目录

基础

枚举 折半 搜索 模拟 打表 公式 二分 尺取 构造 离散化 染色

[棋盘问题]

对称 [Marlin]对称地摆放酒店
异或 二进制位序

逆向 [Two buttons]

二分精度处理 取 eps 小于 1e 题目要求保留位数*2+1，或二分 100 次

测试顺序 变量边界 逻辑边界 乱序 极限 特殊
“大方的程序比 dirty-but-work 要好一些”

扫描 顺向 逆向 旗帜
单调枚举 [扫雷]

二元对 左-1 右正 [WF-Comma]
环的处理

区间查询
- **区间和** 树状数组 线段树
- **静态区间最值查询** 稀疏表
- **区间和是否整除模** 考察前缀和

中位数定理 [输油管道问题]

自然数列
- [Hybrid Crystal] 取数列中的元素，如果可以凑出[1…sum]区间中的任何一个数，向数列加入新数 x<=sum+1，可以凑出[1…sum+x]中的任何一个数。

斐波那契数列 斐波那契数列第 n 项

$$\binom{f(n)}{f(n+1)} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}^n \binom{f(0)}{f(1)} \quad 或 \quad \begin{bmatrix}f(n) & f(n+1)\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f(0) & f(1)\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}^n$$

通项公式 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$

归并排序求逆序数

```
ll A[50005],sum=0;
void merge(ll A[],ll l1,ll r1,ll l2,ll r2)
{
    ll T[50005];
    ll _l1=l1;
    ll index=0;
    while(l1<=r1 && l2<=r2)
    {
        if(A[l1]>A[l2])
        {
            T[index++]=A[l2++];
            sum=sum+r1-l1+1;
        }
        else T[index++]=A[l1++];
    }

    while(l1<=r1)T[index++]=A[l1++];
```

```
    while(l2<=r2)T[index++]=A[l2++];
    for(int i=0;i<index;i++)A[_l1+i]=T[i];
}

void mergesort(ll A[],ll l,ll r)
{
    if(l<r)
    {
        mergesort(A,l,(l+r)/2);
        mergesort(A,(l+r)/2+1,r);
        merge(A,l,(l+r)/2,(l+r)/2+1,r);
    }
}

int main()
{
    ll n;
    scanf("%lld",&n);
    for(int i=1;i<=n;i++)scanf("%lld",&A[i]);
    mergesort(A,1,n);
    printf("%lld\n",sum);
}
```

高精度乘法

```
ll A[10000],B[10000],C[10000];

void mt(string a,string b)
{
    if(a.length()<b.length())swap(a,b);
   ll mi=b.length();

   string zero(a.length()-mi,'0');
   b=zero+b;
   for(int i=0;i<=a.length()-1;i++)
   {
      A[i]=a[a.length()-1-i]-48;
      B[i]=b[a.length()-1-i]-48;
   }

   ll temp=0,digit=0;
   for(int i=0;i<=a.length()-1;i++)
   {
      for(int t=0;t<=mi-1;t++)
      {
         temp=temp+A[i]*B[t];
         if(i+t>=digit)C[digit++]=temp%10;
         else
            {
               temp=temp+C[i+t];
            C[i+t]=temp%10;
         }
         temp=temp/10;
      }
      while(temp)
      {
         C[digit++]=temp%10;
         temp=temp/10;
      }
   }
   for(;digit>1 && C[digit-1]==0;digit--);
   for(int i=digit-1;i>=0;i--)printf("%lld",C[i]);
   printf("\n");
}

int main()
{
   string a,b;
   cin>>a>>b;
   mt(a,b);
}
```

常系数齐次线性递推

已知$f_x = a_0 f_{x-1} + a_1 f_{x-2} + \cdots + a_{n-1} f_{x-n}$和$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$，给定$t$，求$f_t$

构造矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} f_{x-n} \\ f_{x-n+1} \\ \cdots \\ f_{x-2} \\ f_{x-1} \end{pmatrix}$

字符串散列

简易 利用 unorder_map<string, int>为字符串编号

字符串匹配 KMP

输入模式串 p，文本串 s，在 O(N+M)内求解模式串在在文本串内的所有匹配位置的下标。注意文本串中匹配的模式串可以重叠。

```
int pre[maxN];
char s[maxN], p[maxN];  // 文本串、模板串

void prepare() {
    fill(pre, pre+maxN, -1);
    for (int i=1, j=-1; p[i]; ++i)
    {
        while (j>=0 && p[i] != p[j+1]) j = pre[j];
        if (p[i] == p[j+1]) ++j;
        pre[i] = j;
    }
}

void kmp(vector<int> &match)
{
    match.clear(); prepare();
    for (int i=0, j=-1; s[i]; ++i) {
        while (j>=0 && s[i] != p[j+1]) j = pre[j];
        if (s[i] == p[j+1]) ++j;
        if (!p[j+1]) {  // 匹配成功
            match.push_back(i-j);
            j = pre[j];
        }
    }
}
```

最长回文子串 Manacher

优化暴力匹配

```
// 1-based: scanf("%s", str+1);
int solve()
{
    int i = 0, mx = 1; str[0] = '*';
    while (str[i])
    {
        int p = i;
        while (str[i+1] == str[i]) ++i;
        int q = i;  // q之前不可能有更强的回文中心

        while (str[q-1]==str[p+1]) --q, ++p;
        mx = max(mx, q-p+1);

        ++i;
    }
    return mx;
}
```

Manacher 紧凑实现

```
// str - 字符串
// len - 储存字符串的回文半径, 空间2n-1
// n   - 字符串的长度
void manacher(char str[], int len[], int n)
{
    len[0] = 1;
    for (int i = 1, j = 0; i < (n<<1)-1; ++i)
    {
        int p = i>>1, q = i-p, r = ((j+1)>>1)+len[j]-1;
        len[i] = r<q ? 0 : min(r-q+1, len[(j<<1)-i]);
        while (p>len[i]-1 && q+len[i]<n && str[p-
len[i]]==str[q+len[i]])
            ++len[i];
        if (q+len[i]-1 > r)
            j = i;
    }
}
```

经验

蔡勒公式

```
if (Month<=2)  // 使输入符合人性也符合公式
{
    Month=Month+12;
    Year--;
}
Week=(Day+2*Month+3*(Month+1)/5+Year+Year/4-
Year/100+Year/400+1)%7;
```

```
// 0-6 表示 星期日到星期六
```

表达式求值

前缀表达式求值

从右至左扫描前缀表达式，遇到数字入栈，遇到操作符弹出栈顶元素运算（栈顶 op 次顶），将结果入栈。

中缀表达式转前缀

1. 初始化运算符栈 S1，中间结果栈 S2
2. 从右至左扫描中缀表达式
   a) 遇到数字时入栈 S2
   b) 遇到运算符时比较 S1 栈顶的优先级，
      i) 若 S1 为空或为')'，运算符入栈
      ii) 若运算符优先级比 S1 栈顶高或相等，运算符入栈
      iii) 弹出 S1 栈顶的运算符至 S2，回到 b)
   c) 遇到括号时，
      i) 右括号入栈
      ii) 若为左括号，弹出 S1 中的运算符，并压入 S2，直至遇到右括号为止，丢弃左右括号
3. 将 S1 中剩余的运算符弹出并压入 S2
4. 弹出 S2 元素

