

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

数学 建模

主 编 刘振航

 中国人民大学出版社

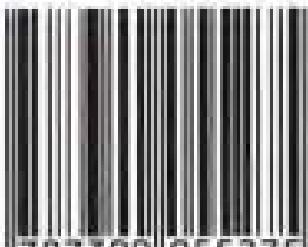
微积分（含光盘）
微积分名师导学
线性代数（含光盘）
线性代数名师导学
概率论与数理统计（含光盘）
概率论与数理统计名师导学
运筹学（含光盘）

数学 建模

郭文林编著
李晓云、高维华
黄晓峰、严兆均、姜玉书

机械工业出版社
北京·上海·天津·广州·沈阳

ISBN 7-300-05527-3



9 787300 055275 >

ISBN 7-300-05527-3 / O · 59
定价：25.00元（含光盘）

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

数 学 建 模

主 编 刘振航

副主编 梁邦助

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学建模 / 刘振航主编。
北京：中国人民大学出版社，2004
(新世纪大学数学立体化系列教材)

ISBN 7-300-05527-3 / 1 · 50

I. 数…
II. 刘…
III. 数学模型-高等学校-教材
IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 043509 号

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

数学建模

主编 刘振航 副主编 梁邦助

出版发行 中国人民大学出版社
社址 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080
电话 010 - 62511242 (总编室) 010 - 62511239 (出版部)
010 - 82501766 (邮购部) 010 - 62514148 (门市部)
网址 <http://www.crup.com.cn>
<http://www.ttne.com>(人大教研网)
经 销 新华书店
印 刷 北京密兴印刷厂
开 本 787×965mm 1/16 版 次 2004 年 5 月第 1 版
印 张 12.25 印 次 2004 年 5 月第 1 次印刷
字 数 223 000 定 价 25.00 元 (含光盘)

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会

主任 于义良

副主任 刘振航 徐金岭 安建业 鄢 茵

委员 (按姓氏笔画排序)

王玉津	王全文	王延臣	王莉琴	龙建新
沙荣方	吴振奎	宋香暖	张凤宽	张建新
张银生	李乃华	李 天	李秉林	李美凤
杨海宣	杨富贵	罗智明	罗蕴玲	郑昌明
段俊生	赵芬霞	唐 洋	梁邦助	程 伟
滕树军	魏家林			

总序

随着科学技术的迅猛发展,数量分析已渗透到各个领域,数学的重要性已被整个社会所公认;由于计算机技术的广泛普及与提高,许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀,数学的应用越来越深入;随着人类素质的不断提高,数学素质教育已成为全体公民的必修课,数学的普及越来越广泛。为适应新形势的发展和社会的需要,信息技术与学科课程整合已是教育教学改革的“重中之重”,运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求。经过多年的教学研究和实践,我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师,编写了这套“新世纪大学数学立体化系列教材”,奉献给大家。

这套系列教材是“21世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》”成果的延伸,包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》、《运筹学》五本教材和《微积分名师导学》、《线性代数名师导学》、《概率论与数理统计名师导学》三本教学指导书。这套教材力求体现如下特点:

第一,以实用为原则,“教、学、做”融为一体,内容体系整体优化,使读者实现由知识向能力的转化。

第二,以实际为背景,概念阐述简明、通俗化,举例贴近

生活,运用多媒体技术使内容直观化、图形化,使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感,激活求知欲,增强学好数学、做好数学的信心。

第三,以计算机为工具,传统内容与信息技术应用融为一体,注重基本知识、基本思想、基本能力的培养,对繁、难、抽象的内容,充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现,比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等。

第四,每册教材均配有多媒体助学助教光盘,包括课程要求、电子教案、模拟演示、练习详解、单元测试、实例选编、试题分析、名人简介等众多模块,信息量大,使用方便,便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识,并有助于及时检测和提高。

总之,这套系列教材配有光盘,方便教学,信息量大;融入软件,突出技能,实用性强。内容可视化,你不会再为抽象而烦恼;计算软件化,你不会再为繁难而困扰;方法现实化,你不会再因无用而厌学。

2003 年冬季,我有幸到澳大利亚 La Trobe 大学学习考察,亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践,它们特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用,“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”做得非常出色。让我们可喜的是即将出版的这套系列教材恰好在这方面做了有益的尝试。

我们期盼这套系列教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会主任、总主编 于义良

2004 年 3 月

前　　言

进入新世纪，人类社会逐步迈向信息化社会，这个社会所呈现出的两大特点是：计算机技术的迅速发展与广泛应用，以及由之引发的数学的应用向各个领域更为广泛和深入的渗透。这两个特点无疑对信息化社会的数学教育提出了新的要求。由于数学应用的普遍性，数学教育质量的高低就关系到国民素质的高低；由于未来高新技术从某种意义上可归结为数学技术，所以培养应用数学的意识和能力已经是数学教学的一个重要方面。

《数学建模》(Mathematical Modeling)是把数学与客观实际问题联系起来的纽带，可以说有了数学并要用数学去解决实际问题，就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画实际问题，而这种刻画的数学表达就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程。

经过多年的教学实践和认真学习讨论，并调查了解国内外数学教育的改革动态，我们认为《数学建模》课程从内容到教学方法，都应突出这门课的两大特点，即理论联系实际和计算机技术应用，以培养学生用数学语言描述实际现象，用数学知识和计算机技术分析处理实际问题的能力为基本思路，真正使学生的数学实践能力（数学知识、数学建模、数值计算、数据处理）得到培养和提高。

数学建模

现在奉献给大家的这本《数学建模》教材,力求将基本知识、方法与计算机应用融为一体,使学生感受到所学知识、方法的可用性;通过完成“现实题材—数学问题—数学建模—数学知识与方法 成果释译”的学习过程,帮助学生实现由知识向能力的转化。教学内容贴近实际,让学生边学边提出解决问题的思路和设想,引导学生运用所学知识解决实际问题,培养学生的社会责任感。

参加本书编著的有:刘振航、于义良、梁邦助、安建业、张凤宽。

在本书编写过程中,得到了天津市教委高教处、天津商学院教务处的指导,特别是得到天津商学院教材中心、中国人民大学出版社许多同志的大力支持,天津职业技术师范学院何文章教授、天津科技大学张大克教授提出了非常好的建议,为体现内容的典型性,书中部分例题引自他人著作,在此一并表示衷心的感谢。由于数学建模是一个很新的课程,在内容选择、教材编写、教学方式等方面国内外都没有较为定型的模式。加之我们水平有限,书中若有不尽如意的地方,敬请广大读者雅正。

编著者

2004年3月18日

目 录

第1章 数学模型概论	1
第1.1节 数学与数学模型	1
第1.2节 数学模型的分类	4
1. 观察模型和决策模型	4
2. 确定型模型和随机型模型	4
3. 连续模型和离散模型	4
4. 解析模型和仿真模型	5
第1.3节 建立数学模型的一般步骤	5
1. 建模准备	5
2. 模型假设	5
3. 模型建立	6
4. 模型求解	6
5. 模型检验	6
6. 模型应用	6
第2章 微分方程模型	8
第2.1节 引例	8
第2.2节 微分方程的定解问题及建模准则	11
1. 微分方程的定解问题	11
2. 微分方程的平衡解与稳定性	12
3. 微分方程的建模步骤	13

第 2.3 节 微分方程模型	13
第 3 章 概率方法建模	37
第 3.1 节 报纸零售问题	37
第 3.2 节 随机存贮模型	39
1. 提出问题	39
2. 模型假设	40
3. 建模与求解	40
第 3.3 节 随机人口模型	41
1. 模型假设	41
2. 建模与求解	42
第 3.4 节 随机服务模型	43
1. 模型假设	43
2. 模型求解	44
第 3.5 节 轧钢中的概率问题	46
1. 模型假设与问题分析	46
2. 建模与求解	46
第 3.6 节 蠼虫分类问题	48
1. 模型假设	48
2. 建模与求解	49
第 4 章 统计分析模型	52
第 4.1 节 回归分析模型	52
1. 一元线性回归	53
2. 可化为一元线性回归的曲线回归 ..	59
3. 多元线性回归	60
4. 自变量中含有定性变量的回归 ..	70
5. 岭回归与主成分回归	73
第 4.2 节 聚类分析	84
1. 相似性度量	85

2. 系统聚类法	85
第 4.3 节 判别分析	92
1. 多组距离判别	92
2. 典型判别	93
第 4.4 节 主成分分析	95
1. 主成分分析的基本思想	95
2. 主成分分析的具体步骤	96
3. 主成分分析的主要应用	97
第 4.5 节 因子分析	98
1. 什么是因子分析	98
2. 因子模型	99
第 5 章 层次分析法建模	105
第 5.1 节 层次分析法的基本步骤	105
1. 成对比较矩阵和权向量	106
2. 比较尺度	107
3. 一致性检验	108
4. 层次总排序及组合一致性检验	108
第 5.2 节 层次分析法的应用实例	109
第 6 章 运筹学模型	118
第 6.1 节 线性规划模型	118
1. 引例	118
2. 线性规划模型常用解法	120
3. 线性规划模型	122
第 6.2 节 动态规划模型	125
1. 引例	125
2. 动态规划模型的基本概念和 基本方程	128
3. 动态规划模型	130

第 6.3 节 对策论模型	138
1. 对策论的基本概念	138
2. 对策模型	140
第 6.4 节 决策分析模型	143
1. 引例	143
2. 决策问题的基本概念	144
3. 决策分析模型	146
第 7 章 自动控制论模型	152
第 7.1 节 在控制系统中创建数学模型	152
1. 模型的引出	152
2. 建模实例	153
第 7.2 节 控制模型的基本理论简介	155
1. 控制系统的一般概念	155
2. 控制系统的数学模型	155
3. 最优滤波	159
4. 传递函数	161
5. 由系统的动态方程求传递函数	162
6. 另外几个常用的控制概念	163
7. 系统仿真	163
第 7.3 节 模型的应用实例及其解法	164
1. 滤波应用实例:水面舰艇综合导航系统数学处理模型设计及仿真实验研究	164
2. 通过合理配置提高步进链轮机构的总体精度的应用实例	171
参考文献	185

第 1 章

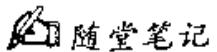
数学模型概论

应用数学知识和计算机技术去解决各门学科和社会生产中的实际问题时,首先要通过对实际问题的分析、研究,组建用以描述这个问题的数学模型,使用数学的理论和方法或者编程计算对模型进行分析从而得到结果,再返回现实去解决实际问题。在当前实现数学作为一种技能的过程中使用数学解决实际问题的技能的培养是十分重要和必需的,这主要是数学模型的有关知识的学习和数学建模能力的培养。

第 1.1 节 数学与数学模型

人类已进入以计算机、网络、数码光纤和多媒体等为代表的信息时代。这个时代是电子计算机的时代,计算机的应用深刻地改变了人类的生活方式,在人类历史上引起了一场革命,在这场革命中,数学方法的应用已逐步深入到各个领域。例如,生物学、生态学、经济学、社会学、政治学等等。数学的重要性正为越来越多的人所认识。数学使得以前很多定性的东西逐步定量化和精确化。数学的发展提供了解决随机问题、确定问题、离散问题的途径,使得数学在各个学科中的应用显得越来越重要。

众所周知,数学最引人注目的特点是它思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性。这是在数学发展的漫长的历程中逐渐地形成的。它源于人们的生产和生活的需要,对其中有关的空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而形成今天的数学。它的出现为我们更深刻地认识世界提供



了一条重要的途径。它的抽象性和严谨性特点也成为我们科学思维和组织构造知识的一个有效手段。而数学应用的广泛性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面的发展奠定了坚实的基础。但是在过去由于种种原因，数学强调的是思维的抽象性、推理的严谨性，而忽略了数学应用的广泛性。数学的这个特点在人们的印象中反映的并不充分。往往把数学看成训练学生逻辑思维能力的工具，致使学生常常感到学了大量的数学知识和方法但是不能应用到实际问题之中。当前，数学科学与其他科学技术和经济建设紧密结合变得更加需要和可能，在变化万千的世界里，人们无时无刻不在运用数学的方法去认识、改造这个世界。数学应用的特征在当今就显得更加突出和重要。

一个科学问题的内容能用数学方法来分析和表示，这是该问题定量化和精确化的一种表现。利用数学这一工具可以更加深刻认识到客观现象的本质。许多物理概念用语言叙述很难说清楚，例如变速运动的瞬时速度，变力沿曲线所做的功等，而在微积分中用导数和积分很容易描述和解决这些问题。又如许多经济现象，利用微积分的概念会描述得更深刻，分析得更透彻。

在生产过程中，为了分析和改进生产中出现的问题，虽然可采取较简单的直接实验的方法，但在很多情况下这种方法是行不通的，而必须通过模拟计算的方法进行。如某设备正式投产后往往不允许破坏正常生产过程进行实验。因此，在很多情况下人们先进行一些数据收集，然后在计算机上进行模拟实验来代替直接实验。

所谓数学模型是指通过抽象和简化，使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象。数学模型也不是对现实系统的简单的模拟，它是人们用以认识现实系统和解决实际问题的工具。数学模型是对现实对象的信息通过提炼、分析、归纳、翻译的结果。它使用数学语言精确地表达了对象的内在特征。通过数学上的演绎推理和分析求解，使得我们能够深化对所研究的实际问题的认识。例如，描述人口 $N(t)$ 随时间 t 自由增长过程的数学模型 $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$ ，尽管由于它忽略

了性别、年龄、社会经济和自然界的约束条件等许多与人口增长有密切关系的因素，相对于实际人口的动态来说大大地被简化了，虽然这个数学模型对现在人口的预测有较大的偏差，但它所揭示出的人口的指数增长的结论是人们不得不面对的严酷事实。

现在数学模型这个词越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中。电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算，才能实现有效的过程控制。气象工作者为了得到准确的天气预报，一刻也离不开根据气象站、期限卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型。生物制药学家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，就可以分析药物的疗效，有效地指导临床应用。城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型为城市发展的决策提供科学的依据。生产厂家和经营者要根据产品的需求状况、生产条件、成本及利润等信息，建立一个合理安排生产和销售的数学模型，以获得最大的经济效益。

在实践中，能够直接运用数学方法解决实际问题的情形是很少见的。也就是说，实际问题很少直接以数学的语言出现在我们面前。而且对于如何使用数学语言来描述所面临实际问题往往不是轻而易举的。应用数学知识解决实际问题的第一步必须要面对实际问题中看起来杂乱无章的现象，并从中抽象出恰当的数学关系，也就是组建这个问题的数学模型，这个过程就是数学建模。

数学模型主要是使用数学知识来解决实际问题。因此数学是人们掌握和使用数学模型这个工具的必要条件和重要的基础。没有深厚数学基础、严格的数学逻辑思维是很难使用数学模型来解决实际问题的。但是数学模型本身也还具有若干不同于数学的特征，还需要掌握其他方面的许多知识，这些都是在学习和掌握数学模型过程中特别要注意的。建立模型以解决实际问题所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也是迥然不同的。一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学。作为一成功的模型应该有较强的实际背景，最好是直接针对某个实际问题的。模型应该是经过实际检验表明是可以接受的，它应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解，而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的。

总而言之，当前科学技术的发展要求我们更好地应用数学这一工具为各方面服务，用数学方法来反映、模拟或描述各种各样的现象，揭示内在规律，这就是本书要介绍的应用数学模型。

第 1.2 节 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式来分类.

按照模型的应用领域,可以分为数量经济模型、医学模型、地质模型、社会学模型等,更具体的有人口模型、交通模型、环境模型、生态模型等等.

按照建立模型的数学方法,可以分为几何模型、微分方程模型、图论模型、优化模型等等.

数学建模的初衷是洞察源于数学之外的事物或系统.通过选择数学系统,建立原系统的各部分与描述其行为的数学部分之间的对应,达到发现事物运行的基本过程的目的.因此,人们通常也用如下的方法分类.

1. 观察模型和决策模型

基于对问题状态的观察、研究,所提出的数学模型可能有几种不同的数学结构.例如,决策模型是针对一些特定目标而设计的.典型的情况是,某个实际问题需要作出某种决策或采取某种行动以达到某种目的.决策模型常常为了使技术的发展达到顶峰而设计,它包括算法和由计算机完成的为特定问题提供解的模拟.一般的马尔可夫链模型是观察模型,而动态规划模型是决策模型.

2. 确定型模型和随机型模型

确定型模型建立在如下假设的基础上,即如果在时间的某个瞬间或过程的某个阶段有充分的信息,则系统的特征就能准确地预测.确定型的模型常常用于物理和工程之中,常见的确定型模型是微分方程模型.随机型模型在概率意义上描述系统的行为,已广泛应用于社会科学和生命科学中出现的问题.

3. 连续模型和离散模型

有些问题可用连续变量描述,比如空中飞行安全的设计;有些问题适合离散变量描述,比如足球赛的赛程方案设计.有些问题由连续型变量描述更接近实际,但也允许作离散化处理.例如,最优捕鱼策略问题中,鱼群是随时间变化而变化的可视为连续模型,但如果观察的时间段较长,则用

离散模型描述更适合.

4. 解析模型和仿真模型

模型可直接用解析式表示,结果可能是特定问题的解析解,或得到的算法是解析形式的,通常可认为是解析模型.而实际问题的复杂性经常使目前的解析法满足不了实际问题的要求或无法求解.因此,很多实际问题需要进行仿真,仿真模型可以对原问题直接或间接地仿真.

第 1.3 节 建立数学模型的一般步骤

一般地说,数学模型是我们所研究的实际问题有关属性的模拟,它应当具有实际问题中我们关心和需要的主要特征.数学模型是运用数学的语言和工具,对部分现实世界的信息加以翻译、归纳的产物.数学模型经过演绎、求解、推断、分析给出数学上的预报、决策或控制,再经过翻译和解释,回到现实世界中.最后,这些推论或解释必须接受实际问题的检验,完成实践—理论—实践的循环.

建立一个实际问题的数学模型的方法大致有两种:一种是实验归纳的方法,即根据测试或计算数据,按照一定的数学方法,归纳出问题的数学模型;另一种是理论分析的方法,即根据客观事物本身的性质,分析因果关系,在适当的假设下用数学工具去描述其数量特征.

建立数学模型一般分为如下几个步骤.

1. 建模准备

在建模前要对实际问题的背景有深刻的理解,进行全面的、深入细致的观察,明确所要解决问题的目的和要求,并按要求搜集各种必要的信息.首先需要明确研究的对象和研究的目的,问题所依据的事实和数据资料的来源是什么?它们是否真实?以及与问题有关的背景知识.需要明确所研究问题的类型:是确定的还是随机的,是连续的还是离散的.

2. 模型假设

模型假设是数学建模的关键的一步.一般地说,一个实际问题是复杂的,涉及的方面很多,不可能考虑到所有因素.为了利用数学的方法,通常

要对问题作出必要的、合理的简化，在明确目的、掌握资料的基础上抓住主要矛盾，舍去一些次要因素，提出合理的假设。不同的假设，有可能得出不同的模型和结果。有时，假设做得过于详细，试图把复杂的实际现象的各个因素都考虑进去，可能使问题很难继续下一步的工作。所以，要根据经验和具体问题建立合理的假设，然后通过不断地调整假设使模型尽可能地接近实际。

3. 模型建立

根据所做的假设，利用适当的数学工具来刻画、描述各种量之间的关系，列出表格，画出图形或确定其他数学结构。同时数学建模还有一个原则，应尽量采用简单的数学工具，因为简单的数学模型往往更能反映事物的本质，也容易使更多的人掌握和使用。

4. 模型求解

建立数学模型的目的是为了解释自然现象，寻找内在规律，以便指导人们认识世界和改造世界。对上面的数学模型，利用解方程、推理、图解、计算机模拟、稳定性讨论等数学运算得到数量结果的过程，即是模型求解的过程。

5. 模型检验

把数学模型求解的结果“翻译”回到实际问题中，与实际情况进行比较，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，看是否符合实际。如果模型结果的解释与实际状况相结合或结果与实际观察基本一致，这表明模型经检验是符合实际问题的。如果问题模型的结果很难与实际相结合或与实际观测不一致，这表明这个模型与所研究的实际问题是不相符的，不能直接应用于所研究的实际问题，这时如果数学模型的建立和求解过程没有问题的话，就需返回到建模前关于问题的假设过程，检查我们关于问题所作的假设是否恰当，对假设给出必要的修正，重复前面的建模过程，直到建立出符合实际问题的模型为止。

6. 模型应用

用已建立的数学模型分析解释已有现象，并预测未来的发展趋势，以便给人们的决策提供参考。

归纳起来,建立数学模型的主要步骤如下,如图 1.1.1 所示.

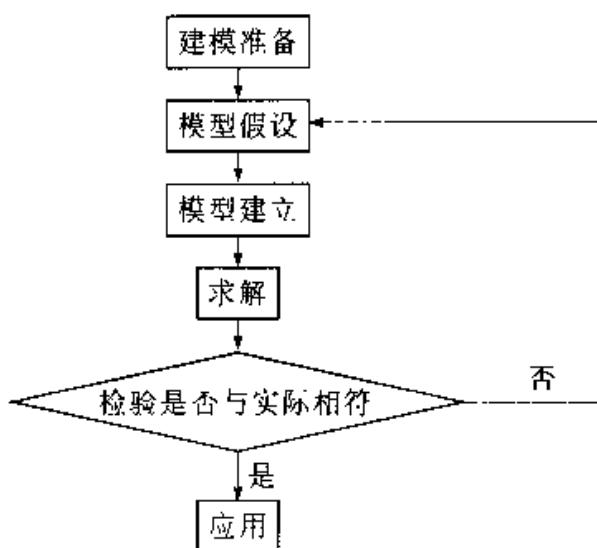


图 1.1.1

应该指出的是,并非所有建模过程都要经过上述这些步骤,而且有时各个步骤之间的界限也不那么明显.因此,在建模过程中不要局限于形式上的按部就班,重要的是根据对象的特点和建模的目的,去粗取精,去伪存真,从简到繁,不断完善.

第 2 章

微分方程模型

在实际问题中我们经常会见到关于“增长”(在生物学以及人口问题研究中)、“衰变”(在放射性问题中)、“边际”(在经济学中)等问题,这些问题一般都可通过建立微分方程模型来解决.

利用微分方程解决的问题通常可分为两类:一类问题要求把未知变量直接表示为已知量的函数,这时,有些问题可以求出未知函数的解析表达式,在很多情况下只能利用数值解法;另一类问题只要求知道未知函数的某些性质,或它的变化趋势,这时可以直接根据微分方程定性理论来研究.

第 2.1 节 引例

微分方程模型并不是新的事物,很久以来它就一直伴随在我们身边.可以说有了数学并要用数学去解决实际问题时就一定要使用数学的语言、方法去近似地刻画这个实际问题.在数学应用的许多领域到处都可以找到微分方程模型的身影.例如,自由落体的运动规律,人口的控制与预测,军备竞赛等.只不过在当前随着科学技术的发展,各门学科的定量化分析的加强以及使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍的条件下,微分方程模型作为数学在实际问题应用中的主要手段之一,它的作用显得愈发突出,从而受到了更加普遍的重视.

例 2.1.1 细菌变化情况模型

细菌的增长率与总数成正比.如果培养的细菌 24 小时内由 100(单位)

增长到 400(单位),那么 12 小时后细菌数应该是多少?

解 细菌的增长率与总数成正比,是指任何瞬间细菌都在变化的事实. 而细菌 24 小时内由 100(单位)增长到 400(单位),是特定的瞬间细菌变化的信息.

设 $N(t)$ 表示 t 时刻细菌的总数,则细菌变化的数学模型为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN(t)}{dt} = kN(t) \\ N(0) = 100 \\ N(24) = 400 \end{array} \right.$$

其通解为: $N(t) = Ae^{kt}$, 其中 k 为待定系数.

由 $N(0) = 100$ 和 $N(24) = 400$, 得 $A = 100$, $k = \frac{1}{24} \ln 4$. 即 $N(t) = 100e^{\frac{t}{24} \ln 2}$. 因此 $N(12) = 200$. 也就是 12 小时后细菌数应为 200(单位).

例 2.1.2 耐用新产品销售量问题.

1. 提出问题

一种新产品进入市场后,一般会经过销售量先不断增加,然后再逐渐下降的过程,称为产品的生命周期,简记为 PLC(product life cycle). 接下来我们建立新产品销售量随时间变化问题的数学模型.

2. 分析问题

当一个新产品进入市场时,有关的信息传播一般有两个途径:(1)经营者或厂家提供的广告,这是来自消费者以外的信息;(2)当一部分人购买该产品后经过使用而对产品有所评价并传播开来,使其周围的人得到产品的有关的信息,这是来自消费者的信息. 这两方面的信息引起消费者去购买该产品.

由于耐用消费品(如洗衣机、电视机、自行车)一般不会重复购买,故产品的累计销售量可以认为等于消费者人数.

3. 建模与求解

设 K 为潜在的消费者总数, $N(t)$ 为 t 时刻购买该产品的人数. 在时间间隔 $[t, t + \Delta t]$ 中, 购买者增量为 ΔN 由两部分组成. 一部分是来自产品外部的信息导致购买者增量 ΔN_1 ; 另一部分是由消费者内部传播的产品信息导致的购买者的增量 ΔN_2 .

外部信息导致单位时间内购买者的增量应与未购买者的人数成正比,而内部信息导致单位时间内购买者的增量应与购买者人数、未购买者的人

数之积成正比.

因此有: $\Delta N_1 = a[K - N(t)]\Delta t$, $a > 0$ 为待定系数

$\Delta N_2 = bN(t)[K - N(t)]\Delta t$, $b > 0$ 为待定系数

故在时间段 Δt 内, 购买者总的增量为:

$$\begin{aligned}\Delta N &= \Delta N_1 + \Delta N_2 \\ &= a[K - N(t)]\Delta t + bN(t)[K - N(t)]\Delta t\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

对(2.1.1)式两端同除 Δt , 并令 $\Delta t \rightarrow 0$ 得:

$$\frac{dN}{dt} = [K - N(t)][a + bN(t)] \quad (2.1.2)$$

初始条件为 $N(0) = 0$, 这就是产品销售量的数学模型.

该数学模型的解为:

$$N(t) = \frac{K(1 - e^{-(a+bK)t})}{1 + \frac{bK}{a}e^{-(a+bK)t}} \quad (2.1.3)$$

其图形为钟型曲线, 见图 2.1.1.

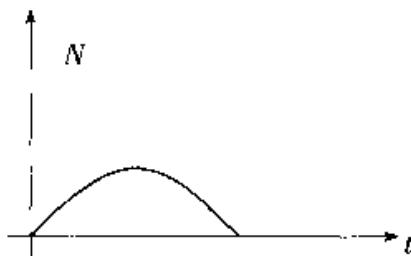


图 2.1.1

例 2.1.3 人的体重变化问题

1. 提出问题

某人的摄入热量是每天 2 500 大卡 (Calorie, 卡路里, 热量单位), 其中 1 200 大卡用于基本的新陈代谢. 在健身训练中, 他所消耗的大约是每天每千克体重为 16 大卡, 设以脂肪形式贮藏的热量 100% 地有效, 而 1 千克脂肪含热量 10 000 大卡. 求此人的体重随时间变化的规律.

2. 分析问题

问题是研究体重关于时间的变化规律. 首先我们把体重看成时间的连续函数.

利用: 体重的变化 = 输入 - 输出

其中输入是指扣除了基本新陈代谢之外的净重量吸收; 输出就是进行

健身训练时的消耗.

$$\text{每天体重的变化} = \text{每天净吸收量} - \text{每天健身训练的消耗} \quad (2.1.4)$$

3. 建模与求解

设人的体重为 $W(\text{kg})$, 则由

$$\text{每天的净吸收量} = 2500 - 1200 = 1300 \text{ (大卡)}$$

$$\text{每天的净输出} = 16W \text{ (大卡)}$$

$$\text{每天体重的变化} = \frac{dW}{dt} \text{ (kg)}$$

注意到.(2.1.4)式两端物理单位不同, 利用脂肪形式贮藏的热量100%地有效, 而1千克脂肪含热量10 000卡. 得:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{(2500 - 1200) - 16W}{10000} \quad (2.1.5)$$

设一天开始时的体重为 W_0 , 即 $W(0) = W_0$.

解得: $W = \frac{1300}{16} + \frac{1300 - 16W_0}{16} e^{-\frac{16}{10000}t}$ 即为人的体重随时间变化的

规律.

第2.2节 微分方程的定解问题及建模准则

1. 微分方程的定解问题

含有未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程, 称为微分方程.

一般地, n 阶微分方程的形式是:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{或} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

若在区间 I 上存在具有 n 阶导数的函数 $\phi(x)$, 满足:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

则 $\phi(x)$ 称为微分方程的解.

如果微分方程的解中含有任意常数, 且独立任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解称为微分方程的通解. 确定通解中任意常数的条件称为初始条件. 确定微分方程的通解中任意常数后的微分方程的解称为微分方程的定解.

求微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的定解, 称为一阶微分方程的定解问题, 记作 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ (2.2.1)

而二阶微分方程的定解问题, 记作 $\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y'|_{x=x_0} = y'_0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ (2.2.2)

一般地, n 阶微分方程的定解问题为:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ y'|_{x=x_0} = y'_0 \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

2. 微分方程的平衡解与稳定性

在利用微分方程求解的数学模型中, 有时建模的主要目的并不是寻求动态过程每一个瞬时的状态, 而是研究某种稳定状态的特征, 特别是时间充分长以后动态过程的变化趋势, 以及这些稳定状态是否容易受到破坏. 这就是微分方程的平衡解与稳定性. 下面我们简单介绍一下微分方程的平衡解与稳定性.

微分方程的平衡解, 即微分方程不变化的解, 也就是常数解. 例如微分方程 $y' = (y - a)(y - b)$ 的解 $y = a, y = b$ 都是该方程的平衡解.

一般地, 一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.2.4)$$

右端不显含自变量 t , 代数方程 $f(x) = 0$ 的实根 $x = x_0$ 称为平衡解. 显然它也是(2.2.4)的解.

根据微分方程(2.2.4)的特点又可将其解分为稳定的平衡解及不稳定的平衡解. 如果从任意可能的初始条件出发, 微分方程(2.2.4)的解 $x(t)$ 都满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad (2.2.5)$$

则称平衡解 $x = x_0$ 是稳定的; 否则, 称 $x = x_0$ 是不稳定的.

判断平衡解是否稳定通常有如下两种方法:

(1) 求出(2.2.4)式的解, 利用(2.2.5)式即可得到结论;

(2) 不求(2.2.4)式的解, 利用 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的展式

$$f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0)$$

由(2.2.4)式得 $\frac{dx}{dt} \approx f'(x_0)(x-x_0)$, 其通解为 $x(t)=ce^{f'(x_0)t}+x_0$, 因此, 当 $f'(x_0)<0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)=x_0$, 平衡解 $x=x_0$ 是稳定的; 当 $f'(x_0)>0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)=\infty$, 平衡解 $x=x_0$ 是不稳定的.

在微分方程模型中微分方程解的这种特性对许多实际问题的讨论是非常重要的.

3. 微分方程的建模步骤

(1) 翻译或转化: 微分方程建模要根据实际问题给出的信息转化为导数问题. 一般地, 速率、增长、衰变、边际、改变、变化等都可转化为导数问题. 并且, 不少问题都遵循“净变化率=输入率-输出率”这一模式.

(2) 单位: 在所建立的微分方程模型中每一项都应有相同的物理单位.

(3) 给定条件: 这是关于所研究的问题在某一特定时刻的信息, 它们独立于微分方程而成立. 在微分方程解出后, 利用它们确定有关的常数(包括: 待定系数、积分常数等).

(4) 建立模型: 在任何时刻都正确的瞬时表达式, 即寻找 $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}, \dots, y', y, t$ 之间的关系, 建立微分方程模型.

第 2.3 节 微分方程模型

例 2.3.1 人口模型. 人口的增长是当前世界上引起普遍关注的问题. 早在 18 世纪人们就开始进行人口预报工作. 几百年来建立了许多有关人口问题的模型, 较简单的模型有以下两种.

1. 指数增长模型(马尔萨斯人口模型)

马尔萨斯人口模型是英国人口学家马尔萨斯(Malthus, 1766—1834 年)根据百年的人口统计资料, 于 1789 年提出的. 该模型的基本假设是人口增长率是常数或单位时间内人口增长量与当时的人口数量成正比. 下面是该模型的建模与求解.

设时刻 t 的人口为 $N(t)$, 当考察一个国家或一个很大的地区的人口

时, $N(t)$ 可以看成连续、可微的函数。记初始时刻的人口为 N_0 , 人口增长率为 r , r 是单位时间内 $N(t)$ 的增量与 $N(t)$ 的比例系数, 由 r 是常数的假设可得:

在 $[t, t + \Delta t]$ 内的人口增量为:

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t \quad (2.3.1)$$

(2.3.1) 式两端同除 Δt , 并令 $\Delta t \rightarrow 0$ 得微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

解得

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (2.3.3)$$

由(2.3.2)式给出的模型, 与 19 世纪以前欧洲一些地区的人口统计数据可以很好地吻合。一些人口增长率长期稳定不变的国家和地区用这个模型进行预报, 结果也令人满意。但当人们用 19 世纪以后的许多国家的人口统计资料与指数增长模型比较时, 却发现了相当大的差异。表 2.3.1 列出了美国 19 世纪末 20 世纪初的人口统计数据与该模型预测值的比较结果。

表 2.3.1 美国的实际人口与指数增长模型计算人口比较

年份	实际人口(万)	指数增长模型预测值(万)	误差(%)
1790	390		
1800	530		
1810	720	730	1.4
1820	960	1 000	4.2
1830	1 290	1 370	6.2
1840	1 710	1 870	9.4
1850	2 320	2 560	10.3
1860	3 140	3 500	10.8
1870	3 860	4 780	23.8
1880	5 020	6 550	30.5
1890	6 290	8 960	42.4
1900	7 600	12 250	61.2
1910	9 200	16 760	82.1
1920	10 650	22 930	115.3

表中 $N_0 = 390 \times 10^4$ 为 1790 年的实际人口, t 以 10 年为单位, 10 年的增长率 $r = 0.307$ 是由 $N_0 = 390 \times 10^4$ 和 1800 年的实际人口用(2.3.3)式确定的. 从表中可见随着年代的变化用该模型预报的人口总量与实际值误差越来越大. 引起误差的主要原因是 10 年增长率 r 估计过高, 这个事实对 r 是常数的假设也提出了异议.

人们还发现, 在地广人稀的加拿大领土上, 法国移民后代的人口比较符合指数增长模型, 而同一血统的法国本土的居民人口数量却远远低于模型预报值.

产生上述现象的主要原因是, 随着人口的增加, 自然资源、环境条件等因素对人口继续增长的阻滞作用越来越显著. 如果当人口较少时人口增长率还可以看成常数的话, 那么当人口增加到一定数量后, 增长率就会随着人口继续增加而减少. 为了使人口预报更符合实际情况对增长率进行改进得到如下的模型.

2. 阻滞增长模型(Logistic 模型)

通过以上分析, 我们设人口增长率 r 是人口的函数, 它随着人口的增加而减少, 最简单的假定是设增长率 $r(N)$ 是 $N(t)$ 的线性函数

$$r(N) = r \left(1 - \frac{N}{N_m}\right) \quad (2.3.4)$$

其中 r 称为固有增长率, 相当于 $N=0$ 时的增长率; N_m 表示自然资源条件所能容纳的最大人口数量. 当 $N=N_m$ 时增长率为零. 因此有

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m}\right) N \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

称为阻滞增长模型. 是非线性微分方程. 利用分离变量法求得:

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + \left(\frac{N_m}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} \quad (2.3.6)$$

由(2.3.5)式知道, $\frac{dN}{dt}$ 在 $N = \frac{N_m}{2}$ 处取得最大值. 因此, 当 $0 < N_0 < N_m$ 时 $N(t)$ 是增加的, 当 $N_0 > N_m$ 时 $N(t)$ 是减少的, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $N \rightarrow N_m$ (见图 2.3.1).

在表 2.3.2 中 $N_0 = 390 \times 10^4$ 仍为 1790 年的实际人口, 而 $r = 0.31$ 和 $N_m = 197 \times 10^6$ 则是用 1800 年和 1810 年的实际数据, 利用(2.3.4)式确定的. 从表中数据可见直到 1930 年计算结果与实际数据有较好的吻合. 1930

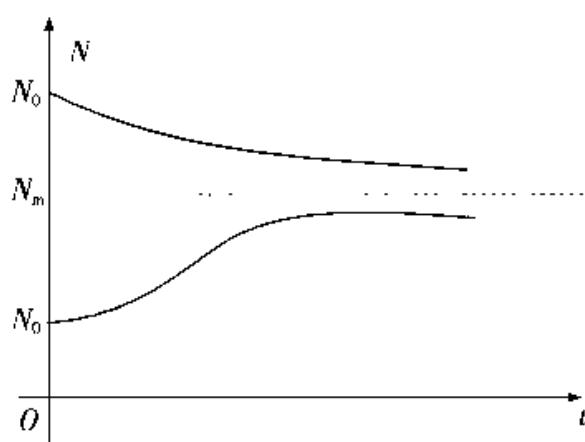


图 2.3.1

年后误差逐渐增大,其原因是到 1960 年美国的实际人口已经突破用过去的数据确定的最大人口容量 N_m ,这是因为随着技术进步,资源、环境等因素对人口增长的制约在减少,一个国家的最大人口容量也是可以改变的.

表 2.3.2 美国的实际人口与阻滞增长模型计算人口比较

年份	实际人口(百万)	阻滞增长模型预测值(百万)	误差(%)
1800	5.3		
1810	7.2		
1820	9.6	9.7	1.0
1830	12.9	13.0	0.8
1840	17.1	17.4	1.8
1850	23.2	23.0	-0.9
1860	31.4	30.2	-3.8
1870	38.6	38.1	-1.3
1880	50.2	49.9	-0.6
1890	62.9	62.4	0.8
1900	76.0	76.5	0.7
1910	92.0	91.6	-0.4
1920	106.5	107.0	0.5
1930	123.2	122.0	-1.0
1940	131.7	135.9	3.2
1950	150.7	148.2	1.7
1960	179.3	158.8	-11.4
1970	204.0	167.6	17.8
1980	226.5		

例 2.3.2 捕鱼问题.

1. 提出问题

考察一个渔场, 其中鱼量在天然环境下按一定规律增长. 在渔场中捕鱼, 捕得越多, 所获得的经济效益越大. 但捕捞的鱼过多, 会造成鱼量的急剧下降势必影响以后的捕鱼数量. 因此, 我们希望在鱼的总量保持稳定的条件下, 控制捕捞使持续产量或经济效益最大.

2. 建模与求解

记时刻 t 渔场中鱼量为 $x(t)$, 渔场资源条件所限制的鱼量的最大值为 x_m .

类似人口模型, 假设在无捕捞条件下 $x(t)$ 服从阻滞增长模型, 则当 r 是鱼量的自然增长率, x_m 是环境容许的最大鱼量, 有:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \quad (2.3.7)$$

假设单位时间的捕鱼量与渔场的鱼量 $x(t)$ 成正比, 捕捞率为 K , 则在有捕捞的情况下应满足:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) - Kx \quad (2.3.8)$$

根据第二节中平衡解的讨论, 令 $rx \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) - Kx = 0$ 得平衡解:

$$x_0 = \frac{r-K}{r}x_m \quad (2.3.9)$$

对于(2.3.8)式, 令 $f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) - Kx$, 易得:

$$f'(x_0) = K - r$$

再根据第二节中平衡解稳定性的讨论, 可知:(1) 当 $K < r$ 时, (2.3.9) 式中 x_0 是稳定的平衡解, 即 $K < r$ 是渔业生产必须遵守的条件.(2) 当 $K > r$ 时, x_0 是不稳定的平衡解, 也就是当 $K > r$ 时就需要改变捕捞方法以保证鱼量稳定.

下面我们利用图解法(见图 2.3.2)讨论在保持鱼量稳定的条件下, 如何选取捕捞系数 K 使捕捞量最大.

设 $f_1(x) = rx \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$, $f_2(x) = Kx$

如图 2.3.2, 由于 $f_1(x)$ 在原点的切线为 $y = rx$, 从而, 当 $K < r$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 必相交, 其交点的横坐标即为 x_0 . 也就是, 当渔场内鱼量保

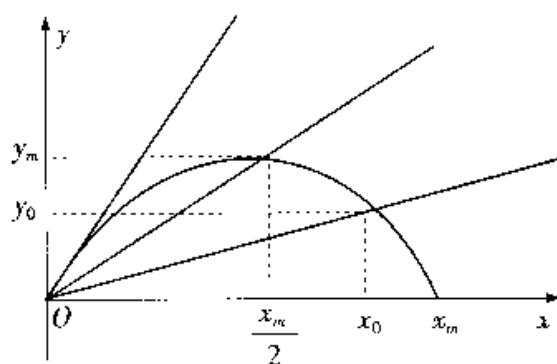


图 2.3.2

持稳定时曲线 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 必相交。在图 2.3.2 中可见, 所有与抛物线 $f_1(x)$ 相交的直线中, 过抛物线顶点的直线将得到最大的捕捞量 y_m , 此时,

稳定的平衡解为 $x_0 = \frac{x_m}{2}$, 代入(2.3.9)式得:

$$K = \frac{r}{2}, y_m = Kx_0 = \frac{rx_m}{4}$$

由此我们得到结论: 控制捕捞率 $K = \frac{r}{2}$, 即控制捕捞率使渔场内的鱼量保持在最大鱼量的一半时, 就可在保持鱼量稳定的条件下使捕捞量最大, 最大捕捞量为 $y_m = \frac{rx_m}{4}$.

3. 效益模型

若我们希望在保持渔场鱼量稳定的条件下得到利润最大, 可以建立以下模型。设鱼的单价为 p , 且捕捞成本与捕捞率成正比, 比例系数为 c , 则在保持渔场鱼量稳定的条件下单位时间捕捞利润为:

$$L = pKx_0 - cK \quad (2.3.10)$$

注意到, (2.3.9)式表示在 $K < r$ 条件下渔场的稳定鱼量, 从中可解出:

$$K = r \left(1 - \frac{x_0}{x_m} \right)$$

代入(2.3.10)式得:

$$L(x_0) = r(px_0 - c) \left(1 - \frac{x_0}{x_m} \right)$$

令 $L'(x_0) = 0$, 求得使 $L(x_0)$ 最大的点:

$$x_0 = \frac{x_m}{2} + \frac{c}{2p}$$

此时,捕捞量为:

$$y = Kx_0 = r \left(1 - \frac{x_0}{x_m}\right)x_0 = \frac{rx_m}{4} - \frac{rc^2}{4p^2x_m} \quad (2.3.11)$$

捕捞率为:

$$K = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{c}{p \cdot x_m}\right) \quad (2.3.12)$$

从(2.3.11)易见,为使经济利润最大,最优捕鱼量比最大捕捞量 $x_m = \frac{rc^2}{4}$ 少捕的鱼量 $\frac{rc^2}{4p^2x_m}$ 与成本的平方成正比,与鱼价的平方成反比.

