成两条有向边，可以证明引理 4.1。

[3]https://www.luogu.com.cn/problem/P9675，ICPC2022 济南区域赛

在引理 4.1 的证明过程中，如果调整终止时最后一步调整的 $|C| > 2$，因为本题是无向边，所以可以证明总存在长度不超过 2 的 C 满足引理条件。因此，最优路径的中途一定是在某条边上来回走，或者绕着自环转圈。后一种情况可视作前一种情况。

进一步地，$|C| \le 2$ 使得路径前后部分的长度不超过 $2n$，因为只要两个简单环就一定可以进行 C 的替换。

对 $k \le 4n$，直接求答案。对 $k > 4n$，枚举每条边考虑贡献：预处理从 1 和 n 走 $0 \le k \le 4n+1$ 步到 v 的最短路权值，可以对每个点 v 求出从 1 到 n 中途经过 v 且恰好走 $4n$ 和 $4n+1$ 步的最短路权值 $F_{4n}(v)$ 和 $F_{4n+1}(v)$。

于是，边 (u, v) 对 $k > 4n$ 的答案的贡献为

$$\begin{cases} F_{4n}(v) + (k - 4n)w(u, v), & (2 \mid k) \\ F_{4n+1}(v) + (k - 4n - 1)w(u, v), & (2 \nmid k) \end{cases}$$

分成 k 是奇数或偶数两种情况之后，答案来自每条边的贡献关于 k 是一个等差数列，于是答案关于 k 可表示为若干等差数列的 min。

求若干等差数列的 min 的和的方法有很多，例如求出凸壳后使用等差数列求和公式，或者使用李超树维护每个 k 的答案，然后二分出答案的每一段等差数列。

时间复杂度 $O(nm)$。

4.2 路径长度无限

求任意长度路径的权值最大值，此时路径可以经过无限条边。为了避免路径权值无穷大的情况，一般会设置衰减系数 $0 < \rho < 1$，表示每经过一条边，所有边的边权就会乘以 ρ。

注意：本小节讨论涉及“无穷”的概念。为保证严谨性，需要使用一些微积分方法。

无穷长路径的权值定义涉及无穷级数。根据 $0 < \rho < 1$ 可使用等比数列求和公式证明级数收敛于定值，该值即无穷长路径的权值。

无穷长路径的权值的最大值不是良定义的概念，因为无穷长路径的数量也是无穷多的，而无穷数集就算有上界，也不一定存在最大值。因此，笔者认为接下来讨论的两道例题的提问方式均不严谨。虽然可以证明一定能取到最大值，但将“最大值”改为“上确界”会更合理一些。

4.2.1 倍增法

例题 4.3 (幸福路径[4])**.** 给定一张点带实数权的有向图，路径 $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k$ 的权值为 $\sum_{i=0}^{k} \rho^i w(v_i)$，求从 v_0 出发的路径权值的最大值，四舍五入至小数点后一位。

$1 \le n \le 100$，$1 \le m \le 10^3$，$0 < \rho < 1 - 10^{-6}$，$0 \le w(v) \le 100$。

[4] https://www.luogu.com.cn/problem/P4308，CTSC2011

将点权转化为边权，设原图每条边的权值为终点权值，一条路径的权值为其所有边的权值加上路径起点的权值，路径起点产生的贡献 $w(v_0)$ 放在最后算。

题目仅要求答案保留一位小数，所以不需要算出精确值。当路径经过足够多条边之后，剩余部分的贡献可忽略不计。具体地，第 k 条边之后的贡献不超过

$$\epsilon(k) = \sum_{i \geq k} \rho^i \max w(v) = \frac{\rho^i}{1-\rho} \max w(v)$$

因为 $\rho < 1 - 10^{-6}$ 且 $\max w(v) \leq 100$，所以当 $k = 2^{26}$ 时，$\epsilon(k) \leq 10^{-21}$，精度已经足够。也就是说，令 $k = 2^{26}$ 转化为路径长度有限的情况，求得的答案与真实答案的差值不超过 10^{-21}。

