

目录

目录	1
基础与经验	1
常系数齐次线性递推	1
字符串散列	1
字符串匹配 KMP	1
最长回文子串 Manacher	1
贪心	2
区间贪心问题	2
二元贪心	2
动态规划	2
一维	2
二维	2
三维	2
优化	2
背包问题	2
数据结构	2
分数 Fraction	2
高精度整数	2
堆	2
并查集	2
线段树 Segment Tree	2
树状数组 Binary Indexed Tree	2
左偏树 Leftist Tree	2
哈夫曼树	3
图论	3
单源非负最短路 Dijkstra	3
SPFA	3
最小生成树理论基础	3
最小生成树顶点优先 Prim	3
最小生成树边优先 Kruskal	3
网络流	3
最大流 Dinic	3
计算几何	3
向量	3
数论	3
欧拉函数	3
Miller-Rabin 素性测试	3
拓展欧几里得 $ax + by = \gcd(a, b)$	3
单变元模线性方程组 $ax \equiv b \pmod n$	4
Adhoc	4
蔡勒公式	4
语言及黑科技	4
C++	4
字符串格式工具	4
正则表达式 Regit	4
IO 优化	4
时空优化	4
Java	4

基础与经验

枚举 折半 搜索 模拟 打表 公式 二分 尺取 构造 离散化 染色

扫描 顺向 逆向 旗帜
枚举后单调 [扫雷]

二元对 左-1 右正 [WF-Comma]
环的处理

区间查询
- 区间和 树状数组 线段树
- 静态区间最值查询 稀疏表
- 区间和是否整除模 考察前缀和

中位数定理 [输油管道问题]

自然数列
- [Hybrid Crystal] 取数列中的元素，如果可以凑出 $[1...sum]$ 区间中的任何一个数，向数列加入新数 $x \leq sum+1$ ，可以凑出 $[1...sum+x]$ 中的任何一个数。

斐波那契数列 斐波那契数列第 n 项

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} f(n) & f(n+1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) & f(1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

通项公式 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

常系数齐次线性递推

已知 $f_x = a_0 f_{x-1} + a_1 f_{x-2} + \dots + a_{n-1} f_{x-n}$ 和 f_0, f_1, \dots, f_{n-1} ，给定 t ，求 f_t

$$\text{构造矩阵 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} f_{x-n} \\ f_{x-n+1} \\ \vdots \\ f_{x-2} \\ f_{x-1} \end{pmatrix}$$

字符串散列

简易 利用 `unordered_map<string, int>` 为字符串编号

字符串匹配 KMP

输入模式串 p ，文本串 s ，在 $O(N+M)$ 内求解模式串在文本串内的所有匹配位置的下标。注意文本串中匹配的模式串可以重叠。

```
int pre[maxN];
char s[maxN], p[maxN]; // 文本串、模板串

void prepare() {
    fill(pre, pre+maxN, -1);
    for (int i=1, j=-1; p[i]; ++i) {
        while (j>=0 && p[i] != p[j+1]) j = pre[j];
        if (p[i] == p[j+1]) ++j;
        pre[i] = j;
    }
}

void kmp(vector<int> &match) {
    match.clear(); prepare();
    for (int i=0, j=-1; s[i]; ++i) {
        while (j>=0 && s[i] != p[j+1]) j = pre[j];
        if (s[i] == p[j+1]) ++j;
        if (!p[j+1]) { // 匹配成功
            match.push_back(i-j);
        }
    }
}
```

最长回文子串 Manacher

优化暴力匹配
// 1-based: scanf("%s", str+1);
int solve()
{
 int i = 0, mx = 1; str[0] = '*';

```

while (str[i])
{
    int p = i;
    while (str[i+1] == str[i]) ++i;
    int q = i; // q之前不可能有更强的回文中心

    while (str[q-1]==str[p+1]) --q, ++p;
    mx = max(mx, q-p+1);

    ++i;
}
return mx;
}