4. 捕捞过度

上面的效益模型是以只有一个垄断者进行捕捞(或称封闭式捕捞)为基础的.如果渔场是完全竞争的,即有众多的经营者,每个经营者既不能控制价格,也不能控制捕鱼总量.(这时称为开放性捕捞,这种方式将导致捕捞过度.在这种情况下,只要有微小的利润,经营者就会去捕捞.)

把 $x_0 = \frac{r-K}{r}x_m$ 代入(2.3.10)式,得:

$$L(K) = pKx_m \left(1 - \frac{K}{r}\right) - cK$$

令 $L(K) = 0$ 解得:

$$K_a = r \left(1 - \frac{c}{p \cdot x_m}\right) \quad (2.3.13)$$

故当 $K < K_a$ 时,利润 $L(K) > 0$,经营者会增加捕捞强度;若 $K > K_a$, $L(K) < 0$,这时必定有经营者退出经营.所以, K_a 是盲目捕捞下的临界强度,这恰等于最大效益下捕捞率的两倍.

由(2.3.13)式可知,盲目捕捞下,渔场稳定鱼量为 $x_a = \frac{c}{p}$ 完全由成本—价格比决定,所以当捕捞成本下降或鱼的价格上升时,鱼量迅速减少,出现捕捞过度.

例 2.3.3 交通管理中亮黄灯的时间问题

1. 提出问题

在十字路口的交通管理中,亮红灯之前要亮一段时间黄灯,这是为了让那些行驶在十字路口或距十字路口太近以致无法停下来的车辆通过路口.那么,黄灯应该亮多长时间才能使这些车辆安全顺利地通过路口呢?

2. 分析问题

在十字路口行驶的车辆中,当机动车驶近交叉路口时,驾驶员看到黄灯信号后应作出决定:是停车还是通过路口。如果他按法定速度(或低于法定速度)行驶,当作出停车决定时,他必须有足够的刹车距离,少于此距离时不能停车,大于此距离必须停车,等于此距离时可以停车也可以通过。当他决定通过路口时,他必须有足够的时间使他完全通过路口,这包括:作出决定的时间、通过路口的时间以及要停车时刹车所需的最短距离的驾驶时间。由此可得黄灯状态应该持续的时间包括:驾驶员的决定时间(反应时间)、通过十字路口的时间和停车距离的驾驶时间。

3. 建模与求解

设: T_1 ——驾驶员反应时间;

T_2 汽车通过十字路口时间;

T_3 停车距离的驾驶时间。

则 $T = T_1 + T_2 + T_3$ 为黄灯应亮的时间。下面计算 T_2 、 T_3 。

设法定的行驶速度为 v_0 , 十字路口的长度为 I , 典型车身长度为 L 。则汽车通过十字路口的时间为 $T_2 = \frac{I+L}{v_0}$ 。

注意到汽车的尾部必须通过路口,这样汽车驶过的实际距离就是 $I+L$ 。

停车过程是通过驾驶员踩刹车产生的摩擦力,使汽车减速直到停止。设 m 为汽车质量, f 为刹车摩擦系数, $x(t)$ 为汽车行驶距离, 刹车制动力为 fmg (g 为重力加速度)。

由牛顿第二定律,刹车过程应满足运动方程:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -fmg \\ x(0) = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \end{cases} \quad (2.3.14)$$

对(2.3.14)方程积分一次,并代入初始条件 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$ 得:

$$\frac{dx}{dt} = -f g t - v_0 \quad (2.3.15)$$

令末速度为零,得刹车时间为 $t_1 = \frac{v_0}{f g}$ 。对(2.3.15)式积分一次,并代

入条件得：

$$x(t) = -\frac{1}{2} f g t^2 + v_0 t$$

故停车距离为：

$$x(t_1) = -\frac{1}{2} f g \left(\frac{v_0}{f g} \right)^2 + v_0 \frac{v_0}{f g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{f g}$$

$$\text{所以, } T_s = \frac{x(t_1)}{v_0} = \frac{v_0}{2 f g}$$

这样我们求出黄灯应亮的时间为：

$$T = T_1 + \frac{I+L}{v_r} + \frac{v_0}{2 f g}$$

其中驾驶员的反应时间 T_1 , 可根据统计数据或经验得到, 一般可取为 1 秒.

黄灯状态的时间与法定速度的关系图形见图 2.3.3.

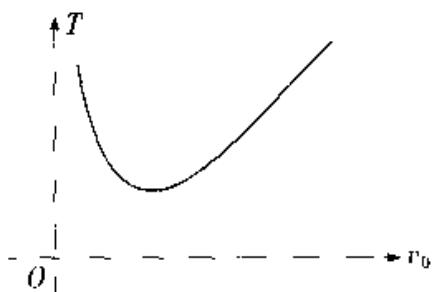


图 2.3.3

例 2.3.4 飞机的降落曲线问题. 在研究飞机的自动着陆系统时, 技术人员需要分析飞机的降落曲线. 根据经验, 一架水平飞行的飞机, 其降落曲线是一条立方抛物线, 如图 2.3.4. 已知飞机的飞行高度为 h , 飞机的着陆点为坐标原点, 且在整个降落过程中, 飞机的水平速度始终保持为常数 u . 出于安全考虑, 飞机的垂直加速度的绝对值最大不得超过 $\frac{g}{10}$ (g 为重力加速度). 求:(1)若飞机从 $x=x_0$ 处开始下降, 试确定飞机的降落曲线; (2)求开始降落时下降点 x_0 所能允许的最小值.

假设飞机降落时在铅直平面内飞行, 其降落曲线是该铅直平面内的一条平面曲线. 以飞机着陆点为原点, 以铅直面与地面的交线为 x 轴建立平面直角坐标系, y 表示飞机的飞行高度, 如图 2.3.4 所示.

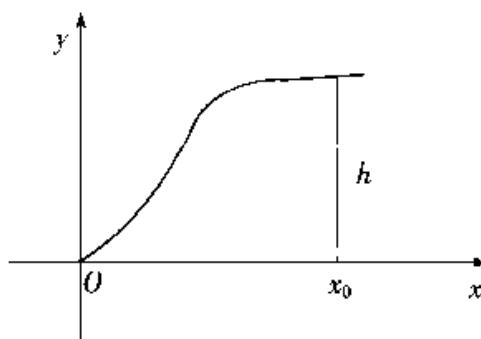


图 2.3.4

(1) 由假设, 我们设飞机的降落曲线为:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

且满足条件:

$$y(0) = 0 \quad y(x_0) = h$$

由于飞机的飞行曲线是光滑的, 即 $y(x)$ 还要满足:

$$y'(0) = 0 \quad y'(x_0) = 0$$

得到:

$$\begin{cases} y(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = h \\ y'(x_0) + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \\ y'(0) = c = 0 \\ y(0) = d = 0 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

解方程组得: $a = -\frac{2h}{x_0^3}$, $b = \frac{3h}{x_0^2}$, $c = d = 0$

因此飞机的降落曲线为: $y = -\frac{2h}{x_0^3} \cdot x^3 + \frac{3h}{x_0^2} \cdot x^2$

飞机的垂直速度是 y 关于时间 t 的导数, 故

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{h}{x_0^2} \left(\frac{6}{x_0} x^2 - 6x \right) \frac{dx}{dt}, \text{ 其中 } \frac{dx}{dt} \text{ 是飞机的水平速度.}$$

由题意知 $\frac{dx}{dt} = u$, 因此,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6hu}{x_0^2} \left(\frac{x^2}{x_0} - x \right) \quad (2.3.17)$$

垂直加速度为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{6hu}{x_0^2} \left(\frac{2x}{x_0} - 1 \right) \frac{dx}{dt} = -\frac{6hu^2}{x_0^2} \left(\frac{2x}{x_0} - 1 \right)$$

将垂直加速度记为 $H(x)$, 则

$$|H(x)| = \frac{6hu^2}{x_0^2} \left| \frac{2x}{x_0} - 1 \right|, x \in [0, x_0]$$

因此,

$$\max_{x \in [0, x_0]} |H(x)| = \frac{6hu^2}{x_0^2}$$

根据设计要求, 有

$$\frac{6hu^2}{x_0^2} \leq \frac{g}{10}$$

此时 x_0 必须满足 $x_0 \geq u \sqrt{\frac{60h}{g}}$, 所以 x_0 所能允许的最小值为 $u \sqrt{\frac{60h}{g}}$. 通过上述分析可知, 飞机降落所需的水平距离不得小于 $u \sqrt{\frac{60h}{g}}$,

例如当飞机以水平速度每小时 540 千米, 高度 1 000 米飞临机场上空时,

$$x_0 = \frac{540 \times 1000}{3600} \sqrt{\frac{60 \times 1000}{9.8}} \approx 11737(\text{m})$$

即飞机所需的降落距离不得小于 11 737 米.

例 2.3.5 新产品独家销售的广告模型.

1. 提出问题

在当今这个信息社会中, 广告在产品销售中起着极其重要的作用. 当生产者产出一批新产品后, 下一步便去思考如何更快更多地卖出该产品. 由于广告的大众性和快捷性, 使它在促销活动中大受经营者青睐. 建立广告与新产品销售关系的数学模型非常必要.

2. 模型假设

假设:(1)商品的销售速度因做广告而增加, 但当商品在市场上趋于饱和时, 销售速度将趋于上限值, 此后销售速度将下降;(2)自然衰减是销售速度的一种性质, 商品销售速度的变化率随着商品的销售速度的增加而减少.

3. 建模与求解

设 $S(t)$ 为 t 时刻的销售速度, M 为销售速度的上限, $\lambda > 0$ 为衰减因子常数, 即广告作用随时间增加而自然衰减的速度, $A(t)$ 为 t 时刻的广告费用.

根据假设, 我们建立数学模型:

$$\frac{dS}{dt} = P \cdot A(t) \cdot \left(1 - \frac{S(t)}{M}\right) - \lambda S(t) \quad (2.3.18)$$

其中 P 为响应系数, 即 $A(t)$ 对 $S(t)$ 的影响力, P 为常数.

由(2.3.18)式可见销售速度与 $A(t)$ 成正比, 因此一定时期内广告投入越大, 销售速度越快.

由假设(1), 当销售进行到某一时刻时, 无论怎样做广告, 都无法阻止销售速度的下降, 因此我们选择如下广告策略:

$$A(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}, \text{ 其中 } A \text{ 为常数}$$

在 $[0, \tau]$ 内, 设广告的总花费为 a , 则 $A = \frac{a}{\tau}$ 代入(2.3.18)式得:

$$\frac{dS}{dt} + \left(\lambda + \frac{Pa}{M\tau}\right)S = \frac{Pa}{\tau}$$

$$\text{令 } b = \left(\lambda + \frac{Pa}{M\tau}\right), c = \frac{Pa}{\tau}$$

则

$$\frac{dS}{dt} + bS = c \quad (2.3.19)$$

解得

$$S(t) = ke^{-bt} + \frac{c}{b}, \text{ 其中 } k \text{ 为常数} \quad (2.3.20)$$

如果开始时销售速度为 S_0 , 即 $S(0) = S_0$ 代入(2.3.20)式得到:

$$S(t) = S_0 e^{-bt} + \frac{c}{b}(1 - e^{-bt}) \quad (2.3.21)$$

当 $t > \tau$ 时, 由 $A(t) = 0$, 代入(2.3.18)式得 $\frac{dS}{dt} = -\lambda S$, 解得:

$$S(t) = ke^{b(t-\tau)} \quad (2.3.22)$$

因为销售速度是连续函数, 所以取 $S(\tau) = S_0 e^{-b\tau} + \frac{c}{b}(1 - e^{-b\tau})$ 作为初始条件, 此时(2.3.22)式的解为 $S(t) = S(\tau) e^{b(t-\tau)}$, 最后我们得到销售速度:

$$S(t) = \begin{cases} S_0 e^{-bt} + \frac{c}{b}(1 - e^{-bt}), & 0 \leq t \leq \tau \\ S(\tau) e^{b(t-\tau)}, & t > \tau \end{cases}$$

从图 2.3.5 中明显可见商品的销售速度因作广告而增加, 但当商品在

市场上趋于饱和时,销售速度将趋于上限值,这时销售速度将开始下降.

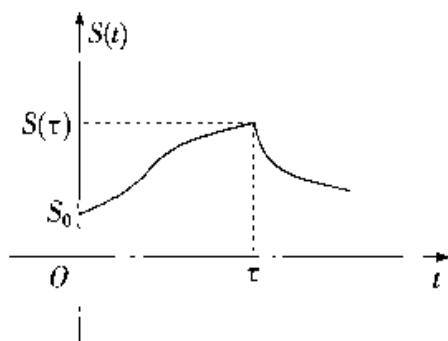


图 2.3.5

例 2.3.6 湖水的污染问题.

1. 提出问题

湖泊为人们提供了大量的水资源,不仅可以养鱼、运输,也是人们旅游的场所.但是湖泊也承受着人们倾倒的垃圾、污物.它们越来越受到工业和生物污水的污染,如洗涤剂中的磷酸盐、杀虫剂中的 DDT 和各种重金属元素等.这些污染物会杀死水中的鱼类和各种水生的动、植物,过多的磷酸盐将导致水体富营养化而发出难闻的气味.湖水污染的治理工作是困难的,因为一般湖水覆盖的区域较大,周围的污染源较为复杂,很难指明所有污染的原因.另外,产生的污染现象总是与社会的政治和经济上的因素有着千丝万缕的联系,不考虑这些因素很难得到全面的治理.通常治理水体污染的办法是依靠自然的过程,靠水体本身的净化能力来缓解污染.这对河流的污染一般是有效的,因为它一旦被污染通常可以很快地进行自我清洁.而对于湖水的污染来说就不是一件容易解决的事情.因为被污的水体将长时间留在湖中.仅仅依靠生物的降解作用,一个大湖要花费多长时间才能使得它的污染程度有明显的改善呢?一个湖泊中的水的平均保留时间对于湖水水质改善是非常重要的.接下来针对湖泊的特点建模来描述湖水的污染问题.

2. 模型假设

(1) 不区分不同的污染物所造成的污染,不考虑从不同的渠道流入与流出湖泊之间的区别.只考虑携带污染物的水流入湖泊和湖泊中的水流对湖水污染程度的影响.因此可以把湖泊看成是一个单流入、单流出的系统.

(2) 流入湖泊的污染物能以很快的速度与湖中的水均匀混合,也就是

说湖中的污染状况与任何局部水体在湖中的位置无关.

(3) 参与模型的变量是连续变化的, 并且充分光滑.

(4) 湖水的体积保持恒定, 也就是说假设由降雨雪等原因所引起的流入增量与被蒸发、渗漏所造成的损失量互相抵消, 同时不考虑湖水体积季节上的差异.

(5) 不考虑生物因素在水体自净过程中的交互作用. 污染物除流出外不因腐烂、沉积或其他任何原因从湖水中消失.

3. 建立模型

根据假设(1), 令

$r_1(t)$ —— t 时刻湖水的流入速度;

$p_1(t)$ —— t 时刻流入湖水的污染物的浓度;

$r_o(t)$ —— t 时刻湖水的流出速度;

$p_o(t)$ —— t 时刻流出湖水的污染物的浓度;

$p(t)$ —— t 时刻湖水中污染物的浓度;

$V(t)$ —— t 时刻湖水的体积.

由假设(3), 它们都是连续而且是光滑的. 由假设(4)可知 $V(t)=V$ (常数).

根据物质平衡原理, 和假设(5)可知:

湖内污染物的改变量 = 流入的污染物量 - 流出的污染物量

于是对于充分小的 Δt , 在时间 $(t, t + \Delta t)$ 内有:

$$p(t + \Delta t)V - p(t)V = [p_1(t)r_1(t) - p_o(t)r_o(t)]\Delta t$$

两端同除 Δt , 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得:

$$V \frac{dp}{dt} = p_1(t)r_1(t) - p_o(t)r_o(t)$$

由于 V 为常数, 故有:

$$r_1(t) = r_o(t)$$

另外根据假设(2), 流出的污染物应与湖水中污染物有相同的浓度 $p_o(t) = p(t)$. 进一步我们假定从湖中流出的湖水的流速为常数, 于是有 $r_1(t) = r_o(t) = r_v$ (r_v 为常数), 这样, 我们得到:

$$V \frac{dp}{dt} = r_v [p_1(t) - p(t)]$$

令 $\tau = \frac{V}{r_v}$, 不难理解, τ 给出了排尽湖水所需要的时间或称之为湖水的

保留时间.于是就得到了湖水污染的模型:

$$\tau \frac{dp}{dt} = p_1(t) - p(t) \quad (2.3.23)$$

4. 模型求解及分析

对于模型(2.3.23)的分析,我们需要关于输入函数 $p_1(t)$ 的信息, $p_1(t)$ 的不同将导致不同的结论,我们仅就 $p_1(t)=K$ (常数)的情况进行讨论.

$p_1(t)=K$ 时可以认为它大致描述了自由污染,即每天的污染物以一个恒定值流入湖内.

如果已知在初始时刻 $t=0$ 有 $p(0)=p_0$,那么模型(2.3.23)可以解得:

$$p(t) = (p_0 - K)e^{-t/\tau} + K \quad (2.3.24)$$

从这个结论我们可以看到:

(1)当 $p_0 > K$ 时,污染物的浓度将逐渐减少,而当 $p_0 < K$ 时污染物的浓度随时间而增加,而且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = K$,称 K 为该湖泊的最终污染程度.

(2)由(2.3.23)式可以看出,当流入浓度 K 给定时,湖水污染物浓度的变化速率只依赖于湖水的保留时间 τ ,并与 τ 的大小成反比.

(3)称 $\beta = p(t)/K$ 为湖水在 t 时刻的污染水平. $\beta = 1$ 时为标准污染水平; $\beta > 1$ 时称为超标准污染水平,容易看出,这时污染物浓度将不断下降; $\beta < 1$ 时湖水的污染状况不断加重.

(4)若 $p_0 = 0$,即对于一湖清水,则 t 时刻的污染水平 $\beta(t) = 1 - e^{-t/\tau}$,而对于给定的水平 $\beta < 1$,湖水的污染程度达到水平 β 所需要的时间为 $t_\beta = \tau \ln(1 - \beta)$.

(5)若 $K = 0$,即没有污染物流入,这时湖水将会以最快的速度得到净化.

5. 模型的进一步讨论

(1)蒸发和渗漏.对于一个大湖,蒸发和渗漏也是湖水减少的不可忽略的因素.考虑这些约束条件 $r_1 = r_2$ 必须要放宽.这时我们不妨假设 $r_2 = kV(t)$,这样以来在建模过程的平衡方程中,就需要添加一个输出项 $Ap(t)V(t)$.这样还需要对参数 A 给出估计,这将不是一件容易的事.

(2)污染物.不同的污染物对湖水污染影响的行为特征是不同的.如 DDT,由于它容易溶解在有机体的脂肪中,随着生物的吸收,保留了大部分 DDT,而且几乎不可能使之在生物圈内消除.可以料想,在一个相当长的时间内,DDT 将保留在湖里的生物中,要想把 DDT 从湖中排除掉的最大可

能是把它慢慢地分解成危害较小的化合物或水中的生物离开湖泊,比如猛禽捕食鱼类和人类的捕捞活动.然而磷的性质则不同,它大量存在于人们的生活垃圾、化肥和洗涤剂中.这种元素的含量过多可能引起湖中水藻激增,水体发臭.当水藻死去后沉落湖底,许多磷以这种方式暂时从湖水中除掉.一旦藻类腐烂,磷又回到湖水中,一部分被排出去,一部分又重新进入生物圈.深入建模描述污染现象时必须考虑到这些特征.

例 2.3.7 礼堂座位坡度问题.在礼堂或影剧院观看报告或电影时,为了使前面的观众不影响后面的观众的视线,场内地面都做成前低后高,那么地面坡度曲线如何设计才更合理呢?我们进行以下讨论.

1. 问题的提出与假设

为了讨论方便我们做如下假设:

- (1) 同一排座位在同一等高线上;
- (2) 每个坐在座位上的观众眼睛都一样高;
- (3) 每个坐在座位上观众的头也一样高.

设计的曲线只要求后一排的观众的视线从近邻的前一个座位的人的头顶擦过即可.以设计视点 O 为原点,地水平线为 x 轴,其垂直方向为 y 轴,建立坐标系如图 2.3.6.

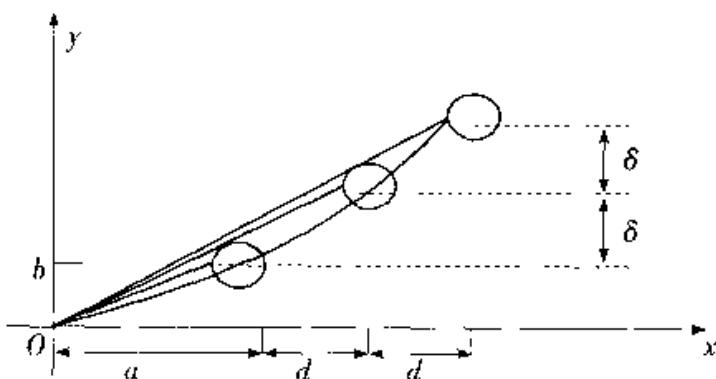


图 2.3.6

其中: O —一看台上的设计视点;

a —第一排观众与设计视点的水平距离;

b —第一排观众到 x 轴的垂直距离;

d —相邻两排的排距;

δ —视线升高的标准;

x —任意一排与设计视点的水平距离.

我们要解决的问题是:求任一排与视点 O 垂直距离 y 关于该排到视点 O 水平距离 x 的函数 $y = y(x)$, 使此曲线满足的无遮挡要求.

由假设(2)知每个观众的眼睛与坡度的高度差都是相等的. 为简化问题, 我们可以用从前到后的观众的眼睛曲线来代替坡度曲线 $y = y(x)$. 事实上, 将前者向下平移若干距离即得后者.

以下, 我们把 y 看作眼睛距 x 轴的垂直距离.

2. 建模与求解

设地面升起的曲线应满足微分方程: $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$

$$\text{初始条件 } y|_{x=a} = b$$

从图(2.3.6)上可见, 从第一排起, 观众的眼睛与 O 点的连线的斜率随排数的增加而增加, 而眼睛升起的曲线显然与这些直线皆相交, 因此从地面升起的曲线是凹的.

任选某排 $M(x, y)$ 及前后相邻两排 $M_1(x-d, y_1), M_2(x+d, y_2)$ 如图 2.3.7 所示. 由曲线 $y = y(x)$ 的凹性, 显然有 $K_1 < K < K_2$, 其中 K_1, K, K_2 分别表示点 M_1, M, M_2 的斜率.

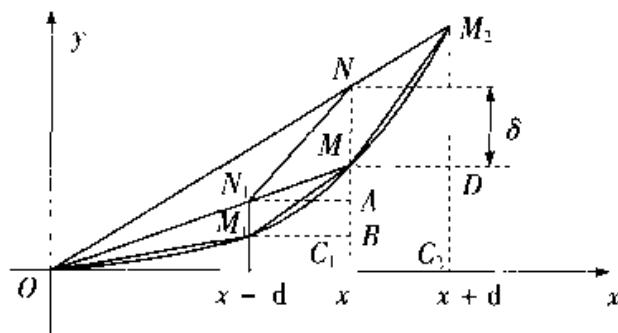


图 2.3.7

$$M_1N_1 = MN = AB = \delta, \text{ 故}$$

$$K_1 = \frac{MA + AB}{M_1B} = \frac{MA + \delta}{d} \quad (2.3.25)$$

又由 $\triangle N_1MA$ 相似于 $\triangle OMC_1$, 则有 $\frac{MA}{y} = \frac{d}{x}$, 即 $MA = \frac{y}{x}d$

代入(2.3.25)式, $K_1 = \frac{y}{x} + \frac{\delta}{d}$. 下面计算 K_2 , 由 $\triangle OM_2C_2$ 相似于 $\triangle ONC_1$

可得: $\frac{M_2D + y}{y + \delta} = \frac{x + d}{x}$, 故 $M_2D = \frac{yd}{x} + \frac{\delta d}{x} + \delta$, 从而

$$K_2 = \frac{M_2 D}{MD} = \frac{y}{x} + \frac{\delta}{x} + \frac{\delta}{d} \quad (2.3.26)$$

由(2.3.25)式、(2.3.26)式及 $K_1 < K < K_2$ 又可得：

$$\frac{y}{x} + \frac{\delta}{d} < \frac{dy}{dx} < \frac{y}{x} + \frac{\delta}{x} + \frac{\delta}{d} \quad (2.3.27)$$

我们考虑微分方程的定解问题 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{x} + \frac{\delta}{d} \\ y_1|_{x=a} = b \end{cases}$ 及 $\begin{cases} \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{x} + \frac{\delta}{x} + \frac{\delta}{d} \\ y_2|_{x=a} = b \end{cases}$,

相应解分别为 $y_1(x) = \frac{b}{a}x + \frac{\delta}{d}x \ln \frac{x}{a}$ 及 $y_2(x) = \frac{b}{a} + \frac{\delta}{d}x \ln \frac{x}{a} + \delta \left(\frac{x}{a} - 1 \right)$.

根据(2.3.27)式及相应的微分方程理论,前面微分方程的解必在 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 之间,从而有:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{b}{a}x + \frac{\delta}{d}x \ln \frac{x}{a} < y(x) < y_2(x) \\ &= \frac{b}{a} + \frac{\delta}{d}x \ln \frac{x}{a} + \delta \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \end{aligned}$$

3. 地面升起曲线

前面讨论给出地面升起曲线的范围,并没有给出地面升起曲线的精确表达式.通常工程上采取的是折中的办法,取 $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

因此,地面升起问题的解为:

$$y(x) = \frac{b}{a} + \frac{\delta}{d}x \ln \frac{x}{a} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{a} - 1 \right)$$

上式给出的计算礼堂坡度的函数关系,在实际应用中为了减少坡度可以在不影响预定的无视线遮挡前提下适当调整 a, b, δ, d 等参数.另外,可把前后两排座位交错排开,使前后两排座位即使在同一高度也不会出现视线遮挡问题.这样 d 可增加一倍,由上式可见 y 也会相应减少即坡度将减缓.

例 2.3.8 军备竞赛问题.

1. 问题的提出及假设

甲乙两国为敌,彼此为了防御而增强各自的军事实力,双方仇视越深,扩军越快.对方的军力也是刺激扩军的重要因素,但本国已有的军事力量对继续扩军则往往有抑制作用(人力物力限制).设 $x(t), y(t)$ 分别代表 t

时刻两国的军事力量,其中 t 是从战斗开始时以天为单位的时间.为了讨论问题方便我们做如下假设:

- (1) $x(t), y(t)$ 分别代表 t 时刻两国士兵人数;
- (2) $x(t), y(t)$ 连续变化,并且充分光滑;
- (3) $g(t)$ 与 $h(t)$ 分别是甲对乙和乙对甲的仇视程度.

2. 模型分析与求解

根据假设借助平衡法则我们给出下面的军备竞赛的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky - ax + g(t) \\ \frac{dy}{dt} = lx - by + h(t) \end{cases} \quad (\text{其中 } k, l, a, b, \text{ 是正的常数}) \quad (2.3.28)$$

下面仅对 $g(t) = g$ 与 $h(t) = h$, 其中 g, h 是常数的情形来讨论.

$$\begin{cases} ky - ax + g = 0 \\ lx - by + h = 0 \end{cases} \quad (a\beta \neq kl)$$

解得平衡点为: $x_0 = \frac{kh + \beta g}{a\beta - kl}$, $y_0 = \frac{lg + ah}{a\beta - kl}$, 令 $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, 由

(2.3.28)式得:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = kv - au \\ \frac{dy}{dt} = lu - \beta v \end{cases}$$

其特征方程为:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & k \\ l & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

特征根为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(a\beta - kl)} \right]$$

两根都是非零实数.

(1) 当 $a\beta - kl > 0$ 时, 两根皆负, 是稳定平衡点;

(2) 当 $a\beta - kl < 0$ 时, 两根异号, 是鞍点, 不稳定.

在情形(1)中奇点在第一象限, 即 $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, 又是稳定平衡点. 即 $t \rightarrow \infty$ 的过程中, 甲国的军事实力趋于 x_0 , 乙国趋于 y_0 , 两国不会无限地扩张军备, 两国军事力量会稳定在各自的极限值附近. 这时一般比较和平. 这种情形是 $a\beta > kl$ 造成的, 即各国对扩军的抑制作用超过了两国的扩军总

趋势.对于 $\alpha\beta < kl$,即各国对扩军抑制作用较小时,平衡点是鞍点,随着 $t \rightarrow \infty$,至少有一个国家的军事力量会无限扩张,这种形势往往形成战争威胁.

历史上,1909 -1914 年,德奥匈联盟与法俄联盟军备竞赛,双方的扩军与抑制大体一致, $k=l=0.9$, $\alpha=\beta=0.2$,于是 $\alpha\beta-kl=0.04-0.81=-0.7$,所以不稳定,两个联盟终于爆发了第一次世界大战.

3. 战争胜负

两军对垒,一次战役爆发在即,双方都最关心此次战斗之胜败.胜败取决于许多因素,诸如将士之素质,武器之优劣以及天时、地利、人和等等.把这些因素中最要紧的因素提取出来,我们有如下的作战模型:令 $x(t)$, $y(t)$ 是双方战斗力, $p(t)$, $q(t)$ 分别是 x 方与 y 方增援补充率, a,b,c,d,h,g 是非负系数.

(1) 正规军对正规军之战

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - by + p(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx - dy + q(t) \end{cases} \quad (2.3.29)$$

$-ax$ 与 $-dy$ 分别是 x 方与 y 方的非战斗(自然)减员,例如疾病、开小差等等.这种非战斗减员与军队总人数成正比; $-by$ 与 $-cx$ 项分别是 x 方与 y 方的战斗伤亡人数, x 方伤亡速度与 y 方军队总数成正比, y 方伤亡速度与 x 方军队总数成正比.

(2) 正规军与游击队之战

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - gxy + p(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx - dy + q(t) \end{cases} \quad (2.3.30)$$

其中 x 方是游击队, y 方是正规军; $-gxy$ 项是游击队的战斗伤亡.事实上, $x(t)$ 是一支其敌方 $y(t)$ 看不见且固守于某一区域的游击队, y 向 x 射击轰炸,使得游击队的伤亡与 $x(t)$ 成正比,又 $y(t)$ 的数量越大,给 x 方造成的伤亡越多,即 x 方的伤亡率还与 $y(t)$ 成正比,所以 x 方的伤亡率为 $-gxy$.

(3) 游击队对游击队之战

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax - gxy + p(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx - hxy + q(t) \end{cases} \quad (2.3.31)$$

模型中 $gxy, -hxy$ 的意义同(2)中的解释.

下面对以上三种战争模型进行数学分析.

(4) 常规战斗的双曲律

设两支正规军 x 与 y 皆无增援与补充, 又设其自然减员皆为零, 于是(2.3.29)式变成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by \\ \frac{dy}{dt} = -cx \end{cases} \quad (2.3.32)$$

于是, $\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}$, 解得 $b \int_{y_0}^y y dy = c \int_{x_0}^x x dx$, 其中 x_0, y_0 分别是 x 与 y 的初始值, 故有

$$by^2 - cx^2 = k, \text{ 其中 } k = by_0^2 - cx_0^2 \quad (2.3.33)$$

(2.3.32)式的相图见图 2.3.8, (2.3.33)式的相图是双曲线, 称(2.3.32)式是平方律模型.

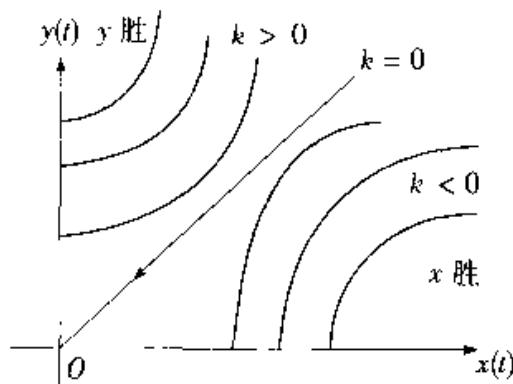


图 2.3.8

奇点 $(0,0)$ 是鞍点. 由图 2.3.8 知 $k=0$ 时, 双方谁也不会被先消灭. 如果这种战斗继续下去, 只会双方同归于尽, 双方最明智的是谈判停战.

当 $k>0$ 时, 当 y 方人数减少至 $\sqrt{\frac{k}{b}}$ 时 x 已被歼灭了. x 被消灭, 这种形势自然称 y 方取胜; 当 $k<0$ 时, 当 x 方人数减少至 $\sqrt{\frac{-k}{c}}$ 时, 由(2.3.33)式知 $y=0$, 这时 y 被消灭, 这种形势称 x 方取胜. 对 y 方而言, 试图使 $k>0$, 即 $by_0^2>cx_0^2$ 这正表明 y_0 应足够大, 即集中优势兵力是取胜之本; x 方则企图增加 x_0 使 $k<0$.

(5) 游击战的线性律

设两支游击队的自然减员与增援皆无,这时(2.3.31)式变成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -gy \\ \frac{dy}{dt} = -hx \end{cases} \quad (2.3.34)$$

由 $\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g}$ 解得: $gy - hx = L$. 其中, $L = gy_0 - hx_0$, 其相图如图 2.3.9

所示,是平行直线,所以称(2.3.34)式是游击战的线性律模型. 与(4)相似的分析知 $L=0$ 时两军应和谈,不然会两败俱伤; $L>0$ 时, y 方将取胜; $L<0$ 时, x 方将获胜. $L>0$ 时, y 减少到 $\frac{l}{g}$, 则 x 方即已被歼灭; $L<0$ 时, x 减少到 $-\frac{l}{h}$ 时, y 方已被歼灭.

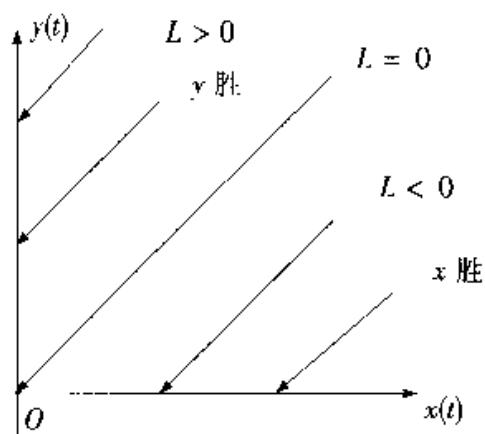


图 2.3.9

(6) 正规军与游击队之战的抛物律

设 x 是游击队, y 为正规军,且 x, y 皆无增援与补充,又设其自然减员皆为零,于是(2.3.30)式变成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -gy^2 \\ \frac{dy}{dt} = -cx \end{cases} \quad (2.3.35)$$

所以, $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy^2}$

解得: $gy^2 = 2cx + M$, 其中 $M = gy_0^2 - 2cx_0$. 其相图为图 2.3.10 所示. 同

(4)、(5)讨论相同,我们可知 $M=0$ 时双方应和谈; $M>0$ 时,当 y 方人数减少到 $\sqrt{\frac{M}{g}}$ 时, $x=0$, x 方先被消灭; $M<0$ 时,当 x 方人数减少到 $-\frac{M}{2c}$ 时 $y=0$, y 方先被消灭.

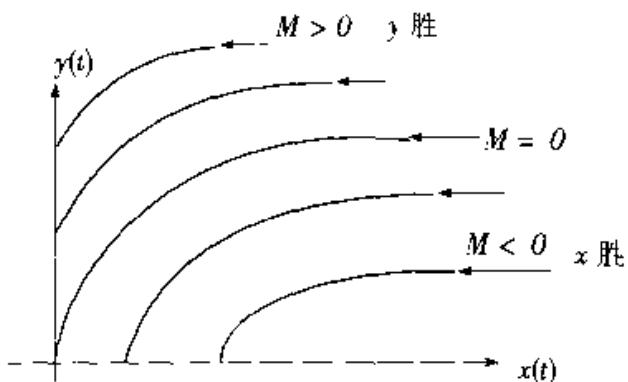


图 2.3.10

由 $M = gy_0^2 - 2cx_0 = 0$, 分析 $y_0^2 = \frac{2c}{g}x_0$. 由于游击队较隐蔽, 战斗减员少, 即 $0 < g \leq 1$, 故 x_0 对应的 $y_0 \geq 1$ 才能使 $y_0^2 = \frac{2c}{g}x_0$ 成立, 也就是双方打平. 因此 y 方人数必须足够多, 否则 y 方必败.

习题

1. 一只装满水的圆柱形桶, 底半径为 10 厘米, 高为 20 厘米, 底部有一直径为 1 厘米的小孔. 问桶流空需要多少时间?
2. 设容器内原有 100 千克盐水, 含有 10 千克盐. 现在以每分钟 3 升的速度匀速从 A 管注入每升含 0.01 千克盐的淡盐水. 同时, 又以每分钟 2 升的速度匀速将盐水从 B 管中抽出, 描述容器内含盐量变化的情况. 60 分钟后, 容器内应有多少千克盐?
3. 我缉私艇雷达发现 c 千米外有一走私艇正以匀速 a 沿直线行驶, 缉私艇立即以最大速度 b 千米/小时追赶. 如用雷达进行跟踪, 保持船的瞬时速度方向始终指向走私船, 试求缉私艇追逐路线和追上时间.
4. 某天 23:00 时, 公安局接到报案在一住宅发现一受害者的尸体, 法医于 23:35 赶到现场, 立即测量死者尸体体温是 30.8°C , 一小时后再次测量体温为 29.1°C , 法医还注意到当时的室温是 28°C , 试估计受害者的死亡时间.

5. 假设某岛上不断有从大陆来的移民. 再假设在 t 时刻, 大陆上有 S 种人, 岛上有 $N(t)$ 种人. 移居到岛上并在那边开拓殖民地的新人种的增加速度, 与大陆上尚未移居到岛上的人种数 $S - N(t)$ 成比例, 比例常数为 I . 此外, 人种的灭绝速度与岛上的人种数成比例, 比例常数为 E . 证明岛上的人种数将达到一个平衡值, 它近似地等于 $[I/(I+E)]S$.

6. 设一个音乐俱乐部开始活动时有 N_0 个成员. 再设这个俱乐部的扩大将与会员人数成比例, 但真正对这种音乐感兴趣的最多有 M 个人. 因此, 当会员人数接近 M 时, 速度将减小, 因为新成员比较难找到了. 所以, 实际上增长的速度与成员和留下来的有兴趣者的人数的乘积成比例. 给出包含会员人数 $N(t)$ 的微分方程. 假设有关常数在几年内保持稳定, 组织者能期待每年出售多少会员证.

7. 水以每单位时间 k_1 个单位体积的流速流入一圆锥形水罐. 其从罐中蒸发出来的速度与 $V^{2/3}$ 成比例, V 为罐中水的体积. 设比例常数为 k_2 , 求 V 所满足的微分方程. 该微分方程有无平衡解? 是否稳定?

8. 一个玻片上的一群病菌趋向于繁殖成一个圆菌落. 如果 N 是病菌的数目, r_1 是单位成员的增长率, 病菌的增长满足马尔萨斯生长律. 又处于周界表面的那些病菌由于寒冷而受到损伤, 它们的死亡率与其数量成比例, 即与 $N^{1/2}$ 成正比例. 设这个比例常数为 r_2 . 求满足的微分方程. 该微分方程是否有平衡解? 若有, 是否稳定?

9. 某城市共有 $n+1$ 人, 其中一人出于某种目的编造了一个谣言, 该城市具有初中以上文化程度的人占总人数的一半, 这些人只有 $1/4$ 相信这一谣言, 而其他人约有 $1/3$ 会相信这一谣言. 又设相信此谣言的人每天在单位时间内传播的平均人数正比于当时尚未听说此谣言的人数, 而不相信此谣言的人不传播此谣言, 试建立一个反映谣言传播情况的微分方程的模型.

10. 有一段时间, 美国原子能委员会(现为核管理委员会)是这样处理浓缩放射性废物的, 委员们将这些废物装入密封性能很好的圆桶中, 然后扔到水深 91.4 米的海里. 他们一再保证, 圆桶非常坚固, 决不会破裂, 保证安全. 然而许多工程师表示怀疑, 认为圆桶在和海底碰撞时有可能发生破裂.

实验证明, 圆桶速度达到 12.2 米/秒时, 在碰撞下会发生破裂. 已知圆桶装满放射性废料时重量约为 239 千克, 在海水中受的浮力为 213.2 千克, 圆桶所受海水阻力与圆桶下降速度成正比, 比例系数为 0.119. 试用微分方程模型分析圆桶是否可能发生破裂.

第 3 章

概率方法建模

自然界和社会上发生的现象都是多种多样的,某一类现象的发生具有随机性.而概率论恰好是研究这类现象的统计规律的一门科学.通过对大量数据的处理或者根据理论的分析,随机现象可以用一定的概率分布,如正态分布、泊松分布、指数分布等描述.本章将在假设概率分布已知的条件下,利用随机变量的概率分布及数字特征等,按照研究目的和对象的客观规律建立数学模型.

第 3.1 节 报纸零售问题

报纸零售商每天从报社购进报纸零售,并将没有卖出去的报纸送回报社处理.设报纸每卖出一份可获利 a 元,如果卖不出去,将赔 b 元.报纸零售商当然希望卖出去的越多越好,但是如果购进太多,售不完的可能性就大,而且赔的也可能多.很明显,报纸零售商要根据以往的售报经验,制定购报计划,以获得最大利润.

设零售商已掌握了每天报纸需求量的规律,在他的销售范围内每天报纸的需求量 X 的概率分布为:

$$P\{X=x\} = p_x, x=0, 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

设每天购进量为 n ,利润为:

$$L = \begin{cases} ax - b(n-x), & x \leq n \\ an, & x \geq n \end{cases} \quad (3.1.2)$$

则期望利润(即长期的平均利润)为:

$$E(L) = \sum_{x=0}^n [ax - b(n-x)] p_x + \sum_{x=n+1}^{\infty} anp_x \quad (3.1.3)$$

这样问题归结为,要根据以上需求量 X 的分布,确定最优购进量 n ,使得利润的期望值最大.

例 3.1.1 已知每百份报纸全部卖出可获利 14 元,卖不出将赔 8 元.设报纸需求量 X 的分布律如表 3.1.1 所示.

表 3.1.1 报纸需求量 X 的分布律

X	0	1	2	3	4	5
p_x	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

试确定报纸最佳购进量 n .

建模与求解

利润 $L = \begin{cases} 14x - 8(n-x), & x \leq n \\ 14n, & x \geq n \end{cases}$, 则期望利润(即长期的平均利润)为:

$$E(L) = \sum_{x=0}^n [14x - 8(n-x)] p_x + \sum_{x=n+1}^{\infty} 14np_x,$$

经计算可得 $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 时的期望利润如表 3.1.2 所示.

表 3.1.2

n	0	1	2	3	4	5
$E(L)$	0	12.9	23.6	28.8	26.3	20.5

由此可知,当报纸零售商购进 300 份报纸时,可获得最大利润.