模拟退火求费马点距

```
struct _node
{
	double x,y;
	_node()
	{
		x=y=0;
	}
}node[105];
ll n;

ll X[]={0,0,1,-1};
ll Y[]={-1,1,0,0};

double dist(_node a,_node b)
{
	return sqrt((a.x-b.x)*(a.x-b.x)+(a.y-b.y)*(a.y-
b.y));
}

double jl(_node a)
{
	double sum=0;
	for(int i=1;i<=n;i++)
	{
		sum+=dist(a,node[i]);
	}

	return sum;
}

double mnth()
{
	srand((unsigned)time(NULL));

	double ans=inf;
	double delta=0.98,T=10; //delta:降温速度 T:初始温度
					//(这2个变量的值不固定 自
己找感觉取就好了)
	_node p=node[1];
	while(T>1e-8)
	{

		for(int i=1;i<=10;i++)
		{
			_node s;
			s.x=p.x+T*(rand()%100-50);//要保证正负几率一
样
			s.y=p.y+T*(rand()%100-50);//要保证正负几率一
样
			if(ans>jl(s))
			{
				p=s;
				ans=jl(s);
			}
			else
			{
				double dE=ans-jl(s);
				if(exp(dE/T) >
rand()/double(RAND_MAX))
				{
					p=s;
					ans=jl(s);
				}
			}
		}
		T=T*delta;
	}
	return ans;
}
int main()
{
	scanf("%lld",&n);
	for(int i=1;i<=n;i++)
	{
		scanf("%lf%lf",&node[i].x,&node[i].y);
	}
	ll ans=mnth()+0.5;
	printf("%lld\n",ans);
}
```

贪心

基本思路

贪心操作能为后续操作提供便利

假定某方案是最优解，通过贪心操作可以使比最优解更优秀的解出现，或最优解可转化为贪心解

区间贪心问题

活动安排问题

若干活动占用左闭右开的时间区间，在活动时间不重叠的情况下选择尽可能多的活动：**右端点越小的区间优先**（为后续区间让出空间）

活动安排问题 2

若干活动占用左闭右开的时间区间，同一个教室安排的活动不能重叠，在使用教室尽可能少的情况下安排所有活动：**考虑活动在时间轴上的厚度**

一元贪心

[排队接水]

二元贪心

独木舟问题

若干人乘若干独木舟，独木舟有载重限制且只能乘坐两人。安排乘坐方案，使占用的独木舟数量最少：**最轻与最终若能同乘则同乘**（极端化，最优解可转化）

任务执行顺序

若干任务，第 i 个任务计算时占用 R[i]空间，完成计算后储存结果占用 O[i]空间（R[i]>O[i]）。安排任务，使占用的总空间尽可能少 => 设有整数 N，第 i 个操作时 N 减 a[i]加 b[i]，安排操作顺序，在操作中不能出现负数的情况下 N 尽可能小：**b[i]非递增排序** 任何可行方案不优于按 b[i]非递增排序时的方案（最优解可转化）

动态规划

树塔 矩阵取数 双向矩阵取数

$$dp[step+1][x1][x2]=\max\{dp[step][x1'][x2']\}+v[\ldots]$$

最大子段和 最大子矩阵和 循环数组最大子段和（总和 – 最小子段和）

正整数分组

$$dp[i][j]=dp[i-1][\,|j-a[i]|\,]\ or\ dp[i-1][j+a[i]]$$

或转换为背包问题，背包容量 sum/2

子序列的个数

$$dp[i]=\begin{cases}dp[i-1]*2 & 若a[i]未出现\\ dp[i-1]*2-dp[j-1] & 若a[i]最近在j位置出现\end{cases}$$

最长公共子序列 LCS

$$dp[i][j]=\begin{cases}dp[i-1][j-1]+1 & 若x[i]=y[j]\\ max\{dp[i][j-1],dp[i-1][j]\} & 若x[i]\neq y[j]\end{cases}$$

编辑距离 $dp[i][j]=min\begin{cases}dp[i-1][j-1]+same(i,j) & dp[0][0]=0\\ dp[i-1][j]+1 & dp[i][0]=i\\ dp[i][j-1]+1 & dp[0][j]=j\end{cases}$

最长单增子序列 LIS $\begin{cases}dp[len]=min\{tail\}, & O(nlogn)\\ dp[i]=max\{dp[j]\}+1, & O(n^2)\end{cases}$

一维

二维

石子归并 $dp[i][j]=\max\limits_{i\le k\le j}\{dp[i][k]+dp[k][j]\}+\sum_{i\le p\le j}w[p]$

三维

[CSA-Two Rows] $dp[r][c][turn]$
Turn 选择(r,c)的玩家
Dp 从(r,c)到终点的总花费

优化

改进状态表示

四边形不等式

斜率优化

背包问题

01 背包
完全背包 与 01 背包容量遍历的顺序相反
多重背包 二进制分拆
混合背包 对属于不同背包的物品，使用对应解决背包问题的状态转移。

数据结构

分数 Fraction

Numerator 分子 Denominator 分母
构造函数接受分子 num 和分母 den 作为参数，确保符号在分子上集中，并且断言分母不为零，然后进行约分。

高精度整数

简易

堆

堆排序 O(nlogn)

```
long long arr[maxN];  // 待排序数组, 0-based

// 下沉操作
void perc_down(long long *arr, int i, int n)
{
    auto lson = [](int x){ return 2*x+1; };
    auto rson = [](int x){ return 2*x+2; };
    while (true)
    {
        int l = lson(i), r = rson(i);
        if (l<n) {
            int mx = (r<n && arr[r]>arr[l] ? r : l);
            if (arr[i] < arr[mx]) {
                swap(arr[i], arr[mx]);
                i = mx;
            }
            else break;
        }
        else break;
    }
}

// 堆排序
void heap_sort(long long *arr, int n)
{
    for (int i = n-1; i>=0; --i)  // 创建堆
    {
        perc_down(arr, i, n);
    }
    for (int i = n-1; i; --i)  // 输出排序结果
    {
        swap(arr[0], arr[i]);
        perc_down(arr, 0, i);
    }
}
```

稀疏表 O(nlogn)

动态查询序列在区间[L, R]上的最值。$st[i][j]$，自第 i 个元素开始连续 2^j次方的元素的最值。

```
vector<int> num;  // 维护num序列的最值
int preLog2[maxN];
int st[maxN][32];

// 建立preLog2和st
void init()
{
    int n=num.size();

    preLog2[1] = 0;
    for (int i=2; i<=n; ++i) {
        preLog2[i] = preLog2[i-1];
        if (1<<(preLog2[i]+1) == i) {
            ++preLog2[i];
        }
    }
    for (int i=n-1; i>=0; --i) {
        st[i][0] = num[i];
        for (int j=1; i+(1<<j)-1<n; ++j) {
            st[i][j] = min(st[i][j-1],
                           st[i+(1<<(j-1))][j-1]);
        }
    }
}

// 查询区间[x, y]上的最值
int query(int x, int y)
{
    int k = preLog2[y-x+1];
    return min(st[x][k], st[y-(1<<k)+1][k]);
}
```

