

目录

目录	1
基础	1
常系数齐次线性递推	1
贪心	1
区间贪心问题	1
二元贪心	1
动态规划	1
背包问题	1
数据结构	2
分数 Fraction	2
高精度整数	2
线段树 Segment Tree	2
树状数组 Binary Indexed Tree	2
左偏树 Leftist Tree	2
哈夫曼树	2
图论	2
单源非负最短路 Dijkstra	2
最小生成树 Prim	2
最小生成树 Kruskal	2
网络流	2
计算几何	2
数论	3
拓展欧几里得	3
单变元模线性方程组	3
黑科技	3
IO 优化	3
时空优化	3

基础与经验

枚举 折半 搜索 模拟 打表 公式 二分 尺取 构造 离散化 及其组合

扫描 顺向 逆向 旗帜
枚举后单调 [扫雷]

括号序 左 0 右 1
环的处理

区间查询
- 区间和是否整除模 考察前缀和

中位数定理 [输油管道问题]

自然数列
- [Hybrid Crystal] 取数列中的元素, 如果可以凑出 $[1...sum]$ 区间中的任何一个数, 向数列加入新数 $x \leq sum+1$, 可以凑出 $[1...sum+x]$ 中的任何一个数。

斐波那契数列 斐波那契数列第 n 项

$$\begin{bmatrix} f(n+2) & f(n+1) \\ f(n+1) & f(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(2) & f(1) \\ f(1) & f(0) \end{bmatrix}^n \text{ 或 } \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

$$\text{通项公式 } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

常系数齐次线性递推

最长回文字串 Manacher

优化暴力匹配

贪心

区间贪心问题

活动安排问题

若干活动占用左闭右开的时间区间, 在活动时间不重叠的情况下选择尽可能多的活动: **右端点越小的区间优先** (为后续区间让出空间)

活动安排问题 2

若干活动占用左闭右开的时间区间, 同一个教室安排的活动不能重叠, 在使用教室尽可能少的情况下安排所有活动: **考虑活动在时间轴上的厚度**

二元贪心

独木舟问题

若干人乘若干独木舟, 独木舟有载重限制且只能乘坐两人。安排乘坐方案, 使占用的独木舟数量最少: **最轻与最终若能同乘则同乘** (极端化, 最优解可转化)

任务执行顺序

若干任务, 第 i 个任务计算时占用 $R[i]$ 空间, 完成计算后储存结果占用 $O[i]$ 空间 ($R[i] > O[i]$)。安排任务, 使占用的总空间尽可能少 => 设有整数 N , 第 i 个操作时 N 减 $a[i]$ 加 $b[i]$, 安排操作顺序, 在操作中不能出现负数的情况下 N 尽可能小: **$b[i]$ 非递增排序** 任何可行方案不优于按 $b[i]$ 非递增排序时的方案 (最优解可转化)

动态规划

树塔 矩阵取数 双向矩阵取数

$$dp[step+1][x1][x2] = \max\{dp[step][x1'][x2']\} + v[...]$$

最大子段和 最大子矩阵和 循环数组最大子段和 (总和 - 最小子段和)

正整数分组

$$dp[i][j] = dp[i-1][j-a[i]] \text{ or } dp[i-1][j+a[i]]$$

或背包问题, 背包容量 $sum/2$

子序列的个数

$$dp[i] = \begin{cases} dp[i-1]*2 & \text{若 } a[i] \text{ 未出现} \\ dp[i-1]*2 - dp[j-1] & \text{若 } a[i] \text{ 最近在 } j \text{ 位置出现} \end{cases}$$

最长公共子序列 LCS

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i-1][j-1] + 1 & \text{若 } x[i] = y[j] \\ \max\{dp[i][j-1], dp[i-1][j]\} & \text{若 } x[i] \neq y[j] \end{cases}$$

$$\text{编辑距离 } dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] + \text{same}(i,j) & dp[0][0] = 0 \\ dp[i-1][j] + 1 & dp[i][0] = i \\ dp[i][j-1] + 1 & dp[0][j] = j \end{cases}$$

最长单增子序列 LIS $dp[len] = \min\{tail\}$

优化

改进状态表示

四边形不等式

斜率优化

背包问题

- 01 背包问题
- 多重背包问题

数据结构

分数 Fraction

Numerator 分子 Denominator 分母
构造函数接受分子 num 和分母 den 作为参数，确保符号在分子上集中，并且断言分母不为零，然后进行约分。