当报纸需求量 X 很大时,可视其为连续型随机变量,设其概率密度为 $f(x)$,这时:

$$E(L) = \int_0^n [ax - b(n-x)] f(x) dx + \int_n^{\infty} anf(x) dx \quad (3.1.4)$$

令 $\frac{dE(L)}{dn} = 0$, 得:

$$a \int_n^{\infty} f(x) dx - b \int_0^n f(x) dx = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{a}{a-b} \quad (3.1.6)$$

例 3.1.2 设报纸需求量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1000e^{-\frac{x}{100}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

已知每份报纸全部卖出可获利 0.1 元, 卖不出将赔 0.02 元, 试确定报纸最佳购进量 n 以获得最大利润.

建模与求解

$$E(L) = \int_n^{\infty} [0.1x - 0.02(n-x)] 1000e^{-\frac{x}{100}} dx + \int_n^{\infty} 100n e^{-\frac{x}{100}} dx$$

令 $\frac{dE(L)}{dn} = 0$, 得:

$$5 \int_n^{\infty} e^{-\frac{x}{100}} dx - \int_n^{\infty} e^{-\frac{x}{100}} dx = 0$$

$$\text{即 } \int_n^{\infty} e^{-\frac{x}{100}} dx = \frac{5}{6}$$

解得 $n = 1000 \ln 6 \approx 1792$.

即购进 1792(可以认为 1800) 份最佳.

第 3.2 节 随机存贮模型

例 煤炭存贮策略. 一煤炭供应部门每吨煤的进价为 130 元, 销售价为 140 元. 若当年售不出去, 则下年以每吨 112 元的价格处理, 如供应短缺, 不足的部分必须由本部门从其他供应站调配, 每吨将亏损 20 元. 已知一年内对煤炭的需求量 X 在 $[2000, 6000]$ 间服从均匀分布, 试制定煤炭存贮最佳策略.

1. 提出问题

设存贮煤炭量为 m , 则供应部门的利润为:

$$\begin{aligned} L(x) &= \begin{cases} 140x + 112(m-x) - 130m, & x \leq m \\ 140m - 20(x-m) - 130m, & x > m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 28x - 18m, & x \leq m \\ 30m - 20x, & x > m \end{cases} \end{aligned}$$

需求量 X 在 $[2000, 6000]$ 间服从均匀分布, 其概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4000}, & 2000 \leq x \leq 6000 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

平均利润:

$$\begin{aligned} E(L) &= \int_0^m (28x - 18m) f(x) dx + \int_m^{6000} (30m - 20x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{4000} (-24m^2 + 180000m - 360000000) \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{dE(L)}{dm} = 0, \text{ 得 } m = 3750 \text{ (吨)}$$

所以,最佳方案是该年度存贮煤炭 3750 吨.

以下我们给出更具一般性的存贮模型.

商店在一月内的销售量是随机的.每到月末采购人员都要根据存货多少决定是否订购货物,以供下个月销售.通常需要制定一个下界 s 和一个上界 S .当月末存货少于 s 时需要订货,且订货量使得下个月月初的存货量达到 S ;当月末存货不少于 s 时,则不订货.这种订货策略简称 (s, S) 策略.

存贮策略的制定与订货费、存贮费、缺货费和商品的购进价格等有关,要在一类策略中选择一个最佳策略,就是要找到使总费用最少的订货策略.

2. 模型假设

1. 每次订货费为 c_1 , 每件商品购进价为 c_0 , 每件商品一个月的贮存费为 c_2 , 每件商品的缺货费为 c_3 , 显然有 $c_1 < c_3$.

2. 一个月的销售量 X 为随机的.由于通常销售量很大,可视若 X 为连续型,记 $f(x)$ 为其概率密度.

3. 月末的存货量为 m , 订货量为 n , 于是下月初的存货量为 $m+n$.

3. 建模与求解

由 (s, S) 存贮策略可知,当月末存货量 $m \geq s$ 时,订货量 $n=0$;当 $m < s$ 时 $n>0$,且 $m+n=S$.由于销售量是随机的,致使一月的贮存费和缺货费也是随机的,所以在确定存贮策略时应以一月的总费用的数学期望(平均费用)最低为标准.

由假设可知平均费用为:

$$C(n) = \begin{cases} c_0 + c_1 n + L(m+n), & n > 0 \\ L(m), & n = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

其中：

$$L(m) = c_2 \int_m^{\infty} (m-x) f(x) dx + c_3 \int_m^{\infty} (x-m) f(x) dx \quad (3.2.2)$$

先在 $n > 0$ 的情况下,求 n 使 $C(n)$ 达到最小值,记 $m+n=S$,并令:

$$\frac{dC(n)}{dn} = c_1 + c_2 \int_n^S f(x) dx - c_3 \int_S^n f(x) dx \quad (3.2.3)$$

可得:

$$\int_n^S f(x) dx = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_3} \quad (3.2.4)$$

以下确定 s ,当存货量为 m 时,若订货,则平均费用为:

$$C_1 = c_0 + c_1(S - m) + L(S) \quad (3.2.5)$$

若不订货,则平均费用为 $C_2 = L(m)$. 显然当 $C_2 \leq C_1$ 时不应订货.

记 $g(m) = c_1 m + L(m)$, $C_2 \leq C_1$ 变为:

$$g(m) \leq c_1 + g(S) \quad (3.2.6)$$

由此可知,方程 $g(m) = c_1 + g(S)$ 的最小正根为 s .

注 上面的存贮模型中的存贮周期可以是一个月,也可以是一周、一季度、一年等等.

第3.3节 随机人口模型

由于一个人的出生与死亡具有随机性,所以一个国家或地区的人口数量是随机变量,这就需要利用随机性人口模型来描述其变化过程.

1. 模型假设

设时刻 t 的人口数 $X(t)$ 的概率分布为:

$$P\{X=n\} = p_n(t), n=0, 1, 2, \dots \quad (3.3.1)$$

在时刻 t 到 $t + \Delta t$ (Δt 很小)间隔内:

(1) 出生一人的概率与 Δt 成正比,记为 $b_n \Delta t = \lambda n \Delta t$, 出生两人及两人以上的概率为 $o(\Delta t)$;

(2) 死亡一人的概率与 Δt 成正比,记为 $d_n \Delta t = \mu n \Delta t$, 死亡两人及两人

以上的概率为 $o(\Delta t)$:

(3) 出生和死亡相互独立, 由(1)和(2)知, 出生一人且死亡一人的概率为 $o(\Delta t)$.

2. 建模与求解

由以上假设可知随机事件 $\{X(t+\Delta t)=n\}$ 可以分解为三个互不相容的随机事件之和: $\{X(t)=n-1\}$ 且 Δt 内出生一人; $\{X(t)=n+1\}$ 且 Δt 内死亡一人; $\{X(t)=n\}$ 且 Δt 内没有出生或死亡. 由全概率公式可得:

$$\begin{aligned} p_n(t+\Delta t) = & \lambda(n-1)p_{n-1}(t)\Delta t + \mu(n+1)p_{n+1}(t)\Delta t \\ & + (1-\lambda n - \mu n)p_n(t)\Delta t \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

即 $p_n(t+\Delta t) - p_n(t) = \lambda(n-1)p_{n-1}(t)\Delta t + \mu(n+1)p_{n+1}(t)\Delta t - (\lambda + \mu)n p_n(t)\Delta t$

由此可得微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{dp_n(t)}{dt} = & \lambda(n-1)p_{n-1}(t) + \mu(n+1)p_{n+1}(t) \\ & - (\lambda + \mu)n p_n(t) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

设 $t=0$ 时人口数量为 n_0 , 即给出初始条件:

$$p_n(0) = \begin{cases} 1, & n=n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

(3.3.3)式是一组递推方程, 由于我们通常关心的是人口数量的平均值和方差, 由(3.3.3)式和(3.3.4)式可得:

$$E(X(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) \quad (3.3.5)$$

对(3.3.5)式求导并将(3.3.3)式代入得:

$$\begin{aligned} \frac{dE(X(t))}{dt} = & \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu n(n+1)p_{n+1}(t) \\ & - (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

注意到: $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)p_k(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k(t)$$

并由(3.3.5)式代入到(3.3.6)式得:

$$\frac{dE(X(t))}{dt} = (\lambda - \mu) \sum_{n=1}^{\infty} np_n(t) - (\lambda - \mu)E(X(t)) \quad (3.3.7)$$

解这个微分方程，并将初始条件代入，得其解为：

$$E(X(t)) = n_0 e^{(\lambda - \mu)t} = n_0 e^{\mu t} \quad (3.3.8)$$

由上面的结果可以看出，随机性人口模型中出生概率与死亡概率之差可视为增长概率，在平均意义上，人口呈指数增长。

用类似的方法，可求得方差：

$$D(X(t)) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} [e^{(\lambda - \mu)t} - 1] \quad (3.3.9)$$

第3.4节 随机服务模型

日常生活中经常可以遇到排队等候服务的现象。顾客到达的时刻和服务员进行服务的时间都是随机的。例如，超级市场一般都是由顾客挑选商品，然后携着采购的商品在收款台前排队结算。我们经常看到开始排队的人数不多只需要一两个收款台工作，随着顾客的增多，队伍长了，市场增开收款台，使队长（排队人数）基本维持在原来的水平。队长不仅与顾客人数，也与收款台的数目及收款的速度有关。我们可以用随机服务模型研究这种现象。

1. 模型假设

随机服务过程由顾客到达规律、服务时间和排队规则组成。

（1）顾客到达规律

设在 $(t, t + \Delta t)$ 时间内到达1个顾客的概率与 Δt 成正比，比例系数为 λ ，到达2个及2个以上的概率为 $o(\Delta t)$ 。在不相交的时间区间内到达的顾客数相互独立；顾客源是无限的。

由概率论的知识可知，在上述假设下 $[0, t]$ 内到达的顾客数服从参数为 λt 的泊松分布，其平均值为 λt ，即单位时间内到达的顾客平均数为 λ ，并称为平均到达率。

$[0, t]$ 内没有顾客到达的概率为 $e^{-\lambda t}$ ，记 T 为第1个顾客到达时刻，则有

$$P\{T > t\} = e^{-\lambda t} \quad (3.4.1)$$

即 T 服从参数为 λ 的指数分布, 且有平均到达时间间隔 $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 服务时间

设在已经服务过一定时间的条件下再服务一段时间的概率, 与一开始服务这段时问的概率相同, 即服务效率不变. 记 Z 为服务时间, 由概率论的知识可知, 上述假设说明 Z 服从指数分布, 设参数为 μ , 则 $E(Z) = \frac{1}{\mu}$, 即

为每个顾客的平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$, 从而单位时间内被服务的顾客的平均数为 μ , 称为平均服务率.

(3) 排队规则

按顾客到达的先后顺序服务, 即先到先服务.

满足以上条件的模型在排队论中记为 $M/M/s$ 模型, 其中 s 为服务员的数量.

2. 模型求解

在随机服务过程中人们普遍关心的是队长和服务时间, 以下求平均队长及平均等待时间. 先讨论只有一个服务员即 $s=1$ 的情形.

(1) 平均队长和平均等待时间

记在排队服务系统内时刻 t 有 n 个顾客的概率为 $p_n(t)$, 可以用类似于随机人口模型(见第 3.3 节)的方法建立 $p_n(t)$ 所满足的方程. 这里, 顾客到达服务系统相当于出生, 服务完毕离开服务系统相当于死亡. 于是可得下面的微分方程.

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) \quad (3.4.2)$$

初始条件为:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_0(t) - \lambda p_0(t) \quad (3.4.3)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 队长有稳定的分布, 即 $p_n(t)$ 与 t 无关, (3.4.2) 式和 (3.4.3) 式可以化为:

$$\lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) = 0 \quad (3.4.4)$$

初始条件为:

$$\mu p_1(t) - \lambda p_0(t) = 0 \quad (3.4.5)$$

由此可解得:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, n=1, 2, \dots \quad (3.4.6)$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, 并记 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (显然应有 $\rho < 1$), 称为服务强度. 可得在稳态下系统内有 n 个顾客的概率为:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \quad (3.4.7)$$

从而平均队长为:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (3.4.8)$$

以下求平均等待时间, 由于顾客到达间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布, 服务时间 Z 服从参数为 μ 的指数分布, 所以顾客等待时间 Y 服从参数为 $\lambda - \mu$ 的指数分布, 从而平均等待时间为:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda} \quad (3.4.9)$$

(2) 关于增加服务员问题

随着等待服务的顾客人数的增加, 服务员人数也要相应增加, 以使平均队长不会太长. 首先讨论 2 个服务员且他们的服务效率相同的情形.

若顾客只排成一个队, 最前面的顾客到空闲的服务员处接受服务, 即 $M/M/2$ 模型. 整个服务过程的平均服务率为 2μ , 为使队长是有限的, 则服务强度:

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu} < 1 \quad (3.4.10)$$

用类似的方法可以求出在稳态下平均队长 L_2 和平均等待时间 W_2 依次为:

$$L_2 = \frac{2\rho_2}{1-\rho_2} \quad (3.4.11)$$

$$W_2 = \frac{2\rho_2}{\lambda(1-\rho_2^2)} = \frac{L_2}{\lambda} \quad (3.4.12)$$

最后给出 $M/M/s$ 模型的平均队长 L_s 和平均等待时间 W_s 的计算公式:

$$L_s = s\rho + \frac{(s\rho)\rho}{s! (1-\rho)^s} p_0 \quad (3.4.13)$$

其中 $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$, p_0 为所有服务员均空闲的概率.

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(sp)^k}{k!} + \frac{(sp)^s}{s!} \frac{e^{-sp}}{(1-p)} \right] \quad (3.4.14)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad (3.4.15)$$

第3.5节 轧钢中的概率问题

用连续热轧方法制造钢材时要经过两道工序,第一道是粗轧(热轧),形成钢材的雏形;第二道是精轧(冷轧),得到规定长度的钢材.粗轧时由于设备、环境等方面随机因素的影响,钢材冷却后的长度大致上呈正态分布,其均值可以在轧制过程中由轧机调整,而其标准差则是由设备的精度决定的,不能随意改变.精轧时把多出规定长度的部分切掉,但是如果发现粗轧后的钢材已经比规定长度短,则整根报废.精轧设备的精度很高,轧出的成品材可以认为是完全符合规定长度要求的.

根据轧制工艺的要求,要在成品材规定长度 l 和粗轧后钢材长度的标准差 σ 已知的条件下,确定粗轧后钢材长度的均值 μ ,使得当轧机调整到 μ 进行粗轧,再通过精轧以得到成品材时的浪费最少.

1. 模型假设与问题分析

设粗轧后钢材长度 X 是随机变量,它服从正态分布,其均值为 μ ,标准差为 σ .概率密度为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.5.1)$$

其中 σ 已知, μ 是待确定的值.当成品材的规定长度 l 给定后,记 $p = P(X \geq l)$.

轧制过程中的浪费由两部分构成.一是当 $X \geq l$ 时,精轧时要切掉长 $X-l$ 的钢材;二是当 $X < l$ 时,长 X 的整根钢材报废,显然当 μ 变大时,概率 p 增加,第一部分的浪费随之增加,而第二部分的浪费将减少;反之,当 μ 变小时,虽然被切掉的部分减少了,但是整根报废的可能将增加,于是必然存在一个最佳的 μ ,使得两部分的总浪费最小.

2. 建模与求解

这是一个优化模型,并用 l, μ, σ 把目标函数表示出来.上面分析的两

部分浪费之和,即将每粗轧一根钢材浪费的平均长度作为目标函数,于是容易得到总的浪费长度为:

$$W = \int_l^\infty (x - l) f(x) dx + \int_l^\infty x f(x) dx \quad (3.5.2)$$

利用 $\int_l^\infty f(x) dx = 1$, $\int_l^\infty x f(x) dx = \mu$ 和 $\int_l^\infty f(x) dx = p$, (3.5.2)式可化简为:

$$W = \mu - pl \quad (3.5.3)$$

轧钢的最终产品是成品材,浪费的多少不应以每粗轧一根钢材的平均浪费量为标准,而应该用每得到一根成品材浪费的平均长度来衡量,即不能以 W 作为目标函数,应以每得到一根成品材浪费钢材的平均长度为目标函数记为 J .

$$J = \frac{\mu - pl}{p} = \frac{\mu}{p} - l \quad (3.5.4)$$

因为 l 是已知常数,所以目标函数可等价地只取(3.5.4)式右端第一项,即:

$$J(\mu) = \frac{\mu}{p(\mu)} \quad (3.5.5)$$

式中 $p(\mu) = P\{X \geq l\}$ 与 μ 有关.

记 $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ 分别表示正态分布的概率密度函数和分布函数,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.5.6)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (3.5.7)$$

用微分法解(3.5.5)式的极值问题,其解应满足方程:

$$\Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\mu}{\sigma} \varphi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right) - 1 = 0 \quad (3.5.8)$$

例 设要轧制长为2.0米的成品钢材,由粗轧设备等因素决定的粗轧冷却后钢材长度服从标准差为0.2米的正态分布,试确定其均值使浪费最少.

以(3.5.5)式为目标函数,由(3.5.8)式可以算得 $\mu = 2.36$, 这时每得到一根成品钢材浪费钢材的平均长度为0.45米,这个数字相当大,主要是由于粗轧设备的精度太低造成的.因此,若想减少浪费,必须提高设

备的精度.

类似的生产问题还有很多,如糖厂以每包 500 克的包装出售,由于各种随机因素的影响,包装出来的糖的重量服从正态分布,标准差已知,由包装机的精度确定,是不能随意改变的,而均值可以随时调整.出厂时,检验员精确地秤量每袋糖的重量,多于 500 克时,以每袋 500 克的价格出售,厂方吃亏;不足 500 克时降价处理,将造成较大的损失.试确定其均值,使得损失最小.我们可以用与处理轧钢问题类似的方法解决这类问题.

第 3.6 节 蠼虫分类问题

1989 年美国大学生数学建模竞赛(MCM)问题之一是这样的:生物学家试图依据触角和翅膀长度的差异,对两种蠼虫(分别记为 Af 和 Apf)进行分类.已经测得 9 只 Af 与 6 只 Apf 的触角及翼长.

Af: (1.24, 1.27), (1.36, 1.74), (1.38, 1.64), (1.38, 1.82), (1.38, 1.90), (1.40, 1.70), (1.38, 1.82), (1.54, 1.82), (1.56, 2.08).

Apf: (1.14, 1.78), (1.18, 1.96), (1.20, 1.86), (1.26, 2.00), (1.28, 2.00), (1.30, 1.96).

具体要求是:

- (1) 根据如上资料,制定一种方法,正确地区分两类蠼虫.
- (2) 另有三只类别未知的蠼虫标本,其触角及翼长分别为 (1.24, 1.80), (1.28, 1.84) 与 (1.40, 2.04),用所得到的方法加以识别.
- (3) 若 Af 是有益的花粉传播者,而 Apf 却是疾病的媒介,当考虑这一因素时,分类是否需要改变? 如需要,应如何改变,为什么?

1. 模型假设

为使问题更加明确及确保模型具有一定的精度,假设:

上述两类蠼虫的触角 X 和翼长 Y 都是随机变量,并且随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布;其均值向量分别为 $\mu^{(i)} = (\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)})$, $i=1, 2$, 协方差矩阵分别为 $\Sigma^{(i)}$, $i=1, 2$, 并且这两类蠼虫的触角和翼长能反映它们之间的差异.

(1) 从自然界中随机捕获一只蠼虫,它属于 Af 类群体与 Apf 类群体的

概率已知,分别记为 q_1, q_2 :

(2)每个给定的数据点所对应的种类是确定的.

2. 建模与求解

在平面直角坐标系 xoy 中,以 x 表示触角, y 表示翼长,则任取一蠓虫样品对应于 xoy 面上的一个点,由假设(1)可知,这两类蠓虫的触角和翼长能反映它们之间的差异,由此我们可以设想,将 xoy 平面划分为两个不相交的区域 D_1 和 D_2 ,当 $(x, y) \in D_1$ 时,被判为 Af;当 $(x, y) \in D_2$ 时,被判为 Apf. 显然当两类蠓虫触角与翼长取值的范围有重叠时,无论 D_1 和 D_2 如何选取,都会有误判的情况. 由问题的实际情况可知,这种错误是不可避免的,一个自然的想法是选择一种分类方式,使这种分类所造成的错误损失达到最小.

令 $l(2/1)$ 表示一只属于 Af 类的蠓虫被错分为 Apf 类的损失,令 $l(1/2)$ 表示一只属于 Apf 类的蠓虫被错分为 Af 类的损失,并令 $p(2/1)$ 表示一只属于 Af 类的蠓虫被错分为 Apf 类的条件概率,令 $p(1/2)$ 表示一只属于 Apf 类的蠓虫被错分为 Af 类的条件概率. 这时对于区域的划分,由分类错误所造成的平均损失为:

$$\begin{aligned}
 L(D_1, D_2) &= q_1 l(2/1) p(2/1) + q_2 l(1/2) p(1/2) \\
 &= q_1 l(2/1) \iint_{D_2} f_1(x, y) dx dy + q_2 l(1/2) \iint_{D_1} f_2(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{D_2} [q_1 l(2/1) f_1(x, y) - q_2 l(1/2) f_2(x, y)] dx dy + q_2 l(1/2)
 \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

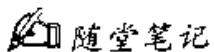
注意到(3.6.1)式最后一项为定值,与区域 D_1 和 D_2 的划分无关,又前一项中只有当 $q_1 l(2/1) f_1(x, y) < q_2 l(1/2) f_2(x, y)$ 时才有实际意义. 为此,令

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} \geq \frac{q_2 l(1/2)}{q_1 l(2/1)} \right\} \tag{3.6.2}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} < \frac{q_2 l(1/2)}{q_1 l(2/1)} \right\} \tag{3.6.3}$$

当两类蠓虫的触角与翼长的协方差矩阵相等时,令

$$m = \frac{q_2 l(1/2)}{q_1 l(2/1)} \tag{3.6.4}$$



则(3.6.2)式和(3.6.3)式可由(3.6.5)式及(3.6.6)式给出.

$$\begin{aligned} D_1 = \left\{ (x, y) \mid (x, y) \sum_{i=1}^n (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})^T \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\mu^{(1)} + \mu^{(2)}) \sum_{i=1}^n (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})^T \geq \ln m \right\} \quad (3.6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = \left\{ (x, y) \mid (x, y) \sum_{i=1}^n (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})^T \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \sum_{i=1}^n (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})^T \leq \ln m \right\} \quad (3.6.6) \end{aligned}$$

习题

1. 设报纸零售商每份报纸的购进价为 0.3 元, 售出价为 0.4 元, 退回价为 0.24 元, 需求量服从均值 500 份, 标准差 50 份的正态分布. 零售商每天应购进多少份报纸时才能获得最大利润? 这个最大利润是多少?

2. 一商店拟出售某种商品, 已知每单位该种成本为 50 元, 售价为 70 元, 如果售不出去, 每单位商品将损失 10 元. 已知该商品销售量 X 服从参数为 $\lambda=6$ 的泊松分布. 问该商店订购量应为多少单位时, 才能使平均获利最大?

3. 某服装厂购进布料, 然后加工成服装出售. 已知每次订购费为 600 元, 每箱布料购进价为 8 000 元, 贮存费每箱 400 元, 缺货费每箱 10 150 元, 对布料的需求量的概率分布为:

需求量 X	30	40	50	60
P	0.2	0.2	0.4	0.2

设月末存贮量为 10 箱, 试为该服装厂制定订货策略.

4. 某汽车制造厂准备制造一种新型汽车, 为了提高销售量, 它打算制作详细介绍该型汽车的广告在电视上播放. 虽然对汽车的需求量是随机变量, 但是与汽车厂所投入的广告费有关. 随着广告费的增加, 潜在的购买量会上升, 并且有一个上限. 试为汽车厂建立一个数学模型, 要求在需求量随广告费增加而增加的基础上, 根据汽车的生产成本和销售价确定广告费和生产量的最优值, 使汽车制造厂在平均意义下获得最大利润.

5. 某商店要订购一批商品零售, 设订购费 c_1 (与数量无关), 购进价 c_2 , 售出价 c_3 , 每件商品的贮存费为 c_4 (与时间无关), 需求量 X 的概率密度为

$f(x)$, 问如何确定订购量才能使商店的平均利润最大?

6. 若钢材粗轧后, 长度在 l_1 和 l_2 之间降级使用, 长度小于 l_1 时整根报废. 试选取适当的目标函数建立优化模型, 使某种意义上的浪费量最小.

7. 假设某地区人口增长满足这样的规律: t 时刻人口数为 $X(t)$, 最大允许人口数为 M , t 到 $t + \Delta t$ 时间内人口增长量与 $M - X(t)$ 成正比.

(1) 建立确定性模型.

(2) 作出适当的假设, 建立相应的随机性模型, 求出人口的期望, 并与(1)中的结果作比较.

第 4 章

统计分析模型

在科学的研究的许多领域中,往往要求研究者在不确定的现象面前从客观实际出发搜集有关数据,并在对这些数据进行处理和分析的基础上,提取有用的信息,从而作出具有定量依据的科学决策.这就提出一个如何搜集数据、提取信息、分析结果的问题,而统计分析模型正是处理这一问题的有效工具和手段.

第 4.1 节 回归分析模型

在实际问题的研究中,互相有联系的变量间关系的紧密程度各不相同.一种极端的情况是一个(些)变量的变化能完全决定另一个(些)变量的变化,变量间完全表现为一种确定性关系,即函数关系;另一种普遍的情况是变量间有着密切的联系,但它们并没有密切到由一个(些)可以完全确定另一个(些)的程度,它们是一种非确定性关系,即统计关系.在现代统计学中关于统计关系的研究已成为统计学中两个重要的分支,它们叫做回归分析和相关分析.在应用中,这两种统计分析方法经常相互结合和渗透,但它们研究的侧重点和应用面不同,使得它们的研究方法也大不相同.线性回归分析是描述变量间统计关系的一种最重要的统计模型技术,本章将着重介绍它的建模原理,模型参数的最小二乘估计,回归方程的有关检验和回归模型的应用.

1. 一元线性回归

在实际问题的研究中, 我们经常需要研究某一现象与影响它的某一最主要因素的影响. 如影响粮食产量的因素非常多, 但在众多因素中, 施肥量是一个最重要的因素, 我们往往需要研究粮食产量与施肥量之间的关系. 在消费问题的研究中, 影响消费的因素很多, 但我们可以只研究消费额与国民收入之间的关系, 因为国民收入是影响消费的最主要因素. 保险公司在研究火灾损失的规律时, 把火灾发生地与最近的消防站的距离作为一个最主要因素. 这些例子研究的都是变量之间的非确定性关系. 那么它们之间到底有什么样的关系呢?

通常我们对所研究的问题首先要收集与它有关的 n 组样本数据 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$. 为了直观地看到样本数据的分布规律, 我们把 (x_i, y_i) 看成是平面直角坐标系中的点, 画出这 n 个样本点的散点图.

例如在研究我国人均消费水平的问题中, 把全国人均消费金额记作 y (元), 把人均国民收入记作 x (元). 我们收集到 1981—1993 年 13 年的样本数据 $(x_i, y_i) = 1, 2, \dots, 13$. 画出散点图. 从图上可以看出, 样本数据大致都落在一条直线附近, 这说明变量 x 与 y 之间具有明显的线性关系. 但这些样本点又都不在一条直线上, 这表明变量 x 与 y 的关系并没有确切到给定 x 就可以惟一确定 y 的程度. 事实上, 对 y 产生影响的因素还有许多, 如上年的消费水平、银行利率、商品价格指数等, 这些对 y 的取值都有随机影响. 每个样本点与直线的偏差就可看作是其他随机因素的影响.

我们把上述 x 与 y 之间的关系描述为:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \quad (4.1.1)$$

在此式中, 一部分是由于 x 的变化引起 y 线性变化的部分, 即 $\beta_0 + \beta_1 x$; 另一部分是由其他一些随机因素引起的, 即 ϵ . (4.1.1) 式确切地表达了变量 x 与 y 之间密切相关, 但密切的程度又没有达到由 x 惟一确定 y 的地步. 称 (4.1.1) 式为变量 y 对 x 的一元线性回归理论模型. 一般我们称 y 为被解释变量(因变量), x 为解释变量(自变量), β_0 为回归常数, β_1 为回归系数, ϵ 为随机误差, 并假定 $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$. 这时 $E(y) = \beta_0 + \beta_1 x$, 即 (4.1.1) 式中线性表示部分从平均意义上表达了变量 y 与 x 的统计规律性. 在应用上经常关心的正是这个平均值. 比如在消费 y 与收入 x 的研究中, 我们所关心的正是当国民收入达到某一水平时, 人均消费能达到多少; 在小麦亩产 y 与施肥量 x 的关系中, 我们所关心的正是当施肥量确定后, 小麦的平

均亩产量是多少.

假定 n 组样本观测值 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$ 符合模型(4.1.1), 即有:

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \\ i=1, 2, \dots, n \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.1.2)$$

称(4.1.2)式为一元线性回归模型. 在最小二乘原则下可以求得 β_0 和 β_1 的估计值:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \quad \hat{\beta}_1 = L_{xy} / L_{xx} \quad (4.1.3)$$

(4.1.3)式分别称为 β_0 和 β_1 的普通最小二乘估计(ordinary least square estimation, OLSE). 这里

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ L_{xx} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ L_{xy} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

并称 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ (4.1.4)

为 y 关于 x 的一元线性(经验)回归方程或(经验)回归直线. $\hat{\beta}_0$ 表示直线在纵轴上的截距, $\hat{\beta}_1$ 表示直线的斜率, $\hat{\beta}_1$ 在实际应用中表示 x 每增加一个单位时 y 概率分布的均值变化.

我们称 $e_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$ 为普通残差, 表示实际观测值与回归值的偏差. 普通残差平方和 $\sum_{i=1}^n e_i^2$ 则从整体上刻画了 n 个样本观测点到回归直线的(纵向)距离的大小.

若记 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2}$, 则 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 的标准差分别为 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}} \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{L_{xx}}}$, 可以求出 β_0, β_1 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计分别为:

$$(\hat{\beta}_0 \mp t_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}), (\hat{\beta}_1 \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}) \quad (4.1.5)$$

其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ 为给定显著性水平 α 时查自由度为 $n-2$ 的 t 分布表得到的临界值.

从 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 的标准差可见, 要使 β_0, β_1 的估计值 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 更稳定, 在收集数据时, 就应该考虑 x 的取值尽可能分散一些, 样本容量也应尽可能大一些.

另外根据正态分布的性质可以得到, $\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{L_{xx}}\right)\sigma^2\right)$, $\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{L_{xx}}\right)$, $\text{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\bar{x}}{L_{xx}}\sigma^2$, 对固定的 x_0 来讲, $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$, 且 $\hat{y}_0 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_0, \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}}\right]\sigma^2)$. 由此可见, \hat{y}_0 是 $E(y_0)$ 的无偏估计, 且 \hat{y}_0 的方差随给定的 x_0 值与 \bar{x} 的距离 $|x_0 - \bar{x}|$ 的增大而增大. 即当给定的 x_0 与 x 的样本平均值 \bar{x} 相差较大时, y_0 的估计值 \hat{y}_0 波动就增大. 这说明在实际应用回归方程进行预测时, 给定的 x_0 值不能偏离样本均值太大, 如果太大, 效果就不会理想.

当我们得到某一实际问题的经验回归方程后, 还不能马上就用它去做分析和预测, 因为它是否真正描述了变量间的统计规律性, 还需运用统计方法对它进行检验. 下面我们介绍几种检验方法.

(1) 相关系数的显著性检验

记 $L_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$, 则 x 与 y 的相关系数为:

$$r = \frac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx} L_{yy}}}$$

相关系数表示变量间线性关系的密切程度, 其取值区间是 $[-1, 1]$. 在样本容量较大的前提下, $|r|$ 越大, 说明变量间的线性关系越密切, 当然也可以查相关系数检验临界值表, 来检验变量间线性关系是否显著. 另外由 $r = \hat{\beta}_1 \sqrt{\frac{L_{xy}}{L_{yy}}}$ 可知, r 与 $\hat{\beta}_1$ 的符号相同, 这是一个很有用的结论.

(2) F 检验

原假设 $H_0: \beta_1 = 0$, 因为总离差平方和 $SST = L_{yy}$ = 回归平方和 $SSR +$ 残差平方和 SSE , 而 $SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \hat{\beta}_1^2 L_{xx}$ 是回归值与观测值 y 的平均值之差的平方和, 它反映了自变量的变化所引起的 y 的波动, 它的大小反映了自变量 x 的重要程度. $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$ 是 y 的实际值与回归值之差的平方和, 它由试验误差以及未加控制的因素引起, 它的大小反映了试验误差及其他随机因素对试验结果的影响. 构造检验统计量 $F = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)}$, 对给定的显著性水平 α , 当 $F > F_\alpha(1, n-2)$ 时,

拒绝原假设,说明回归方程显著, x 与 y 有显著的线性关系. 对于回归方程的具体检验可放在如下的方差分析表 4.1.1 上进行.

表 4.1.1

方差来源	平方和	自由度	均 方	F 统计量	显著性
回归	SSR	1	SSR/1	$F = \text{SSR}/[SSE/(n-2)]$	
残差	SSE	$n-2$	$SSE/(n-2)$		
总和	SST	$n-1$			

(3) 样本决定系数

由回归平方和与残差平方和的意义我们知道, 如果在总的离差平方和中回归平方和所占的比重越大, 则线性回归效果就越好, 这说明回归直线与样本观测值拟合优度就越好; 如果残差平方和所占比重大, 则回归直线与样本观测值拟合的就不理想. 我们把回归平方和与总离差平方和之比定义为样本决定系数, 即 $r^2 = \frac{\beta_1^2 L_{xy}}{L_{yy}^2} = \frac{L_{xy}^2}{L_{xx} L_{yy}} - r^2$. 样本决定系数恰好是样本回归系数的平方, 它是描述回归直线与样本观测值拟合优度的指标. r^2 的值总是在 0 和 1 之间. 一个线性回归模型如果充分利用了 x 的信息, 则 r^2 越接近于 1, 拟合优度就越好; 反之, 如果 r^2 不大, 说明模型中给出的 x 对 y 的信息还不充分, 应进行修改, 使 x 对 y 的信息得到充分利用.

建立回归模型的目的是为了应用、预测是回归模型最重要的应用之一. 假设我们对某一实际问题已经建立了回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, 当已知自变量 $x=x_0$ 时, 要预测因变量 y 的值 y_0 , 只要将 x_0 代入回归方程得 \hat{y}_0 . 这个 \hat{y}_0 其实就是 y 的大概值或预测值. 对于预测问题, 除了要知道预测值外, 还想知道预测的精度, 即往往更希望能给出 y_0 的一个预测范围(预测区间), 因为给一个预测范围比只给出 \hat{y}_0 更可信.

我们记

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}, \Delta = \sqrt{F_{(1, n-2)} \hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{L_{xx}} \right]}$$

则可得置信水平为 $1-\alpha$ 的预测区间是:

$$(\hat{y}_0 - \Delta, \hat{y}_0 + \Delta) \quad (4.1.6)$$

容易明白, 对给定的显著性水平 α , 当样本容量 n 越大、 L_{xx} 越大、 x_0 越

靠近 \bar{x} 时, 则 Δ 越小, 此时的预测精度越高. 所以, 为了提高预测精度, 样本容量应越大越好, 采集数据不能太集中. 在进行预测时, 所给定的 x_v 不能偏离 \bar{x} 太大, 太大时预测结果肯定不好. 尤其是在经济问题的研究中, 当时间序列数据发生了较大变化时, 即要预测的未来太远时, 自变量的取值 x_v 肯定距当时建模时采集的样本均值 \bar{x} 较远. 比如, 我们用人均国民收入 1 000 元左右的数据建立的消费基金模型, 只适合用于近期人均收入 1 000 元左右的消费基金预测, 而若干年后人均国民收入增长幅度变化较大以及人们的消费观念发生较大变化时, 用原模型去做预测肯定不准确.

当样本容量 n 较大, $|x_v - \bar{x}|$ 较小时, $1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_v - \bar{x})^2}{L_{xx}} \approx 1$, $F_e(1, n)$

2) 与 $N(0, 1)$ 的 α 分位数近似相等, 其置信水平为 0.95 与 0.99 的近似预测区间分别是:

$$\begin{aligned} &(\hat{y}_v - 2\hat{\sigma}, \hat{y}_v + 2\hat{\sigma}) \\ &(\hat{y}_v - 3\hat{\sigma}, \hat{y}_v + 3\hat{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

在实际应用时, 通常用近似区间就可得到满意的效果.

为了对具体经济问题的建模和应用有更系统的掌握, 我们把从建模到应用的全过程总结如下:

第一步, 画散点图.

第二步, 设定模型.

第三步, 用 OLS 法估计模型中的未知参数并写出回归方程.

第四步, 计算相关系数和决定系数.

第五步, 列出方差分析表, 进行回归方程的显著性检验.

第六步, 估计 σ^2 , 构造 β_0, β_1 的置信区间.

第七步, 残差分析.

以自变量的取值 x_v 为横坐标, 以残差 $e_v = y_v - \hat{y}_v$ 为纵坐标画出残差图, 当所有的残差点 (x_v, e_v) 都在置信带 $(-2\hat{\sigma}, 2\hat{\sigma})$ 内时, 即可认为样本数据基本正常; 当残差点围绕 $e=0$ 随机波动, 无任何趋势时, 即可认为理论模型的基本假定是合适的.

第八步, 模型的应用.

当所建模型通过所有检验之后, 就可结合实际问题进行应用. 如进行因素分析、点预测、求出预测区间或近似预测区间, 为现阶段制定宏观调控政策提供量化依据.

例 4.1.1 在研究我国人均消费水平的问题中, 把全国人均消费金额

记作 y (元), 把人均国民收入记为 x (元). 我们收集到 1981—1993 年 13 年的样本数据 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 13$. 数据见下表 4.1.2.

表 4.1.2

年份	人均国民 收入(元)	人均消费 金额(元)	年份	人均国民 收入(元)	人均消费 金额(元)
1981	393.8	294	1988	1 068.8	643
1982	419.14	267	1989	1 169.2	699
1983	460.86	289	1990	1 250.7	713
1984	544.11	329	1991	1 429.5	803
1985	668.29	406	1992	1 725.9	947
1986	737.73	451	1993	2 099.5	1 148
1987	859.97	513			

- (1) 画散点图;
- (2) 用 OLS 法求出回归方程;
- (3) 计算 x 与 y 的决定系数;
- (4) 对回归方程做方差分析;
- (5) 求出随机误差 ϵ 的方差 σ^2 的估计值;
- (6) 给出 β_0, β_1 的 95% 的区间估计;
- (7) 对回归方程作残差图并做一些分析;
- (8) 当国民收入增长 1 元时, 用于消费大约是多少;
- (9) 计算人均国民收入为 2 300 元时, 人均消费金额是多少;
- (10) 给出置信水平为 95% 的近似预测区间.

例 4.1.2 一家保险公司十分关心其总公司营业部加班的程度, 决定认真调查一下现状. 经过 10 周时间, 收集了每周加班工作时间和签发的新保单数目见表 4.1.3.

表 4.1.3

周序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
签发的新保单数目 x (张)	825	215	1 070	550	480	920	1 350	325	670	1 215
加班工作时间 y (小时)	3.5	1.0	4.0	2.0	1.0	3.0	4.5	1.5	3.0	5.0

试用回归分析方法分析 y 与 x 的统计关系.

2. 可化为一元线性回归的曲线回归

在实际问题中,有许多回归模型的被解释变量 y 与解释变量 x 之间的关系并不是线性的,但 y 与未知参数 β_0, β_1 之间的关系却是线性的。实际上线性回归的“线性”二字是针对参数而言,并不是针对自变量而言。这样,有关因变量对自变量是非线性的情形,只要因变量对未知参数是线性的,就可以通过适当的变量代换,转化成因变量对自变量也是线性的形式。如有模型: $y = \beta_0 + \beta_1 e^x$, c 已知,我们只需令 $x' = e^x$ 即可化为 y 对 x' 是线性的形式: $y = \beta_0 + \beta_1 x'$ 。需要指出的是,新引进的自变量只能依赖于原自变量,而不能与未知参数有关。如当 c 未知时,则不能令 $x' = e^x$ 。

对于可化为线性模型的回归问题,一般先化为线性模型,再用 OLS 法求出参数估计值,最后经过适当的变换回到所求的回归曲线。

下面我们给出几种常见的非线性模型及其线性化的方法。

(1) 指数函数 $y = \alpha e^{bx}$, $\alpha > 0$, 两边取对数后, 令 $y' = \ln y$, $\beta_0 = \ln \alpha$, 则得 $y' = \beta_0 + \beta x$

(2) 幂函数 $y = \alpha x^b$, $\alpha > 0$, $x > 0$, 两边取对数后, 令 $y' = \ln y$, $\beta_0 = \ln \alpha$, $x' = \ln x$, 则得:

$$y' = \beta_0 + \beta x'$$

(3) 双曲函数 $y = \frac{x}{\alpha x + \beta}$, 令 $y' = \frac{1}{y}$, $x' = \frac{1}{x}$, 则得:

$$y' = \alpha + \beta x'$$

(4) 对数函数 $y = \alpha + \beta \ln x$, 令 $x' = \ln x$, 则得:

$$y = \alpha + \beta x'$$

(5) S 形曲线 $y = \frac{1}{\alpha + \beta e^{-x}}$, 令 $y' = \frac{1}{y}$, $x' = e^{-x}$, 则得:

$$y' = \alpha + \beta x'$$

例 4.1.3 为了研究生产率与废品率之间的关系, 记录了如下 7 组数据, 见表 4.1.4。

表 4.1.4

生产率 x (单位/周)	1 000	2 000	3 000	3 500	4 000	4 500	5 000
废品率 y (%)	5.2	6.5	6.8	8.1	10.2	10.3	13.0

试根据这些数据拟合适当的模型.

解 从散点图可以知道, 在所观测的范围内, 数据大致呈现线性趋势. 也有某种指数增长的趋势. 于是, 对给定数据, 我们分别用直线和指数曲线拟合.

若考虑用线性回归模型 $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$, 应用 OLS 法可得线性回归方程:

$$\hat{y} = 2.6714 + 0.0018x$$

若考虑用指数模型 $y = a\beta^x$, 两边取对数有 $\lg y = \lg a + x \lg \beta$, 令 $y' = \lg y$, $a = \lg a$, $b = \lg \beta$, 则得 $y' = a + bx$, 应用 OLS 法可求得: $\hat{b} = 9.4 \times 10^{-3}$, $\hat{a} = 0.607$, 从而, $\hat{a} = 4.05$, $\hat{\beta} = 1.0002$, 故指数回归方程为:

$$\hat{y} = 4.05(1.0002)^x$$

对同一个问题分别用两种模型去拟合, 哪一种较好呢? 我们可分别计算两个模型的残差平方和, 以便进行比较.

直线回归的残差平方和 = 5.3371, 而指数模型的残差平方和 = 6.11. 从残差平方和来看, 例 4.1.3 用直线回归模型比用指数曲线回归模型要好些.