并查集

[圆环出列] [Market] 先祖节点出列
[Posterized] 贪心区间划分

带权并查集 维护额外信息，表示当前节点与先祖节点的关系

[食物链] 当前节点与先祖节点形成向量三角形关系

```
// POJ-1182

int n;
int fa[50500], rk[50500];
// rk[x] = r(x->find(x)): 0-同类 1-捕食者 2-被捕食者

void init() {
    for (int i = 0; i <= n; ++i) fa[i] = i, rk[i] = 0;
}

// 寻找x的先祖节点, 并维护rk
int find(int x)
{
    if (fa[x] == x) return x;
    int old = fa[x]; fa[x] = find(fa[x]);
    rk[x] = (rk[x] + rk[old]) % 3;
    return fa[x];
}

// 利用rk信息检查“一句话”是否合理
bool check(int a, int b, int r)
{
    if (max(a, b) > n) return false;
```

```
    if (a==b && r!=0) return false;
    if (find(a) != find(b)) return true;
    return rk[a] == (r+rk[b])%3;
}

// 合并集合，并维护rk
void merge(int a, int b, int r) {
    int ra = find(a), rb = find(b);
    if (ra == rb) return;
    fa[ra] = rb; rk[ra] = (r+rk[b]-rk[a]+3)%3;
}

int main()
{
    int k; scanf("%d%d", &n, &k);
    {
        init(); int ans = 0;
        while (k--) {
            int r, x, y; scanf("%d%d%d", &r, &x, &y);
            if (!check(x, y, r-1)) ++ans;
            else merge(x, y, r-1);
        }
        printf("%d\n", ans);
    }
}
```

[How many answers are wrong?] 当前节点与先祖节点形成数值差异关系

线段树 Segment Tree

点修改 点覆盖

根节点为 1 叶子节点 leaf 数组

```
#define lson(x) ((x)<<1)
#define rson(x) ((x)<<1|1)
int leaf[maxN];  // 记录叶子节点的索引
struct SegmentTreeNode{
    int l, r;
    LL val, vmx, vmn;
} node[maxN<<2];  // 根节点为1，占据四倍序列长度空间

// build(1, 1, n, arr)
// 使用arr数组提供的初值，以1为根节点，建立覆盖区间[1, n]的线段树
void build(int rt, int l, int r, LL *arr)
{
    node[rt].l = l, node[rt].r = r;
    if (l==r) {
        leaf[l] = rt;
        node[rt].val = node[rt].vmx = node[rt].vmn = arr[l];
    }
    else {
        int mid = (l+r)/2;
        build(lson(rt), l, mid, arr);
        build(rson(rt), mid+1, r, arr);
        node[rt].val = node[lson(rt)].val + node[rson(rt)].val;
        node[rt].vmx = max(node[lson(rt)].vmx, node[rson(rt)].vmx);
        node[rt].vmn = min(node[lson(rt)].vmn, node[rson(rt)].vmn);
    }
}

void pushup(int rt) {
    while (rt>>=1) {
        node[rt].val = node[lson(rt)].val + node[rson(rt)].val;
        node[rt].vmx = max(node[lson(rt)].vmx, node[rson(rt)].vmx);
        node[rt].vmn = min(node[lson(rt)].vmn, node[rson(rt)].vmn);
    }
}

// modify(leaf[x], val)
// 将叶子x节点修改为val
void modify(int rt, LL val) {
    node[rt].val = node[rt].vmx = node[rt].vmn = val;
    pushup(rt);
}

// update(leaf[x], diff)
// 将叶子节点x值增加diff
void update(int rt, LL diff)
{
    node[rt].val += diff;
    node[rt].vmx = node[rt].vmn = node[rt].val;
    pushup(rt);
}

// query(1, l, r)
// 自根节点向下，查询区间[l, r]和
LL query(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r)
        return node[rt].val;
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query(rson(rt), l, r);
    return query(lson(rt), l, mid) + query(rson(rt), mid+1, r);
}

// query_max(1, l, r)
// 自根节点向下，查询区间max{[l, r]}
LL query_max(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r)
        return node[rt].vmx;
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query_max(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query_max(rson(rt), l, r);
    return max(query_max(lson(rt), l, mid), query_max(rson(rt), mid+1, r));
}

// query_min(1, l, r)
// 自根节点向下，查询区间min{[l, r]}
LL query_min(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r)
        return node[rt].vmn;
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query_min(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query_min(rson(rt), l, r);
    return min(query_min(lson(rt), l, mid), query_min(rson(rt), mid+1, r));
}
```

区间修改

根节点为 1 延迟更新 Lazy 标记

```
#define lson(x) ((x)<<1)
#define rson(x) ((x)<<1|1)
struct SegmentTreeNode{
    int l, r;
    LL val, vmx, vmn;
    LL lazy;  // 延迟标记，表示覆盖区域内每个单独节点的增量
} node[maxN<<2];  // 根节点为1，四倍空间初始化

// build(1, 1, n, arr)
// 使用arr数组提供的初值，以1为根节点，建立覆盖区间[1, n]的线段树
void build(int rt, int l, int r, LL *arr)
{
    node[rt].l = l, node[rt].r = r;
    node[rt].lazy = 0;
    if (l==r) {
        node[rt].val = node[rt].vmx = node[rt].vmn = arr[l];
    }
    else {
        int mid = (l+r)/2;
        build(lson(rt), l, mid, arr);
        build(rson(rt), mid+1, r, arr);
        node[rt].val = node[lson(rt)].val + node[rson(rt)].val;
        node[rt].vmx = max(node[lson(rt)].vmx, node[rson(rt)].vmx);
        node[rt].vmn = min(node[lson(rt)].vmn, node[rson(rt)].vmn);
    }
}

// 下传延迟标记
void pushdown(int rt)
{
    if (node[rt].lazy) {
        node[rt].val += node[rt].lazy*(node[rt].r-node[rt].l+1);
        node[rt].vmx += node[rt].lazy;
        node[rt].vmn += node[rt].lazy;
        node[lson(rt)].lazy += node[rt].lazy;
        node[rson(rt)].lazy += node[rt].lazy;
    }
```

```cpp
        node[rt].lazy = 0;
}

// query(1, 1, r)
// 自根节点向下，查询区间[l, r]和
LL query(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r)
        return node[rt].val + node[rt].lazy*(node[rt].r-node[rt].l+1);
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query(rson(rt), l, r);
    return query(lson(rt), l, mid) + query(rson(rt), mid+1, r);
}

LL query_max(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r)
        return node[rt].vmx + node[rt].lazy;
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query_max(lson(rt), l, r);
    if(mid<l)
        return query_max(rson(rt), l, r);
    return max(query_max(lson(rt), l, mid), query_max(rson(rt), mid+1, r));
}

LL query_min(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r)
        return node[rt].vmn + node[rt].lazy;
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query_min(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query_min(rson(rt), l, r);
    return min(query_min(lson(rt), l, mid), query_min(rson(rt), mid+1, r));
}

// update(1, l, r, diff)
// 自根节点向下，将[l, r]区间内的元素增加diff
void update(int rt, int l, int r, int diff)
{
    if (l<=node[rt].l&&node[rt].r<=r) {
        node[rt].lazy += diff;
        return;
    }
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid) {
        update(lson(rt), l, r, diff);
    }
    else if (mid<l) {
        update(rson(rt), l, r, diff);
    }
    else {
        update(lson(rt), l, r, diff);
        update(rson(rt), l, r, diff);
    }
    node[rt].val = query(lson(rt), node[rt].l, mid) + query(rson(rt), mid+1, node[rt].r);
    node[rt].vmx = max(query_max(lson(rt), node[rt].l, mid), query_max(rson(rt), mid+1, node[rt].r));
    node[rt].vmn = min(query_min(lson(rt), node[rt].l, mid), query_min(rson(rt), mid+1, node[rt].r));
}
```