注意：由于最优路径可以只经过有限条边，所以需要添加权值为 0 的自环，以保证最优路径总可以经过无限条边。

虽然转移无法写成矩阵乘法的形式，但可以借鉴矩阵快速幂的思路，使用倍增法求解问题。设 $f_{k,u,v}$ 表示从 u 出发经过 2^k 条边到 v 的最长路，若不存在则为 $-\infty$，初始 $f_{0,u,v} = w(u,v)$ 或 $-\infty$（若 $(u,v) \notin E$），有转移方程

$$f_{k+1,u,v} = \max_{p=1}^{n}(f_{k,u,p} + \rho^{2^k} f_{k,p,v})$$

算法的时间复杂度为 $O(n^3 \log k)$。

可以看出，倍增法只在精度要求不高的情况下适用。当衰减系数 ρ 和权值 w 为有理数时，可以证明答案也是有理数，此时就需要使用最大比率环法计算答案了。

4.2.2 最大比率环解法

例题 4.4 (大航海时代[5]). 给定一张点、边均带整数权的有向图，路径 $P = (v_0, e_1, \cdots, e_k, v_k)$ 的权值为

$$w(P) = q \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} p^i (1-p) \cdot w(v_i) \right) - q \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} p^i w(e_i) \right)$$

其中 $p = \frac{y}{y+z}$，y, z, q 为给定正整数。

对每个点 s，求从 s 出发的路径权值最大值，用分数表示答案。

$1 \leq n \leq 50$，$1 \leq m \leq 500$，$1 \leq y, z, q, w(i), w(u,v) \leq 10^4$。

本题是上一题的加强版。

题目同时有点权和边权，考虑将点权转化到边权上。设边 (u,v) 的新权值 $w'(u,v) = (1-p)w(v) - w(u,v)$，则路径权值改写为

$$q \cdot \left((1-p)w(v_0) + \sum_{i=1}^{k} p^i w'(e_i) \right)$$

[5] https://www.luogu.com.cn/problem/P5822，L&K Round 3，题意经过一定程度的抽象

其中 $(1-p)w(v_0)$ 只和起点有关，可以放在最后统计，这样就和上一题一样只剩边权了。

考虑最优路径的形态，本题中的“最优”即“最大”。有了路径长度有限的基础，自然的想法是路径会在经过 $O(\text{poly}(n))$ 条边之后不断地在某个环上绕圈。

本题中，特殊定义环的比率为由它不断重复得到的无限长路径的权值，即

$$r(C) = w(C^\infty) = w(C) + p^{|C|}w(C) + p^{2|C|}w(C) + \cdots = \frac{w(C)}{1-p^{|C|}}$$

和上一题一样，为每个点添加权值为 0 的自环不影响答案，但使得最优路径总可以经过无限条边。在此基础上，设 $F(s)$ 表示从 s 出发的路径权值的最大值（实际应定义为上确界）。

因为所有路径的权值有限，根据实数的确界原理，所有路径的权值在实数范围内存在上确界，即 $F(s)$ 存在。

引理 4.2. $F(s)$ 一定会由某条从 s 出发的 ρ 形路径取到，即先走一段不经过重复点的路径，然后在某个简单环上不断绕圈。这同时说明从 s 出发的路径权值存在最大值。

证明. 考虑 s 的所有出边 (s,u)，因路径长度无限，故

$$F(s) \geq (1-p)w(s) + p(w(u,s) + F(u))$$

且存在 u 使得

$$F(s) = (1-p)w(s) + p(w(u,s) + F(u))$$

根据上确界的定义使用 $\epsilon - \delta$ 语言容易证明该结论。

设 out_s 为任意一个这样的 u，则 out_s 存在。从 $s \to out_s$ 连边得到内向基环树，则从每个点出发下一步最优的点是 out_s。由此可知从每个点出发的最优路径是沿基环树不断移动，即 $F(s)$ 可由某条从 s 出发的 ρ 形路径取到，否则在第一个不同的位置调整，会导出与 F 值最优性的矛盾。 □

引理 4.3. 从 s 出发最优路径的环部分总可以是经过某个点的最大比率环。

证明. 考虑从 s 出发沿内向基环树边移动得到的无限长路径 P_s。由引理 4.2，P_s 是从 s 出发权值最大的路径，且 P_s 可表示为简单路径 P'_s 接上无穷多个简单环 Q_s。

设 Q_s 的起止点为 v，设经过 v 的最大比率环为 $C_v = C_{\max}(v)$。

根据路径权值的定义可知若 A 长度有限，B 长度任意，则 $w(B) \geq w(B')$ 当且仅当 $w(AB) \geq w(AB')$，所以比较两条路径的权值时，如果它们有一段公共前缀，则将这段前缀去掉不影响大小关系。