通常还可用相关指数 $R^2 = 1 - \frac{SSE}{L_{xy}}$ 来衡量一元非线性回归模型的好坏. 就例 4.1.3 而言, 因为 $SSE = 6.11$, $L_{xy} = 44.2686$, 所以 $R^2 = 0.8620$. 由此可见, 用指数函数拟合 y 与 x 之间的关系是不太理想的.

3. 多元线性回归

前面两节介绍的一元线性回归是回归分析中的一种特例, 是对影响某种现象的许多因素进行了简化考虑的结果. 在实际问题中, 对某种现象有重要影响的因素有许多, 如某公司管理人员要预测来年该公司的销售额 y 时, 研究认为影响销售额的因素不只是广告宣传费 x_1 , 还有个人可支配收入 x_2 , 价格 x_3 , 研究与发展费用 x_4 , 各种投资 x_5 , 销售费用 x_6 等. 这样因变量 y 就与多个自变量 x_1, x_2, \dots, x_6 等有关. 因此, 我们就需要进一步讨论多元线性回归问题.

(1) 多元线性回归的一般形式

设随机变量与一般变量 x_1, x_2, \dots, x_p 的线性回归模型为:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \epsilon \quad (4.1.8)$$

其中 $\beta_i (i=0, 1, 2, \dots, p)$ 是 $p+1$ 个未知参数, 称为回归系数, y 称为被解释变量(因变量), 而 x_1, x_2, \dots, x_p 是 p 个可以精确测量并可控制的一般变量, 称为解释变量(自变量), ϵ 是随机误差. 与一元线性回归一样, 通常假定 $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

对一个实际问题, 如果我们获得 n 组观测数据 $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}), i=1, 2, \dots, n$, 则(4.1.8)式可表示为:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_p x_{1p} + \epsilon_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_p x_{2p} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_p x_{np} + \epsilon_n \end{aligned}$$

写成矩阵形式为:

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (4.1.9)$$

其中:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

我们称 $n \times (p+1)$ 阶矩阵 X 为回归设计矩阵或资料矩阵, 并假定 $rk(X) = p+1 \leq n, \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$.

与一元线性回归的参数估计原理一样, 我们称满足:

$$(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = \min_{\beta} (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

的 $\hat{\beta}$ 为 β 的 OLSE. 由微积分求极值的方法, 可求得:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (4.1.10)$$

并且可求得方差 σ^2 的无偏估计:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{n - p - 1} = \frac{SSE}{n - p - 1} \quad (4.1.11)$$

例 4.1.4 为了建立国家财政收入回归模型, 我们以财政收入 y (亿元) 为因变量, 以工业总产值 x_1 (亿元), 农业总产值 x_2 (亿元), 建筑业总产值 x_3 (亿元), 人口数 x_4 (万人), 社会商品零售总额 x_5 (亿元), 受灾面积 x_6 (万公顷) 为自变量, 根据《中国统计年鉴》获得 1978~1990 年统计数据如表 4.1.5 所示.

表 4.1.5

年份	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1978	1 121.1	4 237	1 397	569	96 259	1 558.6	5 076
1979	1 103.3	4 681	1 698	645	97 542	1 800.0	3 937
1980	1 085.2	5 151	1 923	767	98 705	2 140.0	4 453
1981	1 089.5	5 400	2 181	747	100 072	2 350.0	3 979
1982	1 124.0	5 811	2 483	912	101 634	2 570.0	3 313
1983	1 249.0	6 461	2 750	1 035	103 008	2 849.4	3 471
1984	1 501.9	7 617	3 214	1 263	104 357	3 376.4	3 189
1985	1 866.4	9 716	3 619	1 656	105 851	1 305.0	1 437
1986	2 260.3	11 194	4 013	2 038	107 507	4 950.0	4 714
1987	2 368.9	13 813	4 176	2 431	109 300	5 820.0	4 209
1988	2 628.0	18 224	5 865	2 967	111 026	7 440.0	5 087
1989	2 947.9	22 017	6 533	2 834	112 704	8 101.4	4 699
1990	3 244.8	23 851	7 662	3 035	114 383	8 300.1	3 847

由定性分析知,六个自变量都与因变量有较强的相关性,因此,我们设理论回归模型为:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_6 x_{i6} + \epsilon, i=1, 2, \dots, 13$$

利用“社会科学统计程序包”SPSS(Statistical Package for the Social Sciences)对回归系数作 OLS,则可求得 y 关于 x_1, x_2, \dots, x_6 的六元线性回归方程为:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 462.0301 + 0.07848x_1 + 0.10550x_2 + 0.85323x_3 \\ & - 0.00108x_4 - 0.30780x_5 + 0.04453x_6 \end{aligned}$$

随机误差 ϵ 的方差的 OLS 为:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-p-1} = \frac{118415.6}{13-6-1} = 19735.93$$

标准差为:

$$\hat{\sigma} = 140.48$$

需要注意的是,这一回归方程的回归系数的实际意义不好解释,还需进一步完善这一模型.

(2) 回归方程的显著性检验

在实际问题的研究中,我们事先并不能断定被解释变量与解释变量之间确有线性关系,在进行回归系数估计前,我们用多元线性回归方程去拟合被解释变量与解释变量之间的关系,只是根据一些定性分析所做的一些

假设.因此,当求出线性回归方程后,还需对回归方程进行显著性检验.这里我们介绍两种统计检验方法,一种是拟合优度检验,另一种是 F 检验.

1) 拟合优度检验

拟合优度检验就是检验回归方程对样本观测值的拟合程度.设:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p$$

是所求得的多元线性回归方程, \hat{y}_i 是第 i 个样本点 $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ 上的回归值.用 $y_i - \bar{y}$ 表示 y 的第 i 个观测值与 y 的样本平均值的离差.因为因变量观测值之间的差异是由自变量取值的不同和其他随机因素两个方面引起的,为了知道二者中哪一个是主要的,将总离差平方和进行分解:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= SSE + SSR \end{aligned}$$

这里 SSR 是回归值与因变量的平均值之差的平方和,它反映了自变量的变化所引起的因变量的波动, SSR 是 SST 中由回归方程解释的部分; SSE 是因变量的实际值与回归值之差的平方和,它是由于随机因素以及测量误差所引起的因变量的波动,它的大小反映了随机因素及其测量误差对因变量的影响,是 SST 中未被回归方程解释的部分.

由 SSR 和 SSE 的意义,一个好的回归方程,它应该较好地拟合样本观测值. SST 中 SSR 所占的比例越大,则线性回归效果越显著; SST 中 SSE 占的比例大,则线性回归效果就不好.于是可定义:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad (4.1.12)$$

$$R = \sqrt{\frac{SSR}{SST}} \quad (4.1.13)$$

称 R^2 为样本决定系数,称 R 为因变量关于自变量的样本复相关系数.在两个变量的简单相关系数中,相关系数有正负之分,而复相关系数表示的是因变量与全体自变量之间的线性关系,它的符号不能由一个自变量的回归系数的符号来确定.因而复相关系数都取正号.与一元线性回归方程中定义过的相关系数一样,在多元线性回归的应用中,常用复相关系数来表示回归方程对原有数据拟合程度的好坏,衡量作为一个整体的自变量与因变量的线性关系的大小.

如果回归方程完全拟合了样本观测值,则 $y_i - \hat{y}_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, $SSE = 0, R^2 = 1$.尽管完全拟合是一种极端情况,这在实际问题的研究中

不大可能出现,即 R^2 不可能等于 1,但 R^2 越接近 1,回归方程的拟合优度就越高.就例 4.1.4 而言, $SSR = 7 320 924.00$, $SST = 7 439 339.00$, $SSE = 118 415.60$, $R = 0.992 01$, $R^2 = 0.984 08$.由复相关系数和样本决定系数看,财政收入的回归方程拟合优度很高.在实际应用中,样本决定系数到底多大才算通过了拟合优度检验,要根据具体情况而定.需要说明的是,拟合优度并不是检验模型的惟一标准,有时为了使模型从结构上有较合理的实际意义解释,样本决定系数在 0.7 左右也给回归模型以肯定的态度.另外,样本决定系数与回归方程中自变量的数目以及样本容量有关,当自变量的个数与样本容量接近时,样本决定系数容易接近于 1,其中隐含着一些虚假成分.因此,由样本决定系数检验模型优劣时还需慎重.

2) F 检验

对回归方程的显著性检验,就是要看自变量 x_1, x_2, \dots, x_p 从整体上对因变量 y 是否有明显的影响.为此,可提出统计假设

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0 \quad (4.1.14)$$

如果 H_0 被接受,则表明因变量与自变量之间的关系由线性回归模型表示不合适.类似于一元线性回归检验,可建立起多元线性回归方程显著性检验的 F 统计量:

$$F = \frac{SSR/p}{SSE/(n-p-1)} \quad (4.1.15)$$

对给定显著性水平 α ,查 F 分布表得临界值 $F_{\alpha}(p, n-p-1)$,当 $F > F_{\alpha}(p, n-p-1)$ 时,则拒绝假设 H_0 ,认为在显著性水平 α 下, y 对 x_1, x_2, \dots, x_p 有显著的线性关系,也即回归方程是显著的,说得更通俗一点就是:认为“自变量全体对因变量产生显著影响”,这一结论错误的概率不超过 α .下面我们列出多元线性回归方程显著性检验的方差分析表见表 4.1.6.

表 4.1.6

方差来源	平方和	自由度	方差		F 值	显著性
			SSR	p		
回归	SSR	p	SSR	p	$\frac{SSR/p}{SSE/(n-p-1)}$	
残差	SSE	$n-p-1$	SSE	$(n-p-1)$		
总和	SST	$n-1$				

就例 4.1.4 而言,方差分析表 4.1.7 为:

表 4.1.7

方差来源	平方和	自由度	方差	F 值	显著性
回归	7 320.924	6	1 220.154	61.824	* *
残差	118 415.6	13-6-1	19 735.93		
总和	7 439.339	12			

$F_{0.01}(6,6)=8.47$,由此可见,回归方程十分显著,即可以以 99% 的把握断言自变量 x_1, x_2, \dots, x_6 全体对因变量 y 产生显著影响.

(3) 回归系数的显著性检验

在多元线性回归中,回归方程显著并不意味着每个自变量对因变量的影响都显著.因此就应从回归方程中剔除那些次要的、可有可无的变量,重新建立更为简单的回归方程,所以就需要我们对每个自变量进行显著性检验.

容易明白,如果某个自变量 x_i 对 y 的作用不显著,那么在回归模型中,它的系数 β_i 就可以取值为零.因此,检验变量 x_i 是否显著,等价于检验假设 $H_0: \beta_i = 0$,如果接受假设 H_0 ,则 x_i 不显著;如果拒绝假设 H_0 ,则 x_i 是显著的.我们可采用统计量:

$$F_i = \frac{\hat{\beta}_i^2 / c_n}{SSE/(n-p-1)} \quad (4.1.16)$$

或

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i / \sqrt{c_n}}{\sqrt{SSE/(n-p-1)}} \quad (4.1.17)$$

来检验 β_i 是否为零,即 x_i 对 y 的影响是否显著.这里 c_n 是矩阵 $(X'X)^{-1}$ 主对角线上第 i 个元素.

就例 4.1.4 而言,我们已经看到回归方程是十分显著的,这种显著是六个自变量作为一个整体对因变量有十分显著的影响,那么,每一个自变量是否对因变量有显著影响呢?这就需要对每一个自变量的系数是否为零进行检验.利用 SPSS 软件计算得到: $F_1=1.076.90$, $F_2=0.297.43$, $F_3=2.911.86$, $F_4=0.035.17$, $F_5=0.659.71$, $F_6=0.160.78$,查 F 分布表得 $F_{0.95}(1, n-p-1) = F_{0.95}(1, 6) = 5.99$,上述 $F_i < F_{0.95}(1, 6) = 5.99$,即说明每一个 x_i 单独对因变量 y 无显著性影响.这说明自变量之间有一种交互作用,应当明白,不同自变量组合在一起建立方程的效果是不

一样的。

为了简化回归模型,我们可以将对因变量影响不显著的自变量剔除,然后重新利用 OLS 法建立回归方程。当有多个自变量对因变量无显著性影响时,由于 β 的各分量间的相关性,不能一次剔除掉所有不显著的变量。原则上每次只剔除一个变量,先剔除其中 F 值或 $|T|$ 值最小的一个变量,然后再对求得的新的回归方程进行检验,若有不显著变量再剔除,直到保留的自变量都对因变量有显著影响为止。当然,也可根据对问题的定性分析选择 F 值较小的变量先剔除。

就例 4.1.4 而言,剔除自变量的顺序是: x_4, x_2, x_6, x_5 。每次剔除一个变量后,重新建立回归方程,由复相关系数和样本决定系数知,每个新回归方程均非常显著,但在新方程中,每个自变量均不显著,直到剔除了四个变量仅剩两个变量 x_1, x_3 时,建立的二元线性回归方程才检验认为回归方程和两个自变量都显著。此时得到的回归方程为:

$$\hat{y} = 525.1027 + 0.05278x_1 + 0.45329x_3$$

从回归方程的结构来看,具有十分明显实际意义。 $\beta_1 = 0.05278$, 说明当其他因素不变时,工业总产值增加 1 个单位,财政收入平均增加 0.05278 个单位; $\beta_3 = 0.45329$, 说明当其他因素不变时,建筑业总产值增加 1 个单位,财政收入平均增加 0.45329 个单位。

从这个回归方程的建立过程可以看到,考虑的变量太多时并不一定好。财政收入受着多种因素的影响,但我们这里只引进了工业总产值和建筑业总产值两个变量,就其回归方程的效果以及实际意义方面都比较好。工业生产发展了,产值提高,税收必然增加,所以财政收入增加;建筑业总产值增加,意味着房屋建成交付使用的面积增加,房产增加,从而租金、出售商品房等项收入增加,国家财政收入必然增加。因此,这个回归方程比较简明地描述了财政收入的结构和增长成因。

(4) 偏相关系数

在多元线性回归分析中,其他变量被固定后,给定的任意两个变量之间的相关系数,叫做偏相关系数。偏相关系数可以度量 $p+1$ 个变量 y, x_1, x_2, \dots, x_p 中任意两个变量的线性相关程度,而这种相关程度是在扣除其余 $p-1$ 个变量的影响下的线性相关。比如,我们利用 SPSS 计算例 4.1.4 因变量 y 与自变量 x_1, x_3 的偏相关系数分别为: $r_{y1,3} = 0.64916$, $r_{y3,1} = 0.71188$, $r_{y1,3}$ 说明扣除建筑业总产值的影响后,财政收入与工业总产值的相关程度为 0.64916,可以说财政收入与工业总产值的密切程度属中等偏

上水平: r_{β_1} 说明扣除工业总产值的影响后, 财政收入与建筑业总产值的相关程度为 0.71188, 可以认为财政收入与建筑业总产值的关系更密切些。在多元线性回归分析中, 我们认为偏相关系数才是真正反映因变量与自变量以及自变量与自变量之间的相关性质的量, 因为由偏相关系数可以判断哪些自变量对因变量的影响较大, 所以在剔除某个自变量时, 应当结合偏相关系数来考虑。

(5) 回归系数的置信区间

当我们有了参数向量 β 的估计量 $\hat{\beta}$ 时, $\hat{\beta}$ 与 β 的接近程度如何? 以多大的概率达到该接近程度? 这就需要构造 β_i 的一个区间, 以 $\hat{\beta}_i$ 为中心的区间, 该区间以一定的概率包含 β_i 。因为 $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \sim t(n-p-1)$, 所以对给定显著性水平 α 后, $P\{-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha$, 即 $P\{\hat{\beta}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} < \beta_i < \hat{\beta}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}\} = 1 - \alpha$ 在 $1 - \alpha$ 置信水平下, β_i 的置信区间为:

$$(\hat{\beta}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}, \hat{\beta}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}) \quad (4.1.18)$$

就例 4.1.4 而言, 对变量 y 关于 x_1, x_2 的方程, 计算 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ 的标准差分别为: $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = 69.81258, \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.01956, \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = 0.14141$, 给定 $\alpha = 0.05$, 查 $t_{0.975}(10) = 2.228$, 求得 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ 的置信区间分别为 $(369.56, 680.65), (0.0092, 0.09636), (0.13823, 0.76835)$ 。由上面几个区间看, $\hat{\beta}_1$ 的置信区间最小, 说明 $\hat{\beta}_1$ 与 β_1 接近的程度较好。

(6) 多元线性回归模型的应用

对一个实际问题建立起多元线性回归方程后, 一个重要的应用就是利用方程去进行预测。设建立的多元线性回归方程为: $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_p x_p$, 当给定一组自变量的值 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p})'$, 要估计所对应的 y_0 , 很自然的想法就是将 x_0 的值代入到回归方程中去, 直接算出 $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{01} + \hat{\beta}_2 x_{02} + \dots + \hat{\beta}_p x_{0p}$ 就是 y_0 的预测值。只有预测值还无法进一步了解它的误差和犯错误的概率, 对于许多实际问题来说, 给出 y_0 的预测区间比给出预测值更重要。所以, 当给定 x_0 时, 我们需要以一定的概率判断因变量的真实值 y_0 出现在某个区间之中, 也就是要找一个区间, 使这个区间包含 y_0 的概率达到指定的 $1 - \alpha$ 。当观测值数目较大时, y_0 的置信水平为 95% 和 99% 的近似预测区间分别为:

$$(\hat{y}_0 - 2\hat{\sigma}, \hat{y}_0 + 2\hat{\sigma}) \text{ 和 } (\hat{y}_0 - 3\hat{\sigma}, \hat{y}_0 + 3\hat{\sigma})$$

其中 $\hat{\sigma} = [\text{SSE}/(n-p-1)]^{\frac{1}{2}}$ 。

就例 4.1.4 而言, 所建立的回归方程为:

$$\hat{y} = 525.1027 + 0.05278x_1 + 0.45329x_3$$

当 $x_{01}=24502, x_{03}=2980$ 时, y_n 的预测值为: $\hat{y}_n=3169.12$, 又因为 $\hat{\sigma}=121.85$, 所以置信水平为 95% 的近似预测区间为 (2925.42, 3412.82).

例 4.1.5 中国民航客运量的回归模型. 为了研究我国民航客运量的变化趋势及其成因, 我们以民航客运量作为因变量(万人), 以国民收入(亿元)、消费额(亿元)、铁路客运量(万人)、民航航线里程(万公里)、来华旅游入境人数(万人)为自变量 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 根据《1994 年统计摘要》获得 1978—1993 年统计数据在表 4.1.8 中列出, 试建立民航客运量回归模型.

表 4.1.8

年份	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1978	231	3 010	1 888	81 491	14.89	180.92
1979	298	3 350	2 195	86 389	16.00	420.39
1980	343	3 688	2 531	92 204	19.53	570.25
1981	401	3 941	2 799	95 300	21.82	776.71
1982	445	4 258	3 054	99 922	23.27	792.43
1983	391	4 736	3 358	106 044	22.91	747.70
1984	554	5 652	3 905	111 353	26.02	1 285.22
1985	744	7 020	1 879	112 110	27.72	1 783.30
1986	997	7 859	3 552	108 579	32.43	2 281.95
1987	1310	9 313	6 386	112 429	38.91	2 690.23
1988	1442	11 738	8 038	122 645	37.38	3 169.48
1989	1283	13 176	9 005	113 807	47.19	2 450.14
1990	1660	11 384	9 663	95 712	50.68	2 746.20
1991	2178	16 557	10 969	95 081	55.91	3 335.65
1992	2886	20 223	12 985	99 693	83.66	3 311.50
1993	3383	24 882	15 919	105 458	96.08	4 152.70

第一步, 根据 SPSS 对原始数据做基本统计分析, 得:

$$\bar{y}=1159.125 \quad \bar{x}_1=9611.688 \quad \bar{x}_2=6447.25$$

$$\bar{x}_3=96138.56 \quad \bar{x}_4=38.1 \quad \bar{x}_5=1930.923.$$

相关矩阵如下:

y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
[0.989 47	0.985 49	0.265 61	0.987 09	0.924 22]
	1	0.998 96	0.270 29	0.983 61	0.930 17
		1	0.284 48	0.977 80	0.942 29
	对		1	0.231 62	0.358 34
		称		1	0.881 80
					1
]					

第二步,根据 SPSS 软件得到因变量 y 关于 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的线性回归方程:

$$\hat{y} = -195.901 + 0.51956x_1 - 0.77078x_2 + 0.00055x_3 \\ + 15.98034x_4 + 0.34373x_5$$

复相关系数 $R=0.9981101$,样本决定系数 $R^2=0.9962237$,由样本决定系数可见,回归方程高度显著.

第三步,方差分析(见表 4.1.9).

表 4.1.9

方差来源	平方和	自由度	方差	F 值	显著性
回归	13 791.100	5	2 758.219	527.624 2	—
残差	52 276.2	10	5 227.62	—	—
总和	13 843.370	15	—	—	—

$$F_{0.05}(p, n-p-1) = F_{0.05}(5, 10) = 3.33 \quad F_{0.01}(5, 10) = 5.64$$

方差分析表明回归方程高度显著,说明五个自变量整体上对因变量有高度显著的影响.

第四步,回归系数的显著性检验.计算得:

$$F_1 = 23.30159 \quad F_2 = 21.43466 \quad F_3 = 0.45438$$

$$F_4 = 8.73506 \quad F_5 = 27.13494$$

查表知 $F_{0.05}(1, n-p-1) = F_{0.05}(1, 10) = 4.96$,易知,自变量 x_1, x_2, x_4, x_5 对因变量均有显著影响,而 x_3 对因变量无显著影响.计算偏相关系数得:

$$r_{y,x_1,x_2,x_4} = 0.83645 \quad r_{y,x_1,x_3,x_5} = 0.82576 \quad r_{y,x_1,x_2,x_5} = 0.20818,$$

$$r_{y,x_1,x_2,x_3} = 0.68282 \quad r_{y,x_1,x_3,x_4} = -0.85482$$

由偏相关系数也可看出 x_3 对因变量无显著影响.由相关矩阵可知,因

变量与 x_3 的简单相关系数为 0.265 61, 这说明铁路客运量对民航客运量无显著影响. 这似乎与平常人们的直觉不大一致, 应当就我国的实际情况作出仔细分析.

第五步, 为了简化模型, 剔除铁路客运量 x_3 , 用 SPSS 计算结果为:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & -153.8784 + 0.50904x_1 - 0.75436x_2 + 15.97773x_1 \\ & + 0.34712x_3 \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

与前面类似, 计算复相关系数、决定系数、进行方差分析、对回归系数进行显著性检验、计算偏相关系数, 都说明回归方程高度显著, 四个自变量对因变量有显著影响.

第六步, 计算回归系数的置信区间. 计算回归系数的标准差分别为:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\beta_0} &= 63.92965 \quad \hat{\sigma}_{\beta_1} = 0.10382 \quad \hat{\sigma}_{\beta_2} = 0.16056 \\ \hat{\sigma}_{\beta_3} &= 5.27116 \quad \hat{\sigma}_{\beta_4} = 0.06414 \end{aligned}$$

因此有 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 置信水平为 95% 的近似置信区间分别为:

$$(-281.73770, -26.01910), (0.30140, 0.71668), (-1.07548, -0.43324), (5.43541, 26.52005), (0.21884, 0.47540)$$

第七步, 计算标准回归系数, 得标准回归方程:

$$\hat{y}^* = 3.52030x_1^* - 3.33882x_2^* + 0.39285x_3^* + 0.44949x_4^*$$

由标准回归系数的绝对值大小可见, 在消除了量纲的影响后, 自变量 x_1, x_2 对因变量 y 的影响更显著些.

第八步, 预测. 给定 $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}) = (23.872, 14.987, 92.09, 3.856.8)$, 代入回归方程(4.1.19)得: $\hat{y}_0 = 3.502.49$, 又 $\hat{\sigma} = 70.484$, 故置信水平为 95% 的近似预测区间是:

$$(\hat{y}_0 - 2\hat{\sigma}, \hat{y}_0 + 2\hat{\sigma}) = (3.361.52, 3.643.46)$$

利用回归方程对 16 个样本观测值 y 进行检验效果也很好, 绝对误差不超过 5%, 所以, 用回归方程(4.1.19)作为预测模型还是可以的. 但是, 回归方程中 x_2 的系数是负值, x_2 是全国总消费额, 这似乎应与因变量 y 成正相关, 所以, 利用回归方程(4.1.19)做结构分析并不理想, 这可能是由于自变量之间有较强的相关性. 在以后, 我们还可考虑把 x_2 剔除掉, 或用其他消除共线性的方法重新建立回归方程.

4. 自变量中含有定性变量的回归

在前面建立回归方程时, 各个自变量均为定量变量, 但在实际问题中往往还会遇到某些定性变量对因变量有影响的情况.

例 4.1.6 研究者想研究采取某项保险革新措施的速度 y 对保险公司的规模 x_1 和保险公司类型 x_2 的关系。因变量的计量是第一个公司采纳这项革新和给定公司采纳这项革新在时间上先后间隔的月数。第一个自变量为公司的规模用公司的总资产额(万美元)来计量是定量变量,第二个自变量为公司的类型,由两种类型构成,即股份公司和互助公司,是定性变量。数据资料见表 4.1.10。

表 4.1.10

公司	y	x_1	x_2	公司	y	x_1	x_2
1	17	151	互助	11	28	164	股份
2	26	92	互助	12	15	272	股份
3	21	173	互助	13	11	295	股份
4	30	31	互助	14	38	68	股份
5	22	104	互助	15	31	85	股份
6	0	277	互助	16	21	224	股份
7	12	210	互助	17	20	166	股份
8	19	120	互助	18	13	305	股份
9	4	290	互助	19	30	124	股份
10	16	238	互助	20	14	246	股份

由于 x_2 是定性变量,因而为了解 y 与 x_1, x_2 的关系的一种办法是按公司类型分别建立 y 关于 x_1 的回归方程:

$$\text{互助公司: } \hat{y} = 33.8384 - 0.1015x_1$$

$$\text{股份公司: } \hat{y} = 41.9696 - 0.1019x_1$$

由于每一类公司数据不多,故按这种办法建立的方程误差可能较大。又从上述求得的两个方程来看, x_1 的系数几乎相同,若能通过检验确信这一点的话,那么可以将所有数据合并建立方程,从而提高回归方程的精度。这里有两个问题要解决,一是如何检验,二是如何将定性变量数量化以建立回归方程。前者要用到 OLS 法基本原理,后者采用一种新的方法——“虚拟变量(哑变量)”法。我们在此只介绍这种新方法。

对定性变量,我们采用设置虚拟变量(哑变量)的方法来数量化。若某定性变量有 l 种状态,为使设计矩阵的秩不小于其列数,可设 $l-1$ 个虚拟变量 u_1, u_2, \dots, u_{l-1} ,各虚拟变量的取值见表 4.1.11。

表 4.1.11

定性变量状态	u_1	u_2	...	u_{l-1}
1	1	0	:	0
2	0	1	:	0
...	:	...
$l-1$	0	0	:	1
l	0	0	:	0

若在一个问题中有 p 个定量变量 x_1, x_2, \dots, x_p , 又有 k 个定性变量, 其中第 i 个定性变量有 l_i 种状态, 则可设 $l_i - 1$ 个虚拟变量 $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{il_i-1}$, 从而回归模型可记为:

$$\begin{cases} y_a = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{aj} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{l_i-1} \gamma_{ij} u_{ij} + \epsilon_a, a=1, 2, \dots, n \\ \epsilon_a, a=1, 2, \dots, n, i.i.d., \epsilon_a \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

这里未知参数总数 $m = 1 + p + \sum_{i=1}^k (l_i - 1)$ 个. 如同前述那样, 写出未知参数向量 β , 设计矩阵 X , 观测向量 Y , 进而可求出 β 的 OLSE $\hat{\beta}$, 并进行统计检验.

在例 4.1.6 中, 公司类型是定性变量, 仅取两种状态, 故只要设一个虚拟变量, 现仍以 x_2 表示:

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{互助公司} \\ 0 & \text{股份公司} \end{cases}$$

从而模型为:

$$\begin{cases} y_a = \beta_0 + \beta_1 x_{a1} + \beta_2 x_{a2} + \epsilon_a, a=1, 2, \dots, 20 \\ \epsilon_a, a=1, 2, \dots, 20, i.i.d., \epsilon_a \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

对此模型有:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 17 \\ 26 \\ \vdots \\ 14 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 151 & 1 \\ 1 & 92 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 238 & 1 \\ 1 & 164 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 246 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可知 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 41.9295 \\ -0.1017 \\ -8.0555 \end{bmatrix}$, 从而回归方程为:

$$\hat{y} = 41.9295 - 0.1017x_1 - 8.0555x_2$$

在此模型下有 $SSE = 176.3867$, 自由度为 $n-m=20-3=17$. 为检验假设 $H_{01}: \beta_1=0$, 则将模型改写成:

$$\begin{cases} y_a = \beta_0 + \beta_2 x_{a2} + \epsilon_a, a=1, 2, \dots, 20 \\ \epsilon_a, a=1, 2, \dots, 20, i.i.d., \epsilon_a \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

$$\text{此时, } \beta_H = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, X_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得改写模型的 $SSE = 1535$, 自由度 $20-2=18$, 从而检验统计量

$$\begin{aligned} F &= \frac{(\text{改写模型 SSE} - \text{原模型 SSE}) / (\text{改写模型自由度} - \text{原模型自由度})}{\text{原模型 SSE} / \text{原模型自由度}} \\ &= \frac{(1535 - 176.3867) / (18 - 17)}{176.3867 / 17} = 130.94 > F_{0.05}(1, 17) = 4.45 \end{aligned}$$

所以拒绝 $\beta_1=0$, 这表明 x_1 对 y 有显著影响.

还可检验假设 $H_{02}: \beta_2=0$, 在此假设下原模型可改写成:

$$\begin{cases} y_a = \beta_0 + \beta_1 x_{a1} + \epsilon_a, a=1, 2, \dots, 20 \\ \epsilon_a, a=1, 2, \dots, 20, i.i.d., \epsilon_a \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

此时可求得改写模型的 $SSE = 492.6326$, 改写模型的 SSE 的自由度 = 18, 从而检验统计量 $F = (492.6326 - 176.3867) / (176.3867 / 17) = 30.48 > 4.45$, 由此可知 x_2 对 y 也有显著影响.

由以上检验可知, 原模型下所求得的回归方程即为所求.

5. 岭回归与主成分回归

前几目中我们主要讨论了线性回归模型中回归系数的 OLS. 当假定

模型误差向量 $\epsilon_{n \times 1} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ 时, 回归系数的 OLS 是最优线性无偏估计量 BLUE(best linear unbiased estimators). 假定模型误差向量服从正态分布时, 还可以作各种统计检验. 正因为如此, OLS 得到了广泛的应用. 但随着应用的普遍, 逐渐发现了它的一些缺点. 为说明这一点, 我们来看一个典型例子.

例 4.1.7 为考察法国的进口总额 y 与三个自变量(国内总产值 x_1 , 存储量 x_2 , 总消费量 x_3)的关系, 现收集了 1949—1959 年共 11 年的数据见表 4.1.12.

表 4.1.12 单位: 10 亿法郎

年份	国内总产值	存储量	总消费量	进口总额
1949	149.3	4.2	108.1	15.9
1950	161.2	4.1	111.8	16.4
1951	171.5	3.1	123.2	19.0
1952	175.5	3.1	126.9	19.1
1953	180.8	1.1	132.1	18.8
1954	190.7	2.2	137.7	20.4
1955	202.1	2.1	146.0	22.7
1956	212.1	5.6	154.1	26.5
1957	226.1	5.0	162.3	28.1
1958	231.9	5.1	164.3	27.6
1959	239.0	0.7	167.6	26.3

对此问题, 我们可以求出所有的回归方程(共 7 个), 具体系数如表 4.1.13 所示.

表 4.1.13

方程序号	包含自变量	系 数		
		x_1	x_2	x_3
(1)	x_1	0.146		
(2)	x_2		0.691	
(3)	x_3			0.214
(4)	$x_1 + x_2$	0.145	0.622	
(5)	$x_1 + x_3$	-0.109		0.372
(6)	$x_2 + x_3$		0.596	0.212
(7)	$x_1 + x_2 + x_3$	-0.051	0.581	0.287

从表 4.1.13 看出：在三元线性回归方程(7)中 x_1 的系数是负的，这与实际情况不符，因为法国是一个原料进口国，国内总产值 x_1 大，则进口额 y 也大，从经济意义上分析， x_1 的系数应为正；另外在增加自变量时，某些回归系数的值变化很大，甚至改变符号，例如方程(1)中 x_1 的系数的符号为正，但加入了变量 x_3 后，在方程(5)与方程(7)中 x_2 的系数变成负的了。

为分析原因，我们可求出，三者的相关系数矩阵如下：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.026 & 0.997 \\ 0.026 & 1 & 0.036 \\ 0.997 & 0.036 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可知 x_2 与 x_1 间的相关系数高达 0.997，这说明 x_1 与 x_2 基本线性相关。若将 x_3 看作因变量， x_1 看作自变量，那么 x_3 关于 x_1 的一元线性回归方程为： $x_3 = 6.258 + 0.686x_1$ ，这说明当 x_1 变化时， x_3 不可能保持一个常数，因此对回归系数的解释就复杂了，不能仅从其符号上作解释。 x_1 与 x_3 间存在的这种线性相关关系称为多重共线性关系。在通常的回归分析中，自变量的这种多重共线性关系并非那么简单。

在自变量间存在多重共线性关系时，尽管这时回归系数的 OLSE 仍为其 BLUE，但从均方误差的角度看，OLSE 并非是回归系数的好估计。为说明这一点，我们对数据作如下“标准化”变换，并记 x_{α}^* ， y^* 为标准化变量，则

$$x_{\alpha}^* = \frac{x_{\alpha} - \bar{x}}{\sigma_x}, y^* = \frac{y_{\alpha} - \bar{y}}{\sigma_y}, \alpha = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, p,$$

其中，

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha}, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n y_{\alpha}, \sigma_x = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^n (x_{\alpha} - \bar{x})^2}, \sigma_y = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^n (y_{\alpha} - \bar{y})^2}$$

“标准化”变量的回归方程为：

$$\hat{y}^* = \hat{\beta}_1 x_1^* + \hat{\beta}_2 x_2^* + \dots + \hat{\beta}_p x_p^*$$

其中回归系数的 OLSE 用矩阵表示为：

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} = (X^* X^*)^{-1} X^* Y, X^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1p}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2p}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{np}^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix}$$

$\hat{\beta}$ 的均方误差定义为:

$$MSE(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta) = E \left\{ \sum_{i=1}^p (\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \right\}$$

它可以看成向量 $\hat{\beta}$ 与 β 间的差向量的长度平方的期望值. 根据线性代数知识可知:

$$MSE(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i}$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ 为矩阵 $X^* X^* - R$ (相关系数矩阵) 的特征根, 且由线性代数知识还可知 $\sum_{i=1}^p \lambda_i = p$. 那么由于各特征根之和为一常数, 而每一特征值均非负, 从而当某些特征值较大时, 必有某些特征值较小, 而其倒数必很大, 从而可知 $\hat{\beta}$ 与 β 间的差向量的长度值将很大, 即 $\hat{\beta}$ 与 β 并非很接近.

因此, 在自变量间存在多重共线性(亦称标准化变量的相关系数矩阵病态)时, 需要对 OLS 作改进. 改进方法可从两方面着手, 一方面从减小均方误差着手, 岭回归就是这样一种方法; 另一方面从消除自变量间的多重共线性着手, 主成分回归就是其中的一个方法. 下面我们分别给以介绍.

(1) 岭回归

在上一段中, 我们已提到在多元线性回归模型中, 当自变量间存在多重共线性关系时, 回归系数的 OLS 的均方误差较大, 为此我们从减小估计的均方误差着手.

设 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*, y^*$ 均为标准化变量, 此时 $X^* X^*$ 为标准化自变量间的相关系数矩阵, 其特征根 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$, 且 $\sum_{i=1}^p \lambda_i = p$, 从而标准化回归方程中系数的 OLS 的均方误差为 $\sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i}$, 减小均方误差的方法之一是设法使较小的特征值增大, 由此引入岭估计的定义.

设: $0 \leq k < \infty$, 称 $\hat{\beta}(k) = (\hat{\beta}_1(k), \hat{\beta}_2(k), \dots, \hat{\beta}_p(k))' = (X^* X^* +$

$kI_p)^{-1}X^*Y^*$ 为回归系数的岭估计. 由岭估计求得的回归方程便为岭回归.

由定义易见, $\hat{\beta}(0)$ 即为 OLS. 可以证明必存在 $k > 0$, 使 $MSE(\hat{\beta}(k)) < MSE(\hat{\beta}(0))$.

这一结论说明, 只要选择一个适当的 $k > 0$, 就可以使回归系数的岭估计比 OLS 具有更小的均方误差. 然而由于 k (岭参数) 值依赖于未知参数 β, σ^2 , 从而使岭参数的选取成为一件十分困难的事. 因此人们常常从实用角度去考虑岭参数的选取. 我们在此介绍一种方法被称为岭迹法.

对 $k \in [0, \infty)$, 将 $\hat{\beta}_i(k)$ 作为 k 的函数, 在平面直角坐标系下描出的曲线称为岭迹, 有时为方便起见, 我们也称函数 $\hat{\beta}_i(k)$ 为岭迹.

我们可以选择 k 值使大部分岭迹变化不大, 但要定量描述有一定困难. 我们以例 4.1.7 为例来考虑岭参数的选取问题. 首先我们求出各变量的均值和离差平方和的算术根见表 4.1.14.

表 4.1.14

	x_1	x_2	x_3	$y = x_4$
$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n x_{ia}$	194.59	3.30	139.74	21.89
$\sqrt{\sum_{a=1}^n (x_{ia} - \bar{x}_i)^2}$	94.87	5.22	65.25	14.37

在不同的 k 值下, 标准化回归方程的回归系数表如表 4.1.15 所列. 我们以 k 为横坐标, 以 $\hat{\beta}_i(k)$ 为纵坐标可在同一直角坐标平面画出岭迹图(三条曲线). 从表 4.1.15 见, 对不同的 k 值, β_2 的岭估计 $\hat{\beta}_2(k)$ 变化不大, 但 β_1 的岭估计 $\hat{\beta}_1(k)$ 很快由负变正, 且逐渐稳定于 0.42 左右, β_3 的岭估计 $\hat{\beta}_3(k)$ 也很快下降, 稳定于 0.50 上下. 由此可见, 若我们取 $k = 0.03$ 或 0.04 就基本可以了. 在 $k = 0.04$ 时, 求得的标准化回归方程为:

$$\hat{y}^* = 0.4196x_1^* + 0.2127x_2^* + 0.5249x_3^*$$

用原变量表示为:

$$\hat{y} = -8.5537 + 0.0635x_1 + 0.5859x_2 + 0.1156x_3$$

由以上可知, 求岭回归主要是要求出不同 k 值下的岭估计, 然后由岭迹图选取适当的 k 值.

表 4.1.15

k	$\hat{\beta}_1 \cdot (k)$	$\hat{\beta}_2 \cdot (k)$	$\hat{\beta}_3 \cdot (k)$
0.000	-0.339	0.213	1.302
0.005	0.193	0.217	0.768
0.010	0.304	0.217	0.654
0.020	0.379	0.217	0.575
0.030	0.406	0.214	0.543
0.040	0.420	0.213	0.525
0.050	0.427	0.211	0.513
0.060	0.432	0.209	0.504
0.070	0.434	0.207	0.497
0.080	0.436	0.206	0.491
0.090	0.436	0.204	0.486
0.100	0.436	0.202	0.481
0.200	0.426	0.186	0.450

选 k 的方法还有很多, 我们再从定量角度给出一种方法. 由于岭估计给出的残差平方和 $SSE(k)$ 比 OLS 的残差平方和 $SSE(0)$ 大, 但可考虑给出一种限制, 即不让其增加过多. 如令 $c > 1$, 选择满足 $SSE(k) < c \cdot SSE(0)$ 的最大的 k 值, c 值通常取 1.5, 2 等.

(2) 主成分回归

当自变量 x_1, x_2, \dots, x_p 间存在多重共线性关系时, 另一种改进 OLS 的想法是对原变量作线性变换, 令新变量

$$z_i = l_{1i}x_1 + l_{2i}x_2 + \dots + l_{pi}x_p, i = 1, 2, \dots, p$$

若记 $x' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $l' = (l_{11}, l_{21}, \dots, l_{p1})$, 则

$$z_i = l'_i x, i = 1, 2, \dots, p \quad (4.1.20)$$

变量 z_i 的 n 个样本值为:

$$z_{ia} = l_{1i}x_{a1} + l_{2i}x_{a2} + \dots + l_{pi}x_{ap}, i = 1, 2, \dots, p, a = 1, 2, \dots, n$$

若记 $x'_{\alpha} = (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \dots, x_{\alpha p})$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, 则

$$z_{ia} = l'_i x_{\alpha}, i = 1, 2, \dots, p, \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.21)$$

其中系数 l_{ij} 可根据下述要求来确定: 要求 n 个样本的前若干个变量 z_i 的值尽可能分散, 以便充分反映由 x_1, x_2, \dots, x_p 所提供的样本间的差异, 而后几个变量 z_i 的 n 个样本值尽可能接近, 且要求新变量 z_1, z_2, \dots, z_p 间互不相关. 如果能做到这一点的话, 就相当于找到 x_1, x_2, \dots, x_p 之间的多重共线性关系, 通过建立 y 关于 z_1, z_2, \dots, z_m ($m < p$) 的回归去获得 y 关于

x_1, x_2, \dots, x_p 的回归, 就相当于消除了自变量 x_1, x_2, \dots, x_p 之间的多重共线性关系.

此事能否办到呢?

设 x_1, x_2, \dots, x_p 为标准化变量, 又记

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{(1)} \\ x'_{(2)} \\ \vdots \\ x'_{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.1.22)$$

则 $X'X = R$, 即它是 x_1, x_2, \dots, x_p 的相关系数矩阵, 由于 R 是非负定矩阵, 故其特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$, 又记相应的单位正交化特征向量为 l_1, l_2, \dots, l_p , 则 $L = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ 为正交阵, 从而 $L'R'L = A$, 其中 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, 当(4.1.20)式中的 l_i 取第 i 个特征向量时, 根据线性代数知识, 有:

$$\bar{z}_i = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n z_a = l_{1i}x_1 + l_{2i}x_2 + \cdots + l_{pi}x_p = 0$$

$$\sum_{a=1}^n (z_a - \bar{z}_i)^2 = \sum_{a=1}^n z_a^2 = l'_i X' X l_i = l'_i R l_i = \lambda_i \quad (4.1.23)$$

$$\sum_{a=1}^n (z_{ai} - \bar{z}_i)(z_{aj} - \bar{z}_j) = \sum_{a=1}^n z_{ai} z_{aj}$$

$$= l'_{ij} X' X l_j = l'_{ij} R l_j = 0 \quad (4.1.24)$$

这说明 $z_{11}, z_{21}, \dots, z_{n1}$ 的离差平方和恰好为 R 的第 i 个特征根. 由此可知, n 个样本的 z_1 值间差异最大, z_p 值间差异最小, 且 z_1, z_2, \dots, z_p 间不相关.