区间覆盖

```cpp
#define lson(x) ((x)<<1)
#define rson(x) ((x)<<1|1)
struct SegmentTreeNode{
    int l, r;
    LL val, vmx, vmn;
    LL lazy;  // 延迟标记，表示管辖区域内每个单独节点的增量
    LL force;  // 覆盖标记，表示管辖区域内每个节点被修改后的值，注意修改为0的情况
} node[maxN<<2];  // 根节点为1，四倍空间初始化
bool covered[maxN<<2];  // 节点管辖区域是否被覆盖

// build(1, 1, n, arr)
// 使用arr数组提供的初值，以1为根节点，建立覆盖区间[1, n]的线段树
void build(int rt, int l, int r, LL *arr)
{
    node[rt].l = l, node[rt].r = r;
    node[rt].lazy = node[rt].force = 0;
    if (l==r) {
        node[rt].val = node[rt].vmx = node[rt].vmn = arr[l];
    }
    else {
        int mid = (l+r)/2;
        build(lson(rt), l, mid, arr);
        build(rson(rt), mid+1, r, arr);
        node[rt].val = node[lson(rt)].val + node[rson(rt)].val;
        node[rt].vmx = max(node[lson(rt)].vmx, node[rson(rt)].vmx);
        node[rt].vmn = min(node[lson(rt)].vmn, node[rson(rt)].vmn);
    }
}

// 下传延迟标记或覆盖标记
void pushdown(int rt)
{
    if (covered[rt]) {
        node[rt].val = node[rt].force*(node[rt].r-node[rt].l+1);
        node[rt].vmx = node[rt].vmn = node[rt].force;
        covered[lson(rt)] = covered[rson(rt)] = true;
        node[lson(rt)].lazy  = node[rson(rt)].lazy  = 0;
        node[lson(rt)].force = node[rson(rt)].force = node[rt].force;
        covered[rt] = false;
    }
    if (node[rt].lazy) {
        node[rt].val += node[rt].lazy*(node[rt].r-node[rt].l+1);
        node[rt].vmx += node[rt].lazy;
        node[rt].vmn += node[rt].lazy;
        node[lson(rt)].lazy += node[rt].lazy;
        node[rson(rt)].lazy += node[rt].lazy;
        node[rt].lazy = 0;
    }
}

// query(1, l, r)
// 自根节点向下，查询区间[l, r]和
LL query(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r) {
        if (covered[rt]) return (node[rt].force+node[rt].lazy)*(node[rt].r-node[rt].l+1);
        return node[rt].val + node[rt].lazy*(node[rt].r-node[rt].l+1);
    }
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query(rson(rt), l, r);
    return query(lson(rt), l, mid) + query(rson(rt), mid+1, r);
}

LL query_max(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r) {
        if (covered[rt]) return node[rt].force + node[rt].lazy;
        return node[rt].vmx + node[rt].lazy;
    }
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query_max(lson(rt), l, r);
    if(mid<l)
        return query_max(rson(rt), l, r);
    return max(query_max(lson(rt), l, mid), query_max(rson(rt), mid+1, r));
}

LL query_min(int rt, int l, int r)
{
    if (node[rt].l==l&&node[rt].r==r) {
        if (covered[rt]) return node[rt].force + node[rt].lazy;
        return node[rt].vmn + node[rt].lazy;
    }
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid)
        return query_min(lson(rt), l, r);
    if (mid<l)
        return query_min(rson(rt), l, r);
    return min(query_min(lson(rt), l, mid),
```

```
query_min(rson(rt), mid+1, r));
}

// update(1, l, r, diff)
// 自根节点向下，将[l, r]区间内的元素增加diff
void update(int rt, int l, int r, int diff)
{
    if (l<=node[rt].l&&node[rt].r<=r) {
        node[rt].lazy += diff;
        return;
    }
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid) {
        update(lson(rt), l, r, diff);
    }
    else if (mid<l) {
        update(rson(rt), l, r, diff);
    }
    else {
        update(lson(rt), l, r, diff);
        update(rson(rt), l, r, diff);
    }
    node[rt].val = query(lson(rt), node[rt].l, mid) + query(rson(rt), mid+1, node[rt].r);
    node[rt].vmx = max(query_max(lson(rt), node[rt].l, mid), query_max(rson(rt), mid+1, node[rt].r));
    node[rt].vmn = min(query_min(lson(rt), node[rt].l, mid), query_min(rson(rt), mid+1, node[rt].r));
}

// modify(1, l, r, val)
// 自根节点向下，将[l, r]区间的元素修改为val
void modify(int rt, int l, int r, int val)
{
    if (l<=node[rt].l&&node[rt].r<=r) {
        node[rt].lazy = 0; node[rt].force = val;
        covered[rt] = true;
        return;
    }
    pushdown(rt);
    int mid = (node[rt].l+node[rt].r)/2;
    if (r<=mid) {
        modify(lson(rt), l, r, val);
    }
    else if (mid<l) {
        modify(rson(rt), l, r, val);
    }
    else {
        modify(lson(rt), l, r, val);
        modify(rson(rt), l, r, val);
    }
    node[rt].val = query(lson(rt), node[rt].l, mid) + query(rson(rt), mid+1, node[rt].r);
    node[rt].vmx = max(query_max(lson(rt), node[rt].l, mid), query_max(rson(rt), mid+1, node[rt].r));
    node[rt].vmn = min(query_min(lson(rt), node[rt].l, mid), query_min(rson(rt), mid+1, node[rt].r));
}
```

扫描线方法

[POJ-1151]

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;

const int maxN = 202;

struct edge
{
    double x1, x2, y; int type;
    bool operator <(const edge& b) const
    {
        return y<b.y;
    }
} e[maxN];

double h[maxN];
double len[maxN<<2]; int cover[maxN<<2];

#define ls (rt<<1)
#define rs ((rt<<1)|1)
void pushup(int rt, int l, int r)
{
    if (cover[rt]>0) len[rt] = h[r] - h[l];
    else
    {
        if (l+r!=1) len[rt] = len[ls] + len[rs];
        else len[rt] = 0;
    }
}

void update(int rt, int l, int r, int p, int q, int v)
{
    if (p<=l&&r<=q) cover[rt] += v;
    else
    {
        int mid = (l+r)/2;
        if (p<mid) update(ls, l, mid, p, min(mid, q), v);
        if (q>mid) update(rs, mid, r, max(mid, p), q, v);
    }
    pushup(rt, l, r);
}

int main()
{
    int kase = 0, n;
    while (scanf("%d", &n)==1 && n)
    {
        if (kase) {
            memset(len, 0, sizeof(len));
            memset(cover, 0, sizeof(cover));
            putchar('\n');
        }

        int res = 0;
        for (int i = 0; i < n; ++i)
        {
            double x1, y1, x2, y2;
scanf("%lf%lf%lf%lf", &x1, &y1, &x2, &y2);
            e[res] = {x1, x2, y1, 1}; h[res++] = x1;
            e[res] = {x1, x2, y2,-1}; h[res++] = x2;
        }
        sort(e, e+res);
        sort(h, h+res); res=unique(h, h+res)-h;

        double ans = 0;
        for (int i = 0; i < 2*n-1; ++i)
        {
            int p = lower_bound(h, h+res, e[i].x1)-h;
            int q = lower_bound(h, h+res, e[i].x2)-h;
            update(1, 0, res-1, p, q, e[i].type);
            ans += len[1] * (e[i+1].y-e[i].y);
        }
        printf("Test case #%d\n", ++kase);
        printf("Total explored area: %.2f\n", ans);
    }
}
```

树状数组 Binary Indexed Tree

区间求和单点更新