```

贪心

区间贪心问题

活动安排问题

若干活动占用左闭右开的时间区间，在活动时间不重叠的情况下选择尽可能多的活动：**右端点越小的区间优先**（为后续区间让出空间）

活动安排问题 2

若干活动占用左闭右开的时间区间，同一个教室安排的活动不能重叠，在使用教室尽可能少的情况下安排所有活动：**考虑活动在时间轴上的厚度**

二元贪心

独木舟问题

若干人乘若干独木舟，独木舟有载重限制且只能乘坐两人。安排乘坐方案，使占用的独木舟数量最少：**最轻与最终若能同乘则同乘**（极端化，最优解可转化）

任务执行顺序

若干任务，第 i 个任务计算时占用 $R[i]$ 空间，完成计算后储存结果占用 $O[i]$ 空间（ $R[i] > O[i]$ ）。安排任务，使占用的总空间尽可能少 => 设有整数 N ，第 i 个操作时 N 减 $a[i]$ 加 $b[i]$ ，安排操作顺序，在操作中不能出现负数的情况下 N 尽可能小： **$b[i]$ 非递增排序** 任何可行方案不优于按 $b[i]$ 非递增排序时的方案（最优解可转化）

动态规划

树塔 矩阵取数 双向矩阵取数

$$dp[step + 1][x1][x2] = \max\{dp[step][x1'][x2']\} + v[...]$$

最大子段和 最大子矩阵和 循环数组最大子段和（总和 - 最小子段和）

正整数分组

$$dp[i][j] = dp[i - 1][j - a[i]] \text{ or } dp[i - 1][j + a[i]]$$

或背包问题，背包容量 $sum/2$

子序列的个数

$$dp[i] = \begin{cases} dp[i - 1] * 2 & \text{若 } a[i] \text{ 未出现} \\ dp[i - 1] * 2 - dp[j - 1] & \text{若 } a[i] \text{ 最近在 } j \text{ 位置出现} \end{cases}$$

最长公共子序列 LCS

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i - 1][j - 1] + 1 & \text{若 } x[i] = y[j] \\ \max\{dp[i][j - 1], dp[i - 1][j]\} & \text{若 } x[i] \neq y[j] \end{cases}$$

$$\text{编辑距离 } dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i - 1][j - 1] + \text{same}(i, j) & dp[0][0] = 0 \\ dp[i - 1][j] + 1 & dp[i][0] = i \\ dp[i][j - 1] + 1 & dp[0][j] = j \end{cases}$$

最长单增子序列 LIS $dp[len] = \min\{tail\}$

一维

二维

$$\text{石子归并 } dp[i][j] = \max_{i \leq k \leq j} \{dp[i][k] + dp[k][j]\} + \sum_{i \leq p \leq j} w[p]$$

三维

[CSA-Two Rows] $dp[r][c][turn]$
 Turn 选择 (r, c) 的玩家
 Dp 从 (r, c) 到终点的总花费

优化

改进状态表示

四边形不等式

斜率优化

背包问题

01 背包问题

多重背包问题

数据结构

分数 Fraction

Numerator 分子 Denominator 分母

构造函数接受分子 num 和分母 den 作为参数，确保符号在分子上集中，并且断言分母不为零，然后进行约分。

高精度整数

// 正在整理

堆

并查集

经验 [圆环出列]

线段树 Segment Tree

// 正在整理

树状数组 Binary Indexed Tree

区间求和单点更新

// todo

区间求和区间更新

// todo

左偏树 Leftist Tree

编号为 0 的节点表示空节点

```

struct LeftTree
{
    const static int MXN = 100100;
    int tot = 0;
    int l[MXN], r[MXN], v[MXN], d[MXN];

    // 初始化值为x的元素
    int init(int x)
    {
        tot++;
        v[tot] = x;
        l[tot] = r[tot] = d[tot] = 0;
        return tot;
    }

    // 合并堆顶编号为x, y的堆
    int merge(int x, int y)
    {
        if (!x) return y;
        if (!y) return x;
        if (v[x] < v[y])
            swap(x, y);
        r[x] = merge(r[x], y);
        if (d[l[x]] < d[r[x]])
            swap(l[x], r[x]);
        d[x] = d[r[x]] + 1;
        return x;
    }

    // 向堆顶编号为x的堆中插入值为v的元素
    int insert(int x, int v)
    {
        return merge(x, init(v));
    }

    // 取编号为x的堆的堆顶元素
    int top(int x)
    {
        return v[x];
    }

    // 弹出编号为x的堆的堆顶元素, 返回新堆顶的编号
    int pop(int x)
    {
        return merge(l[x], r[x]);
    }
};