又由线性代数知识知, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = p$, 这表明 n 个样本的变量 x_1, x_2, \dots, x_p 的离差平方和之和与变量 z_1, z_2, \dots, z_p 的离差平方和之和正好相等, 故 n 个新变量 z_1, z_2, \dots, z_p 间的差异正好提供了老变量 x_1, x_2, \dots, x_p 间的差异. 又由于一切 $\lambda_i \geq 0$, 故当 x_1, x_2, \dots, x_p 间存在多重共线性时, 必有某些 $\lambda_i \approx 0, i = m+1, m+2, \dots, p$, 从而它所对应的 n 个样本的 z_i 值 $z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{ni}$ 近似相等, 均近似为 0, 即

$$z_{ai} = l_{1i}x_{a1} + l_{2i}x_{a2} + \cdots + l_{pi}x_{ap} \approx 0 \quad (4.1.25)$$

$$a = 1, 2, \dots, n, \quad j = m+1, \dots, p$$

实际上由 $\lambda_i \approx 0, i = m+1, m+2, \dots, p$ 可知, $z_j = l'_{jj}x \approx 0, j = m+1,$

$m+2, \dots, p$.

这样, 我们要建立 y 关于 z_1, z_2, \dots, z_p 的回归方程, 实际上只要建立 y 关于 $z_1, z_2, \dots, z_m (m < p)$ 的回归方程即可. 我们称 z_i 为第 i 个主成分, 对应的回归方程称为主成分回归方程.

下面我们就来讨论主成分回归方程的求法.

设 x_1, x_2, \dots, x_p 为 p 个自变量, y 为因变量, 且它们均已标准化了, 即其均值为 0, 离差平方和为 1, x_1, x_2, \dots, x_p 的相关系数矩阵 R 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$, 对应的特征向量为 l_1, l_2, \dots, l_p , 相应的主成分为 z_1, z_2, \dots, z_p .

y 关于 z_1, z_2, \dots, z_m 的回归方程为:

$$\hat{y} = \hat{\alpha}_1 z_1 + \hat{\alpha}_2 z_2 + \dots + \hat{\alpha}_m z_m \quad (4.1.26)$$

其中 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m$ 的 OLS 为:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_m \end{bmatrix} = (Z'Z)^{-1} Z' Y \quad (4.1.27)$$

这里,

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

易见 Z 的第 i 行是 m 个主成分的第 i 次观测值, Z 的第 j 列是第 j 个主成分 z_j 的 n 次观测值. 从而由 (4.1.23) 式、(4.1.24) 式、(4.1.27) 式可得:

$$Z'Z = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{a=1}^n z_{ai} y_a - \frac{1}{\lambda_i} \begin{bmatrix} Z_{1i} \\ Z_{2i} \\ \vdots \\ Z_{ni} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.1.28)$$

再将 z_i 用 x_1, x_2, \dots, x_p 的线性关系式 (4.1.20) 代入, 就得 y 关于 x_1, x_2, \dots, x_p 的回归方程:

$$\hat{y} = \alpha_1 (l'_1 x) + \alpha_2 (l'_2 x) + \dots + \alpha_m (l'_m x)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha_1 l'_1 + \alpha_2 l'_2 + \cdots + \alpha_m l'_{m'}) x \\
 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p
 \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$, 从而

$$\beta_i = \hat{\alpha}_1 l_{i1} + \hat{\alpha}_2 l_{i2} + \cdots + \hat{\alpha}_m l_{im}, i=1, 2, \dots, p$$

$$\beta = L_{p \times m} \hat{\alpha} = (l_1, l_2, \dots, l_m) \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_m \end{bmatrix} \tag{4.1.30}$$

故从上所述可知求 y 关于 x_1, x_2, \dots, x_p 的主成分回归方程的步骤如下：

设变量 x_1, x_2, \dots, x_p, y 均已标准化。

第一步, 求出 x_1, x_2, \dots, x_p 的相关系数矩阵 R :

第二步, 求出 R 的特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$, 对应的特征向量 l_1, l_2, \dots, l_p ;

第三步, 选取适当的 m 值, 方法有多种, 例如:

(1) 对指定的 c (例如 0.70, 0.90 等), 取满足 $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \lambda_i > c$ 的最小 m 值;

(2) 删去 $\lambda_i \leq 0.01$ 对应的主成分, 即使 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0.01$;

(3) 满足 $\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} < 5m$ 的 m 值;

第四步, 计算 z_1, z_2, \dots, z_m 对应的 n 个样本值,

$z_{\alpha}, \alpha=1, 2, \dots, n, i=1, 2, \dots, m$;

第五步, 按(4.1.28)式求出 $\hat{\alpha}_i, i=1, 2, \dots, m$;

第六步, 按(4.1.30)式求出 $\beta_i, i=1, 2, \dots, p$, 写出 y 关于 x_1, x_2, \dots, x_p 的回归方程(4.1.29);

下面我们仍来看例 4.1.7, 求其主成分回归.

首先求得相关系数矩阵为:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.026 & 0.997 \\ 0.026 & 1 & 0.036 \\ 0.997 & 0.036 & 1 \end{bmatrix}$$

其特征值为 $\lambda_1 = 1.999, \lambda_2 = 0.0998, \lambda_3 = 0.003$, 对应的特征向量是:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.706 & 3 \\ 0.043 & 5 \\ 0.706 & 5 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0.035 & 7 \\ 0.999 & 0 \\ -0.025 & 8 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.007 & 0 \\ 0.707 & 2 \end{bmatrix}$$

由于 $\lambda_3 < 0.01$, 故取两个主成分. 前两个主成分的 n 个样本值及 x_1, x_2, x_3, y 的标准化变量值均列在表 4.1.16 中.

表 4.1.16

序号	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	y
1	-0.477	0.172	-0.485	-0.672	0.202	-0.417
2	-0.352	0.153	-0.382	-0.512	0.176	-0.382
3	-0.243	-0.038	-0.253	-0.353	0.023	-0.201
4	-0.201	0.038	-0.197	-0.283	-0.026	-0.194
5	-0.145	-0.422	-0.117	-0.204	-0.413	-0.215
6	-0.041	-0.211	-0.031	0.060	-0.208	-0.104
7	0.079	-0.230	0.096	0.114	-0.235	0.056
8	0.188	0.441	0.220	0.307	0.428	0.321
9	0.312	0.326	0.346	0.493	0.305	0.432
10	0.393	0.345	0.376	0.559	0.321	0.397
11	0.468	-0.498	0.427	0.611	-0.526	0.307

这里:

$$z_j = l'_j x = x' l_j, x' = (x_1, x_2, x_3), z_{aj} = x' l_j,$$

$$x' = (x_{a1}, x_{a2}, x_{a3}), j=1, 2, a=1, 2, \dots, 11$$

由此求得: $\hat{a}_1 = 0.690\ 0$, $\hat{a}_2 = -0.191\ 3$ (分别是表 4.1.16 中 z_1 列与 y 列对应数乘积之和的 λ_1 分之一, z_2 列与 y 列对应数乘积之和的 λ_2 分之一), 与(4.1.30)式对应的 $\beta_1 = 0.480\ 4$, $\beta_2 = 0.221\ 1$, $\beta_3 = 0.482\ 5$.

故对标准化变量来讲,

$$\hat{y} = 0.480\ 4x_1 + 0.221\ 1x_2 + 0.482\ 5x_3$$

若用原始变量 Y, X_1, X_2, X_3 表示, 则为:

$$\begin{aligned} \hat{Y} - 21.89 &= 0.480\ 4 \times \frac{X_1 - 194.59}{94.87} + 0.221\ 1 \times \frac{X_2 - 3.30}{5.22} + 0.482\ 5 \\ &\quad \times \frac{X_3 - 139.74}{65.25} \end{aligned}$$

即: $\hat{Y} = -9.105\ 7 + 0.072\ 7X_1 + 0.609\ 1X_2 + 0.106\ 2X_3$

(因为 $x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma_i}$, $i = 1, 2, 3$, $y = \frac{Y - \bar{Y}}{\sigma_y}$)此方程也消除了不合理的符号。

从以上计算可知, 标准化自变量间的多重共线性关系为:

$$-0.7070x_1 - 0.0070x_2 + 0.7072x_3 \approx 0$$

(因为 $\lambda_3 \approx 0 \Rightarrow z_3 = l'_3, x_3 \approx 0$)当略去较小的系数后, 可认为变量间有近似关系式: $x_1 \approx x_3$. 在主成分回归中删去了这一关系.

例 4.1.8 我们调查了某地区农业总收入 x 与第二年小型农机销售额 y 的 10 年统计数据见表 4.1.17.

表 4.1.17

年份(t)	x (亿元)	y (万元)	年份(t)	x (亿元)	y (万元)
1972	5.42	79.2	1977	6.58	84.8
1973	4.38	70.3	1978	7.25	156.5
1974	5.79	81.6	1979	8.94	154.4
1975	6.25	83.5	1980	10.61	174.35
1976	6.93	75.3	1981	13.05	198.05

- (1)画一张散点图,从中可发现什么规律?
- (2)建立 y 关于 x 的一元线性回归方程;
- (3)党的十一届三中全会以来,小型农机销售量激增. 为反映农村经济政策的影响,设置虚拟变量 $u = \begin{cases} 0 & (t < 1978) \\ 1 & (t \geq 1978) \end{cases}$, 试建立 y 关于 x, u 的二元线性回归方程;
- (4)试对(2)与(3)中求得的回归方程作一比较,哪一个方程对原始数据的拟合程度高?

例 4.1.9 在一个经济问题中收集了 10 组数据,要研究 y 关于 x_1, x_2, x_3 的关系. 现已求得各变量的均值与离差平方和的算术根如表 4.1.18 所示.

表 4.1.18

变量	x_1	x_2	x_3	y
平均值	129.37	101.7	102	14
离差平方和的算术根	109.2476	24.3742	19.2354	12.9035

并求得部分岭参数 k 对应的标准回归方程中的系数及原方程的残差平

方和如表 4.1.19 所示.

表 4.1.19

k	$\hat{\beta}_1(k)$	$\hat{\beta}_2(k)$	$\hat{\beta}_3(k)$	$SSE(k)$
0	0.877 2	-0.355 5	0.474 9	0.337 7
0.01	0.718 7	-0.081 6	0.356 2	0.635 0
0.02	0.625 2	0.028 9	0.335 8	0.980 8
0.03	0.566 7	0.091 1	0.328 8	1.253 4
0.04	0.526 7	0.131 0	0.325 5	1.466 4
0.05	0.497 6	0.158 8	0.323 6	1.637 7
...

若要求 $SSE(k) < 3SSE(0)$, 试问 k 值最大取多少? 试建立相应的 y 关于 x_1, x_2, x_3 的岭回归方程.

第 4.2 节 聚类分析

聚类分析(cluster analysis)是一种数值分类(对样品或指标)方法. 首先我们认为, 所研究的样品或指标(变量)之间是存在着程度不同的相似性(亲疏关系), 于是, 可设法找出一些能够度量它们之间相似程度的统计量作为分类的依据, 把一些相似程度大的样品(或指标)聚合为一类, 把另外一些彼此之间相似程度较大的样品(或指标)又聚合为另外一类, ……关系密切的聚合到一个较小的分类单位, 关系疏远的聚合到一个大的分类单位, 直到把所有样品(或指标)都聚合完毕, 把不同的类型一一划分出来, 形成一个由小到大的分类系统. 最后再把整个分类系统画成一张图(称为谱系图), 用它把所有样品(或指标)间的亲疏关系表示出来.

在实际中, 存在着大量分类问题. 比如在经济研究中, 为了研究不同地区城镇居民生活中的收入及消费状况, 往往需要划分为不同的类型去研究; 在人口研究中, 为了研究某一国家或某一地区生育力水平和发展趋势, 往往需要分层抽样调查, 这里的分层就是一种分类; 在对各个企业的产值、利润、设备、技术力量、资金、产品质量、新品种种类等多项指标(即变量)进行调查测定后, 可能分企业为“先进”、“一般”、“后进”等几类, 另外评定企业优劣的指标, 有测定企业规模的, 有测定企业效益的, 还有测定企业潜在

力量的等几类.人们面临的问题往往是复杂的,如果能把相似的样品(或指标)归成类,处理起来就大为方便,这就是聚类分析的目的.

1. 相似性度量

设 x_{ij} 表示第 i 个样品的第 j 个指标的值, $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, p$. 我们要从这些数据出发, 将样品(或指标)进行分类. 最常用的聚类分析方法是系统聚类法. 首先, 将 n 个样品(或 p 个指标)看成 n (或 p)类, 一类包含一个样品(或指标), 然后将性质最接近的两类合并为一个新类, 我们得到 $n-1$ (或 $p-1$)类, 再从中找出最接近的两类加以合并变成了 $n-2$ (或 $p-2$)类, 如此下去, 最后所有的样品(或指标)均在一类. 将上述并类过程画成一张图(称为谱系图或聚类图), 根据需要便可决定分多少类, 每类各有什么样品(或指标).

从一堆复杂数据产生一个相当简单的类结构, 必然要求进行“相似性”或“相关性”度量. 最常用的相似性度量是刻画两个样品接近程度的量, 如绝对值距离和欧氏距离:

$$d_{ij}(1) = \sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}| \quad d_{ij}(2) = \left[\sum_{k=1}^p (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

由上式可见, 距离越小, 说明样品越接近; 最常用的相关性度量是刻画两个指标相关程度的量, 如相关系数:

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\left[\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \sum_{k=1}^n (x_{jk} - \bar{x}_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

由上式可见, 相关系数越大, 说明指标性质越接近.

2. 系统聚类法

系统聚类法(hierarchical clustering method)是目前国内外运用最多的一种聚类分析方法, 它包含以下步骤:

第一步, 计算 n 个样品两两间的距离;

第二步, 构成 n 个类, 每个类只包含一个样品;

第三步, 合并距离最近的两类为一新类;

第四步, 计算新类与当前各类的距离, 若类的个数等于 1, 转到第五步, 否则回到第三步;

第五步,画聚类图;

第六步,决定类的个数和类.

例 4.2.1 为了研究辽宁等 5 省份 1991 年城镇居民生活消费的分布规律,根据调查资料作类型划分. 指标名称及原始数据见下表 4.2.1.

表 4.2.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
辽宁	7.90	39.77	8.49	12.94	19.27	11.05	2.04	13.29
浙江	7.68	50.37	11.35	13.30	19.25	14.59	2.75	14.87
河南	9.42	27.93	8.20	8.14	16.17	9.42	1.55	9.76
甘肃	9.16	27.98	9.01	9.32	15.99	9.10	1.82	11.35
青海	10.06	28.64	10.52	10.05	16.18	8.39	1.96	10.81

其中: x_1 为人均粮食支出(元/人), x_2 为人均副食支出(元/人), x_3 为人均烟、酒、茶支出(元/人), x_4 为人均其他副食支出(元/人), x_5 为人均衣着商品支出(元/人), x_6 为人均日用品支出(元/人), x_7 为人均燃料支出(元/人), x_8 为人均非商品支出(元/人).

现将每个省份看成一个样品,先计算五个省份之间的欧氏距离,用 D_n 表示相应的距离矩阵(由于矩阵对称,故只写出下三角部分). 距离矩阵 D_n 中各元素的大小,反映了 5 省份间消费水平的接近程度. 例如甘肃省与河南省之间的欧氏距离最小为 2.20,反映了这两个省份城镇居民的消费水平最接近.

$$D_n = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & & & & \\ 2 & 11.67 & 0 & & & \\ 3 & 13.80 & 24.63 & 0 & & \\ 4 & 13.12 & 24.06 & 2.20 & 0 & \\ 5 & 12.80 & 23.54 & 3.51 & 2.21 & 0 \end{bmatrix}$$

开始有 5 个类,由于 D_n 中最小的元素是 $d_{43}=2.20$,故将类 3 和类 4 合并成一新的类 6=(类 3,类 4),然后计算类 6 与类 1,类 2,类 5 之间的距离. 利用公式:

$$d_{6i} = \min\{d_{ii}, d_{4i}\}, i=1, 2, 5$$

在距离矩阵 D_n 中消去了类 3,类 4 所对应的行和列,并加上类 6 这一新类对应的一行一列,得到新距离矩阵:

$$D_1 = \begin{matrix} & 6 & 1 & 2 & 5 \\ \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & & & \\ 13.12 & 0 & & \\ 24.06 & 11.67 & 0 & \\ 2.21 & 12.80 & 23.80 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

然后,在 D_1 中类间最小距离为 $d_{65}=2.21$, 合并类 5 和类 6, 得到一新的类 7, 再计算类 7 与类 1, 类 2 间的距离, 其计算公式是:

$$d_{7i} = \min\{d_{5i}, d_{6i}\}, i=1, 2$$

在距离矩阵 D_1 中消去了类 5、类 6 所对应的行和列, 并加上最新类 7 对应的一行一列, 得到新距离矩阵:

$$D_2 = \begin{matrix} & 7 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & & \\ 12.8 & 0 & \\ 23.54 & 11.67 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

然后, 在 D_2 中类间最小距离为 $d_{12}=11.67$, 合并类 1 和类 2, 得到一新的类 8, 再计算类 8 与类 7 间的距离, 其计算公式为:

$$d_{87} = \min\{d_{17}, d_{27}\}$$

在距离矩阵 D_2 中消去了类 1、类 2 所对应的行和列, 并加上最新类 8 对应的一行一列, 得到新距离矩阵:

$$D_3 = \begin{matrix} & 8 & 7 \\ \begin{matrix} 8 \\ 7 \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & \\ 12.8 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

从而, 类 7 和类 8 合并成一类.

如果把上述聚类过程作图表示, 即成谱系图(或谱系聚类图), 从图 4.2.1 中可以清楚地看到各个类在不同距离水平上聚集和归并的过程.

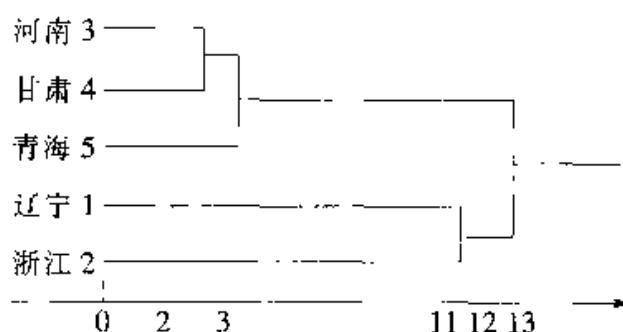


图 4.2.1 谱系聚类图

在距离为 2.20 这个水平上首先合并类 3 和类 4 为类 6；然后，更新距离矩阵后又在距离为 2.21 这个水平上合并类 5 和类 6 为类 7；在距离为 11.67 这个水平上又合并类 1 和类 2 为类 8；最后在距离为 12.8 这个水平上又把类 7 和类 8 合并，形成一个大类的聚类系统。

最后，决定类的个数与类。如取阈值 $T=12$ ，这等价于在谱系聚类图上，距离为 12 处划一条竖线与聚类图两条横线相交，故得到两类为{河南，甘肃，青海}与{辽宁，浙江}。

上面曾提到决定类的个数问题，即确定阈值的问题。一般应符合以下几条：

1. 类间差异与类内差异相比，类间差异显著地大，类内差异要尽量小，类间差异要尽量大。从统计上说，就是各类重心间距离要显著地大。
2. 所分出的各类都有明显的实际意义。
3. 若用不同的方法进行聚类，应该获得较多的相同类。

应用统计方法进行分类，目的是要探清事物的空间结构。物以类聚作为一种客观现象，有它自身的规律。因此无论选择何种方法，分类的正确与否，都要接受客观实际的检验，并在实践中作出进一步的纠正。

例 4.2.2 城镇居民生活消费水平通常用例 4.2.1 中的八项指标来描述，八项指标间存在一定的线性相关，为研究城镇居民的生活消费结构，需将相关性强的指标归并到一起，实际上就是对指标聚类。

我们依据我国 1991 年 30 个省市城镇居民月平均消费数据（共 30 个样品，8 项指标）对指标聚类，八项指标对应的相关系数矩阵为：

$$R = X_7 \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \\ X_2 & 0.3335 \\ X_3 & 0.0517 & -0.0229 \\ X_4 & -0.0614 & 0.3988 & 0.5333 \\ X_5 & 0.2896 & -0.1564 & 0.4966 & 0.6981 \\ X_6 & 0.1962 & 0.7165 & 0.0328 & 0.4782 & 0.2837 \\ X_7 & 0.3481 & 0.4131 & -0.1383 & 0.1714 & -0.2079 & 0.1082 \\ X_8 & 0.3190 & 0.8350 & 0.2583 & 0.3125 & -0.0815 & 0.7099 & 0.3982 \end{bmatrix}$$

从矩阵中可见， R 中绝对值最大的相关系数为 $r_{28}=0.8350$ ，所以先将类 2 和类 8 并成一个新的类 9，然后计算类 9={类 2，类 8}与各类间的相关系数，其计算公式为：

$$r_{ij} = \max\{r_{2i}, r_{8i}\}, i=1,3,4,5,6,7$$

得到新相关系数矩阵，再从中找出绝对值最大的相关系数为 $r_{69}=$

0.709 9,将类 6 和类 9 并成一新的类 10,计算类 $10 = \{类 6, 类 9\}$ 与各类间的相关系数,其计算公式为:

$$r_{10i} = \max\{r_{6i}, r_{9i}\}, i=1,3,4,5,7$$

得到新相关系数矩阵,再从中找出绝对值最大的相关系数为 $r_{45} = 0.698 4$,将类 4 和类 5 并成一新的类 11,计算类 $11 = \{类 4, 类 5\}$ 与各类间的相关系数,其计算公式为:

$$r_{11i} = \max\{r_{4i}, r_{5i}\}, i=1,3,7,10$$

依次下去,类 $12 = \{类 3, 类 11\}$ ($r_{11,3} = 0.533 3$),类 $13 = \{类 10, 类 12\}$ ($r_{10,12} = 0.478 2$),类 $14 = \{类 7, 类 13\}$ ($r_{13,7} = -0.413 1$),最后合并类 1 与类 14,每次缩小一类得下面的指标聚类图(见图 4.2.2).

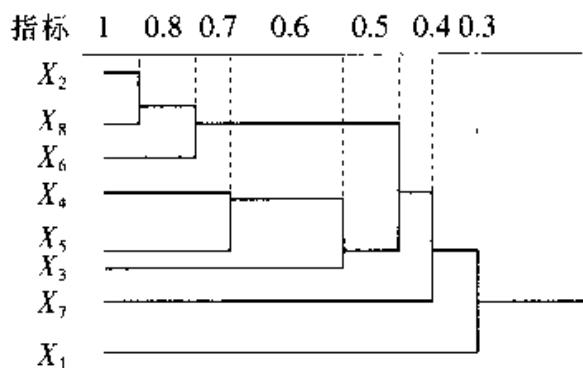


图 4.2.2 城镇居民消费指标聚类图

我们可以看出全国城镇居民的消费结构大致可分为三大类.第一类是居民购买副食、日用品及房租、水电、交通等项开支,这也是消费结构起主导作用的方面;第二类是居民购买烟、茶、衣着及其他副食方面的支出;第三类是粮食和燃料的消费.这两项很重要的消费指标,但 1991 年在城镇居民的消费中它们占的比例较小,可将它们归并为同一类.

聚类分析在教育心理领域中的应用也有较广阔的前景,既可以用于研究被试分类,又可以用于心理变量结构探察,从而为心理诊治和教育决策提供定量依据.

聚类应用到体育科学中,有学者曾对 24 名优秀田径运动员的七项全能项目得分作研究,对这七项指标(变量)进行聚类分析.

在聚类分析中,当变量既有定距变量又有定序变量时,可考虑按某种特征的有无化定序变量(或全部变量)为哑变量来处理.

最后,我们介绍离差平方和法(沃尔德方法,Ward's Method)和类平均法(Average Linkage).

离差平方和法也是一种系统聚类法,也是目前除了最近距离法(Nearest Linkage)外使用较多的一种数值分类方法,它包含以下步骤.

第一步,每个样品自成一类.

第二步,计算离差平方和增量.类与类合并后增加的离差平方和为:

$$d_{ij}^2 = \frac{n_i n_j}{n_i + n_j} (x_i - x_j)' (x_i - x_j)$$

选 d_{ij}^2 最小的先合并,其中 n_i 为类 i 中所含的样品个数.

第三步,设类 i 与类 j 合并为新类 k ,则原类 m 与新类 k 合并后增加的离差平方和为:

$$\begin{aligned} d_{mk}^2 &= \frac{n_m n_k}{n_m + n_k} (\bar{x}_m - \bar{x}_k)' (\bar{x}_m - \bar{x}_k) \\ &= \frac{n_m + n_k}{n_m + n_k} d_{mk}^2 + \frac{n_m + n_k}{n_m + n_k} d_{mj}^2 - \frac{n_m}{n_m + n_k} d_{ij}^2 \end{aligned}$$

第四步,直至全部合并为一类为止.

例 4.2.3 设有五个样品,每个只测量了一个指标,分别是 1, 2, 6, 8, 11, 试用离差平方和法将它们分类.

$$\text{第一步, } D^2(0) = G_1 \left[\begin{array}{ccccc} G_1 & & & & \\ G_2 & 0.5 & 0 & & \\ G_3 & 12.5 & 8 & 0 & \\ G_4 & 24.5 & 18 & 2 & 0 \\ G_5 & 50 & 40.5 & 12.5 & 4.5 & 0 \end{array} \right]$$

合并类 1 与类 2 为类 6.

$$\text{第二步, } D^2(1) = G_3 \left[\begin{array}{ccccc} G_6 & & & & \\ G_3 & 0 & & & \\ G_4 & 13.5 & 0 & & \\ G_5 & 28.17 & 2 & 0 & \\ G_6 & 60.17 & 12.5 & 4.5 & 0 \end{array} \right]$$

合并类 3 与类 4 为类 7.

$$\text{第三步, } D^2(2) = G_5 \left[\begin{array}{ccccc} G_7 & & & & \\ G_5 & 0 & & & \\ G_6 & 10.67 & 0 & & \\ G_6 & 30.25 & 60.17 & 0 & \end{array} \right]$$

合并类 5 与类 7 为类 8.

$$G_8 \quad G_6$$

$$\text{第四步, } D^2(3) = \frac{G_8}{G_6} \begin{bmatrix} 0 \\ 56.03 & 0 \end{bmatrix}$$

最后合并类 6 与类 8 为类 9, 并可画出谱系聚类图(树形图 Dendrogram).

下面介绍类平均法(average linkage).

设类 i 与类 j 合并为新类 k , 并设类 i 含有元素 n_i 个, $n_k = n_i + n_j$, 新类 k 与其他类 m 之间的距离定义为类 m 与类 k 中元素两两间距离的平均, 即新类 k 与类 m 之间的距离为:

$$D_{km} = \frac{1}{n_k n_m} \sum_{i \in G_m} \sum_{j \in G_k} d_{ij} = \frac{1}{n_k n_m} \left[\sum_{i \in G_m} \sum_{j \in G_i} d_{ij} + \sum_{i \in G_m} \sum_{j \in G_j} d_{ij} \right]$$

如:

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & & & & \\ 2 & 11.67 & 0 & & & \\ 3 & 13.80 & 24.63 & 0 & & \\ 4 & 13.12 & 24.06 & 2.20 & 0 & \\ 5 & 12.80 & 23.54 & 3.51 & 2.21 & 0 \end{bmatrix}$$

首先合并类 3 和类 4 为新类 6, 那么:

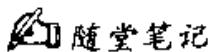
$$D_{6m} = \frac{1}{2n_m} \left[\sum_{i \in G_m} \sum_{j \in G_3} d_{ij} + \sum_{i \in G_m} \sum_{j \in G_4} d_{ij} \right], m=1,2,5$$

如当 $m=1$ 时, $D_{61} = \frac{1}{2}(d_{13} + d_{14}) = \frac{1}{2}(13.80 + 13.12) = 13.46$, 等等. 所以得到:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & & & \\ 1 & 13.46 & 0 & & \\ 2 & 24.35 & 11.67 & 0 & \\ 5 & 2.86 & 12.80 & 23.54 & 0 \end{bmatrix}$$

其次合并类 5 与类 6 为新类 7, 并计算

$$D_{71} = \frac{1}{3}(d_{15} + d_{16} + d_{17}) = \frac{1}{3}(12.80 + 13.80 + 13.12) = 13.24$$



$$D_{72} = \frac{1}{3}(d_{23} + d_{24} + d_{25}) = \frac{1}{3}(23.54 + 24.63 + 24.06) = 24.08$$

所以得到：

$$D_2 = 1 \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 13.24 & 0 \\ 24.08 & 11.67 & 0 \end{bmatrix}$$

再次合并类 1 与类 2 为新类 8，并计算

$$D_{87} = \frac{1}{6}(d_{13} + d_{14} + d_{15} + d_{23} + d_{24} + d_{25}) = 18.66$$

最后合并类 7 与类 8 为新类 9，并可画出“树形图”。

第 4.3 节 判别分析

在科学的研究和日常生活中，我们经常会遇到需要对某一研究对象属于哪种情况作出判断。例如要根据已有的气象资料（气温、气压等）来判断天气情况，是晴天还是阴天，是有雨还是无雨；要根据某人的诊断资料（体温、症状、化验结果等）来判断此人是有病还是无病，或是否患有某种疾病；要根据岩石标本的特征来判断该地区是否有矿；要根据某一种股票近期变化情况来判断此种股票价格是升还是降；要根据人均国民收入、人均工农业产值、人均消费水平等多项指标来判断一个国家的经济发展程度所属类型，等等。这类问题都是判别分析问题。由此看来，判别分析是应用性很强的一种多指标的统计分析方法。

判别分析用统计模型的语言来描述就是：设有 k 个总体 G_1, G_2, \dots, G_k ，希望建立一个准则，对给定的任意一个样本，依据这个准则就能判断它来自哪个总体。当然我们应当要求这种准则在某种意义上是最优的。例如，错判概率最小，或错判损失最小等等。

1. 多组距离判别

(1) 协方差矩阵相同时

设有 k 个组 G_i ($i=1, 2, \dots, k$)，它们的均值向量分别是 u_i ($i=1, 2, \dots, k$)，协方差矩阵均是 Σ ，则平方马氏距离 $d^2(x, G_i) = (x - u_i)' \Sigma^{-1}$

$(x - u_i) = x' \sum^{-1} x - 2(I'_i x + C_i)$, 其中 $I_i = \sum^{-1} u_i$, $C_i = \frac{1}{2} u_i' \sum^{-1} u_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. 线性判别函数为 $I'_i x + C_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, 相应的判别规则为 $x \in G_i$, 若 $I'_i x + C_i = \max_{1 \leq j \leq k} (I'_j x + C_j)$, 当均值向量、协方差矩阵都未知时, 可通过相应的样本值来代替.

应用 SPSS 软件可以得到 k 个线性判别函数, 直接用于判别.

(2) 协方差矩阵不同时

设组 G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 的协方差矩阵分别为 \sum_i ($i = 1, 2, \dots, k$), 且它们不全相同, 则计算 x 到各组的平方马氏距离 $d^2(x, G_i) = (x - u_i)' \sum_i^{-1} (x - u_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, 判别规则为 $x \in G_i$, 若 $d^2(x, G_i) = \min_{1 \leq j \leq k} d^2(x, G_j)$, 当均值向量、协方差矩阵都未知时, 可用样本来估计.

2. 典型判别

设有 n_i 个样品来自组 G_i ($i = 1, 2, \dots, k$), 共有 $n = \sum_{i=1}^k n_i$ 个样品, 每个样品都可视为 p 维欧氏空间中的一个点, 所有 n 个点由 k 个不同的集合组成, 第 i 个集合(由组 G_i 形成)含有 n_i 个点. 空间中的这些子集越是彼此分开, 组之间的差异就越明显, 样品来自哪一组也就越容易判别. 当 $p=1$ 或 2 时, 我们可以把所有的 n 个点都画在坐标轴或坐标平面上, 通过观测 k 个“点集合”的位置, 从直观上就可以直接对各组加以判别. 然而在实际问题中, 一般 $p \geq 3$, 这样也就无法直接从直观的几何图形上判别各组. 多元分析中有一个非常重要的思想方法, 就是采用降维技术, 把 p 维欧氏空间中的点通过适当方式投影到低维空间, 即用低维向量近似地替代高维向量, 然后在低维空间上再进行组的判别. 样品在降维之后难免会损失一部分信息, 但只要使用的方法得当, 我们可以最大限度地减少这种损失, 从而保留绝大部分的有用信息, 即关于能够反映组与组之间差异的信息.

我们现考虑将 k 组的 p 维数据投影到某个最佳的方向(即一维的表达式), 为了数学上的方便, 使用数据向量的 p 个分量的线性组合作为一维表达式.

设来自组 G_i 的 n_i 个 p 维观测值为 $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, 将它们投影到某一共同方向, 得到投影点是线性组合 $y_j^{(i)} = \alpha' x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, 这里 α 为一 p 维常数列向量, 表示投影方向. 这样,

所有的 p 维观测值就简化为一维观测值. 下面我们用 $\bar{y}^{(i)} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_j^{(i)}$ 表示组 G_i 中 $y_j^{(i)} = \alpha' x_j^{(i)}$ 的均值, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_j^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \bar{y}^{(i)}$ 表示所有 k 组 $y_j^{(i)} = \alpha' x_j^{(i)}$ 的总均值. 如果我们想度量 k 组 $y_j^{(i)} = \alpha' x_j^{(i)}$ 之间的系统差异程度, 则一个合适的方法是采用一元方差分析的技术. $y_j^{(i)} = \alpha' x_j^{(i)}$ 的总平方和 $SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_j^{(i)} - \bar{y}^2) = \alpha' T \alpha$, 组间平方和 $SSR = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}^{(i)} - \bar{y})^2 = \alpha' B \alpha$, 组内平方和 $SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_j^{(i)} - \bar{y}^{(i)})^2 = \alpha' E \alpha$, 并有关系式 $SST = SSR + SSE$, 它们的自由度分别为 $n-1, k-1, n-k$, 假定各组的真实方差相同, 则可以对 k 个组的真实组均值之间是否有显著差异进行检验. 原假设是 k 个真实组均值相等, 检验统计量为 $F = \frac{SSR/(k-1)}{SSE/(n-k)}$, 当 $F \geq F_{\alpha}(k-1, n-k)$ 时, 拒绝原假设. F 值越大, 拒绝原假设的理由就越充分. 可以认为各组真实组均值之间的差异也就越大. F 值的大小与 α 有关, 可看成是 α 的函数, 要使各组的差异程度尽可能地大, 应选择这样的 α , 以使 F 值达到最大, 也就是使 $\Delta(\alpha) = \frac{SSR}{SSE} = \frac{\alpha' B \alpha}{\alpha' E \alpha}$ 达到最大. 可以证明:

$\Delta(\alpha) = \frac{SSR}{SSE} = \frac{\alpha' B \alpha}{\alpha' E \alpha}$ 的最大值就是 $E^{-1}B$ 的最大特征值. 将 $E^{-1}B$ 的全部非零特征值依次记为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$, 相应的特征向量依次记为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 所以, 选择投影方向 $\alpha = \alpha_1$, 能使组间平方和与组内平方和之比达到最大值 λ_1 .

在上述讨论中, 我们致力于寻找一个最能反映 k 个组之间差异的投影方向, 即寻找判别函数 $u_1(x) = \alpha'_1 x$, 然而, 如果组数很多, 或原始数据向量维数很大, 则仅仅使用一个判别函数是不够的, 因为仅在这一个投影方向上, 组之间的差异可能是模糊的. 这时我们可以考虑建立第二个判别函数 $u_2(x) = \alpha'_2 x$, 如还不够, 可建立第三个判别函数, 依次类推, 所有的这些判别函数都称为典型判别函数. $\Delta(\alpha) = \frac{SSR}{SSE} = \frac{\alpha' B \alpha}{\alpha' E \alpha}$ 的大小可以用来衡量判别函数的效果, 称它为判别效率. 我们还可以定义第 i 个典型判别函数的判别能力为 $p_i = \lambda_i / \sum_{j=1}^r \lambda_j$, 而 $r_n (r_n < r)$ 个典型判别函数的累计判别能力定

义为 $p_{1,2,\dots,r_0} = \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_j / \sum_{j=1}^r \lambda_j$, 在实际应用中, 通常取较小的 r_0 ($r_0 < r$), 并能使得累计判别能力达到 75% 以上. 因此, 当 $p_{1,2,\dots,r_0} = \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_j / \sum_{j=1}^r \lambda_j$ 达到这个百分比时, 可选取前面的 r_0 ($r_0 < r$) 个典型判别函数 $u_j(x) = \alpha'_j x$, $j=1, 2, \dots, r_0$ 来代替全部 r 个判别函数, 表示用 r_0 ($r_0 < r$) 个综合指标进行判别分组已足够了.

在确定了需使用的 r_0 ($r_0 < r$) 个典型判别函数之后, 一个很自然的问题是如何来制定判别规则. 设组 G_i 在 r_0 ($r_0 < r$) 个典型判别函数 $u_i(x) = \alpha'_i x$, $j=1, 2, \dots, r_0$ 上的样本均值为 $\bar{u}_i^{(0)} = \frac{1}{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} \alpha'_j x_m^{(0)}$, $j=1, 2, \dots, r_0$, $i=1, 2, \dots, k$. 当 $r_0=1$ 时, 判别规则为 $x \in G_i$, 若 $|u_1(x) - \bar{u}_1^{(0)}| = \min_{1 \leq j \leq k} |u_j(x) - \bar{u}_j^{(0)}|$; 当 $r_0 > 1$ 时, 判别规则为 $x \in G_i$, 若 $D_i^2 = \min_{1 \leq j \leq k} D_j^2$, 其中 $D_i^2 = \sum_{j=1}^{r_0} (u_j(x) - \bar{u}_j^{(0)})^2$, $i=1, 2, \dots, r_0$. 典型判别函数的系数可由 SPSS 软件提供. 判别效果可由 SPSS 软件提供的“回报”结果来衡量.

第 4.4 节 主成分分析

主成分分析(principal components analysis)也称主分量分析, 是由霍特林(Hotelling)于 1933 年首先提出的. 主成分分析是利用降维的思想, 把多指标转化为少数几个综合指标的多元统计分析方法.

1. 主成分分析的基本思想

在经济实证问题研究中, 为了全面系统地分析问题, 我们必须考虑众多对某经济过程有影响的因素, 所涉及的因素叫做指标, 在多元统计分析中也称为变量. 因为每个变量都在不同程度上反映了所研究问题的某些信息, 并且指标之间彼此有一定的相关性, 因而所得的统计数据反映的信息在一定程度上有重叠. 在用统计方法研究多变量问题时, 变量太多会增大计算量和增加分析问题的复杂性, 人们自然希望在进行定量分析的过程中涉及的变量较少, 而得到的信息又较多. 主成分分析是解决这一问题的理

想工具. 因为经济问题涉及的众多变量之间既然有一定的相关性, 就必然存在着起支配作用的共同因素, 根据这一点, 通过对原始变量相关矩阵内部结构关系的研究, 找出影响某一经济过程的几个综合指标, 使综合指标为原来变量的线性组合. 综合指标不仅保留了原始变量的主要信息, 彼此之间又不相关, 又比原始变量具有某些更优越的性质, 使得我们在研究复杂的经济问题时容易抓住主要矛盾.

2. 主成分分析的具体步骤

第一步, 经济效益指标的同趋势化. 比如在原资料中流动资金周转天数、万元产值能耗均是经济效益的逆向指标, 为了评价分析时方便, 需要将其转为正向指标, 一般用指标值的倒数代替原指标值即可.

第二步, 原始数据的标准化处理. 在计算前, 通常为了消除变量之间在数量级上或量纲上的不同, 需要把原始数据标准化处理. 设 x_{ij} 表示第 i 个企业第 j 个指标的指标值, 则 x_{ij} 的标准化值 $\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}$, 其中,

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, \sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, p, \text{ 分别为第 } j \text{ 个变量的平均值和标准差.}$$

第三步, 求标准化数据的相关矩阵 $R = (r_{ij})_{p \times p}$, $r_{ii} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n x'_{ik}$. 由于标准化后的数据的均值为 0, 方差为 1, 这样的数据协方差矩阵与相关矩阵完全一样, 且从相关矩阵出发便于讨论.

第四步, 求相关矩阵的特征根和特征向量. 令 $|R - \lambda I| = 0$, 求得特征根、特征根贡献率 $\frac{\lambda_i}{p}$ 、累积贡献率 $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{p}$, 其中 $p = \sum_{i=1}^p \lambda_i$; 令 $(R - \lambda_i I) u_i = 0$, 求得相应的特征向量.

第五步, 确定主成分个数. 通常所取主成分的个数 m 使得累积贡献率达到 85% 以上, 即 $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{p} \geq 85\%$ 为宜, 这说明前 m 个主成分包含原始数据的信息总量已达 85%, 用这 m 个主成分代表原来的 p 个指标评价企业经济效益已有足够的把握.

第六步, 写出 m 个主成分 $y_i = u'_i x, x = (x_1, x_2, \dots, x_p)', u_i$ 为相应于 λ_i 的特征向量.

第七步,解释主成分. 主成分的经济意义由各线性组合中权数较大的几个指标的综合意义来确定, 每个主成分刻画了企业经济效益的某一主要方面.

第八步,计算主成分的因子负荷. 主成分 y_i 与原变量 x_k 的相关系数叫做因子负荷, 它可以更清楚地反映出主成分与各原变量的亲疏关系, 利用它来解释主成分会更确切些(见表 4.4.1).

表 4.4.1 因子负荷量表

变量号 \ 主成分	第一主成分 y_1	第二主成分 y_2	...
1			
2			
...			
p	$\sqrt{\lambda_1} u_1$	$\sqrt{\lambda_2} u_2$...

第九步,计算每个样品的主成分得分. 第 i 个样品在第 j 个主成分上的得分为 $y_{ij} = u_j' x_i$, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$.

如对两个主成分的情况, 以 (y_{i1}, y_{i2}) , $i=1, 2, \dots, n$ 为坐标在直角坐标平面画出散点图, 可对样品进行分类.

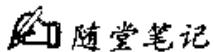
第十步,构造综合评价函数.

$$F_i = \frac{1}{P} (\lambda_1 y_{i1} + \lambda_2 y_{i2} + \dots + \lambda_m y_{im}), i=1, 2, \dots, n$$

以这个综合得分的大小排队, 即可自然排列出每个样品经济效益名次. 综合评价函数值越大, 综合经济效益越好. 根据综合评价函数值排序, 可对样品的综合经济效益进行对比, 也可对不同样品或同一样品的不同时期的综合经济效益进行横向对比和动态分析.