```
int cell[maxN];  // 有效索引从1开始

#define lowbit(x) (x)&(-(x))
void add(int x, int v) {
    for (int i = x; i < maxN; i += lowbit(i))
        cell[i] += v;
}

int get(int x) {
    int sum = 0;
    for (int i = x; i; i -= lowbit(i))
        sum += cell[i];
    return sum;
}
```

区间求和区间更新

记$\Delta(x)$为区间[x, maxN)上元素的共同增量，则前缀和

$$\text{sum(x)} = \sum_{i=1}^{x}(x-i+1)\cdot\Delta(i) = (x+1)\cdot\sum_{i=1}^{x}\Delta(i) - \sum_{i=1}^{x} i\cdot\Delta(i)$$

两个求和记号所在的部分可以使用两个树状数组进行维护，序列的初始值可以保存在维护$\sum_{i=1}^{x} i\cdot\Delta(i)$的树状数组中

```
// 1-based; 序列的初始值可以保存在Δ(i)*i树状数组中
LL Di[maxN], Dii[maxN];  // Δ(i), Δ(i)*i

void add(LL *bit, int x, int val) {
    for (int i=x; i<maxN; i+=lowbit(i)) {
        bit[i] += val;
    }
}
```

```
LL sum(LL *bit, int x) {
	LL rslt = 0;
	for (int i=x; i; i-=lowbit(i)) {
		rslt += bit[x];
	}
	return rslt;
}

// 将[a, b]区间中的元素增加val
void add(int a, int b, LL val) {
	add(Di, a, val);
	add(Di, b+1, -val);
	add(Dii, a, -a*val);
	add(Dii, b+1, (b+1)*val);
}

// 求前缀和[1, x]
LL sum(int x) {
	return sum(Di, x)*(x+1) + sum(Dii, x);
}

// 区间和[a, b]
LL get(int a, int b) {
	return sum(b) - sum(a-1);
}
```

二维树状数组

在一维的基础上增加一维，查询 sum[x][y]实际上是把查询分摊到负责前 x 行的桶，对负责前 x 行的桶求解本行的 sum[y]后合并，递归过程。

```
// cell[x][y]增加v
void add(int x, int y, int v)
{
	for (int i = x; i<maxN; i+=lowbit(i))
		for (int j = y; j<maxN; j+=lowbit(j))
			cell[i][j] += v;
}

// (1, 1)至(x, y)中所有单元格的权值和
int get(int x, int y)
{
	int rslt = 0;
	for (int i = x; i; i-=lowbit(i))
		for (int j = y; j; j-=lowbit(j))
			rslt += cell[i][j];
	return rslt;
}
```

字典树 Trie

简易 利用 map<char, int>不难实现

左偏树 Leftist Tree

编号为 0 的节点表示空节点

```
struct LeftTree
{
	const static int MXN = 100100;
	int tot = 0;
	int l[MXN], r[MXN], v[MXN], d[MXN];

	// 初始化值为x的元素
	int init(int x)
	{
		tot++;
		v[tot] = x;
		l[tot] = r[tot] = d[tot] = 0;
		return tot;
	}

	// 合并堆顶编号为x, y的堆
	int merge(int x, int y)
	{
		if (!x) return y;
		if (!y) return x;
		if (v[x] < v[y])
			swap(x, y);
		r[x] = merge(r[x], y);
		if (d[l[x]] < d[r[x]])
			swap(l[x], r[x]);
		d[x] = d[r[x]] + 1;
		return x;
	}

	// 向堆顶编号为x的堆中插入值为v的元素
	int insert(int x, int v)
	{
		return merge(x, init(v));
	}

	// 取编号为x的堆的堆顶元素
	int top(int x)
	{
		return v[x];
	}

	// 弹出编号为x的堆的堆顶元素，返回新堆顶的编号
	int pop(int x)
	{
		return merge(l[x], r[x]);
	}
};
```

哈夫曼树

以频率为节点权值维护节点队列。合并队列中权值最小的两个节点，将合并的新节点放入队列中，重复步骤，直至队列中只存在一个节点。

图论

匹配

二分图最大匹配（匈牙利算法）

```
vector<int> g[maxN];  // g[x]：与x点相连的右侧的点
int from[maxN], tot;  // from[x]: 与右侧点x匹配的左侧的点，tot：最大匹配数
bool use[maxN];

bool match(int x)  // x：待匹配的一个左侧的点
{
	for (unsigned i=0; i<g[x].size(); ++i) if (!use[g[x][i]])
	{
		use[g[x][i]] = true;
		if (from[g[x][i]] == -1 || match(from[g[x][i]])) {
			from[g[x][i]] = x; return true;
		}
	}
	return false;
}

int hungary(int n)  // n：左侧点的个数
{
	memset(from, -1, sizeof(from)); tot = 0;
	for (int i=1; i<=n; ++i) {
		memset(use, 0, sizeof(use));
		if (match(i)) ++tot;
	}
	return tot;
}
```

二分图最大匹配（匈牙利算法）邻接表实现

```
bool xz[1050][1050]; // A组成员与B组成员的关系  1:有关系 0:没关系

ll pt[1050];       // 占用B组成员的A组成员编号
ll use[1050];      // B组某成员是否被占用
ll m,n;               // m:A组人数  n:B组人数
bool find(ll x)
{
	for(int i=1;i<=n;i++)  // B组成员编号:[1-n]
	{
		if(use[i]==1)continue;
		if(xz[x][i]==1)
		{
			use[i]=1;
			if(pt[i]==0 || find(pt[i]))
			{
				pt[i]=x;
				return 1;
			}
		}
	}
	return 0;
}

int main()
{
	ll a;
	while(~scanf("%lld",&a) && a)
	{
		memset(pt,0,sizeof(pt));
```

```
        memset(xz,0,sizeof(xz));
        scanf("%lld%lld",&m,&n);
        while(a--)
        {
            ll p,q;
            scanf("%lld%lld",&p,&q);
            xz[p][q]=1;
        }

        ll num=0;  // 最大匹配数
        for(int i=1;i<=m;i++)  // A组成员编号:[1-m]
        {
            memset(use,0,sizeof(use));
            if(find(i)==1)num++;
        }
        printf("%lld\n",num);
    }
}
```

单源非负最短路 Dijkstra

升级 堆优化