高精度整数

// 正在整理

堆

并查集

经验 [圆环出列]

线段树 Segment Tree

// 正在整理

树状数组 Binary Indexed Tree

区间求和单点更新
// todo
区间求和区间更新
// todo

左偏树 Leftist Tree

编号为 0 的节点表示空节点

```
struct LeftTree
{
    const static int MXN = 100100;
    int tot = 0;
    int l[MXN], r[MXN], v[MXN], d[MXN];

    // 初始化为x的元素
    int init(int x)
    {
        tot++;
        v[tot] = x;
        l[tot] = r[tot] = d[tot] = 0;
        return tot;
    }

    // 合并堆顶编号为x, y的堆
    int merge(int x, int y)
    {
        if (!x) return y;
        if (!y) return x;
        if (v[x] < v[y])
            swap(x, y);
        r[x] = merge(r[x], y);
        if (d[l[x]] < d[r[x]])
            swap(l[x], r[x]);
        d[x] = d[r[x]] + 1;
        return x;
    }

    // 向堆顶编号为x的堆中插入值为v的元素
    int insert(int x, int v)
```

```

    {
        return merge(x, init(v));
    }

    // 取编号为x的堆的堆顶元素
    int top(int x)
    {
        return v[x];
    }

    // 弹出编号为x的堆的堆顶元素，返回新堆顶的编号
    int pop(int x)
    {
        return merge(l[x], r[x]);
    }
};
```

哈夫曼树

以频率为节点权值维护节点队列。合并队列中权值最小的两个节点，将合并的新节点放入队列中，重复步骤，直至队列中只存在一个节点。

图论

单源非负最短路 Dijkstra

升级 堆优化

SPFA

//todo

最小生成树理论基础

环定理 切分定理 最小权值边定理

最小生成树顶点优先 Prim

类似于 Dijkstra，但维护的距离是顶点到已松弛顶点的集合的距离。

最小生成树边优先 Kruskal

维护顶点的集合 $S=V_0$, $T=(V-S)$ 。边升序遍历，对于每一条边 (s, t) ，若 $s \in S, t \in T$ ，则将边加入树中，并将 t 并入 s ； T 中没有顶点时，算法结束，所得树为最小生成树。

网络流

最大流 Dinic

计算几何

向量

- 点乘 叉乘
- 两点共线的判定
- 线段相交的判定

数论

组合数

错排公式

费马小定理

若 p 为质数, $a^p \equiv a \pmod{p}$

若 a 不是 p 的倍数, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

引理, $a^p \equiv 1 \pmod{p} \rightarrow a \equiv \pm 1 \pmod{p}$

欧拉函数

Miller-Rabin 素性测试

拓展欧几里得

```
LL gcd(LL a, LL b, LL &x, LL &y)
{
    if (b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    else {
        LL r = gcd(b, a%b, y, x);
        y -= (a/b)*x;
        return r;
    }
}
```

单变元模线性方程组

```
vector<LL> line_mod_equation(LL a, LL b, LL n)
{
    LL x, y;
    LL d = gcd(a, n, x, y);

    vector<LL> ans;
    if (b%d == 0) {
        x %= n; x += n; x %= n;
        ans.push_back(x*(b/d)%n);
        for (LL i=1; i<d; ++i)
            ans.push_back((ans[0]+i*(n/d))%n);
    }
    return ans;
}
```

语言及黑科技

C++

```
set_intersection()
set_union()
set_difference()
```

字符串格式工具

```
string stoi stol stoll stod to string
*char atoi atol atof
```

IO 优化

```
template<typename T = int>
inline T read() {
    T val = 0, sign = 1; char ch;
    for (ch = getchar(); ch < '0' || ch > '9'; ch = getchar())
        if (ch == '-') sign = -1;
    for (; ch >= '0' && ch <= '9'; ch = getchar())
        val = val * 10 + ch - '0';
    return sign * val;
}
```

时空优化

展开循环: 牺牲程序的尺寸加快程序的执行速度

```
#pragma GCC optimize("unroll-loops")
```

Java

```
// BigInteger and BigDecimal
import java.math.*;
import java.util.Scanner;
```

add multiply subtract divide