3. 主成分分析的主要应用

- (1) 主成分分析能降低所研究的数据空间的维数, 且所损失的信息很少;
- (2) 可通过因子负荷的结构, 弄清原始变量间的某些关系;
- (3) 多维数据的一种图形表示方法, 可用于分类, 发现“离群点”;
- (4) 进行主成分回归;
- (5) 进行变量筛选, 在所选的前几个主成分中, 若某个原始变量的系数都近似为零的话, 就可以把这个原始变量删除;
- (6) 进行综合评价. 用主成分分析进行综合评价有以下主要优点: 全面性(只要满足 $n > p$ 而不限制变量个数, 在选择了前面少数几个主成分后仍能保



留原始数据信息量的绝大部分)、可比性(因进行了标准化,同时也消除了原始数据数量级上的差别)、合理性(综合评价函数是一个加权平均,每个主成分的权数就是它的贡献率,即该主成分的方差占全部总方差的比重,方差越大的变量越重要,自然应具有较大的权数,且这样的权数非主观人为性使得评价结果惟一且客观合理)、可行性(计算可用计算机软件来实现).

第 4.5 节 因子分析

1. 什么是因子分析

因子分析是主成分分析的推广,它也是一种把多个变量化为少数几个综合变量的多元分析方法,其目的是用数量较少的几个不可观测的隐变量(公因子)来解释具有错综复杂关系的原始变量.

因子分析的形成和发展有相当长的历史,最早用以研究解决心理学和教育学方面的问题.目前它的应用领域越来越广泛,在经济学、管理学、社会学、考古学、生物学、医学、地质学以及体育科学等领域内都取得了卓有成效的应用.例如在经济分析中,可根据选取的经济指标,如,固定资产投资、银行贷款、工业销售利税率、工业资金利税率等,可综合成两个隐变量(公因子);社会需要因子及经济效益因子.在社会学领域内调查青年对婚姻家庭的态度,抽了 n 个青年回答了 m 个问题的答卷,这些问题可归纳为以下几个公因子:对文化和职业的要求,对经济收入的态度,对老人的责任,对相貌的重视以及对孩子的观点等.

例 4.5.1 林登(Linden)对第二次世界大战以来奥运会十项全能比赛的得分作了分析研究,他收集了 160 组数据,这十个全能项目依次为:100 米跑、跳远、铅球、跳高、400 米跑、110 米跨栏、铁饼、撑杆跳高、标枪、1 500 米跑,但总的来说基本上可归结于他们的短跑速度、爆发性臂力、爆发性腿力和耐力这四个方面,每一个方面都称为一个因子.用 x_1, x_2, \dots, x_{10} 分别表示十个项目得分,它们可以表示为含有上述四个因子的线性模型: $x_i = u + a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + a_{i3}f_3 + a_{i4}f_4 + \epsilon, i=1, 2, \dots, 10$, 其中 f_1, f_2, f_3, f_4 表示四个因子,称为公因子, a_{ij} 称为第 i 个(原)变量在第 j 个公因子上的载荷, u 是总平均, ϵ 是第 i 项得分不能被四个公因子解释的部分,称之为特殊因子.这个模型形式上与线性回归模型几乎一样,但它们有着本

质的区别：回归模型中自变量是可以被观测得到的，而上述因子模型中的公因子是不可观测的隐变量，这使得该模型理解起来较为困难；再者，两个模型的参数意义也很不相同。

例 4.5.2 为了评价高中生将来进大学时的学习能力，抽了 200 名高中生进行问卷调查，共 50 个问题。所有这些问题可简单地归结为阅读理解、数学水平和艺术修养这三个方面。这也是一个因子分析模型，每一方面就是一个因子。

例 4.5.3 公司老板对 48 名申请工作的人进行面试，并给出申请人在 15 个方面所得的分数，这 15 个方面是：申请书的形式、外貌、专业能力、讨人喜欢的能力、自信心、洞察力、诚实、推销能力、经验、驾驶汽车的本领、抱负、理解能力、潜力、对工作要求的强烈程度以及适应性。这些问题可以归结为如下几个方面：申请者外露的能力、讨人喜欢的程度、申请者的经验、专业能力。每一方面都是因子模型中的一个因子。

2. 因子模型

$$X_{p \times 1} = A_{p \times m} F_{m \times 1} + \epsilon_{p \times 1}$$

通常假定：

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq p \\ Var(F) = I \\ Var(\epsilon) = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2) \\ cov(F, \epsilon) = 0 \end{array} \right.$$

为了便于对因子分析计算结果做解释，将因子分析模型中各个量的统计意义加以说明是十分必要的。假定因子模型中，各公因子和特殊因子都已经标准化（均值为 0，方差为 1）。

(1) A 的元素 a_{ij} (因子载荷) 的统计意义

$$cov(x_i, f_j) = \sum_{k=1}^m a_{ik} cov(f_k, f_j) + cov(\epsilon_i, f_j) = a_{ij}$$

若 X 是标准化随机向量，则相关系数

$$\rho(x_i, f_j) = \frac{cov(x_i, f_j)}{\sqrt{Var(x_i)} \sqrt{Var(f_j)}} = a_{ij}$$

这表明 a_{ij} 为 x_i 依赖 f_j 的分量（比重），统计学的术语叫做权，但由于历史的原因，心理学家将它叫做载荷，即表示 x_i 在 f_j 上的负荷，它反映了 x_i 对 f_j 的相对重要性。

(2) A 的行元素平方和 $h_i^2 = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$ 的统计意义

$$\sigma_e^2 = Var(x_i) = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 + \sigma_i^2 = h_i^2 + \sigma_i^2$$

当 X 为标准化随机向量时,就有 $1 = h_i^2 + \sigma_i^2$,所以 h_i^2 是原始变量 x_i 对全部公因子的共同依赖程度,故称为共同度,反映了全部公因子对 x_i 的影响,可以看成是全部公因子对 x_i 的方差所做的贡献。 h_i^2 越接近 1,说明变量 x_i 的几乎全部原始信息都被所选取的公因子说明了,如 $h_i^2 = 0.97$,则说明 x_i 的 97% 的信息量被 m 个公因子说明了,也就是说由原始变量空间转为因子空间转化的性质好,保留原来信息量多,因此 h_i^2 是 x_i 方差的重要组成部分;而 σ_i^2 是特殊因子 ϵ_i 对 x_i 的方差贡献,称为剩余方差,它是使 x_i 的方差为 1 的补充值.

(3) A 的列元素平方和 $g_j^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$ 的统计意义

称 g_j^2 为公因子 f_j 对原始变量 X 的贡献,即表示同一公因子 f_j 对诸原始变量所提供的方差贡献之总和,它是衡量公因子 f_j 相对重要性的一个尺度, g_j^2 越大,反映了 f_j 对 X 的影响越大、贡献越大.按 g_j^2 ($j=1, 2, \dots, m$) 的大小,就可以提炼出最有影响的公因子.

习题

1. 实验室为了研究某有毒药品对一种幼虫的作用,寻找给药量 x_1 、幼虫重量 x_2 与存活时间 y 之间的关系,给每只幼虫供给一定量的该药品的水解剂,然后记录下每只幼虫的存活时间,其数据如下(见下表).

	A	B	C	D
1	给药量	重量	时间	
2	0.214	0.439	2.965	
3	0.487	0.361	2.679	
4	0.509	0.325	2.679	
5	0.593	0.093	2.442	
6	0.15	0.425	2.936	
7	0.57	0.371	2.827	
8	0.64	0.14	2.421	
9	0.731	0.496	2.602	
10	0.739	0.364	2.556	
11	0.832	0.156	2.441	
12	0.865	0.347	2.42	
13	0.904	0.278	2.439	
14	0.942	0.141	2.385	
15	1.09	0.289	2.452	
16	1.194	0.193	2.351	
17				

试建立存活时间 y 关于给药量 x_1 、幼虫重量 x_2 的线性回归方程.

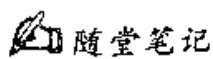
2. 某住宅小区附近的家具商城认为住宅销售户数和新婚对数这两个因素对家具的销售额有明显的影响. 为了确定该商城每季度家具的进货和销量, 他们从全市各个小区家具店收集了 12 组市场调查资料(见下表).

家具销售额 y (万元)	住宅销售住户 x_1	结婚对数 x_2
214	114	23
248	123	22
397	239	25
388	221	24
415	248	23
430	251	26
374	232	25
550	238	27
455	254	34
535	372	39
454	247	41
638	410	38

请为商城人员建立统计分析模型并进行统计推断: 如果了解到近期有 20 对新人结婚, 150 套现房出售. 那么本季度商城可以安排多少销售额?

3. 新闻媒体公布了 2000 年我国信息化指标第一批数据, 其中有两项指标分别是: 互联网用户数, 每百户计算机拥有数. 根据这些资料, 试对我各地区的信息化现状进行统计分析(见下表).

序号	地区名	互联网用户数(万户)	每百户计算机拥有数(台)
1	北京	278.8	32.1
2	天津	569.	16.4
3	河北	55.6	7.1
4	山西	30.2	6.2
5	内蒙	27.2	3.5



续表

序号	地区名	互联网用户数(万户)	每百户计算机拥有数(台)
6	辽宁	104.9	5.8
7	吉林	54.2	4.6
8	黑龙江	55.4	4.6
9	上海	201.8	25.6
10	江苏	122.2	10.7
11	浙江	149.0	14.0
12	安徽	54.7	6.7
13	福建	80.8	11.5
14	江西	46.6	4.6
15	山东	119.9	9.5
16	河南	52.4	5.7
17	湖北	79.2	8.4
18	湖南	89.3	10.7
19	广东	218.0	25.8
20	广西	45.5	9.1
21	海南	7.0	4.3
22	重庆	43.7	13.7
23	四川	113.2	7.7
24	贵州	18.0	5.7
25	云南	32.9	7.9
26	西藏	0.7	1.0
27	陕西	33.1	7.0
28	甘肃	25.4	5.4
29	青海	7.0	2.4
30	宁夏	10.8	3.8
31	新疆	34.0	5.7

4. 我们收集了如下表所示的一些数据, 其中 x_1 为人均产值(元/人), x_2 为人均利税(元/人), x_3 为全员劳动生产率(元/人), x_4 为百元固定资产产值(元/百元), x_5 为百元固定资产利税(元/百元), x_6 为百元固定资产收入(元/百元). 根据所掌握的统计方法进行分析.

	<i>dw</i>	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	<i>X</i> ₅	<i>X</i> ₆
1	呼盟	34074	5226	10597	650	100	719
2	兴安	27078	3402	7803	434	55	515
3	哲盟	43904	8377	13023	916	175	949
4	赤峰	40495	4561	8483	749	84	830
5	锡盟	37830	4182	8133	791	87	815
6	乌盟	32397	3843	7195	1190	141	1021
7	伊盟	52129	9693	20725	503	93	394
8	巴盟	56456	9242	14440	615	101	575
9	阿盟	26317	3460	9388	216	28	189
10	呼市	60772	6917	11792	711	81	729
11	包头	72765	7578	19981	860	90	917
12	乌海	95648	11694	26380	489	60	449

5. 下表给出某一年 28 个地区的消费数据. 其中 *shp* 为食品支出, *yc* 为衣着支出, *rl* 为燃料支出, *shh* 为生活用品及其他支出, *zhf* 为住房支出, *wh* 为文化生活支出. 试进行统计分析.

	<i>dq</i>	<i>shp</i>	<i>yc</i>	<i>rl</i>	<i>shh</i>	<i>zhf</i>	<i>wh</i>	<i>zb</i>
1	天津	135.20	36.40	10.47	36.40	44.16	3.94	1
2	辽宁	145.68	32.83	17.79	39.09	27.29	3.47	1
3	吉林	159.37	33.38	18.37	25.29	11.81	5.22	1
4	江苏	164.95	29.12	11.67	27.30	42.60	5.74	1
5	浙江	169.92	92.75	12.72	34.35	47.12	5.00	1
6	山东	115.84	38.76	12.20	53.77	33.61	3.85	1
7	黑龙江	116.22	29.57	13.24	21.75	13.76	6.04	2
8	安徽	153.11	23.09	15.62	18.18	23.54	6.39	2
9	福建	144.92	21.26	16.96	21.75	19.82	6.73	2
10	江西	140.54	21.59	17.64	15.97	19.19	4.49	2
11	湖北	140.64	28.26	12.35	20.95	18.53	6.23	2
12	湖南	164.02	24.74	13.63	18.06	22.20	6.04	2
13	广西	139.08	18.47	14.68	20.66	13.41	3.85	2
14	四川	137.80	20.74	11.07	16.49	17.74	4.39	2
15	贵州	121.67	21.53	12.58	12.12	14.49	4.57	2
16	新疆	123.24	38.00	13.72	17.77	9.64	5.75	2
17	河北	95.21	22.83	9.30	22.81	22.44	2.80	3
18	山西	104.78	25.11	6.46	18.17	9.89	3.25	3
19	内蒙古	128.41	27.63	8.94	23.99	12.58	3.27	3
20	河南	101.18	23.26	8.46	20.50	20.20	4.30	3
21	云南	124.27	19.81	8.39	15.53	14.22	3.03	3
22	陕西	106.02	20.56	10.94	18.00	10.11	3.29	3
23	甘肃	95.65	16.82	5.70	12.36	6.03	4.49	3
24	青海	107.12	16.45	8.98	8.78	5.40	5.93	3
25	宁夏	113.74	24.11	6.46	23.92	9.61	2.53	3
26	北京	190.33	43.77	9.73	49.01	60.54	9.04	
27	上海	221.11	38.64	12.53	50.82	115.7	5.89	
28	广州	182.55	20.52	18.32	36.97	42.40	11.68	

6. 下表给出 1990 年我国 30 个地区有关计划生育方面的数据, 其中第一列为地区编号, x_1 为多孩率(%), x_2 为综合节育率(%), x_3 为初中以上文化程度人口比例(%), x_4 为人均国民收入(元/人), x_5 为城镇人口比例(%). 试进行统计分析.

n		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	1.94	89.89	64.51	3 577	73.08
2	2	2.58	92.32	55.41	2 981	68.65
3	3	13.46	90.71	38.20	1 148	19.08
4	4	12.46	90.04	45.12	1 124	27.68
5	5	8.94	90.46	41.83	1 080	36.12
6	6	2.80	90.17	50.63	2 011	50.86
7	7	8.91	91.43	46.32	1 383	42.65
8	8	8.82	90.78	47.33	1 628	47.17
9	9	1.80	91.47	62.36	4 822	66.23
10	10	5.94	90.31	40.85	1 696	21.24
11	11	2.60	92.42	35.14	1 717	32.81
12	12	7.07	87.97	29.51	933	17.90
13	13	14.44	88.71	29.04	1 313	21.36
14	14	15.24	89.43	31.05	943	20.40
15	15	3.16	91.21	37.85	1 372	27.34
16	16	9.04	88.76	39.71	880	15.52
17	17	12.02	87.28	38.76	1 246	28.91
18	18	11.15	89.13	36.33	976	18.23
19	19	22.46	87.72	38.38	1 845	36.77
20	20	24.34	84.86	31.07	798	15.10
21	21	33.21	83.79	39.44	1 193	24.05
22	22	4.78	90.57	31.26	903	20.25
23	23	21.56	86.00	22.38	654	18.93
24	24	14.09	80.96	21.49	956	14.27
25	25	32.31	87.60	7.70	865	12.59
26	26	11.18	89.71	41.01	930	21.49
27	27	13.80	86.33	29.69	938	22.04
28	28	25.34	81.56	31.30	1 100	27.35
29	29	20.84	81.45	34.59	1 024	25.72
30	30	39.60	64.90	38.47	1 374	31.91

第 5 章

层次分析法建模

我们先看一个实例。

限于各方面的原因,某学校的科研单位可以在三个科研项目中申请一个,主要考虑以下三个因素:(1)项目的可行性;(2)科研成果的应用;(3)与教学的关系。

这些因素对三个科研项目的影响不同,我们又该如何选择呢?一般地说,人们在制定某项决策的时候,要考虑的因素有多有少,有大有小。在作比较、评价及选择决策时,这些因素的重要程度往往难以量化,人的主观选择会起着主要作用,这就给用一般的数学方法解决问题造成了困难。

T. L. 萨蒂(T. L. Satty)在 20 世纪 70 年代提出了一种能有效地处理这样一类问题的方法,称为层次分析法(analytic hierarchy process, AHP),这是一种定性和定量相结合,系统化、层次化的分析方法。

第 5.1 节 层次分析法的基本步骤

层次分析法的基本思路与人对于复杂的决策问题的思维和判断过程是一致的。不妨以前面提到的科研项目的申请为例。假设你是科研人员,首先,你可以根据自己的实际情况确定各个因素在心目中所占的比重;其次,你可以将每一个准则与三个项目作对比;最后,你要将这两个层次的比较判断进行综合,在三个科研项目中确定哪个为最佳申请项目。

上面的思维过程可以加工整理成以下几个步骤：

(1) 将决策问题分为三个层次，最上层为目标层，即选择科研项目，最下层为方案层，有三个科研项目待选择，中间层为准则层，各层次间的联系用相连的直线表示(见图 5.1.1)。

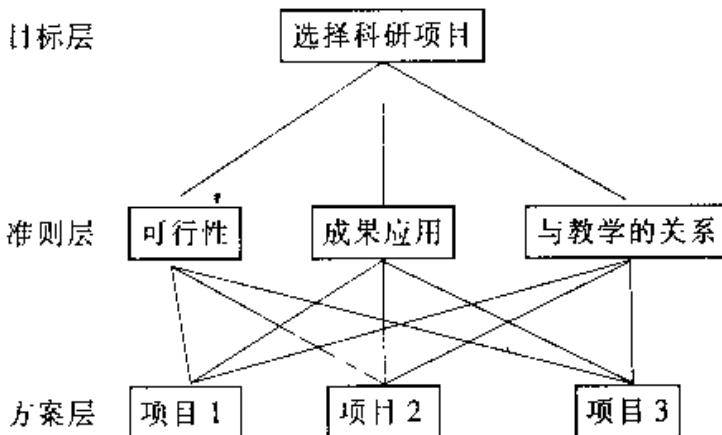


图 5.1.1

(2) 通过相互比较确定各准则对于目标的权重和各方案对于每一准则的权重。这些权重在人的思维过程中通常是定性的，而在层次分析法中则要给出定量方法，即确定权重。

(3) 将方案层对准则层的权重及准则层对目标层的权重进行综合，最终确定方案层对目标层的权重。

层次分析法将定性分析与定量计算结合起来完成上述步骤，以给出决策选择。下面我们说明如何比较同一层各因素对上层因素的影响，从而确定它们在上层因素中所占的比重。

1. 成对比较矩阵和权向量

假设要比较某一层 n 个因素 C_1, C_2, \dots, C_n 对上层一个因素 O 的影响，每次取两个因素 C_i 和 C_j ，用 a_{ij} 表示 C_i 和 C_j 对 O 的影响之比，全部比较结果可用成对比较矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad \text{其中 } a_{ij} > 0, a_{ii} = \frac{1}{a_{ji}} \quad (5.1.1)$$

表示，这种矩阵称为正互反矩阵。如用 C_1, C_2, C_3 依次表示可行性、成果应用和培养学生三个准则，设某人用成对比较法得到的成对比较矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

可以看出,在选择科研项目时,首先考虑科研成果的应用,其次是科研项目的可行性,最后是与教学的关系.仔细分析一下成对比较矩阵可以发现, C_1 与 C_2 之比为1:2, C_1 与 C_3 之比为4:1, C_2 与 C_3 之比为7:1,由于 $a_{13} \neq a_{12}a_{23}$,所以成对比较并不完全一致.但是要做的比较次数较大,全部一致的要求太高了.萨蒂提出了在成对比较不一致的情况下计算各因素 C_1, C_2, \dots, C_n 对因素O的影响权重的方法,并且确定了不一致的允许范围.

如果一个正互反矩阵A满足:

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.2)$$

则称A为一致性矩阵,简称一致阵.容易证明,一致阵的秩为1,且有唯一的特征根n,而其任一列向量都是特征向量.

显而易见,如果成对比较阵是一致阵,自然应取归一化的特征向量(各分向量之和为1)表示各因素 C_1, C_2, \dots, C_n 对因素O的影响权重,这个向量称为权向量.如果成对比较阵不是一致阵,但在不一致的允许范围内,萨蒂提出了用对应于成对比较矩阵的最大特征根的特征向量归一化后作为权向量.

2. 比较尺度

当比较两个具有不同性质的因素 C_i 和 C_j 对于一个上层因素O的影响时,萨蒂提出用1~9尺度,即采用 a_{ij} 的范围是1,2,\dots,9及其倒数1,\(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{9}\),其含义如表5.1.1所示.

表 5.1.1 1—9尺度 a_{ij} 的含义

尺度 a_{ij}	含义
1	C_i 和 C_j 的影响相同
3	C_i 比 C_j 的影响稍强
5	C_i 比 C_j 的影响强
7	C_i 比 C_j 的影响明显强
9	C_i 比 C_j 的影响绝对强
2,4,6,8	C_i 与 C_j 的影响之比在上述两个相邻等级之间

3. 一致性检验

成对比较矩阵通常不是一致阵,但是为了能用它的对应于最大特征根的特征向量作为比较因素的权向量,其不一致程度应在允许范围之内.

可以证明 n 阶正互反矩阵 A 的最大特征根 $\lambda \geq n$, 而当 $\lambda = n$ 时, A 是一致阵.

$$\text{定义 5.1.1} \quad CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} \quad (5.1.3)$$

称 CI 为一致性指标. 当 $CI = 0$ 时 A 为一致阵, CI 越小, 一致性程度越高. 为了确定 A 的不一致程度的允许范围, 需要找出衡量 A 的一致性指标 CI 的标准. 萨蒂引入随机一致性指标 RI , 计算 RI 的方法是, 对于固定的 n , 随机构造正互反矩阵 $A' = (a'_{ij})_{n \times n}$, 其中 a'_{ij} 是从 $1, 2, \dots, 9$ 及其倒数 $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{9}$ 中随机取的. 此时 A' 可能是最不一致的. 取充分大的样本可得到 A' 的最大特征值的平均值 k .

$$\text{定义 5.1.2} \quad RI = \frac{k - n}{n - 1} \quad (5.1.4)$$

称 RI 为随机一致性指标. 对于不同的 n , 萨蒂得出的随机一致性指标的数值如表 5.1.2 所示.

表 5.1.2 随机一致性指标 RI 的数值

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

$$\text{定义 5.1.3} \quad CR = \frac{CI}{RI} \quad (5.1.5)$$

称 CR 为随机一致性比率.

当 $CR < 0.1$ 时, 认为判断矩阵 A 具有满意的一致性, 否则必须重新调整 A , 直至其具有满意的一致性.

4. 层次总排序及组合一致性检验

计算同一层次所有因素对于总目标相对重要性的排序得分的过程称为层次总排序. 此过程是从最高层到最低层逐层实现的.

设上一层次 A 包含 m 个因素 A_1, A_2, \dots, A_m , 它的层次总排序权重分

别为 a_1, a_2, \dots, a_m , 下一层次 B 包含 n 个因素 B_1, B_2, \dots, B_n , 它们对于 A_i 的层次总排序权重分别记为 $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}, j=1, 2, \dots, m$.

此时 B 层总排序得分向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 就可以由下式给出:

$$w_i = \sum_{j=1}^m a_j b_{nj}, i=1, 2, \dots, n \quad (5.1.6)$$

层次总排序也要进行一致性检验. 检验是从高层到低层依次进行的. 设 B 层中的因素 A_i 单排序的一致性指标为 CI_i , 平均随机一致性指标为 RI_i , 则 B 层总排序随机一致性比率 CR 为:

$$CR = \frac{\sum_{i=1}^m a_i CI_i}{\sum_{i=1}^m a_i RI_i} \quad (5.1.7)$$

当 $CR < 0.1$ 时, 认为层次总排序具有满意的一致性.

第 5.2 节 层次分析法的应用实例

由于在处理复杂的决策问题上的实用性和有效性, 层次分析法在经济计划和管理、能源分配、军事指挥、交通、农业、科学技术、医疗、环保、行为科学等领域中有广泛应用.

例 5.2.1 旅游地点的选取. 某学校准备利用假期时间旅游, 假如有 P_1, P_2, P_3 三个旅游地点可以选择, 它可以根据景色、费用、居住、饮食和旅途共五个准则去反复比较这三个地点(见图 5.2.1).

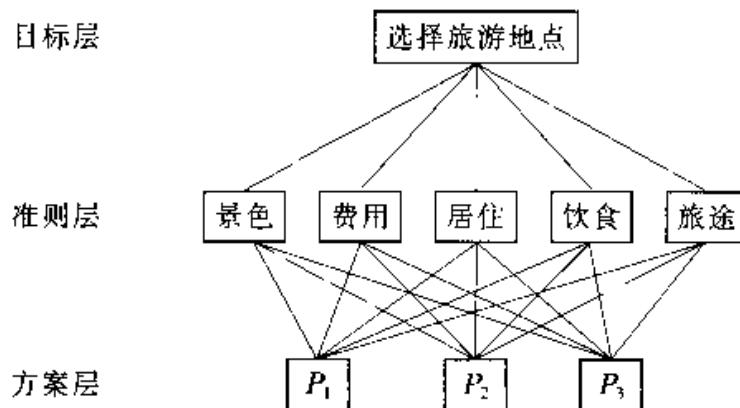


图 5.2.1 某学校选择旅游地点

设决策者用成对比较法, 得到的第二层对第一层的成对比较矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可以计算出其最大特征值为 $\lambda = 5.073$, 归一化的特征向量 $a = (0.263, 0.475, 0.055, 0.099, 0.110)^T$

$CI=0.018, n=5$, 查表得 $RI=1.12$, 这时 $CR=0.016<0.1$, 于是通过了一致性检验.

用同样的方法构造第三层对第二层的每一个准则的成对比较阵, 不妨依次记为:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

由第三层的成对比较阵计算出权向量 $b_j = (b_{1j}, b_{2j}, b_{3j})^T$, 最大特征根 λ_j 和一致性指标, 结果列入表 5.2.1.

表 5.2.1

旅游决策问题第三层的计算结果

j	1	2	3	4	5
	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
b_j	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_j	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_j	0.003	0.001	0	0.005	0
CR_j	0.005	0.002	0	0.008	0

* $n=3$,查表得 $RI=0.58$.

可以看出,所有的 CR_j 都通过了一致性检验.

总排序随机一致性比率 CR 为:

$$CR = \frac{\sum_{j=1}^m a_j CI_j}{\sum_{j=1}^m a_j RI_j} = 0.005$$

因为 $CR < 0.1$, 所以认为层次总排序具有满意的一致性.

由 $w_i = \sum_{j=1}^m a_j b_{ij}$, $i=1,2,3$, 得总排序得分向量:

$$w = (w_1, w_2, w_3)^T = (0.299, 0.258, 0.458)^T$$

因为第三个旅游地点的得分最多.由层次分析法可知,应选取第三个旅游点.

例 5.2.2 企业利润的分配.企业单位由于生产效益较好,年底取得一笔利润,领导决定拿出一部分资金分别用于:(1)为企业员工发年终奖金;(2)扩建集体福利设施;(3)引进高新技术人才和设备.为了促进企业的进一步发展,在制定分配方案时,主要考虑的因素有:调动企业员工的积极性,提高企业质量,改善企业员工的生活条件.

1. 建模(见图 5.2.2)

2. 求解

设领导者制定第二层对第一层的成对比较矩阵为:

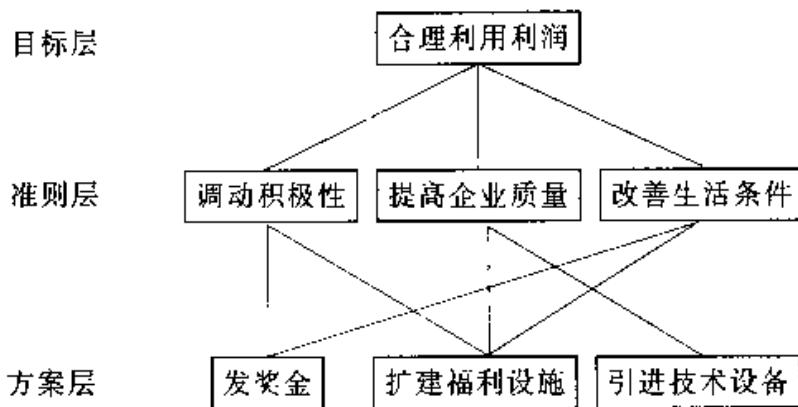


图 5.2.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

可以计算出其最大特征值为 $\lambda = 3.038$, 归一化的特征向量 $a = (0.105, 0.637, 0.258)^T$

$CI=0.019, n=3$, 查表得 $RI=0.58$, 这时 $CR=0.033<0.1$, 于是通过了一致性检验.

用同样的方法构造第三层对第二层的每一个准则的成对比较阵, 不妨依次记为:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

这三个矩阵都是一致阵, 解得的最大特征值都为 2, 对应归一化的特征向量依次为 $b_1 = (0.75, 0.25)^T, b_2 = (0.167, 0.833)^T, b_3 = (0.667, 0.333)^T$.

由 $w_i = \sum_{j=1}^3 a_j b_{ij}, i=1,2,3$ 得各方案对目标层的层次总排序得分向量:

$$w = (w_1, w_2, w_3)^T = (0.251, 0.218, 0.531)^T$$

由于第三层对第二层的成对比较矩阵都是一致阵, 所以 $CI_j = 0, j=1, 2, 3$. 从而 $CR=0$, 总排序的一致性也通过了检验.

由层次分析法的理论知, 在分配年终利润时, 应拿出 53.1% 用于引进高新技术人才和设备, 25.1% 给企业员工发奖金, 21.8% 用于扩建福利设施.

例 5.2.3 职称评审问题.现有一学校从事某专业教学和研究的三位讲师,参加评审副教授职务.但是只有一个名额,专业技术评审委员会一致认为,教学效果的重要性比科研成果稍强一些,但要比任现职年限明显高,科研成果的重要性强于任现职年限.通过对甲、乙、丙三位讲师的职称评审材料的认真审核,评委得出如下主要信息:

- (1)任现职年限.甲、乙、丙分别为5年、6年、8年;
- (2)教学效果.乙比甲突出,丙比甲明显高而比乙稍高;
- (3)科研成果.乙、丙相当,比甲稍低.

试问这三名教师中,谁的职称应该得到晋升(见图 5.2.3).

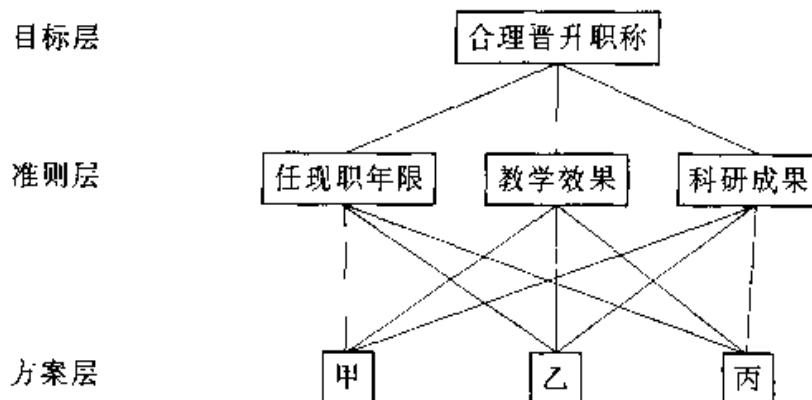


图 5.2.3

由已知条件可得第二层对第一层的成对比较矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

用同样的方法构造第三层对第二层的每一个准则的成对比较阵.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ 5 & 1 & \frac{1}{3} \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

可以计算出这些矩阵的最大特征值及归一化的特征向量并检验一致性,并计算出各方案对目标层的层次总排序权向量 $w=(w_1, w_2, w_3)^T$. (请参照例 5.2.1 得出计算结果,并作出结论.)

由层次分析法的理论知,总排序中得分多的教师的职称应该得到晋升.

例 5.2.4 城市能源供应系统改造方案的比较. 某市能源供应方面存在着设施落后、供应分散、利用率低、污染严重等问题. 经有关部门分析,可供选择的改造方案有:

P_1 : 制作高效煤制品, 取代目前居民用的普通蜂窝煤;

P_2 : 将分散供热方式改造为区域供热;

P_3 : 建造热电联供设施, 利用电厂余热;

P_4 : 实现城市煤气化;

P_5 : 郊县推广沼气池, 作为农村主要生活能源.

这些措施在节约能源、降低污染等方面的效果, 及在投资、原有设施闲置等方面的代价各不相同. 为了综合考虑各种因素, 确定这些方案的优劣, 应该以效益和代价为两个目标, 建立两个层次的结构模型, 得到两个用组合得分向量表示的这些方案的排序结果, 然后再作效益和代价的综合判断.

在以效益为目标的层次结构中主要考虑 3 个准则:

C_1 : 节约能源;

C_2 : 降低污染以改善环境质量;

C_3 : 社会效益, 指由于改变能源利用方式引起的方便生活、节约时间、降低劳动强度等益处, 如图 5.2.4 所示.

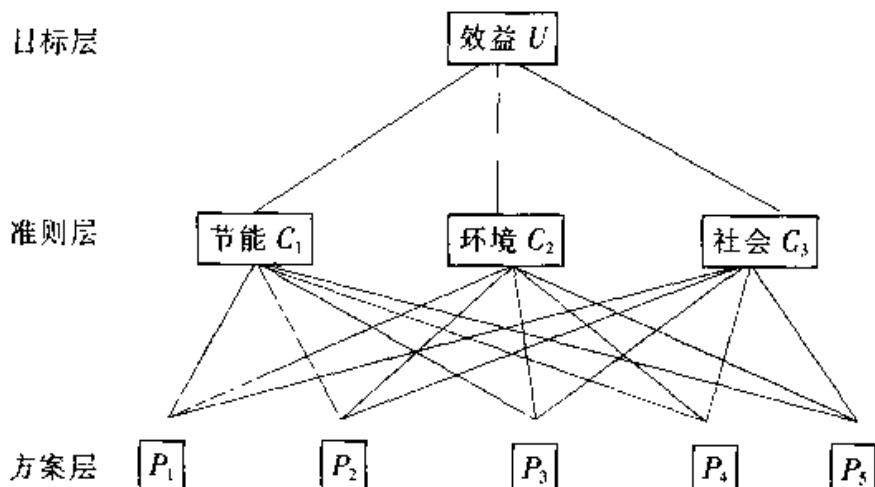


图 5.2.4

某市根据具体情况给出了所需要的成对比较阵(略), 由此计算出的权向量、特征根 λ 、一致性指标 CI 、一致性比率 CR 及组合得分向量、组合一致性比率见表 5.2.2.

表 5.2.2

以效益 U 为 目 标 的 计 算 结 果

权向量 (C 对 U)		0.637 0	0.258 3	0.104 7	$\lambda = 3.038 5, CI = 0.019 3, CR = 0.033 2$
方案 P_i	准则 C_j	C_1	C_2	C_3	组合得分向量(P_i 对 U)
		0.097 9	0.091 5	0.136 8	
P_1		0.321 1	0.196 0	0.083 7	0.263 9
P_2		0.482 7	0.055 0	0.037 1	0.325 6
P_3		0.068 0	0.618 3	0.509 1	0.256 3
P_4		0.030 3	0.036 1	0.233 2	0.053 0
λ		5.301 0	5.310 5	5.092 0	
CI		0.075 3	0.077 6	0.023 0	
CR		0.067 2	0.069 3	0.020 5	0.096 1

在以代价为 目 标 的 层 次 结 构 中 主 要 考 虑 3 个 准 则：

D_1 ：投资，用建造生产单位能源设施所需资金来衡量；

D_2 ：设施闲置，指原有设施报废、拆除和改建所占用的资金；

D_3 ：社会因素，指新设施的选址、征地、能源分配及新技术推广的宣传教育等。如图 5.2.5 所示。

某市同样给出了所需要的成对比较阵(略)，由此计算出的权向量、特征根 λ 、一致性指标 CI、一致性比率 CR 及组合得分向量、组合一致性比率见表 5.2.3.

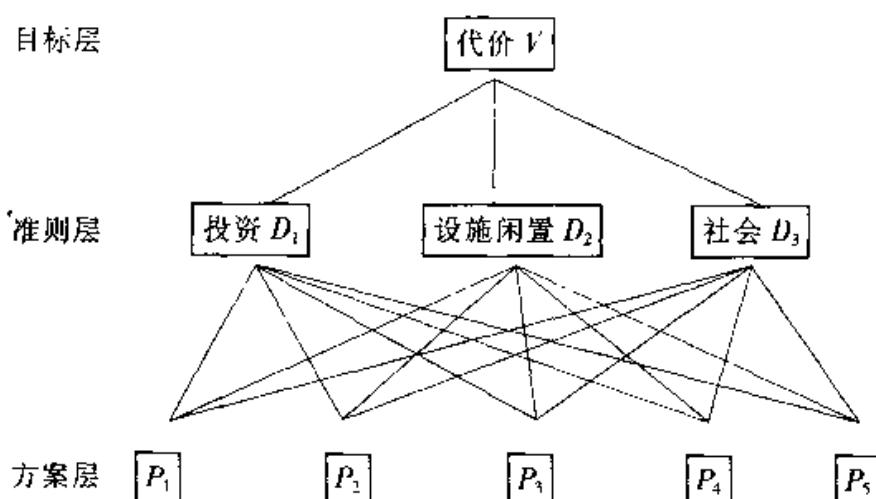


图 5.2.5

表 5.2.3

以代价为目标的计算结果

权向量 (D_i 对 V)		0.735 2	0.206 7	0.058 1	$\lambda = 3.117 1, CI = 0.058 5, CR = 0.100 9$
方案 P_i	准则 D_i	D_1	D_2	D_3	组合得分(P_i 对 V)
P_1		0.051 6	0.050 1	0.123 7	0.055 5
P_2		0.256 4	0.552 9	0.394 5	0.325 7
P_3		0.167 6	0.265 9	0.231 3	0.191 8
P_4		0.494 5	0.081 1	0.123 7	0.387 5
P_5		0.029 9	0.050 1	0.123 7	0.039 5
λ		5.290 8	5.099 6	5.011 0	
CI		0.072 7	0.024 9	0.002 5	
CR		0.064 9	0.022 2	0.002 2	0.153 3

从表 5.2.2 的组合得分向量可知, 热电联供 P_3 效益最高, 区域供热 P_2 和煤气化 P_4 处第 2、第 3 位; 而由表 5.2.3 知煤气化 P_4 和区域供热 P_2 代价最高, 煤制品 P_1 和沼气池 P_5 代价较低。如果简化地将综合指标规定为与效益成正比, 与代价成反比, 那么把两个组合权向量的对应分量相除, 再归一化可得综合得分为(0.287 7, 0.127 9, 0.268 1, 0.104 4, 0.211 9)。可见煤制品和热电联供的综合效果最好, 其中煤制品虽效益不太高, 但代价很低, 容易用较少的资金快速生效, 可优先实施, 若资金充足, 然后再上热电联供方案。

习题

1. 科技成果奖的合理评定。科技成果的涉及面很广, 种类繁多。这里指的是直接应用于国民经济的某个生产部门后, 可迅速转化为生产力, 能够带来可定量计算的经济效益的那一类成果。现有一些参评的科技成果, 试给出较为合理的评价准则。

2. 资源开发的综合判断。某发展中国家有 7 种可供开发的矿产资源: 铁、铜、磷酸盐、铀、铝、金、金刚石。它们开发后对国家经济发展的贡献可以通过两两比较得到。此外, 制定开发计划要考虑 6 个因素: 潜在经济价值, 开采费用, 风险, 需求, 战略重要性, 交通条件。综合判断要求既要给出各种资源在国家经济发展中的优先程度, 又要研究每种资源开发中各个因素的

相对重要性。

3. 职业选择。一个刚获得学位的大学毕业生面临工作岗位的选择，他将要考虑的准则有：能够发挥自己的特长为国家做贡献，丰厚的收入，适合个人的兴趣及发展，良好的声誉，人际关系，地理位置等。试问这些准则是否合适？如合适，试利用层次分析法确定选择工作的优先次序。

4. 国家实力分析。一个国家的综合实力主要包括：国民收入、军事力量、科技水平、社会稳定、对外贸易。试利用层次分析法对美国、俄罗斯、中国、英国、法国、日本、德国等大国的国家综合实力进行分析判断，这里的关键是确定合适的准则及进行实事求是的对比。

第 6 章

运筹学模型

运筹学模型是在实际问题的数学建模中应用最广泛的模型之一. 它涉及面广, 五花八门, 随着电子计算机科学的发展, 解决问题的范围越来越宽. 在数学上运筹学模型包括线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、网络、对策论等. 本章我们重点介绍线性规划模型、动态规划模型、对策论模型和决策分析模型.

第 6.1 节 线性规划模型

线性规划是运筹学的一个重要分支. 起源于工业生产组织管理的决策问题. 在数学上它用来确定多变量线性函数在变量满足线性约束下的最优值. 随着计算机的发展, 出现了单纯形法等有效算法, 从此线性规划在工农业、军事、交通运输、管理与规划、科学实验等领域中应用日趋广泛.

1. 引例

在生产管理和经营活动中经常提出一类问题, 即如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源, 以取得最好的经济效益.

例 6.1.1 若需在长为 4 000 毫米的圆钢上, 截出长为 698 毫米和 518 毫米两种毛坯, 问怎样截取才能使残料最少?

分析 可以先考虑两种“极端”的情况:

(1) 全部截出长为 698 毫米的甲件, 一共可截出大约 5 件, 残料长为

510 毫米。

(2) 全部截出长为 518 毫米的乙件, 一共可截出大约 7 件, 残料长为 374 毫米。

由此可以想到, 若将 x 个甲件和 y 个乙件搭配起来下料, 是否可能使残料减少?

目标是使 z (材料利用率) 尽可能地接近或等于 1 (尽可能地大)。

该问题可用数学模型表示为:

目标函数: $\max z$

满足约束条件: $\begin{cases} 698x + 518y \leq 4000 \\ x, y \text{ 为非负整数} \end{cases}$

例 6.1.2 某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品, 已知生产单位产品所需的设备台数及 A、B 两种原料的消耗, 如表 6.1.1 所示。

表 6.1.1

资源	产品		资源限量
	I	II	
设备	1	2	8(台)
原料 A	4	0	16(千克)
原料 B	0	4	12(千克)
单位利润	2	3	

该工厂每生产一件产品 I 可获利 2 元, 每生产一件产品 II 可获利 3 元, 问应如何安排生产计划使工厂获利最多?

这问题可以用以下的数学模型来描述: 设 x_1, x_2 分别表示在计划期内产品 I、II 的产量。因为设备的有效台数为 8 台, 这是一个限制产量的条件, 所以在确定 I、II 的产量时, 要考虑不超过设备的有效台数, 即可用不等式表示为:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

同理, 因原材料 A、B 的限量, 可以得到以下不等式:

$$4x_1 \leq 16, 4x_2 \leq 12$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下, 如何确定产量 x_1 ,

x_1 以得到最大的利润. 若用 z 表示利润, 这时 $z = 2x_1 + 3x_2$. 综上所述, 该计划问题可用数学模型表示为:

目标函数: $\max z = 2x_1 + 3x_2$,

$$\text{满足约束条件: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. 线性规划模型常用解法

(1) 图解法

图解法只适用于两个变量的简单线性规划问题. 这种解法比较简单, 也有助于几何直观地理解后面将要介绍的线性规划问题的单纯形法. 下面用例 6.1.2 的求解过程介绍图解法的步骤.