```
struct _node
{
    ll v,w;  // v:点的编号 w:权值
    _node(ll a=0,ll b=0){v=a;w=b;}
    bool operator <(const _node & other)const{return
other.w<w;}
};

vector<_node> A[10500];
bool mark[10500];
ll dis[10500];

void dlsj(ll n)  // n个节点
{
    fill(dis,dis+10500,inf);
    fill(mark,mark+10500,0);
    priority_queue<_node> Q;
    ll v,v1;
    _node top;

    dis[0]=0;  // 这题目0是起点
    Q.push(_node(0,0));

    while(!Q.empty())
    {
        top=Q.top();v=top.v;Q.pop();
        if(mark[v])continue;
        mark[v]=1;
        for(int i=0;i<A[v].size();i++)  // 遍历v的连通点
        {
            if(mark[A[v][i].v])continue;
            v1=A[v][i].v;
            if(dis[v1]>dis[v]+A[v][i].w)
            {
                dis[v1]=dis[v]+A[v][i].w;
                Q.push(_node(v1,dis[v1]));
            }
        }
    }
}
```

判断负环

```
// 周赛虫洞穿越
#include<bits/stdc++.h>
#define inf 1000000000000
using namespace std;
typedef long long ll;

ll n,m,w;  // n:点数  m:正权边数  w:负权边数
ll d[2505];  // 起点到某点的最短距离
struct _node
{
    ll v,dis;  // v:连通点  dis:权值
    _node(ll a=0,ll b=0){v=a;dis=b;}
};

vector<_node> V[2505];

bool bm(ll s)  //1:表示无负环 0:表示有负环
{
    fill(d,d+2505,inf);
    d[s]=0;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int u=1;u<=n;u++)
        {
            for(int t=0;t<V[u].size();t++)
            {
                ll v=V[u][t].v;
                ll dis=V[u][t].dis;
                d[v]=min(d[v],d[u]+dis);
            }
        }
    }
    for(int u=1;u<=n;u++)
    {
        for(int t=0;t<V[u].size();t++)
        {
            ll v=V[u][t].v;
            ll dis=V[u][t].dis;
            if(d[u]+dis<d[v])return 0;
        }
    }
    return 1;
}

int main()
{
    ll T;
    scanf("%lld",&T);
    while(T--)
    {
        scanf("%lld%lld%lld",&n,&m,&w);
        for(int i=1;i<=n;i++)V[i].clear();
        while(m--)
        {
            ll a,b,c;
            scanf("%lld%lld%lld",&a,&b,&c);
            V[a].push_back(_node(b,c));
            V[b].push_back(_node(a,c));
        }
        while(w--)
        {
            ll a,b,c;
            scanf("%lld%lld%lld",&a,&b,&c);
            V[a].push_back(_node(b,-c));
        }
        if(bm(1))printf("NO\n");
        else printf("YES\n");
    }
}
```

SPFA

队列非空时，队头出列；松弛队头的边，已松弛且不在队列中的顶点入队。入队超过 n 次则途图中存在负环。

最小生成树理论基础

环定理 对于连通图中的环 C，若环 C 中的一条边 e 的权值大于该环中任意一个其他边的权值，那么该边不是最小生成树中的边。

切分定理 给定任意任意一个切分，横切边中权值最小的边属于最小生成树

最小权值边定理 如果图具有最小权值的边只有一条，那么该边在图的任意一个最小生成树中。

最小生成树顶点优先 Prim

类似于 Dijkstra，但维护的距离是顶点到已松弛顶点的集合的距离。

最小生成树边优先 Kruskal

维护顶点的集合 $S=V_0$，$T=(V-S)$。边升序遍历，对于每一条边 (s, t)，若 $s\in S$，$t\in T$，则将边加入树中，并将 t 并入 s；T 中没有顶点时，算法结束，所得树为最小生成树。

```
struct _x
{
    ll num;  // 边权
    ll u,v;  // 边的2个端点
    bool operator <(const _x & other) const{return
other.num<num;}

}x[50500];    //边

ll n,g,A[20500];        // n:点数  g:输入边数  A[]:并查集

ll ff(ll a)
{
```

```
    if(A[a]==a)return a;
    else return A[a]=ff(A[a]);
}

ll kruskal()
{
    ll ans=0,bs=0;  // ans:结果  bs: 连通边数
    sort(x+1,x+1+g);
    for(int i=1;i<=g;i++)
    {
        ll fu,fv;
        fu=ff(x[i].u);
        fv=ff(x[i].v);
        if(fu!=fv)    // 判断是否同一个集合
        {
            A[fu]=fv;
            ans+=x[i].num;
            bs++;
            if(bs==n-1)break;  // 如果 边数=点数-1 说明
连通了

        }
    }
    return ans;
}
```

网络流

最大流 EK

```
ll n,m;                // n:节点数  m:通道数
ll road[1005][1005];   // 最大流
ll pre[1005];          // 前节点(类似并查集)
bool mark[1005];       // 标记

bool BFS(ll s,ll t)  // 寻找s-t的路  s:起点 t:终点
{

    queue <ll> Q;
    memset(pre,-1,sizeof(pre));   // 初始化
    memset(mark,0,sizeof(mark));  // 初始化

    pre[s]=s;       // 起点前向节点设为自己
    mark[s]=1;      // 标记已通过
    Q.push(s);      // 放入队列

    ll top;
    while(!Q.empty())
    {
        top=Q.front();
        Q.pop();
        for(int i=s;i<=t;i++)  // 探索s-t的路
        {
            if(mark[i])continue;   // 标记则不访问
            if(road[top][i]>0)     // 路径还有流量则放入Q 等
待访问
            {
                pre[i]=top;
                mark[i]=1;
                Q.push(i);
                if(i==t)return 1;  // 已是终点证明存在s-t的
路
            }
        }
    }
    return 0;  //没有s-t的路则返回0
}

ll EK(ll s,ll t)
{
    ll maxflow=0,d;  // maxflow:最大流   d:支流

    while(BFS(s,t))
    {

        d=inf;  // 初始化
        for(int
i=t;i!=s;i=pre[i])d=min(d,road[pre[i]][i]);  // 回溯得最小
剩余流量
        for(int i=t;i!=s;i=pre[i])
        {
            road[pre[i]][i]-=d;  // 正向流量减少
            road[i][pre[i]]+=d;  // 反向流量增加
        }
        maxflow+=d;
    }
    return maxflow;
}

int main()
{
    while(~scanf("%lld%lld",&n,&m))
    {
        memset(road,0,sizeof(road));  // 初始化
        ll M0;
        scanf("%lld",&M0);
        ll a,b,c;
        for(int i=1;i<=m;i++)
        {
            scanf("%lld%lld%lld",&a,&b,&c);
            road[a][b]=max(road[a][b],c);  // 初始化路的流
量
        }
        ll ans=EK(0,n+1);
        if(M0<ans)ans=M0;  // 题目要求 因为湖(0)的最大流量是
M0
        printf("%lld\n",ans);
    }
}
```

计算几何

海伦公式 $A=\sqrt{p\sqrt{p-a}\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}}$ $p=\frac{a+b+c}{2}$

基础工具

符号判定（误差修正）

向量与点

点积 叉积 欧几里得距离 模长 旋转

```
const double eps = 1e-8;
const double PI  = acos(-1);

int sgn(double x)  // 返回x的符号
{
    if (abs(x)<eps) return 0;
    return x>0 ? 1 : -1;
}

inline double sqr(double x) { return x*x; }

struct Point
{
    double x, y;