```

哈夫曼树

以频率为节点权值维护节点队列。合并队列中权值最小的两个节点，将合并的新节点放入队列中，重复步骤，直至队列中只存在一个节点。

图论

二分图匹配

单源非负最短路 Dijkstra

升级 堆优化

SPFA

队列非空时，队头出队；松弛队头的边，已松弛且不在队列中的顶点入队。入队超过 n 次则图中存在负环。

最小生成树理论基础

环定理 切分定理 最小权值边定理

最小生成树顶点优先 Prim

类似于 Dijkstra，但维护的距离是顶点到已松弛顶点的集合的距离。

最小生成树边优先 Kruskal

维护顶点的集合 $S=V_0$, $T=(V-S)$ 。边升序遍历，对于每一条边 (s, t) ，若 $s \in S$, $t \in T$ ，则将边加入树中，并将 t 并入 s ； T 中没有顶点时，算法结束，所得树为最小生成树。

网络流

最大流 Dinic

计算几何

海伦公式 $A = \sqrt{p\sqrt{p-a}\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}}$ $p = \frac{a+b+c}{2}$

向量

点乘 叉乘
两点共线的判定
线段相交的判定

数论

二项式定理 $(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$

组合数 $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$
 $C(n, m) = C(n-1, m) + C(n-1, m-1)$

错排公式 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

费马小定理

若 p 为质数， $a^p \equiv a \pmod{p}$
若 a 不是 p 的倍数， $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
引理， $a^p \equiv 1 \pmod{p} \rightarrow a \equiv \pm 1 \pmod{p}$

自然数 N 具有奇数个因子 \leftrightarrow 自然数 n 是完全平方数

自然数 N 因子个数 $f(n)$ 考虑分解质因数

斯特林近似

求 n 的阶乘的长度，注意 $n=1, 0$ 的情况需要特殊处理。

```

LL Stirling(int n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    return LL(log10(sqrt(4.0*acos(0.0)*n))) +
    n*(log10(n)-log10(exp(1.0)))) + 1;
}

```

欧拉函数

Miller-Rabin 素性测试

拓展欧几里得 $ax + by = \gcd(a, b)$

```

LL gcd(LL a, LL b, LL &x, LL &y)
{
    if (b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    else {
        LL r = gcd(b, a%b, y, x);
        y -= (a/b)*x;
        return r;
    }
}

```

$$x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} \cdot t, \quad y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} \cdot t$$

单变元模线性方程组 $ax \equiv b \pmod{n}$

相当于求解 $ax + ny = b$ ，当且仅当 $\gcd(a,n) | n$ 时有解，且有 $\gcd(a,n)$ 个解。通解：

$$x_i = \left[x_0 + i \cdot \left(\frac{n}{\gcd(a,n)} \right) \right] \pmod{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \gcd(a,n) - 1$$

```
vector<LL> line_mod_equation(LL a, LL b, LL n)
{
    LL x, y;
    LL d = gcd(a, n, x, y);

    vector<LL> ans;
    if (b%d == 0) {
        x %= n; x += n; x %= n;
        ans.push_back(x*(b/d)%(n/d));
        for (LL i=1; i<d; ++i)
            ans.push_back((ans[0]+i*(n/d))%n);
    }
    return ans;
}
```

ADhoc

蔡勒公式

```
// 0: Sunday
int whatday(int year, int month, int day)
{
    int y=year%100, c=year/100, d=day;
    int m=month+(month<=2?12:0);
    return (y+y/4+c/4-2*c+(26*(m+1)/10)+d-1+7)%7;
}
```

语言及黑科技

C++

```
set_intersection()
set_union()
set_difference()
```

字符串格式工具

```
string stoi stol stoll stod to string
*char atoi atol atof
```

正则表达式 Regit

IO 优化

```
template<typename T = int>
inline T read() {
    T val = 0, sign = 1; char ch;
    for (ch = getchar(); ch < '0' || ch > '9'; ch = getchar())
        if (ch == '-') sign = -1;
    for (; ch >= '0' && ch <= '9'; ch = getchar())
        val = val * 10 + ch - '0';
    return sign * val;
}
```

时空优化

展开循环：牺牲程序的尺寸加快程序的执行速度

```
#pragma GCC optimize("unroll-loops")
```

Java

```
// BigInteger and BigDecimal
import java.math.*;
import java.util.Scanner;
```

add multiply subtract divide