图解法的求解步骤如下.

1) 由全部约束条件作图求出可行域. 以 x_1 为横轴, x_2 为纵轴建立直角坐标系. 非负条件 $x_1, x_2 \geq 0$ 是指第一象限; 其他约束条件都代表一个半平面, 如约束条件 $x_1 + 2x_2 \leq 8$ 代表以直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 为边界的下半平面.

全部约束条件相应的各半平面的交集, 称为线性规划问题的可行域. 显然, 可行域内各点的坐标都满足全部约束条件, 都可作为这个线性规划问题的解(这里面包含要求的最优), 称为可行解. 图 6.1.1 中阴影区域即为可行域.

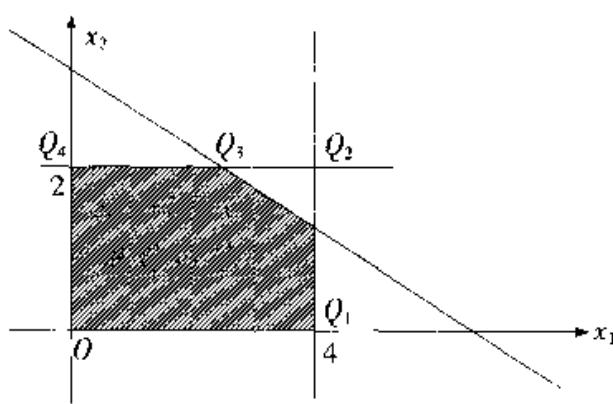


图 6.1.1

2) 作出一条目标函数的等值线. 在这个坐标平面上, 目标函数 $z =$

$2x_1 + 3x_2$ 表示以 z 为参数、 $-\frac{2}{3}$ 为斜率的一组平行线: $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$.

位于同一直线上的点, 具有相同的目标函数值, 因而称它为等值线.

3) 平移目标函数的等值线寻找最优点、算出最优解. 当 z 值由小变大时, 直线沿其法线方向向右上方平行移动. 当等值线向上移动到图 6.1.1 中可行域的顶点 $Q_2(4, 2)$ 时, 使 z 值在可行域的边界上(顶点处)实现最大化, 这就得到了本例的最优解 $x_1 = 4, x_2 = 2$, 目标函数最优值为 $z = 14$, 如图 6.1.2 所示.

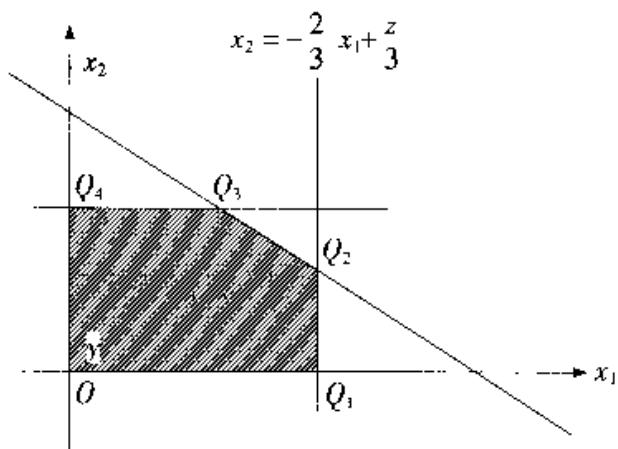


图 6.1.2

从图解法中可直观地看到, 当线性规划问题的可行域非空时, 若它是有界的凸多边形(或凸多面体), 则线性规划问题存在最优解, 而且它一定在可行域的某个顶点得到; 若在两个顶点同时得到最优解, 则它们连线上的任意点都是最优解, 即有无穷多最优解.

(2) 单纯形法

单纯形法是求解线性规划的一种有效的方法. 它的基本思想是根据线性规划的标准形, 先求得一个基可行解(顶点), 判断是否为问题的最优解或判断问题无解. 再转换另一个基可行解, 并使目标函数的值减少. 重复以上过程, 直到求得问题的最优解.

用单纯形法解线性规划模型的步骤:

第一步: 找出初始可行基, 建立初始单纯形表.

第二步: 判断最优, 检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = C_B B^{-1} P_j - C_j$.

①若所有的 $\sigma_j \geq 0$, 则基 B 为最优基, 相应的基可行解即为基本最优解, 停止计算.

2)若有某个 $\sigma_i < 0$, 它所对应的列向量的全部分量 $B^{-1}P_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})^T \leqslant 0$, 则该线性规划问题的目标函数值无上界, 即无界解, 停止计算.

3)若有某个负检验数 $\sigma_i < 0$ 所对应的列向量有正分量, 则基 B 不是最优基, 转第三步.

第三步: 换基迭代.

1)确定换入变量 x_i , 单纯形表中从左至右选择检验数为负的进基.

2)确定换出变量 x_j , 单纯形表中按最小比值原则从上至下选择变量出基.

再返回第二步.

在变量较多时利用单纯形法求最优解计算比较复杂, 我们可以利用数学软件进行求解, 具体应用方法见光盘附录.

3. 线性规划模型

例 6.1.3 某厂准备生产三种产品, 需消耗劳动力和原料两种资源, 其有关数据见表 6.1.2.

表 6.1.2

单位 消耗	产品			资源限 量
	A	B	C	
资源				
劳动力	6	3	5	45(单位)
原料	3	4	5	30(单位)
单位利润	3	1	5	

(1)利用单纯形法确定总利润最大的生产计划.

(2)分别求出劳动力和原料的影子价格. 若原料不够, 可到市场上购买, 市场价格为 0.8 元/单位. 问是否要购进, 最多可购进多少? 总利润增加多少?

(3)当产品 AC 的单位利润在何范围变化时, 最优生产计划不变?

(4)劳动力可减少多少而不改变原最优计划?

(5)电力的限制条件 $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 10$, 现需增加电力, 试求出新的最优生产方案.

解 (1)该问题的线性规划模型为:

$$\max Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} & \text{s.t.} \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 45 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 x_1, x_2, x_3 分别为产品 A、B、C 的产量.

用单纯形法迭代的最优表如表 6.1.3 所示.

表 6.1.3

$c_j \rightarrow$			3	1	5	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_1	15	3	-1	0	1	-1	
5	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	
Z			30	0	3	0	0	$\leftarrow \sigma_j$
0	x_1	15	3	-1	0	1	-1	
5	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	
Z			30	0	3	0	0	$\leftarrow \sigma_j$

因而最优生产计划为生产 A、B 产品均为 0, 生产 C 产品 $x_3 = 6$ 可使利润最大, 最大利润为 30.

(2) 劳动力和原料的影子价格分别为 0 和 1. 这说明在企业最优安排中, 劳动资源没有用完(实际用了 30 个单位), 而原料资源已耗尽. 若原料市场价格 0.8 元/单位 < 影子价格 1 元/单位, 因此应适量购进原料扩大生产.

设购进的原料数为 Δb_2 , 为保持最优基不变, 必须有 $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$, 而

$$B^{-1}\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 30 + \Delta b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - \Delta \\ 6 + \frac{1}{5}\Delta \end{pmatrix} \geq 0$$

解得 $-30 \leq \Delta b_2 \leq 15$

因而最多可购进原料 15 单位, 总利润增加:

$$C_B B^{-1}\tilde{b} - 30 = (0, 1) \begin{pmatrix} 45 \\ 30 + \Delta b_2 \end{pmatrix} - 30 = \Delta b_2 = 15 \text{ (单位)}$$

净利润增加: $15 - 0.8 \times 15 = 3$ (单位).

(3) 产品 A(x_1) 在最优方案中是非基变量, 设 c_1 变化为 $c_1 + \Delta c_1$, 则当

$\Delta c_1 \leqslant \sigma_1 = 0$ (σ_1 为 x_1 的检验数), 即当 $c_1 \leqslant 3$ 时, 原最优计划不变.

产品 $c(x_i)$ 在最优方案中是基变量, 设 c_3 变化为 $c_3 + \Delta c_3$, 要使最优计划不变, 则所有非基变量检验数应非负, 即:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_B B^{-1} - \tilde{C} \geqslant 0 \\ & (0, 5 + \Delta c_3) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = (3, 1, 5 + \Delta c_3, 0, 0) \\ & = \left(\frac{3}{5} \Delta c_3, 3 + \frac{4}{5} \Delta c_3, 0, 0, 1 + \frac{1}{5} \Delta c_3 \right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

即:

$$\begin{cases} \frac{3}{5} \Delta c_3 \geqslant 0 \\ 3 + \frac{4}{5} \Delta c_3 \geqslant 0 \Rightarrow \Delta c_3 \geqslant 0 \\ 1 + \frac{1}{5} \Delta c_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

因此当产品 C 的单位利润 $c_3 \geqslant 5$ 时, 最优计划不变.

(4) 设劳动力减少 Δb_1 , 即右边常数列变化为 $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 45 - \Delta b_1 \\ 30 \end{pmatrix}$, 为使最优计划不变, 则 $B^{-1} \tilde{b} \geqslant 0$, 即:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 45 - \Delta b_1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 - \Delta b_1 \\ 6 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

所以, $\Delta b_1 \leqslant 15$

即劳动力可减少 15 单位, 原最优计划不变 (实际上减去的是富余劳动力).

(5) 现行最优解 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 6$ 代入约束条件 $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 10$, 使约束条件不再成立, 因而最优解需改变.

加入松弛变量使新增约束化为等式 $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 10$, 将上述约束条件加入最优单纯形表中, 并迭代求解如表 6.1.4 所示.

调整后的最优生产方案为生产 A、B 产品仍为 0, C 产品为 $\frac{10}{3}$, 最大利润 $Z_{\max} = \frac{50}{3}$.

表 6.1.4

c_j								
C_B	X_B	b	3	-1	0	1	-1	0
	x_1	15	3	-1	0	1	-1	0
	x_2	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
	x_5	10	2	1	3	0	0	1
Z		30	0	3	0	0	1	0
	x_1	15	3	-1	0	1	-1	0
	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
	x_5	-8	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	$[-\frac{3}{5}]$	1
Z		30	0	3	0	0	1	0
	x_4	$\frac{85}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	0	$-\frac{5}{3}$
	x_3	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$
	x^*	$\frac{40}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	1	$\frac{5}{3}$
Z		$\frac{50}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$

第6.2节 动态规划模型

动态规划模型是动态规划运筹学的一个分支,它是解决多阶段决策过程最优化问题的一种数学方法。1951年美国数学家贝尔曼(R. Bellman),根据一类多阶段决策问题的特点,提出了解决这类问题的最优化原理,创建了解决最优化问题的一种新方法——动态规划。

1. 引例

例 6.2.1 最短路线问题。如图 6.2.1 所示,从 A_0 地要铺一条管道到 A_6 地,中间必须经过 5 个中间站。第一站可以在 A_1, B_1 中任选一个,类似地,第二、第三、第四、第五站可供选择的地点分别是 $\{A_2, B_2, C_2\}$, $\{A_3, B_3, C_3\}$, $\{A_4, B_4, C_4\}$, $\{A_5, B_5\}$ 。其中连接两点的管道距离用图上两点连线上的数字来表示。现要选择一条从 A_0 到 A_6 的铺管线路,

使总距离最短.

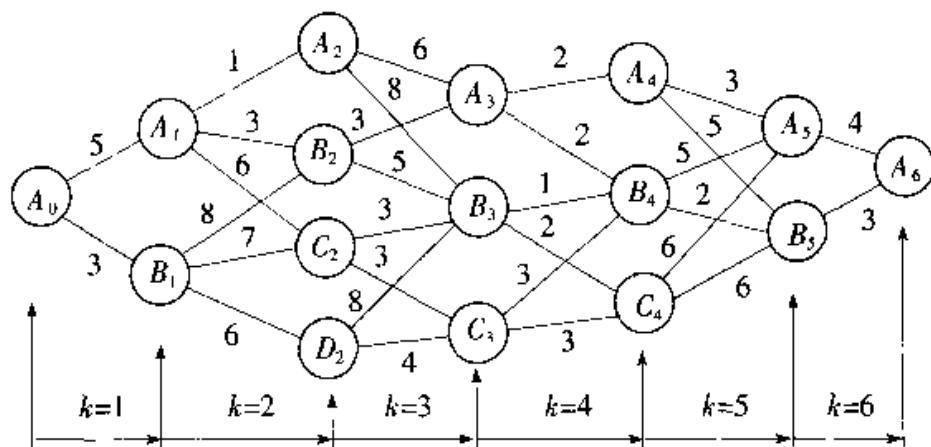


图 6.2.1

解 解决最短线路问题一般可用穷举法,即列出所有可能发生的方案和结果,再根据问题的要求对它们一一进行比较,求出最优方案.这种方法在变量的数目较小的时候是有效的;当变量数量很大时,计算的工作量将会很大.因此,动态规划问题一般要根据问题的特点去寻求算法.最短线路问题有一个特性,即如果最短线路在第 k 站通过 P_k 点,则这一线路在由 P_k 出发到达终点的那一部分线路,对于从点 P_k 到达终点的所有可能选择的不同线路来说,必定也是距离最短的.最短线路的这一特性,启发我们从最后一段开始,用从后向前逐步递推的方法,求出各点到 A_6 的最短线路.最后求得从 A_1 到 A_6 的最短线路.

$k=6$ 时:设 $f_6(A_i)$ 表示由 A_i 到 A_6 的最短距离, $f_6(B_i)$ 表示由 B_i 到 A_6 的最短距离.显然, $f_6(A_5)=4$, $f_6(B_5)=3$.

$k=5$ 时:(1)从 A_1 有两种选择,到 A_5 或 B_5 ,如果 $f_5(A_i)$ 表示由 A_i 到 A_6 的最短距离, $d_5(A_i, A_j)$ 表示 A_i 到 A_j 的距离, $u_5(A_i)$ 表示相应的选择或决策,则:

$$f_5(A_4) = \min \left\{ d_5(A_4, A_5) + f_6(A_5), d_5(A_4, B_5) + f_6(B_5) \right\} = \min \left\{ 3+4, 5+3 \right\} = 7$$

$u_5(A_4) = A_5$, 最短线路是 $A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$

(2)从 B_1 出发,也有两种选择,即到 A_5 或 B_5 . $f_5(B_i)$, $d_5(B_i, A_j)$, $d_5(B_i, B_j)$ 的定义与(1)类似,则:

$$f_5(B_4) = \min \left\{ d_5(B_4, A_5) + f_6(A_5), d_5(B_4, B_5) + f_6(B_5) \right\} = \min \left\{ 5+4, 2+3 \right\} = 5$$

$u_5(B_4)=B_5$, 最短线路是 $B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

(3) 从 C_4 出发, 同样有:

$$f_5(C_4) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_5(C_4, A_5) + f_6(A_5) \\ d_5(C_4, B_5) + f_6(B_5) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 6+4 \\ 6+3 \end{array} \right\} = 9$$

$u_5(C_4)=B_5$, 最短线路是 $C_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$k=4$ 时: 分别以 A_3, B_3, C_3 为出发点来计算, 则有:

$$f_4(A_3) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_4(A_3, A_4) + f_5(A_4) \\ d_4(A_3, B_4) + f_5(B_4) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2+5 \\ 2+5 \end{array} \right\} = 7$$

$u_4(A_3)=B_4$, 最短线路是 $A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$$f_4(B_3) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_4(B_3, B_4) + f_5(B_4) \\ d_4(B_3, C_4) + f_5(C_4) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1+5 \\ 2+6 \end{array} \right\} = 6$$

$u_4(B_3)=B_4$, 最短线路是 $B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$$f_4(C_3) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_4(C_3, B_4) + f_5(B_4) \\ d_4(C_3, C_4) + f_5(C_4) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 3+5 \\ 3+9 \end{array} \right\} = 8$$

$u_4(C_3)=B_4$, 最短线路是 $C_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$k=3$ 时: 分别以 A_2, B_2, C_2, D_2 为出发点来计算, 则有:

$$f_3(A_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_3(A_2, A_3) + f_4(A_3) \\ d_3(A_2, B_3) + f_4(B_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 6+7 \\ 8+6 \end{array} \right\} = 13$$

$u_3(A_2)=A_3$, 最短线路是 $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$$f_3(B_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_3(B_2, A_3) + f_4(A_3) \\ d_3(B_2, B_3) + f_4(B_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 3+7 \\ 5+6 \end{array} \right\} = 10$$

$u_3(B_2)=A_3$, 最短线路是 $B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$$f_3(C_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_3(C_2, A_3) + f_4(A_3) \\ d_3(C_2, B_3) + f_4(B_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 3+6 \\ 3+8 \end{array} \right\} = 9$$

$u_3(C_2)=B_3$, 最短线路是 $C_2 \rightarrow B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$$f_3(D_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_3(D_2, B_3) + f_4(B_3) \\ d_3(D_2, C_3) + f_4(C_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 8+6 \\ 4+8 \end{array} \right\} = 12$$

$u_3(D_2)=C_3$, 最短线路是 $D_2 \rightarrow C_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$k=2$ 时: 分别以 A_1, B_1 为出发点来计算, 则有:

$$f_2(A_1) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_2(A_1, A_2) + f_3(A_2) \\ d_2(A_1, B_2) + f_3(B_2) \\ d_2(A_1, C_2) + f_3(C_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1+13 \\ 3+10 \\ 6+9 \end{array} \right\} = 13$$

$u_1(A_1) = B_1$, 最短线路是 $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$$f_2(B_1) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_2(B_1, B_2) + f_1(B_2) \\ d_2(B_1, C_2) + f_1(C_2) \\ d_2(B_1, D_2) + f_1(D_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} (8+10) \\ 7+9 \\ (6+12) \end{array} \right\} = 16$$

$u_2(B_1) = C_2$, 最短线路是 $B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$

$k=1$ 时: 出发点只有 A_0 , 此时:

$$f_1(A_0) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_1(A_0, A_1) + f_0(A_1) \\ d_1(A_0, B_1) + f_0(B_1) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 5+13 \\ 3+16 \end{array} \right\} = 18$$

$u_1(A_0) = A_1$, 最短线路是 $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$. 短距离为 18, 本例直观地揭示了动态规划的基本思想.

2. 动态规划模型的基本概念和基本方程

动态系统的特征是其中包含有随着时间或空间变化的因素和变量. 系统在某个时点的状态, 往往要依某种形式受到过去某些决策的影响, 而系统的当前状态和决策又会影响系统今后的发展. 因此在寻求动态系统最优化时, 重要的是不能从眼前的局部利益出发, 进行决策, 而需要从系统所经过的整个期间的总效应出发, 有预见性地进行动态决策, 找到不同时点的最优决策以及整个过程的最优策略.

将时点作为变量的决策问题称为动态决策问题. 在动态决策中, 系统所处的状态和时点都是进行决策的重要因素, 即需要在系统发展过程中的不同时点, 根据系统所处的状态, 不断地作出决策. 因此, 多次决策是动态决策的基本特点.

(1) 动态规划的基本概念

1) 阶段变量. 用动态规划求解多阶段决策系统问题时, 要根据具体情况, 将系统适当地分成若干个阶段, 以便分阶段决策. 通常阶段是按照决策进行的时间或空间上的先后顺序划分的, 描述阶段的变量称为阶段变量, 记为 k . 例 6.2.1 分六个阶段, 是一个六阶段的决策过程, 即从过程开始到结束需要依次进行六次决策. 例中由系统的最后阶段向初始阶段求最优解的过程, 称为动态规划的逆推解法.

2) 状态和状态变量. 状态表示系统在某阶段所处的起点位置或状态. 上例中第一阶段有一个起点(状态), 即 A_0 ; 第二阶段有二个起点(状态), 即 A_1, B_1, \dots 各阶段的状态都可用状态变量来描述. 阶段 k 的状态变量

记为 x_k , 第 k 阶段所有可能状态的全体, 可用状态集合 X_k 来描述. 上例中 $X_1 = \{A_0\}$, $X_2 = \{A_1, B_1\}$, ……

3) 决策与决策变量. 从每一阶段的每个状态出发, 到达下一阶段, 都有若干种选择. 如例 6.2.1 中, 从第二阶段的状态 B_1 出发, 有三种选择, 到 B_2 或 C_2 或 D_2 . 一般地说, 把过程从一个状态演变到下一阶段某一状态所作的选择或决定称为决策. 描述决策的变量称为决策变量, 如例 6.2.1 中, 在第 k 阶段用 $u_k(x_k)$ 表示在状态 x_k 时的决策变量.

4) 策略. 由每阶段的决策组成的决策序列 $u_k(x_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 称为全过程策略或称策略, 表示为 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. 由系统的第 k 阶段开始到终点的决策过程称为全过程的后部子过程, 相应的策略称为子策略, 表示为 $\{u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n\}$. 对于每一实际的多阶段决策过程, 可供选取的策略有一定的范围限制, 这个范围称为允许策略集合. 允许策略集合中达到最优效果的策略称为最优策略.

如例 6.2.1 的最优策略为 $\{A_0, A_1, B_2, A_3, B_4, B_5, A_6\}$.

5) 状态转移方程. 某一阶段的状态变量及决策变量取定后, 下一阶段的状态就随之而定. 设第 k 个阶段的状态变量为 x_k , 决策变量 $u_k(x_k)$, 则第 $k+1$ 个阶段的状态 x_{k+1} 用 $x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$ 表示从第 k 阶段到第 $k+1$ 阶段的状态转移规律, 故又称它为状态转移方程.

6) 阶段效益. 在多阶段决策过程中, 在阶段 k 的状态 x_k 执行决策 $u_k(x_k)$ 转到状态 x_{k+1} , 不仅带来系统状态的转移, 而且也必将对整个决策的结果或效益产生影响. 用 $d(x_k, u_k)$ 表示在第 k 阶段中, 从状态出发 x_k , 采取策略 $u_k(x_k)$, 转移到 x_{k+1} 的效益, 叫做阶段效益.

7) 最优策略与最效效益. 对于多阶段决策问题, 自然都存在很多策略, 而且每个策略都对应一种结果, 把这些结果统称为效益. 根据不同的实际问题, 效益可以是利润、距离、产量或资源的消耗量等. 显然, 一个多阶段决策问题的总效益(决策的目的)是各阶段效益的和. 使整体效益达到最优的策略, 称为最优策略; 相应于最优策略的整体效益称为最效效益.

8) 最优性原理. 对于无后效性的多阶段决策过程, 最优策略具有的基本性质是: 无论初始状态和初始决策如何, 对于前面的决策所造成的某个状态而言, 余下的决策必是最优子策略.

这里, 无后效性是指系统从某个阶段往后的发展, 完全由本阶段所处的状态及其往后的决策决定, 与系统以前的状态和决策无关. 即当前状态

就是过程往后发展的初始条件(未来与过去无关),动态规划必须满足无后效性.

最优化原理的含义就是,最优策略的任何一部分子策略,也是相应初始状态的最优策略.每个最优策略只能由最优子策略构成.显然,对子具有无后效性的多阶段决策过程而言,如果按照后部子过程最优的原则来求各阶段状态的最优决策,那么这样构成的最优决策序列或策略一定具有最优化原理所揭示的性质.

(2) 动态规划的基本方程及一般模型

建立动态规划模型,需要进行以下几方面的工作:

- 1) 正确选择阶段变量 k ;
- 2) 正确选择状态变量 x_k , 状态变量必须能正确描述整个过程的演变特性,又要满足无后效性的原则;
- 3) 正确选择决策变量 u_k ;
- 4) 列出状态转移方程: $x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$, 这里函数关系 T_k 因问题的不同而不同;
- 5) 列出动态规划基本方程.若 $f_k(x_k)$ 代表从 x_k ($k=n+1, n, \dots, 2, 1$) 出发的最优效益, $d_k(x_k, u_k)$ 代表从 x_k 到 x_{k+1} 的阶段效益,那么对于极小化问题:

$$f_k(x_k) = \min\{d_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}, k=n, n-1, \dots, 2, 1$$

称为动态规划基本方程.给出终端条件 $f_{n+1}(x_{n+1})$,即可由后向前逐步推出 $f_1(x_1)$,得到最优效益.整个递推关系可表示为:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(x_k) = \min\{d_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}, k=n, n-1, \dots, 2, 1 \\ \text{终端条件: } f_{n+1}(x_{n+1}) = \text{常数} \\ x_{k+1} = T_k(x_k, u_k) \end{array} \right.$$

该式就是动态规划模型.

3. 动态规划模型

例 6.2.2 人员分配问题.某科研项目由三个小组用不同的方法独立进行研究,它们失败的概率分别为 0.40, 0.60 和 0.80.为了减少三个小组都失败的可能性,现决定派两名高级专家参加这一科研项目.把这两名专家分配到各组后,各小组仍失败的概率见表 6.2.1,问如何分派这两名专家以使三个小组都失败的概率最小.

表 6.2.1

高级科学家人数	小 组		
	1	2	3
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

解 (1) 建立动态规划模型. 按小组数将问题划分为 3 个阶段, 阶段变量 $k=1, 2, 3$.

状态变量 x_k 表示第 k 阶段初可用于分配的科学家, $x_1=2$.

决策变量 u_k 表示第 k 阶段分配给第 k 小组的高级科学家人数.

允许决策集合: $d_k(x_k) = \{u_k | 0 \leq u_k \leq x_k, x_k \text{ 为整数}\}$.

阶段指标 $v_k(x_k, u_k)$ 表示第 k 小组失败的概率.

因而基本方程应采用乘积形式, 即:

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \min_{0 \leq u_k \leq x_k} \{v_k(x_k, u_k) \cdot f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_4(x_4) = 1 \end{cases}$$

(2) 采用逆序法求解.

当 $k=3$ 时,

$$\begin{cases} f_3(x_3) = \min_{0 \leq u_3 \leq x_3} \{v_3(x_3, u_3)\} \\ f_4(x_4) = 1 \end{cases}$$

因为 $x_4 = x_3 - u_3 = 0$, 所以, $x_3 = u_3$ (即尚未分配给第 1 和第 2 小组的全部分配给第 3 小组). 计算结果如表 6.2.2 所示.

表 6.2.2

x_3	u_3^*	$f_3(x_3)$
0	0	0.80
1	1	0.50
2	2	0.30

当 $k=2$ 时, $f_2(x_2) = \min_{0 \leq u_2 \leq x_2} \{v_2(x_2, u_2) \cdot f_3(x_3)\}$

计算结果如表 6.2.3 所示.

表 6.2.3

x_2	$f_2(x_2, u_2) = v_2(x_2, u_2) \cdot f_s(x_s)$			u_2^*	$f_2(x_2)$
	$u_2 = 0$	$u_2 = 1$	$u_2 = 2$		
0	0.48			0	0.48
1	0.30	0.32		0	0.30
2	0.18	0.20	0.16	2	0.16

当 $k=1$ 时,

$$f_1(x_1) = \min_{u_1' \in U_1} \{v_1(x_1, u_1) \cdot f_2(x_2)\}$$

计算结果如表 6.2.4 所示.

表 6.2.4

x_1	$f_1(x_1, u_1) = v_1(x_1, u_1) \cdot f_2(x_2)$			u_1^*	$f_1(x_1)$
	$u_1 = 0$	$u_1 = 1$	$u_1 = 2$		
2	0.064	0.060	0.072	1	0.060

由表 6.2.4 可知 $u_1^* = 1$, $f_1(x_1) = 0.060$, 由 $x_2 = 1$ 查表 6.2.3 可得 $u_2^* = 0$; 由 $x_2 = 1$ 查表 6.2.2 得 $u_3^* = 1$.

因而此问题的最优解为 $u_1^* = 1$, $u_2^* = 0$, $u_3^* = 1$. 即把两名高级科学家分派到第一和第二小组各一名, 可使 3 个小组都失败的概率减小到 0.060.

注 此问题还有一个更间接的方法, 将它化为最短路模型. 即将各阶段状态作为结点, 各小组失败的概率为弧线上的数据, 见图 6.2.2, 然后在图上用逆序法计算, 计算结果标于图上的方框内.

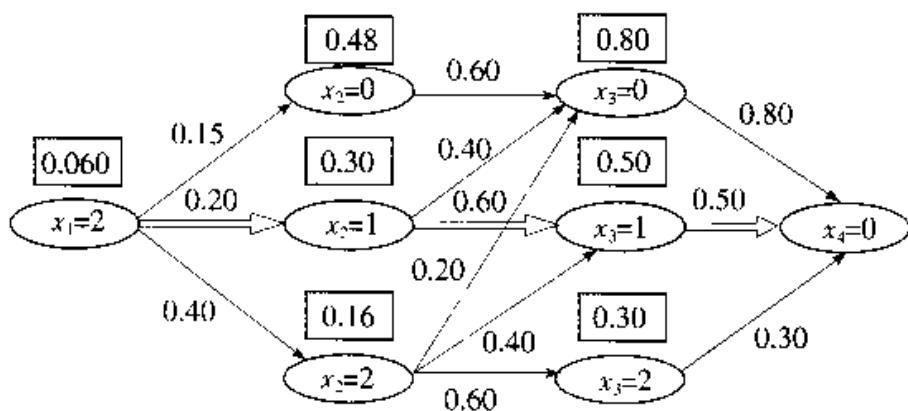


图 6.2.2

由图 6.2.2 可知, 整个项目失败的概率为 0.060, 最优路线为图中双线表示, 即

$x_1 = 2 \rightarrow x_2 = 1 \rightarrow x_3 = 1 \rightarrow x_4 = 0$, 由此同样得出最优解为 $u_1^* = 1, u_2^* = 0, u_3^* = 1$.

同时应注意到, 所有与之类似的 n 维资源分配(离散性)均可化为最短路问题来求解. 一般地在图上用逆序法求解较简便.

例 6.2.3 最大收益问题. 设现有两种原料数量各为 3 单位, 先要将这两种原料分配用于生产 3 种产品. 如果第一种原料数量 x_j 单位用于生产第 j 种产品 ($j=1, 2, 3$), 所得的收入 $g_j(x_j, y_j)$ 如表 6.2.5 所示, 问应如何分配这两种原料用于 3 种产品的生产, 使总收入最大?

表 6.2.5

		$g_1(x, y)$				$g_2(x, y)$				$g_3(x, y)$				
		0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	
x	y	0	0	1	3	6	0	2	1	6	0	3	5	8
		0	4	5	6	7	1	4	6	7	2	5	7	9
1		5	6	7	8	4	6	8	9	4	7	9	11	
2		6	7	8	9	6	8	10	11	6	9	11	13	

解 (1) 建立动态规划模型. 阶段变量 k , 将两种原料分配用于生产每一种产品看成一个阶段, 则可将问题划分为 3 个阶段, 即 $k=1, 2, 3$.

状态变量 (s_k, u_k) , s_k 表示第 k 阶段初至第 3 阶段可用于分配的第一种原料数量, u_k 表示第 k 阶段初至第 3 阶段可用于分配的第二种原料数量.

决策变量 (x_k, y_k) , x_k, y_k 分别表示第一种、第二种原料的数量用于第 k 阶段分配给第 k 种产品进行生产, x_k, y_k 取整数. 状态转移方程 $s_{k+1} = s_k - x_k, u_{k+1} = u_k - y_k$.

* 阶段指标 $g_k(x_k, y_k)$ 表示第一种、第二种原料的数量用于第 k 阶段分配给第 k 种产品进行生产, 分别为 x_k, y_k 所获得的收入.

基本递推方程为:

$$\begin{cases} f_k(s_k, u_k) = \max_{\substack{0 \leq x_k \leq s_k \\ 0 \leq y_k \leq u_k}} \{ g_k(x_k, y_k) + f_{k-1}(s_{k-1}, u_{k-1}) \}, k=3, 2, 1 \\ f_1(s_1, u_1) = 0 \end{cases}$$

(2)用逆序算法求解.

当 $k=3$ 时,

$$f_3(s_3, u_3) = \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq s_3 \\ 0 \leq y_3 \leq u_3}} \{g_3(x_3, y_3)\}$$

而 $s_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $u_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$, 故 $f_3(s_3, u_3)$ 即为表 6.2.5 中的 $g_3(x, y)$

当 $k=2$ 时,

$$f_2(s_2, u_2) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq s_2 \\ 0 \leq y_2 \leq u_2}} \{g_2(x_2, y_2) + f_3(s_3, u_3)\}$$

而 $s_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $u_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, 所以 $x_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $y_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$

将 $f_2(s_2, u_2)$ 的计算结果和相应的最优决策 (x_2^*, y_2^*) 分别列于表 6.2.6 和表 6.2.7 中.

表 6.2.6

$f_2(s_2, u_2)$	0	1	2	3
s_2				
0	0	3	5	8
1	2	5	7	9
2	4	7	9	12
3	6	9	11	14

表 6.2.7

(x_2^*, y_2^*)	0	1	2	3
s_2				
0	(0,0)	(0,0), (0,1)	(0,0), (0,1)	(0,0)
1	(0,0)	(0,0)	(0,0), (0,1) (1,1)	(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)
2	(0,0), (2,0)	(0,0), (2,0)	(1,1), (2,0), (2,1)	(2,0)
3	(0,0), (2,0), (3,0)	(0,0), (2,0) (3,0)	(0,0), (0,1), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)	(3,0)

例如计算 $f_2(2,1)$:

$$\begin{aligned}
 f_2(2,1) &= \max_{\substack{x_2=0,1,2,3 \\ y_2=0,1,2,3}} \{g_2(x_2, y_2) + f_3(2-x_2, 1-y_2)\} \\
 &= \max[g_2(0,0) + f_3(2,1), g_2(1,0) + f_3(1,1), g_2(2,0) \\
 &\quad + f_3(0,1), g_2(0,1) + f_3(2,0), g_2(1,1) + f_3(1,0), \\
 &\quad g_2(2,1) + f_3(0,0)] \\
 &= \max[0+7, 1+5, 4+3, 2+4, 4+2, 6+0] = 7
 \end{aligned}$$

故相应的最优决策为 $(x_2^*, y_2^*) = [(0,0), (2,0)]$, 其余类推.

当 $k=1$ 时,

$$f_1(s_1, u_1) = \max_{\substack{x_1=0,1,2,3 \\ y_1=0,1,2,3}} \{g_1(x_1, y_1) + f_2(s_1 - x_1, u_1 - y_1)\}$$

而 $s_1 = u_1 = 3$, 计算结果如表 6.2.8 所示.

表 6.2.8

y_1	0	1	2	3	
x_1	0	14	14	12	12
	1	16	14	13	11
	2	14	13	12	10
	3	14	12	11	9

由表 6.2.8 可知, $f_1(s_1, u_1) = 16$, 最优决策 $(x_1^*, y_1^*) = (1, 0)$. 即分配给第一种产品的第 1 种原料为 $x_1^* = 1$, 留下为 $s_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$; 第 2 种原料为 $y_1^* = 0$, 留下为 $3 - 0 = 3$. 再从表 6.2.7 得知 $(x_2^*, y_2^*) = (2, 0)$, 即分配给第二种产品的第 1 种原料为 $x_2^* = 2$, 留下为 $2 - 2 = 0$, 第 2 种原料为 $y_2^* = 0$, 留下仍为 $3 - 0 = 3$, 故分配给第三种产品的第 1 种原料为 $x_3^* = 0$, 第 2 种原料为 $y_3^* = 3$.

所以最优决策为 $x_1^* = 1, y_1^* = 0; x_2^* = 2, y_2^* = 0; x_3^* = 0, y_3^* = 3$, 最大总收入为 $f_3(3, 3) = 16$.

例 6.2.4 生产与库存最优问题. 设某工厂调查了解市场情况, 估计在今后四个时期市场对产品的需求见表 6.2.9.

表 6.2.9

时期	1	2	3	4
需求量	2	3	2	4

假定不论在任何时期,生产每批产品的固定成本费为3(万元),若不生产,则为零.每单位生产成本费为1(万元).同时任何一个时期生产能力所允许的最大生产批量为不超过6个单位.又设每时期的每个单位产品库存费为0.5(万元),同时规定在第一期期初及第四期期末均无产品库存.试问,该厂如何安排各个时期的生产与库存,才能使所花的总成本费用最低?

解 (1)建立动态规划模型.划分为四个阶段,阶段变量 $k=1,2,3,4$,即状态变量 s_k 表示第 k 阶段末的库存量,由已知得 $s_4=0$.

决策变量 x_k 表示第 k 阶段的生产量; d_k 表示第 k 阶段的需求量.状态转移方程:

$$s_{k+1} = s_k + x_k - d_k$$

阶段指标函数 $v_k(s_k, x_k)$ 表示第 k 阶段的总成本,它由两部分构成.一部分是第 k 阶段的生产成本 $c_k(x_k)$,另一部分是第 k 阶段的存储费 $h_k(s_k)$.

$$\text{由已知可得 } c_k(x_k) = \begin{cases} 0, & x_k = 0 \\ 3 + x_k, & x_k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \infty, & x_k > 6 \end{cases}$$

$$h_k(s_k) = 0.5s_k$$

因此 $v_k(s_k, x_k) = c_k(x_k) + h_k(s_k)$

$$\text{基本方程为 } \begin{cases} f_k(s_k) = \min_{0 \leq x_k \leq \sigma_k} \{v_k(s_k, x_k) + f_{k-1}(s_{k-1})\}, & k=1, 2, 3, 4 \\ f_0(s_0) = 0, & \sigma_k = \min(s_k + d_k, 6) \end{cases}$$

(2)用动态规划的顺序算法求解.

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } f_1(s_1) = \min_{x_1=0}^{x_1=6} \{c_1(x_1) + h_1(s_1)\}$$

$$\begin{aligned} \text{这时状态集合 } s_1 &= \{s_1 \mid 0 \leq s_1 \leq \min \left[\sum_{j=2}^4 d_j; 6 - d_1 \right], s_1 \text{ 为整数}\} \\ &= \{s_1 \mid 0 \leq s_1 \leq \min[9, 4], s_1 \text{ 为整数}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

各状态分别计算可得: $f_1(0)=5$,此时 $x_1=2$

$$f_1(1)=6.5, \text{此时 } x_1=3$$

$$f_1(2)=8, \text{此时 } x_1=4$$

$$f_1(3)=9.5, \text{此时 } x_1=5$$

$$f_1(4)=11, \text{此时 } x_1=6$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, } f_2(s_2) = \min_{x_2=0}^{x_2=6} \{(c_2(x_2) + h_2(s_2)) + f_1(s_1)\}$$

$$\text{其中 } \sigma_2 = \min(s_2 + d_2, 6), s_1 = s_2 - x_2 + d_2$$

而状态集合 $s_2 = \{s_2 | 0 \leq s_2 \leq \min\left[\sum_{j=3}^4 d_j; 6 - d_2\right], s_2 \text{ 为整数}\}$
 $= \{s_2 | 0 \leq s_2 \leq \min[6, 6 - 3], s_2 \text{ 为整数}\} = \{0, 1, 2, 3\}$

各状态分别计算可得：

$$\begin{aligned} f_2(0) &= \min_{0 \leq x_2 \leq \sigma_2} \{c_2(x_2) + h_2(0) + f_1(3 - x_2)\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} c_2(0) + h_2(0) + f_1(3) \\ c_2(1) + h_2(0) + f_1(2) \\ c_2(2) + h_2(0) + f_1(1) \\ c_2(3) + h_2(0) + f_1(0) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 9.5 \\ 4 + 8 \\ 5 + 6.5 \\ 6 + 5 \end{array} \right\} = 9.5 \end{aligned}$$

此时 $x_2 = 0$

同理可得 $f_2(1) = 11.5$, 此时 $x_2 = 0$

$f_2(2) = 14$, 此时 $x_2 = 5$

$f_2(3) = 15.5$, 此时 $x_2 = 6$

注 计算 $f_2(2)$ 和 $f_2(3)$ 时, 需要用到 $f_1(5)$ 和 $f_1(6)$. 由于每个时期的生产批量为 6, 故 $f_1(5)$ 和 $f_1(6)$ 是没有意义的, 取 $f_1(5) = f_1(6) = \infty$, 其余类推.

当 $k=3$ 时, $f_3(s_3) = \min_{0 \leq x_3 \leq \sigma_3} \{c_3(x_3) + h_3(s_3) + f_2(s_2)\}$

其中 $\sigma_3 = \min\{s_3 + 2, 6\}$, $s_2 = s_3 - x_3 + d_3$

而状态集合 $s_2 = \{s_2 | 0 \leq s_2 \leq \min\left[\sum_{j=3}^4 d_j; 6 - d_2\right], s_2 \text{ 为整数}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

各状态分别计算可得：

$$f_3(0) = \min_{0 \leq x_3 \leq 2} \{c_3(x_3) + h_3(0) + f_2(2 - x_3)\} = 14, \text{ 此时 } x_3 = 0$$

$$f_3(1) = \min_{0 \leq x_3 \leq 3} \{c_3(x_3) + h_3(1) + f_2(3 - x_3)\} = 16, \text{ 此时 } x_3 = 0, 3$$

$$f_3(2) = \min_{0 \leq x_3 \leq 4} \{c_3(x_3) + h_3(2) + f_2(4 - x_3)\} = 17.5, \text{ 此时 } x_3 = 4$$

$$f_3(3) = \min_{0 \leq x_3 \leq 5} \{c_3(x_3) + h_3(3) + f_2(5 - x_3)\} = 19, \text{ 此时 } x_3 = 5$$

$$f_3(4) = \min_{0 \leq x_3 \leq 6} \{c_3(x_3) + h_3(4) + f_2(6 - x_3)\} = 20.5, \text{ 此时 } x_3 = 6$$

当 $k=4$ 时, 因为要求第四阶段末的库存量为 0, 所以 $s_4=0$.

故有 $f_4(0) = \min_{0 \leq x_4 \leq 4} \{c_4(x_4) + h_4(0) + f_3(4 - x_4)\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 20.5 \\ 4 + 19 \\ 5 + 17.5 \\ 6 + 16 \\ 7 + 14 \end{array} \right\} = 20.5$

此时, $x_4 = 0$

再代回求最优策略:由 $s_k = s_{k+1} + d_{k+1} - x_{k+1}$, 把 $x_4^* = 0, s_4 = 0$ 代入得 $s_3 = 4, x_3^* = 6$; 再把 $s_3 = 4, x_3^* = 6$ 代入又得 $s_2 = 0, x_2^* = 0$; 最后把 $s_2 = 0, x_2^* = 0$ 代入得 $s_1 = 3, x_1^* = 5$.

故最优生产策略为 $x_1^* = 5, x_2^* = 0, x_3^* = 6, x_4^* = 0$. 相应最小总成本为 20.5 万元.

第 6.3 节 对策论模型

对策是决策者在竞争场合下的决策. 对策现象一般都包含有三个基本因素:(1)局中人(选手):在竞争中有权制定方案(策略),并与对策结局有利害关系的参加者;(2)策略:在对策中,局中人制定的完整行动方案;(3)竞争结局:一局对策结束后的得失. 对策有静态对策和动态对策之分,我们只讨论静态对策. 静态对策又分为零和对策和非零和对策. 如果在一结局下,全体局中人得失总和为零,则称为零和对策,否则称为非零和对策. 零和对策是一类完全对抗、强烈竞争的对策,诸如赌博、战争等之中的竞争中所施行的对策;非零和对策是一类既有对抗又可以有联合的缓和竞争的对策.