由 P_s 的最优性可知 $w(P'_sQ_s^\infty) \geq w(P'_sC_v^\infty)$，于是 $w(Q_s^\infty) \geq w(C_v^\infty)$，即 $r(Q_s) \geq r(C_v)$。但 C_v 是 v 的最大比率环且 Q_s 经过 v，所以 $r(C_v) \geq r(Q_s)$。

因此 $r(C_v) = r(Q_s)$，即 Q_s 是 v 的最大比率环。 □

根据引理 4.3 设计如下算法：

首先预处理 $f(k,u,v)$ 表示从 u 出发恰好走 k 条边的最长路权值，其中 $0 \le k \le n$。由 f 可以算出经过每个点 v 的最大比率环以及对应比率 $r_v = r_{\max}(v)$。

对每个起点 s，枚举 v，本质上是在枚举 n 个可能最大比率环之一，再枚举 $s \to v$ 的简单路径长度 k，则对应权值为 $q \cdot (f(k,s,v) + p^k \cdot r_v)$。因此

$$ans(s) = q \cdot \max_{v=1}^{n} \max_{k=0}^{n-1}(f(k,s,v) + p^k \cdot r_v)$$

时间复杂度 $O(n^2 m)$。

关于维护精确值的问题：本题需要使用高精度分数类维护所有值，导致复杂度多带一个 n^2 因子。由于高精度 gcd 耗时极其严重，所以无法保证在高精度分数运算过程中及时化简。为减小常数，在预处理 f 时，注意到 $f(k,u,v)$ 的分母一定是 $(y+z)^{k+1}$ 的因数，所以可设 $f'(k,u,v) = f(k,u,v) \cdot (y+z)^{k+1}$，此时计算和维护 f 就只涉及高精度整数类了。仍需一定常数优化才能通过本题，如使用压位高精度，尽可能减少高精度运算等。

5 其它比率问题

处理信息学竞赛常见的比率问题的通用手段是二分法，二分之后再根据问题的特性使用针对性算法解决。

5.1 最小比率背包

例题 5.1 (Talent Show[6])**.** 给定权值为 t_i，权重为 w_i 的 n 个物品，求选出若干物品的最大比率，要求选中物品的权重之和不小于 W。答案保留三位小数。

$1 \le n \le 250$，$1 \le W \le 10^3$，$1 \le w_i \le 10^6$，$1 \le t_i \le 10^3$。

二分答案 mid，判定能否选出若干物品使得选中物品的 $\sum t_i - mid \cdot w_i \ge 0$ 且 $\sum w_i \ge W$。

在对重量总和提出一定要求的限制下最小或最大化权值总和，这是经典的 01 背包，直接 DP 即可。时间复杂度 $O(nW \log \frac{t_i}{\epsilon})$。

5.2 最小比率生成树

例题 5.2 (Desert King[7])**.** 给定平面上 n 个点的坐标 (x_i, y_i) 和对应高度 z_i，对 $u \ne v$，定义无向边 (u,v) 的权值 a_e 为 $|z_u - z_v|$，权重 b_e 为 u,v 之间的欧几里得距离 $\sqrt{(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2}$，求选出若干条边的最大比率，要求选中的边恰好构成原图的生成树。边可以在平面上任意相交。答案保留三位小数。

[6]https://www.luogu.com.cn/problem/P4377，USACO2018 OPEN Gold

[7]http://poj.org/problem?id=2728

$2 \le n \le 10^3$，$0 \le x_i, y_i < 10^4$，$0 \le z \le 10^7$。

二分答案 mid，判定能否选出若干条边使得它们构成生成树且 $\sum a_e - mid \cdot b_e \ge 0$。

令一条边的权值为 $a_e - mid \cdot b_e$，问题转化为求最小生成树。因为本题是完全图，所以使用 Prim 算法即可。时间复杂度 $O(n^2 \log \frac{z}{\epsilon})$。

5.3 最大密度子图

定义 5.1 (导出子图)**.** 对图 $G = (V, E)$，定义 $V' \subseteq V$ 的**导出子图**为 V' 和两端均属于 V' 的边构成的边集 E' 组成的图 $G[V'] = (V', E')$。

定义 5.2 (图密度)**.** 对非空图 $G = (V, E)$，定义 G 的**密度**（*Density*）为边数除以点数，记作 $den(G) = \frac{|E|}{|V|}$。