    Point(double x_ = 0, double y_ = 0) : x(x_), y(y_)
{};
    void read() {
        scanf("%lf%lf", &x, &y);
    }
    double norm() {
        return sqrt(sqr(x)+sqr(y));
    }

    friend Point operator + (const Point &a, const Point
&b) {
        return Point(a.x+b.x, a.y+b.y);
    }
    friend Point operator - (const Point &a, const Point
&b) {
        return Point(a.x-b.x, a.y-b.y);
    }
    friend Point operator * (const Point &a, const
double &b) {
        return Point(a.x*b, a.y*b);
    }
    friend Point operator / (const Point &a, const
double &b) {
        return Point(a.x/b, a.y/b);
    }
    friend bool operator == (const Point &a, const Point
&b) {
        return sgn(a.x-b.x)==0 && sgn(a.y-b.y)==0;
    }
};

// 叉积
```

```
double det(const Point &a, const Point &b) {
    return a.x*b.y-a.y*b.x;
}

// 点积
double dot(const Point &a, const Point &b) {
    return a.x*b.x+a.y*b.y;
}

// 两点间距离
double dist(const Point &a, const Point &b) {
    return (a-b).norm();
}

// 将向量绕原点逆时针旋转弧度A（由旋转前后模长不变推导）
// 绕任意点Q旋转，只需在答案中追加Q的横纵坐标
Point rotate(const Point &p, double A) {
    double tx=p.x, ty=p.y;
    return Point(tx*cos(A)-ty*sin(A),
tx*sin(A)+ty*cos(A));
}
```

拓扑排序

```
ll rd[205],weight[205],n,m;
vector<ll> V[205];

bool tppx()
{
    priority_queue<ll> Q;
    for(ll i=1;i<=n;i++)if(rd[i]==0) Q.push(i);
    ll k=n;
    while(!Q.empty())
    {
        ll top=Q.top();
        Q.pop();
        weight[top]=k--;
        for(ll i=0;i<V[top].size();i++)
        {
            rd[V[top][i]]--;
            if(rd[V[top][i]]==0)Q.push(V[top][i]);
        }
    }

    if(k==0)return 1;
    else return 0;
}

int main()
{
    ll T;
    scanf("%lld",&T);
    while(T--)
    {
        memset(rd,0,sizeof(rd));
        for(int i=1;i<=n;i++)V[i].clear();
        scanf("%lld%lld",&n,&m);
        while(m--)
        {
            ll a,b;
            scanf("%lld%lld",&a,&b);
            rd[a]++;
            V[b].push_back(a);
        }
        if(tppx())
        {
            for(int i=1;i<=n;i++)
            {
                printf("%lld",weight[i]);
                if(i==n)printf("\n");
                else printf(" ");
            }
        }
        else printf("-1\n");
    }
}
```

多边形面积

```
struct _xl   //向量
{
    double x,y;
    friend double xx(_xl a,_xl b) //叉乘
    {
        return a.x*b.y-a.y*b.x;
    }
} xl[105];
```

```
int main()
{
    ll n;
    while(~scanf("%lld",&n) && n)
    {
        double sum=0;
        for(int
i=1;i<=n;i++)scanf("%lf%lf",&xl[i].x,&xl[i].y);
        //题目说了 按逆时针输入了 (逆时针返回正值 顺时针返
回负值)

        for(int i=1;i<=n;i++)
        {
            if(i==n) sum=sum+xx(xl[i],xl[1]);
            else sum=sum+xx(xl[i],xl[i+1]);
        }
        sum=sum*0.5;
        printf("%0.1lf\n",sum);
    }
}
```

最近点对 O(nLogn)

考虑分治，合并步骤注意。

```
Point p[maxN];  // 点集
int s[maxN];    // 临时变量

bool cmpx(int i, int j) {
    return sgn(p[i].x-p[j].x)<0;
}

bool cmpy(int i, int j) {
    return sgn(p[i].y-p[j].y)<0;
}

// 最近点对分治步骤
double min_dist(Point p[], int s[], int l, int r)
{
    double ans = 1e100;
    if (r-l<20) {
        for (int q=l; q<r; ++q) for (int w=q+1; w<r;
++w) {
            ans = min(ans, (p[s[q]]-p[s[w]]).norm());
        }
        return ans;
    }

    int tl, tr, m=(l+r)/2;
    ans = min(min_dist(p, s, l, m), min_dist(p, s, m,
r));
    for (tl=l; p[s[tl]].x<p[s[m]].x-ans; ++tl);
    for (tr=r-1; p[s[tr]].x>p[s[m]].x+ans; --tr);
    sort(s+tl, s+tr, cmpy);
    for (int q=tl; q<tr; ++q) {
        for (int w=q+1; w<min(tr, q+6); ++w) {
            ans = min(ans, (p[s[q]]-p[s[w]]).norm());
        }
    }
    sort(s+tl, s+tr, cmpx);
    return ans;
}

// 最近点对 - 求解n个点中最近两点的距离
// p - 点集, n - 点数
// s - 临时变量, 算法执行后得到x坐标非降序排列的点编号
double min_dist(Point p[], int s[], int n)
{
    iota(s, s+n, 0);
    sort(s, s+n, cmpx);  // 以x坐标非降序编号点
    return min_dist(p, s, 0, n);
}
```

最近点对紧凑实现

```
struct _node
{
    ll x,y;
}node[100050],A[100050];

bool cmpy(_node a,_node b)
{
    return a.y<b.y;
}

double dis(_node a,_node b)
{
    return    sqrt((a.x-b.x)*(a.x-b.x)+(a.y-b.y)*(a.y-
b.y));
```

```
}
double solve(ll l,ll r)
{
	double d=inf;
	ll v=0,mid;
	if(l==r)return inf;

	mid=(l+r)/2;
	d=min(solve(l,mid),solve(mid+1,r));
	for(ll i=mid;i>=l&&node[mid].x-node[i].x<d;i--)A[v++]=node[i];
	for(ll i=mid+1;i<=r&&node[i].x-node[mid].x<d;i++)A[v++]=node[i];

	sort(A,A+v,cmpy);
	for(ll i=0;i<v;i++)
	{
		for(ll t=i+1;t<v && A[t].y-A[i].y<d;t++)
		{
			d=min(d,dis(A[i],A[t]));
		}
	}
	return d;
}

int main()
{
	ll n;
	scanf("%lld",&n);
	ll sum=0,a;
	for(ll i=0;i<n;i++)
	{
		scanf("%lld",&a);
		sum=sum+a;
		node[i].x=i+1;  // 如果x没从小到大排序 那么要先按x从小到大的顺序排序node
		node[i].y=sum;
	}
	double d=solve(0,n-1);  // 这就是结果了
	ll ans=ceil(d*d);
	// 以下2步都只是处理误差
	if(fabs(sqrt(ans)-d)>fabs(sqrt(ans-1)-d))ans--; // 精度误差

	printf("%lld\n",ans);
}
```

数论

二项式定理 $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$

等价形式 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$

求导，二阶导数，代入等思路

组合数 $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$

$$C(n,m) = C(n-1,m) + C(n-1,m-1)$$

卡塔兰数

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}$$

斯特林近似公式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

错排公式 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

费马小定理

若 p 为质数，$a^p \equiv a \ (mod\ p)$

若 a 不是 p 的倍数，$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$

引理，$a^p \equiv 1 \ (mod\ p) \rightarrow a \equiv \pm 1 \ (mod\ p)$

威尔逊定理 $(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$

自然数 N 因子个数 *f(n)* 考虑分解质因数

乘法逆元 $ax \equiv 1(mod\ b)$

当且仅当$gcd(a,b) = 1$时乘法逆元存在，可用于计算模意义下的除法。

利用费马小定理计算 $a \times a^{p-2} \equiv 1(mod\ p)$ p 为质数

利用拓展欧几里得计算 $ax \equiv 1(mod\ b)$，$gcd(a,b) = 1$

