ensiie

Langages et systèmes formels — 2012/2013

Rattrapage 13/02/2013 — 1h45

Tout appareil électronique est interdit et doit être rangé dans un sac fermé. Les notes de cours et de TD sur papier sont autorisées, pas les ouvrages. Lisez l'énoncé (2 pages). Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par difficulté : ne perdez pas tout votre temps sur un exercice...

Exercice 1

1. Définissez un automate non-déterministe reconnaissant le langage sur $\{a, b\}$ spécifié par l'expression régulière $a^*(b|\varepsilon)a$ (de manière intuitive).
2. Déduisez-en un automate non-déterministe correspondant à l'expression régulière $(a^*(b|\varepsilon)a)^*$
3. Même question pour $(a^*(b|\varepsilon)a)^*(b|\varepsilon)$.
4. Déterminisez et minimisez l'automate obtenu.
5. Déduire de l'automate une nouvelle expression régulière définissant ce langage.

Exercice 2

Question 2.1

On suppose qu'il existe un automate M reconnaissant le langage

$$L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}.$$

On note M_q l'automate défini de la même manière que M mais ayant l'état q comme état initial.

1. Soient q un état de M et n_0 un entier tels que b^{n_0} soit reconnu par M_q. Montrez que pour tout m différent de n_0, b^m n'est pas reconnu par M_q.
2. Déduisez-en que si l'automate M devait exister, il aurait un nombre infini d'états. Concluez.
3. Montrez en utilisant directement le lemme de l'étoile (ou lemme de pompage) qu'il n'existe pas d'automate déterministe fini reconnaissant le langage L. Existe-t-il un automate non-déterministe reconnaissant ce langage ?

Question 2.2

On considère maintenant la grammaire G où S est le start symbol (la source) et définie par les règles :

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid \varepsilon \\ A &\to a \mid AS \\ B &\to b \mid SB \end{aligned}$$

1. Les mots ab, $aaabbb$ et $abab$ sont-ils dans $\mathcal{L}(G)$?
2. Est-ce que G est ambiguë ? Justifiez votre réponse.
3. Montrez que, pour tout mot w appartenant à $\{a, b, A, B, S\}$ dérivé avec les règles de G à partir de S, on a :

   $$|w|_a + |w|_A = |w|_b + |w|_B$$

   où la notation $|w|_\alpha$ désigne le nombre de fois où la lettre α apparaît dans w.
4. En déduire que pour tout mot $w \in \mathcal{L}(G)$, on a $|w|_a = |w|_b$
5. Démontrez de manière similaire que $\mathcal{L}(G) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3

On considère une grammaire générant les expressions rationnelles sur l'alphabet $\{a, b\}$ avec les opérateurs usuels . (concaténation), + (réunion) et * (étoile de Kleene), et définie par les règles :

$$E \to E + E | E.E | E^* | \varepsilon | a | b$$

1. Montrez que cette grammaire est ambiguë.
2. Définissez une grammaire non ambiguë qui respecte les priorités usuelles (+ moins prioritaire que . moins prioritaire que *) et qui rend les opérateurs associatifs à droite.