例题 5.3 (Everywhere is Sparser than Whole (Judge)[8])**.** 给定一张 N 个点，$M = DN$ 条边的图 $G = (V, E)$，判断对任意非空 $V' \subset V$，是否均有 $den(G[V']) < D$，即对所有非平凡（非空且不等于 G）的导出子图，其密度是否均小于 D。

$1 \le N, D, M \le 5 \times 10^4$。保证图无重边和自环。

设 V' 的导出子图的边集为 $E(V')$，则问题等价于检查是否存在非空 $V' \subset V$ 使得 $|E(V')| - D \cdot |V'| \ge 0$。

每选一个点有 D 的代价，每选一条边有 1 的贡献，但要求其两端的点也被选择。为最大化权值，最优方案不会出现一条边的两端被选择，但它没有被选择的情况，即选中的边集等于选中点集的导出子图的边集。

这是最大权闭合子图的模型，解法为：构建有向二分图 $G' = (L, R, E)$，G 的每条边对应 G' 的一个左部点，每个点对应 G' 的一个右部点。默认选择所有边，不选所有点，初始权值为 M。从源点 S 向每个左部点连容量为 1 的边，每个左部点向对应的两个右部点连容量为 $+\infty$ 的边，每个右部点向汇点 T 连容量为 D 的边，用割表示一组方案：左边的边被割掉表示不选择对应的边产生 1 的代价，右边的边被割掉表示选择对应的点产生 D 的代价，不存在 $S \to T$ 的通路表示不存在一条被选择的边，它的任意一端不在闭合子图内。割的流量即产生的总代价。

最大化权值，即最小化总代价。而最小割等于最大流，所以当上述网络流模型的 S, T 最大流小于 M 时，说明最大权值大于 0，G 存在密度大于 D 的导出子图。求最大流使用 Dinic 算法，可以证明时间复杂度为 $O(M^{1.5})$。

问题出在最大流等于 M 的情况。此时 S 和左部点之间所有边的流量为零，从 S 出发 BFS 得到的割对应了所有边都不选择的 $V' = \varnothing$ 的不合法情况；右部点和 T 之间所有边的流量为零，从 T 出发 BFS 得到的割对应了所有点都选择的 $V' = V$ 的不合法情况。

[8] https://atcoder.jp/contests/arc161/tasks/arc161_f，ARC161F

已知 G 没有密度大于 D 的导出子图，但无法判断是否存在密度等于 D 的非平凡导出子图。有两种解决方法。

强连通分量解法：最大流等于 M，说明存在每个点匹配 D 条边的完美匹配。对于每条边，从它匹配的点指向另一个点，给所有边定向得到有向图 $\vec{G}$，则 G 存在非平凡的密度等于 D 的导出子图当且仅当 $\vec{G}$ 不是强连通图。求完美匹配的时间复杂度为 $O(M^{1.5})$，求强连通分量的时间复杂度为 $O(M)$，总时间复杂度 $O(M^{1.5})$。

证明. 充分性：若 $\vec{G}$ 不是强连通图，则对 $\vec{G}$ 做强连通分量分解，至少存在一个强连通分量（强连通分量缩点后出度为零的点）使得其中所有点的出边均指向强连通分量内部。因为每个点恰有 D 条出边，所以强连通分量对应 G 的密度等于 D 的非平凡导出子图。

必要性：若 G 存在密度为 D 的非平凡导出子图 $G[V'] = (V', E')$，则因为 E' 中的每一条边在 $\vec{G}$ 上都只能从 V' 指向 V'，而 $|E'| = |V'|D$，所以 $\vec{G}$ 不存在从 V' 指向 $V \backslash V'$ 的边，即 $\vec{G}$ 不强连通。 □

网络流解法：考虑钦定第一条边是否选择。

- 如果选第一条边，相当于钦定不割掉这条边，即令 $S \to L_1$ 的容量为无穷大。此时只要存在割掉左边任意一条边的最小割，就能说明 G 存在选中第一条边的密度等于 D 的非平凡导出子图。因为容易证明此时最大流（最小割）仍为 M，且 $S \to L_1$ 没有被割说明第一条边被选中，而某条 $S \to L_i$ 被割保证存在一条边没有被选中。