```
int cal_inv(int a, int p)
{
	int g, x, y; exgcd(a, p, g, x, y);
	return (x%p+p)%p;
}
```

利用递推公式计算

设$p = k \times i + r, r < i, 1 < r < p$，有$k \times i + r \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，两边同时乘以$r^{-1} + i^{-1}$，移项整理得$i^{-1} \equiv -\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor \times (p\ mod\ i)^{-1}$

```
int inv[maxN];
void cal_inv(int n, int mod)
{
	inv[1] = 1;
	for (int i = 2; i <= n; i++)
		inv[i] = ((LL(-mod/i)*inv[mod%i])%mod+mod)%mod;
}
```

期望

等价期望形式

$$E(x) = 1 * P(x = 1) + 2 * P(x = 2) + 3 * P(x = 3) + \cdots$$

$$E(x) = P(x > 0) + P(x > 1) + P(x > 2) + \cdots$$

经验 [Expected-LCP] Trie+期望

博弈

Nim 博弈

n 堆石子，两名玩家先后选取一堆石子取任意多个，将所有石子取完为胜。

解法：异或所有石堆石子的数量，值为 0 则先手败。
证明：记能转换为终结态或 P 态的状态为 N 态，终结态或能转换为 N 态的状态为 P 态。异或操作满足：1）所有的终结态都被判断为 N 态 2）判断为 P 态的状态可以通过合法操作移动到 N 态（二进制特点和异或特点）3）判断为 P 态的状态无法直接转换为另一个 P 态（异或特点）

Bash 博弈

两名玩家先后从一堆石子中取[1, k]个石子，取走最后一个为胜利。

Wythoff 博弈

两名玩家轮流进行如下操作之一：1）从一堆石子中取任意多个 2）从两堆石子中取同样多个， 取走最后一颗石子的玩家获胜

解法：定义奇异局势(a[k], b[k])为先手必败局势(0-based)，则前几个奇异局势为(0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), …

通项公式：
a[k] 前 k 个奇异局势中未出现的最小正整数
b[k] = a[k] + k

奇异局势的判定：

$$a_k = \left\lfloor k\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right\rfloor, b_k = a_k + k$$

可得$k = b - a$，判断$a_k == \left\lfloor k\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right\rfloor$即可。

猜想

Bertrand 猜想 对于任意$n > 3$，存在$n < p < 2n$，其中p为质数

质数间隔 在 1e13 范围内，相邻素数的最大间隔为 777

欧拉函数φ(n)

φ(n) 小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的个数。

1） $\varphi(1) = 1$

2） 若 n 是素数 p 的 k 次幂，$\varphi(n) = p^k - p^{k-1} = (p-1)p^{k-1}$

3） 若 m,n 互质，$\varphi(mn) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$

递推式：令 p 为 N 的最小质因数，若$p^2|N$，$\varphi(N) = \varphi\left(\frac{N}{p}\right)\times p$；否则，$\varphi(N) = \varphi\left(\frac{N}{p}\right)\times(p-1)$

```
int euler(int n)  // 欧拉函数
{
    int ans = n;
    for (int i=2; i*i<=n; ++i)
    {
        if (n%i==0)
        {
            ans=ans*(i-1)/i;
            while (n%i==0) n/=i;
        }
    }
    if (n>1) ans=ans*(n-1)/n;
    return ans;
}
```

欧拉降幂 $a^b (mod\ c) = a^{b\ mod\ \varphi(c) + \varphi(c)} (mod\ c), b \ge \varphi(c)$

Miller-Rabin 素性测试 O(logN)

需要快速幂 mod_pow(a, b, mod)

```
// 独立Miller-Robin测试，返回n是否为质数
bool test(LL n, LL a, LL d)
{
    if (n==2) return true;
    if (n==a) return true;
    if ((n&1)==0) return false;
    while (!(d&1)) d >>= 1;
    LL t = mod_pow(a, d, n);
    while ((d!=n-1) && (t!=1) && t!=(n-1))
    {
        t = t * t % n;
        d <<= 1;
    }
    return (t==n-1 || (d&1));
}

// 判定n是否为素数
bool isprime(LL n)
{
    if (n<2) return false;
    int a[] = {2, 3, 61};
// 更大范围的素数需要更广的测试集
    for (int i=0; i < 3; ++i) if (!test(n, a[i], n-1))
return false;
    return true;
}
```

拓展欧几里得 $ax + by = gcd(a,b)$

```
void exgcd(LL a, LL b, LL& g, LL &x, LL &y)
{
    if (!b) g=a, x=1, y=0;
    else exgcd(b, a%b, g, y, x), y-=a/b*x;
}
```

$$x = x_0 + \frac{b}{gcd(a,b)}\cdot t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{gcd(a,b)}\cdot t$$

单变元模线性方程组 $ax \equiv b(mod\ n)$

相当于求解$ax + ny = b$，当且仅当$gcd(a,n)\,|n$时有解，且有$gcd(a,n)$个解。通解：

$$x_i = \left[x_0 + i\cdot\left(\frac{n}{gcd(a,n)}\right)\right](mod\ n), \qquad i = 0,1,2,\dots,gcd(a,n)-1$$

```
vector<LL> line_mod_equation(LL a, LL b, LL n)
{
    LL x, y, g; exgcd(a, n, g, x, y);

    vector<LL> ans;
    if (b%g == 0) {
        x %= n; x += n; x %= n;
        ans.push_back(x*(b/g)%(n/g));
        for (LL i=1; i<g; ++i)
            ans.push_back((ans[0]+i*(n/g))%n);
    }
    return ans;
}
```

语言及黑科技

Java

```
// BigInteger and BigDecimal
import java.math.*;
import java.util.Scanner;

add multiply subtract divide
```

C++

```
set_intersection()
set_union()
set_difference()
```

字符串格式工具

```
string stoi stol stoll stod to_string
*char atoi atol atof
```

正则表达式 Regex

regex_match

将正则表达式与整个字符串进行匹配，返回 bool。 可以用 match_result 记录匹配。

regex_match(des, reg)

des 待匹配字符串
reg 正则表达式

regex_replace

将所有正则表示匹配到的所有子串，替换成自定义子串。

regex_replace(des, reg, rep)

des 待匹配字符串
reg 正则表达式
rep 替换表达式

regex_search

regex_search(des, mac, reg)

des 待匹配字符串
mac 结果集合，smatch/cmatch

IO 优化

```
template<typename T = int>
inline T read() {
    T val = 0, sign = 1; char ch;
    for (ch = getchar(); ch < '0' || ch > '9'; ch =
getchar())
        if (ch == '-') sign = -1;
    for (; ch >= '0' && ch <= '9'; ch = getchar())
        val = val * 10 + ch - '0';
    return sign * val;
}
```

时空优化

展开循环：牺牲程序的尺寸加快程序的执行速度

```
#pragma GCC optimize("unroll-loops")
```