  引理 5.1. G 存在选中第一条边的密度等于 D 的非平凡导出子图，当且仅当存在 S 在残量网络上不可达的左部点 L_i。

  证明. 充分性：将 S 在残量网络上可达的点集作为割的左部点集，其余作为右部点集，则得到的割为最小割且 $S \to L_1$ 没有被割但 $S \to L_i$ 被割，从而 G 存在选中第一条边的密度等于 D 的非平凡导出子图。

  必要性：如果 G 存在选中第一条边的密度等于 D 的非平凡导出子图，那么根据导出子图和割的对应关系，存在割掉 $S \to L_i$ 且流量为 M 的最小割。考虑任意割掉 $S \to L_i$ 的最小割，这说明存在一种划分点集的方案，使得左部点集包含 S，右部点集包含 L_i，且中间所有边均不在残量网络上（最小割割边必然满流），这说明 S 在残量网络上不可达 L_i。 □

- 如果不选第一条边，相当于钦定割掉这条边，即令 $S \to L_1$ 的容量为 0。容易证明此时最大流（最小割）为 $M - 1$。假设新图的最小割不包含 $S \to L_1$，那么这个割在 G' 上的流量也为 $M - 1$，矛盾。此时只要找到一组割掉右边任意一条边的最小割，就能说明 G 存在不选第一条边的密度等于 D 的非平凡子图，因为此时的最小割对应 G' 流量为 M 的最小割，$S \to L_1$ 被割说明不选第一条边，割掉 $R_i \to T$ 说明选中了点 i。类

似地，可以证明 G 存在不选第一条边的密度等于 D 的非平凡子图，当且仅当存在右部点 R_i 在残量网络上不可达 T。

当最小割流量小于 M 时，不存在一个割使得全割左边或全割右边，所以不需要特殊判断最小割小于 M，即最大权闭合子图权值大于 0 的情况，而直接使用上述最小割等于 M 的算法即可。

这个做法只需要两次形式类似的网络流，且可以证明在改造后的图上运行 Dinic 算法求最大流的时间复杂度依然为 $O(M^{1.5})$。

例题 5.4 (Hard Life[9])**.** 求密度最大的非空导出子图。
$1 \le n \le 100$，$0 \le m \le 10^3$。保证图无重边和自环。

二分答案 mid。虽然无法直接套用上一题的做法，因为不能保证 $M = n \cdot mid$，但其中的思想还是可以借鉴的。

将 $\frac{|E|}{|V|} \ge mid$ 转化为 $|E| - mid \cdot |V| \ge 0$，建出最大权闭合子图模型，若最大流小于 $|E|$，说明存在密度大于 mid 的子图，反之则不存在。至于是否存在密度等于 mid 的子图则并不重要，这一点和上一题不一样。

求出最大密度 $den_{\max}$ 后还要构造方案。为了避免求出空图作为方案，需要令 $mid = den_{\max} - \epsilon$ 而非 $den_{\max}$ 再求一次最大权闭合子图以构造方案。因为若密度不同则相差至少 $\frac{1}{n^2}$，所以令 ϵ 取小于 $\frac{1}{n^2}$ 的值即可。

本题涉及实数权网络流，所以 Dinic 算法的复杂度只能分析到 $O(|V|^2|E|) = O(m^3)$。但网络流常数很小，就算结合二分也是可以接受的。最大密度子图还有一种点数 $O(n)$ 的网络流建图方法，感兴趣的读者可自行查找资料。

6 总结

本篇文章介绍了最小比率环的定义和求解方法，并基于最小比率环的性质，提出了更快解决固定起点和步数时的最短路问题：去掉了常用矩阵快速幂算法的 log 因子。文章系统性地阐述了路径长度无限时的最长路问题，并给出了解决方法。此外，文章对一些常见比率问题进行了汇总。

因笔者水平有限，未能对比率问题进行更深层次的研究，仅是将它们汇总。希望文章提出的算法能够在更多场合找到用武之地，也希望文章能够对比率问题的研究提供帮助。

致谢

感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。

[9] https://www.luogu.com.cn/problem/UVA1389

感谢南京外国语学校张超老师，李曙老师，史钋镭老师对我的指导。
感谢集训队教练彭思进和杨耀良的指导。
感谢程思元同学和我关于论文内容进行了大量讨论。
感谢汤智铖同学和郭羽冲同学为本文审稿。
感谢家人对我的关心与支持。

参考文献

[1] R. M. Karp, *A Characterization of the Minimum Cycle Mean in a Digraph*. Discrete Mathematics 23 (1978) 309-311.