1. 对策论的基本概念

(1) 局中人

局中人也叫对手,是对策中有权决定自己行动方案的参加者,个数至少是 2,个人或者集体都可作为局中人,有时也把大自然和人作为对策双方的局中人.

(2) 策略

策略是局中人在整个决策过程中针对一系列行动制定的一个完整方案.

(3) 得失

得失也叫支付或赢得,是一局对策的利害结果.

(4) 对策

也称“博弈”或“竞争”,记 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 为全体局中人; S_i 为局中人 i 的策略; $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ 称为局势; $H_i(s)$ 为在每一局势中局中人的得

失,也称赢得函数.称 $\Gamma = \langle I; \{s_i\}, i \in I; \{H_i(s)\}, i \in I \rangle$ 为一个对策,即对策由局中人、每个局中人的策略以及依赖于局势的赢得函数所确定.

(5) 零和对策与非零和对策

在任一种局势下,局中人的得失之和恒为零的对策,称为零和对策.相反的对策则称为非零和对策.

对于非零和对策,可虚增一局中人使其化为零和对策.

(6) 矩阵对策

也称“两人有限零和对策”,在这种对策中有两个局中人,一般用 $\Gamma = \langle S_1, S_2; A \rangle$ 表示.其中 S_1, S_2 分别表示局中人 I 与 II 的策略集, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 表示 I 的赢得矩阵.

设 $S_1 = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $S_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, A 的行数表示局中人 I 的策略个数, A 的列数表示局中人 II 的策略个数,元素 a_{ij} 表示局中人 I 选择策略 i 和局中人 II 选择策略 j 的结果后,局中人 I 的得失.

矩阵对策的线性规划解法:

任一矩阵对策 $\Gamma = \langle S_1, S_2; A \rangle$ 的解 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ 和 $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ 为下述两组不等式的解:

$$(1^\circ) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq v \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (2^\circ) \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq v \\ \sum_{i=1}^m y_i = 1 \\ y_j \geq 0 \end{cases}$$

其中 $v = V_{\Gamma^*}$.为此,作如下变换(不妨设 $v > 0$):

$$x'_i = \frac{x_i}{v}, y'_j = \frac{y_j}{v}$$

于是不等式组 (1°) 和 (2°) 等价于一对互为对偶的线性规划问题:

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^m x'_i \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1 \\ x'_i \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \max W = \sum_{j=1}^n y'_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j \leq 1 \\ y'_j \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\min Z = \sum_{i=1}^m x'_i$, 即为局中人 I 的期望赢得值,当 $v = \frac{1}{Z}$ 时达到最大,

$\max W = \sum_{j=1}^n y'_j$, 即为局中人Ⅱ的期望损失值, 当 $v = \frac{1}{W}$ 时达到最小.

2. 对策模型

例 6.3.1 零和对策问题. 甲、乙两家自行车生产厂都生产同类型的 B_1, B_2, B_3 型的自行车. 当甲厂生产 B_i 型产品时, 乙厂生产 B_j 型产品, 便构成一种所谓的市场竞争局势, 记为 (B_i, B_j) . 在局势 (B_i, B_j) 下的结局是甲厂的得失 a_{ij} . 显然, 当 i (或 j) = 1, 2, 3 时, 共有 9 种局势. 根据多年产品销售情况, 把甲厂在这 9 种局势下的得失状况用所谓得失矩阵(或称对策矩阵)表示为:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ -50 & 50 & -50 \\ -90 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

问: 甲厂选择生产何种型号的自行车较为稳妥?

解 (1) 问题分析. 由题意可以看出局中人: 甲厂和乙厂. 甲厂的策略集为 $S_1 = \{B_1, B_2, B_3\}$. 乙厂的策略集为 $S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$.

$$\text{甲厂的得失矩阵为: } A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ -50 & 50 & -50 \\ -90 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

并注意到乙厂的得失矩阵为 $-A$. 因此, 该对策问题的模型可用三元组表示为 $G = \langle S_1, S_2, A \rangle$, 如表 6.3.1 所示.

表 6.3.1

得 失		乙		
		B_1	B_2	B_3
甲	B_1	10	20	30
	B_2	-50	50	-50
		B_3	-90	-100
				100

可以看出, 局中人甲厂最大得利是 100, 要想达到这个目标, 它就得选择生产 B_3 型; 然而局中人乙厂也在考虑, 因为甲厂有生产 B_3 型产品的心灵状态, 要想使自己有较大的得利, 就得选择生产 B_2 型, 继而甲厂会想到乙厂可能生产 B_2 型, 于是也以生产 B_2 型来对付乙……

显然, 在对策过程中, 双方都在设法使各自的收入最大化. 因此, 要不

冒风险,都得从最坏处着想,去尽量争取最好的结果.这也是我们求解最优策略的正确思路.

(2)问题求解.就本问题而言,甲厂所有的最坏结果,即 A 中每一行的最小元素分别是 $10, -50, -100$. 在这些最坏结果中的最好结果是 10 ,因此,无论乙厂选取什么策略,甲厂只要选取生产 B_1 型的策略,就能保证收入不会小于 10 .

同理,对于乙厂来说,所有最坏结果,即 A 中每一列中最大的元素(也是乙厂损失最大的数)分别是 $10, 50, 100$. 在这些最坏的结果中,最好的结果(损失最小)也是 10 ,因此,无论甲厂选取哪种策略,只要乙厂选取生产 B_1 型的策略,就能保证其支出不大于 10 .

进一步可见,甲厂与乙厂在最坏情况下的最好结果绝对值相等(都是 10),那么我们就称“生产 B_1 ”是甲厂的最优策略,碰巧“生产 B_1 ”也是乙厂的最优策略. (B_1, B_1) 称为对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 的最优局势,甲厂在最优局势下,得利 10 (乙厂失利 10)称为对策 G 的值.此问题是零和对策问题,这里所说的最优策略也称稳妥策略.

例 6.3.2 混合策略问题.某小城市有两家超级市场相互竞争,超级市场 A 有三个广告策略,超级市场 B 也有三个广告策略.已经算出当双方采取不同的广告策略时, A 方所占市场份额增加的百分数如表 6.3.2 所示.

表 6.3.2

策略		B		
		1	2	3
A	1	3	0	2
	2	0	2	0
	3	2	-1	4

把此对策问题表示成一个线性规划模型,并用单纯形法求解此对策.

解 由 $\max \min_{ij} a_{ij} = 0, \min \max_{ij} a_{ij} = 2$, 知 $v > 0$.

先求 B 的最优策略,设 B 的最优策略为 (y'_1, y'_2, y'_3) , 对策值为 v , 并令 $y_1 = \frac{y'_1}{v}, y_2 = \frac{y'_2}{v}, y_3 = \frac{y'_3}{v}$, 则 B 问题的线性规划模型为:

$$\max W = y_1 + y_2 + y_3$$

随堂笔记

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3y_1 + 2y_3 \leq 1 \\ 2y_2 \leq 1 \\ 2y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

相应的单纯形表如表 6.3.3 所示.

表 6.3.3

初 始 表

Y_B	b	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3
s_1	1	[3]	0	2	1	0	0
s_2	1	0	-2	0	0	1	0
s_3	1	2	-1	4	0	0	1
W	0	-1	-1	-1	0	0	0
y_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
s_2	1	0	[2]	0	0	1	0
s_3	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1
W	$\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
y_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
y_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
s_3	$\frac{5}{6}$	0	0	$[\frac{8}{3}]$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
W	$\frac{5}{6}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
y_1	$\frac{1}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
y_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0
y_3	$\frac{5}{16}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$
W	$\frac{15}{16}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{8}$

因此, $V = \frac{16}{15}$.

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \frac{16}{15} \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16} \right)^T = \left(\frac{2}{15}, \frac{8}{15}, \frac{5}{15} \right)^T$$

A 的最优策略(对偶问题的最优解)为:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \frac{16}{15} \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{1}{8} \right)^T = \left(\frac{4}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{15} \right)^T$$

第6.4节 决策分析模型

人们在现实生活和实际工作中,为了达到预定的目标,面临着从多种行动方案中选择最优的或满意的行动方案的问题.决策就是选择最优的或满意的行动方案的过程.前面介绍的线性规划和动态规划等都是决策模型,但它们属于确定性的决策模型,即决策者所处的环境是已知的,决策的结果也是完全确定的,或者说,这类决策问题中的决策不受任何不确定因素的影响.然而,在大多数的实际决策问题中,不确定因素是不能完全忽略的.决策分析模型,就是在无法确定自然状态发生的概率或已知各自然状态发生的概率下确定最优或满意的行动方案,我们分别称为不确定性决策模型和风险决策模型.

1. 引例

例 6.4.1 农作物种植问题.某农场考虑是否提早种植某作物的决策问题.如果提早种,且不遇霜冻,则收入 45 万元;如遇霜冻,则收入仅 10 万元,遇霜冻的概率为 0.4.如果不提早种,又不遇霜冻,则收入 30 万元;如遇霜冻,但受灾轻,可收入 20 万元,遇霜冻的概率为 0.2.问如何决策,使农场收益最大?

首先对问题及其条件进行考察和分析.将问题的条件归纳为表 6.4.1.

表 6.4.1

方 案	不遇霜冻		遇霜冻	
	收益值(万元)	概率	收益值(万元)	概率
提早种	45	0.6	10	0.4
不提早种	30	0.8	20	0.2

从表 6.4.1 中容易看出,这类问题具有以下五项特点:

(1) 决策者具有明确的目标:获得最大收益(利润);

- (2) 存在着几种备选方案: a_1 提早种, a_2 不提早种;
- (3) 存在着几种自然状态: s_1 不遇霜冻, s_2 遇霜冻, 而且自然状态是决策者无法控制和选择的;
- (4) 今后将出现哪一种自然状态, 事先无法确切知道, 但是可以根据以前的资料和经验估计它们发生的概率, 常称为主观概率;
- (5) 每一种备选方案在各种自然状态下的结果——收益值, 可以预先估计.

具有这五个特点的决策问题就是风险决策问题. 如何对这类问题进行决策呢? 进行决策必须依据一定的准则, 比如我们利用收益期望值准则时, 该准则判别的方法是: 根据决策问题的条件, 计算每一方案的收益期望值(或损失期望值), 从中选取最大者(或最小者)为最优方案.

运用该准则于本案例, 通过计算得到, 提早种植方案的年期望收益为:

$$E(a_1) = 45 \times 0.6 + 10 \times 0.4 = 31(\text{万元})$$

不提早种植的年期望收益为:

$$E(a_2) = 30 \times 0.8 + 20 \times 0.2 = 28(\text{万元})$$

经比较知, $E(a_1) > E(a_2)$, 所以该准则给出“农场应该选择提早种植作物的方案 a_1 ”.

2. 决策问题的基本概念

(1) 决策问题的基本要素

决策问题的基本要素包括: 可能采取的行动方案 a , 影响决策的基本状态 s , 反映效果的收益函数 q , 指导行动的决策准则 f . 其关系为:

$$Opt(d) = f(a, s, q)$$

其中 d 为某决策下的决策值, q 为在状态 s 时决策人采用方案 a 的收益.

通常将 n 个状态 m 个方案产生的收益 q_{ij} 排列为如下矩阵:

$$Q = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \left[\begin{matrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

该矩阵称之为收益矩阵.

(2) 决策模型分类

1) 不确定性决策模型

决策者面临的决策问题因缺乏必要的、有可能出现的不同自然状态的信息而无法作出自然状态发生概率的判断,此类问题称之为不确定性决策模型,该决策模型求解准则有:

(a) 悲观准则:在此准则下,最优决策值 d^* 为小中取大,即 $d_{i0}^* = \max_{i,j} \{q_{ij}\}$,此时对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(b) 乐观准则: $d_{i0}^* = \max_{i,j} \{q_{ij}\}$, 此时对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(c) 适度乐观准则: $d_{i0}^* = \max_i \{\alpha \cdot \max_j q_{ij} + (1-\alpha) \min_j q_{ij}\}$, 其中 α 为抉择者依据经验判断为可能出现的最大收益确定的一个权重, $0 < \alpha < 1$, 此时对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(d) 后悔准则: $d_{i0}^* = \min_{i,j} \left\{ \max_{i',j} \{q_{i'j}\} - q_{ij} \right\}$, 此时对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(e) 等可能性准则: $d_{i0}^* = \max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{ij} \right\}$, 此时对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

2) 风险性决策模型

抉择者面临的决策问题具有各自然状态 s_i 发生的概率 $p(s_i)$,此类决策问题是风险性决策模型.

风险性决策模型的准则有:

(a) 最大可能准则: $d_{i0}^* = \max_i \{q_{it}\}$, 其中 t 满足 $p(s_t) = \max_j \{p(s_j)\}$, 对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(b) 期望收益准则: $d_{i0}^* = \max_i \left\{ \sum_j q_{ij} p(s_j) \right\}$, 对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(c) 期望损失准则: $d_{i0}^* = \max_i \left\{ \sum_j [\max_j \{q_{ij}\} - q_{ij}] \cdot p(s_j) \right\}$, 对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

(d) 后验期望准则: $d_{i0}^* = \max_i \left\{ \sum_j q_{ij} p(s_j | x) \right\}$, 其中

$$p(s_j | x) = \frac{p(s_j | x) \cdot p(s_j)}{\sum_k p(x | s_k) \cdot p(s_k)}$$

$p(s_j | x)$ 是在给定自然状态 s_j 下事件 x 发生的概率. 对应的方案 a_{i0} 为最优方案.

3. 决策分析模型

例 6.4.2 工厂建设方案问题. 某工厂有三种方案可供选择, 方案 a_1 是对原厂进行扩建; 方案 a_2 是对原厂进行技术改造; 方案 a_3 是建设新厂. 而未来市场可能出现滞销 s_1 、一般 s_2 和畅销 s_3 三种状态. 各个方案在每种状态下的利润见表 6.4.2.

表 6.4.2

利 润 方 案	状态		
	s_1	s_2	s_3
a_1	-4	13	13
a_2	4	7	8
a_3	-6	12	17

问该厂的经营者在以下五种方法下的最优决策方案为何:(1)悲观准则;(2)乐观准则;(3)适度乐观准则($\alpha=0.6$);(4)后悔值准则;(5)等可能性准则.

解 (1)据悲观准则有:

$$d_1 = \min\{-4, 13, 15\} = -4, d_2 = \min\{-4, 4, -6\} = 4, d_3 = \min\{-6, 12, 17\} = -6, d_4^* = \min\{4, 7, 8\} = 4$$

故方案 a_2 为最优决策方案.

(2)据乐观准则有:

$$d_1 = \max\{-4, 13, 15\} = 15, d_2 = \max\{4, 7, 8\} = 8, d_3 = \max\{-6, 12, 17\} = 17, d_4^* = \max\{15, 8, 17\} = 17.$$

故方案 a_3 为最优决策方案.

(3)据适度乐观准则有:

$$\max q_{1j} = \max\{-4, 13, 15\} = 15, \min q_{1j} = \min\{-4, 13, 15\} = -4$$

同理有 $\max q_{2j} = 8, \min q_{2j} = 4, \max q_{3j} = 17, \min q_{3j} = -6$

于是取权重 $\alpha=0.6$ 时有:

$$\begin{aligned} d_4^* &= \max\{0.6 \times 15 + 0.4 \times 4, 0.6 \times 8 + 0.4 \times 4, 0.6 \times 17 + 0.4 \times 6\} \\ &= \max\{7.4, 6.4, -1.38\} = 7.4 \end{aligned}$$

故 a_1 为最优决策方案.

(4)据后悔值原则有:

令 $b_{ij} = \max\{q_{ij}\} - q_{ij}$ 表示在状态 s_j 下, 采取方案 a_i 的后悔值, 则 b_{ij} 列表 6.4.3 如下.

表 6.4.3

		s_1	s_2	s_3
b	状态			
方案				
a_1		8	0	2
a_2		0	6	9
a_3		10	1	0

于是：

$$\max b_{1j} = \max\{8, 0, 2\} = 8, \max b_{2j} = \max\{0, 6, 9\} = 9, \max b_{3j} = \max\{10, 1, 0\} = 10, d_1^* = \min\{8, 9, 10\} = 8$$

故 a_1 为最优决策方案.

(5) 据等可能性准则有：

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 q_{ij} = \frac{1}{3} (-4 + 13 + 15) = 8$$

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 q_{2j} = \frac{1}{3} (4 + 7 + 8) = \frac{19}{3}$$

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 q_{3j} = \frac{1}{3} (-6 + 12 + 17) = \frac{23}{3}$$

于是 $d_1^* = \max\left\{8, \frac{19}{3}, \frac{23}{3}\right\} = 8$. 故 a_1 为最优决策方案.

例 6.4.3 机器零件检验问题. 某制造公司加工某种机器零件, 批量为 150 个. 经验表明每一批零件的不合格率 p 不是 0.05 就是 0.25. 且所加工的各批量中 p 等于 0.05 的概率是 0.8. 每批零件最后将被用来组装一个部件. 制造厂可以在组装前按每个零件 10 元的费用来检验一批中所有零件, 发现不合格品立即更换, 也可以不予检验就直接组装, 但发现不合格品后返工的费用是每个 100 元. 试在下列三个准则下作出最优方案(是检验还是不检验): (1) 最大可能准则; (2) 期望收益准则; (3) 期望损失准则.

工厂为慎重起见, 在进行决策前, 从一批零件中抽出一个进行初检, 然后据此零件是否合格来决定是否对该批零件进行检验, 试问: (1) 在初检合格时, 据后验准则, 最优方案为何? (2) 在初检为不合格时, 据后验准则, 最优方案为何?

解 用 s_1 表示状态 $\{p = 0.05\}$, s_2 表示状态 $\{p = 0.25\}$, a_1 表示方案“检验”, a_2 表示方案“不检验”. 于是依题意有如下收益矩阵和 $p(s_1) = 0.8, p(s_2) = 0.2$.

$$Q = \begin{matrix} s_1 & s_2 \\ a_1 & \begin{bmatrix} -1500 & -1500 \\ -750 & -3750 \end{bmatrix} \\ a_2 & \end{matrix}$$

(1) 据最大可能准则有:

$$p(s_1) = \max\{p(s_1), p(s_2)\} = p(s_1) = 0.8$$

$$d_2^* = \max\{-1500, -750\} = -750$$

故不检验为最佳方案.

(2) 据期望收益准则有:

$$d_1 = \sum_j q_{1j} \cdot p(s_j) = -1500 \times 0.8 + 1500 \times 0.2 = -1500$$

$$d_2 = \sum_j q_{2j} \cdot p(s_j) = -750 \times 0.8 + 3750 \times 0.2 = -1350$$

$$d_2^* = \max\{d_1, d_2\} = \max\{-1500, -1350\} = -1350$$

故不检验为最佳方案.

(3) 期望损失准则有后悔矩阵:

$$B = \begin{matrix} s_1 & s_2 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 750 & 0 \\ 0 & 2250 \end{bmatrix} \\ a_2 & \end{matrix}$$

$$\text{于是}, d_1 = \sum_j q_{1j} \cdot p(s_j) = 750 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = 600(\text{元})$$

$$d_2 = \sum_j q_{2j} \cdot p(s_j) = 0 \times 0.8 + 2250 \times 0.2 = 450(\text{元})$$

$$d_2^* = \min\{d_1, d_2\} = 450$$

故不检验为最优方案.

延续前面的记号并用 x_1 表示“初检合格”, x_2 表示“初检不合格”, 于是,

$$p(x_1 | s_1) = 0.95, p(x_2 | s_1) = 0.05, p(x_1 | s_2) = 0.75, p(x_2 | s_2) = 0.25$$

$$p(x_1) = p(x_1 | s_1) \cdot p(s_1) + p(x_1 | s_2) \cdot p(s_2)$$

$$= 0.95 \times 0.8 + 0.75 \times 0.2 = 0.91$$

$$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 0.09$$

(1) 由贝叶斯公式可求得:

$$p(s_1 | x_1) = \frac{p(x_1 | s_1) \cdot p(s_1)}{p(x_1)} = \frac{0.95 \times 0.8}{0.91} = 0.835$$

$$p(s_2 | x_1) = 1 - p(s_1 | x_1) = 0.165$$

于是由后验准则有:

$$d_1 = \sum_j q_{1j} p(s_j | x_1) = -1500 \times 0.835 + 1500 \times 0.165 = -1500$$

$$d_2 = \sum_j q_{2j} p(s_j | x_1) = -750 \times 0.835 - 3750 \times 0.165 = -1245$$

$$d_2^* = \max\{d_1, d_2\} = -1245$$

故不检验为最优方案。

(2) 由贝叶斯公式可求得：

$$p(s_1 | x_2) = \frac{p(x_2 | s_1) \cdot p(s_1)}{p(x_2)} = \frac{0.05 \times 0.8}{0.09} = 0.444$$

$$p(s_2 | x_2) = 1 - p(s_1 | x_2) = 0.556$$

于是由后验准则有：

$$d_1 = \sum_j q_{1j} p(s_j | x_2) = -1500 \times 0.444 - 1500 \times 0.556 = -1500$$

$$d_2 = \sum_j q_{2j} p(s_j | x_2) = -750 \times 0.444 - 3750 \times 0.556 = -2418$$

$$d_2^* = \max\{d_1, d_2\} = -1500$$

故检验为最优方案。

习题

1. 某房地产公司有水泥 100 单位,木材 160 单位和玻璃 400 单位,用以建造 A 型和 B 型住宅. 建一栋 A 型住宅需要水泥、木材、玻璃分别为 1,2,2 单位, 售价每栋 100 万元; 建一栋 B 型住宅需要水泥、木材、玻璃分别为 1,1,5 单位, 售价每栋 150 万元. 该公司如何安排两种住宅的建设,才能使总售价最大?

2. 某农场承包 100 亩地,但因土壤等自然条件不同,土地分为三类. 现要在三类土地上种植三种作物,各类土地的亩数,各类植物计划播种面积以及各种作物在各类土地上的亩产量如下表所示,问如何安排作物布局可使作物总产量最多?

土地种类 产量(千克/亩)	B_1	B_2	B_3
作物种类			
A_1	600	700	500
A_2	800	500	850
A_3	400	150	300
亩数	20	30	50

3. 某公司有 3 个工厂和 3 个客户,这 3 个工厂在下一时期将分别制造产品 3 000 件、5 000 件和 4 000 件. 公司答应卖给客户 1,2,3 的数量分别为

4 000件、3 000件、1 000件,客户₄想尽可能多地购买剩下的产品.工厂_i卖给客户_j的单位利润如下表所示.问如何安排生产和供应才能使总利润最大?

客户 利润		B_1	B_2	B_3	B_4
工厂					
A_1	15	13	12	14	
A_2	18	17	13	12	
A_3	13	10	9	10	

4. 某单位在5年内需使用一种机器,该种机器的年收入、年运行费及每年年初一次性更新重置的费用随机器的役龄变化如下表所示.该单位现有一台役龄为1年的旧机器,试制定最优更新计划,以使年内的总利润最大(不计5年期末时机器的残值).

机 龄	0	1	2	3	4	5
年收入	20	19	18	16	14	10
年运行费	1	4	6	6	9	10
更新费	25	27	30	32	35	36

5. 两个游戏者分别在纸上写{0,1,2}三个数字中的任一个,且不让对方知道.先让第一个人猜两人所写数字总和,再让第三个人猜,但规定第二个人猜的数不能与第一个人相同.猜中者赢得1分,否则得零分.试回答两个游戏者各有多少个纯策略.

6. A,B两家公司竞争性地推销产品,它们各控制市场的50%.最近这两家公司都改进了各自的产品,现在都准备发动新的广告宣传.如果这两家公司都不做广告,那么平分市场的局面将保持不变,但如果有一家公司发动一次强大的广告宣传,那么另一家公司将按比例地失去其一定数量的顾客.市场调查表明,有50%的潜在顾客可以通过电视广告争取到,有30%可通过报纸,其余的20%可通过无线电广播争取到.现每一家公司的目标是要选择最有利的宣传手段.问:(1)把这个问题表达成一个两人零和的对策,写出局中人A的赢得矩阵;(2)A,B两家公司的最优策

略各是什么?

7. 某公司设想增加一条新的生产线,这一设想的成功依赖于经济条件的好坏,下表中给出各种情况下的收益值.

		S	好	一般	坏
A					
新生产线	好	48 000	30 000	12 500	
	一般	35 700	22 000	18 000	

设决策者的乐观系数为 α ,试讨论 α 在何范围内,用适度乐观准则选取的最优决策方案为增加新的生产线.

8. 某厂生产一种易变质产品,每件成本 20 元,售价 60 元,每件售出可获利 40 元.如果当天剩余一件就要损失 20 元.市场以往的资料表明,日销售量及其概率如下表所示.

日销售量	100	110	120	130
概率	0.2	0.4	0.3	0.1

为使利润最大,现根据日销售量制定产品生产计划,试分别利用最大可能准则与期望收益准则确定最优生产计划.

9. 某公司正考虑为开发一种新型产品提供奖金.可供选择的方案有三个.前景有成功、部分成功与失败.成功的概率为 0.35,部分成功的概率为 0.45,失败的概率为 0.20,其利润如下表所示.

		S	成功	部分成功	失败
方案					
方案 1		20	3	-18	
方案 2		15	1	-10	
方案 3		10	0	-2	

试分别用期望收益准则与期望损失准则确定最优决策方案.

第 7 章

自动控制论模型

自动控制就是在没有人参与的情况下,通过控制器使被控制对象或过程自动地按照一定规律运行。导弹能够正确地命中目标,人造卫星能够按照预定的轨道运行并返回地面,宇宙飞船能准确地在月球着陆并重返地球,都是由于自动控制高速发展 的结果。下面讲一个我们身边 的实际例子。我们希望维持冰箱内的温度恒定不变,但由于冰箱内储存量的增减、开启或关闭冰箱门或外界温度的变化等,都会影响冰箱内的温度,因此要有控制装置对温度进行控制。

自动控制已渗透到现实生活的各个领域,而实际控制系统的设计又首先需要建立控制系统的数学模型(简称建模)。模型的准确与否直接影响所设计的控制系统质量。有时一个控制系统的早期研制及后期完善都是与建模分不开的。一般采用的系统分析方法为:

系统 → 数学模型 → 分析计算 → 系统

本章要讨论的主要内容就是如何从具体的控制问题中建立合理的数学模型以使问题得到较完善的解决。

第 7.1 节 在控制系统中创建数学模型

1. 模型的引出

不同的控制过程要实现的任务各不相同,但都有一个共同点,即要求

其中的某些物理量(如上述的速度、温度等)按照特定的规律变化。这些物理量称为被控制量或输出量。在现实世界中存在着各种阻碍上述要求实现的因素,这些因素称为扰动。凡是由外部作用引起的扰动,如外界温度的变化、风向风力的变化等称为外扰;由于内部元件特性变化引起的扰动称为内扰。为解决此矛盾就要采用控制装置,对生产机械或生产过程的这些物理量进行控制。被控制的生产机械或生产过程称为被控对象。创建与事实相符合的数学模型并使被控对象克服内扰、外扰并最终满足要求是本章讨论的主要内容。以下通过一个实际生活中的实例引出控制系统建模的概念。

2. 建模实例

例 某工厂要提高其产品的速度和精度,产品设备为一套步进链轮机构。步进式链轮传动机构主要由摆动气缸、棘轮、链轮链条等构成,其动作原理见图 7.1.1。图中 X_{k1-1} 、 X_{k1-2} 是分别装在摆动气缸上的限位开关。 X_{k1-3} 是装在链条下的与 X_{k1-2} 起同样原理作用的限位开关。

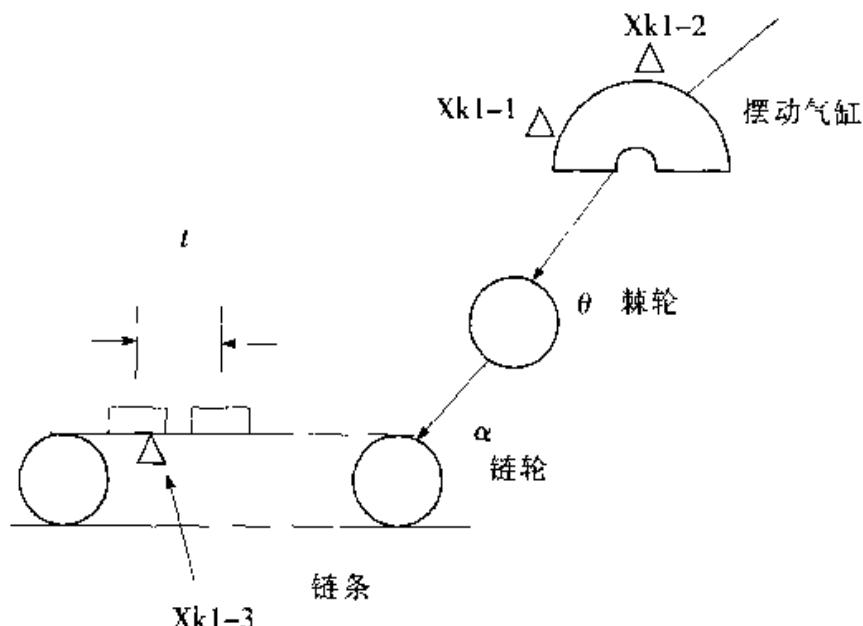


图 7.1.1 动作原理示意图

摆动气缸直接将气缸的作用力 P ,通过一个旋转叶片传送到输出轴上引起角度变化 θ ;棘轮把这个双向角转化成单向角 α ,也就是将摆动气缸的双向运动变化成单向的有功运动;链轮链条将 α 转换成步进移动 t 。由于该总体设备的各个环节均存在误差,我们希望最后的系统误差符合要求。

而将其中的每个环节都提高精度显然会增加大量成本,所以需要通过数学建模并进行误差分析找出合理的方案.

以下分析 $\theta(T)$ 、 $\alpha(T)$ 、 $t(T)$ (T 为总时长) 的特性曲线及数学函数表达式.

图 7.1.1 中的各点的理论特性曲线 $\theta(T)$ 、 $\alpha(T)$ 、 $t(T)$ 如图 7.1.2 所示.

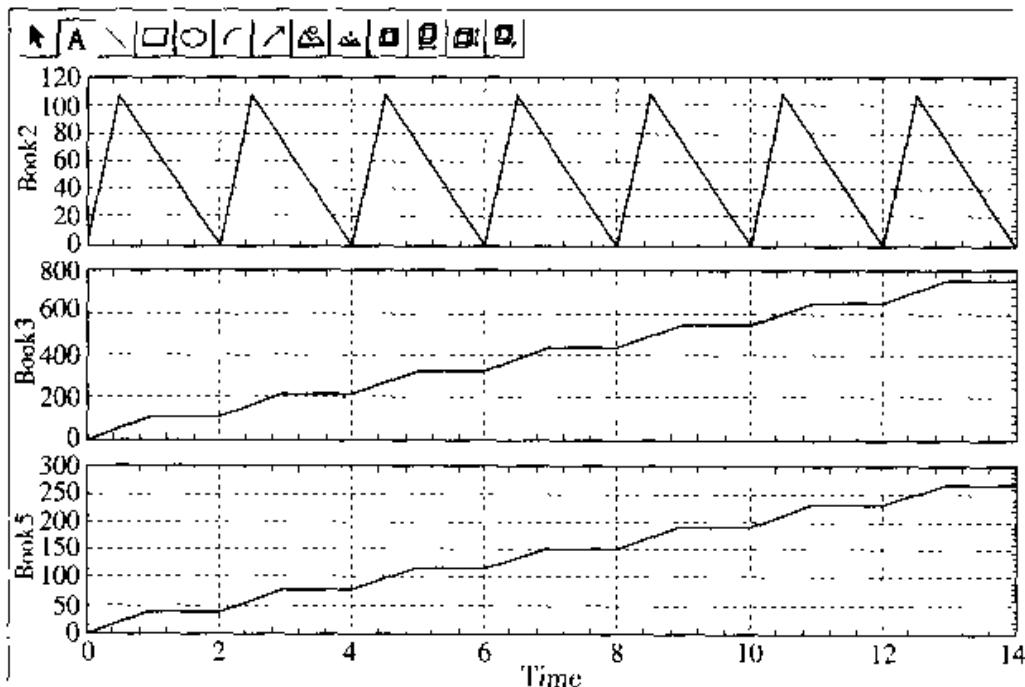


图 7.1.2 $\theta(T)$ 、 $\alpha(T)$ 、 $t(T)$ 的特性曲线

图 7.1.2 中第一条曲线表明摆动气缸输出轴的转角 $\theta(T)$ 的理想时间特性,它是以 2 秒为周期变化的周期函数(顺时针摆动至 108° 左右约耗时 0.5 秒时暂停,然后逆时针回到原来的位置(汽缸的工作原理是逆时针时(负号的来源)不做功,约耗时 1.5 秒) - 作者注),其函数表达式为:

$$\theta(T) = \begin{cases} 216(T-2k) \\ -72[T-2(k+1)] \end{cases}, k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.1.1)$$

图 7.1.2 中第二条曲线棘轮输出轴的转角 α 的理论时间特性,它是以 2 秒为采样周期的非周期离散函数,其数学表达式为:

$$\alpha(T) = \begin{cases} 216(T-3/2k) \\ 108(k+1) \end{cases}, k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.1.2)$$

图 7.1.2 中第三条曲线表明了链轮链条输出步长 $t(T)$ 的理论时间特

性,它也是以 2 秒为采样周期的非周期离散函数,其数学表达式为:

$$r(T) = \begin{cases} 76.8(T - 3/2k) \\ 108(k+1) \end{cases}, k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.1.3)$$

以上是将实际传动机构的一部分用数学表达式表示出来,此为建模的第一步.

事实上,以上机构中的汽缸并不能保证每次都严格摆动 108° ,会因为选型不同存在不同的误差,在以后的系统建模中会考虑这个问题.

有关这个问题的彻底解决方案将在以后的第 7.3 节中有进一步的探讨.

第 7.2 节 控制模型的基本理论简介

1. 控制系统的一般概念

自动控制原理是自动控制技术的基础理论,是一门理论性较强的工程学科.根据自动控制技术发展的不同阶段,自动控制理论目前一般可分为古典控制理论和现代控制理论两大部分.

古典控制理论,它的内容主要以传递函数为基础,研究单输入、单输出一类自动控制系统的分析和设计问题.这些理论由于其发展较早,现已臻成熟,在工程上也比较成功地解决了许多实践问题.

现代控制理论,是 20 世纪 60 年代在古典控制理论的基础上,随着科学技术发展和工程实践的需要而迅速发展起来的.它无论在数学工具、理论基础,还是在研究方法上都不是古典理论的简单延伸和推广,而是认识上的一次飞跃.现代控制理论主要以状态空间法为基础,研究多输入、多输出、变参数、非线性、高精度、高效能等控制系统的分析和设计问题.最优控制、最佳滤波、系统识别、自适应控制等都是这一领域研究的主要课题.特别是近年来由于电子计算机技术和现代应用数学研究的迅速发展,使现代控制理论又在研究庞大的系统工程的大系统理论和模仿人类智能活动的智能控制等方面有了重大发展.

2. 控制系统的数学模型

描述系统的动态特性的数学表达式称为系统的数学模型.它是分析和

设计系统的依据,一个控制系统构成的好坏,往往取决于被控对象动态特性估计的正确程度,正确建立系统的数学模型,是设计和分析系统的最重要步骤.

系统的数学模型有多种形式,在经典控制理论中,一般采用微分方程、传递函数、频率特性等,这些属于输入-输出模型.在现代控制理论中,采用状态空间模型,下面举例说明.

例 7.2.1 电系统. 图 7.2.1 所示的 R, L, C 串联电路中, 输入量为 $u_r(t)$, 输出量为 $u_c(t)$, 求该电路的微分方程.

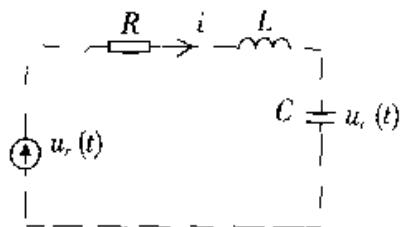


图 7.2.1 R, L, C 串联电路示意图

根据电路理论,可导出该电路的微分方程为:

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t) \quad (7.2.1)$$

(7.2.1)式称为该电路的输入输出模型. 它仅描述了输入 $u_r(t)$ 和输出 $u_c(t)$ 之间的动态关系,没有给出关于系统内部变量的信息,它对系统的描述是不完全的.

若取电容电压 u_c 及电流 i 为变量,可导出该电路的一阶微分方程组:

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{u_c}{L} - \frac{R}{L} i + \frac{u_r}{L}$$

令状态变量 $x_1 = u_c$, $x_2 = i$, 输入向量 $U = [u_r]$, 将上述一阶微分方程组写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} U$$

$$\text{或 } \dot{x} = Ax + Bu \quad (7.2.2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

式(7.2.2)是状态方程,它描述了系统内部状态变量之间、输入量与状态变量之间的关系.

输出量一般不等于状态变量,输出量与状态变量及输入量之间的关系用下述输出方程描述:

$$y = Cx + Du \quad (7.2.3)$$

本例中, $C = [1 \ 0]$, $D = 0$

状态方程和输出方程结合起来称为系统的动态方程或状态空间表达式. 动态方程不仅描述了系统内部状态变量之间的关系,还描述了输入量对状态变量的影响,以及输入量和状态变量对输出量的影响,构成了对系统动态特性的完全描述. 状态变量的选取不是惟一的,所以动态方程具有非惟一性.

同一个系统可以用不同的数学模型描述,这些数学模型之间也可以相互转换,采用哪种数学模型,取决于建立数学模型的目的和控制方法.

分析和设计系统时,必须建立合理的数学模型.一个合理的数学模型应当既能足够准确地反映系统的动态特性,又具有较简单的形式.

为了建立合理的数学模型,通常都进行一定的简化和线性化. 应当特别重视在建立数学模型的过程中所做的假设. 严格地说,实际系统都在不同程度上存在着非线性和分布参数特性,但如果这些参数对系统的影响不大时可将其忽略不计.

建立系统的数学模型有两种基本方法,即机理法和测试法. 机理法是根据系统内部的变化机理,如根据物理学定律、生物学和社会经济学的变化规律等,写出各种有关的运动方程,从而获得系统的数学模型. 测试法则是通过实验测取系统的输入输出数据,然后对这些数据进行处理,从而获得系统的数学模型.

例 7.2.2 自动平衡搜索车(单轴倒立摆)的数学模型. 在忽略了空气流动、各种摩擦之后,可将倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统,如图 7.2.2 所示.

我们不妨做以下假设:

M - 小车质量 0.5 千克;

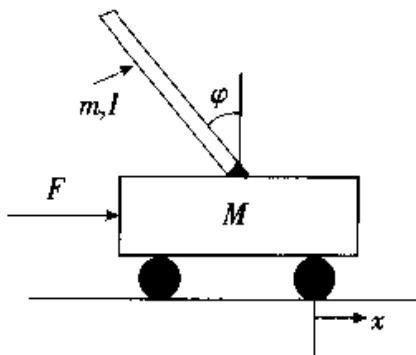


图 7.2.2 自动平衡搜索车(单轴倒立摆)示意图

m ——摆杆质量 0.2 千克;

b ——小车摩擦系数 0.1N/m/sec;

l ——摆杆转动轴心到杆质心的长度 0.3 米;

I ——摆杆惯量 0.006 千克·米²;

F ——加在小车上的力;

x ——小车位置;

φ ——摆杆与垂直向上方向的夹角;

θ ——摆杆与垂直向下方向的夹角(考虑到摆杆初始位置为竖直向下).

图 7.2.3 是系统中小车和摆杆的受力分析图. 其中, N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量.

注 在实际倒立摆系统中检测和执行装置的正负方向已经完全确定, 因而矢量方向定义如图, 图示方向为矢量正方向.

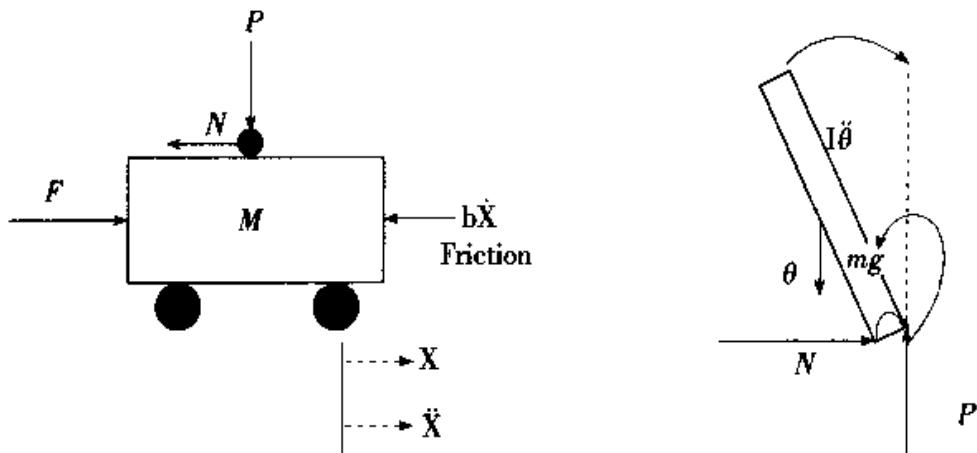


图 7.2.3 小车和摆杆的受力分析图

应用牛顿方法来建立系统的动力学方程过程如下.

分析小车水平方向所受的合力, 可以得到以下方程:

$$M\ddot{x} = F - bx - N$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式:

$$N = m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta)$$

即: $N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$

把这个等式代入上式中, 就得到系统的一个运动方程:

$$(M+m)\ddot{x} + b\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (7.2.4)$$

关于控制系统的更多知识请大家查阅有关的资料, 在此只将本书建模实例中用到的部分理论予以简单介绍, 即以下的 3 目、4 目、5 目.

3. 最优滤波

(1) 最优滤波

从量测到的或接收到的各种带有干扰的信号中取出有用信号的方法或技术称为滤波, 或称为信号滤波. 收音机的频率调谐就是按照需要的电台频率将信号从无线电波信号中取出来的一种信号滤波. 信号滤波普遍存在于通讯技术中, 一般一电路的形式具体体现在设备中. 这里要介绍的根据统计特性的规律, 将所需信号从含有干扰的量测中得出某种统计意义上误差性能最小, 亦即“最优”的信号估计, 一般称为最优滤波或最优估计. 根据不同的最优准则和估计方法, 有各种不同的最优滤波. 它有电路形式的滤波器, 但更一般的使用数学计算的方法来计算和估计出所需信号的数值, 如果说有滤波器, 指的就是用以计算的数学方程和实现方程解算的工具(如电子计算机).

(2) 最优滤波的发展过程

早在 1809 年, 高斯为了从量测数据中确定天体运行的轨道, 就提出了一种最早最优滤波方法, 称为最小二乘法. 虽然它的滤波性能较差, 但它具有不需要信号的验前统计知识这个突出优点, 所以至今尚在不少技术领域中使用. 20 世纪 40 年代, 维纳为了火力控制上的需要而提出一种线性最小方差滤波方法, 称为维纳滤波. 虽然这种方法充分利用了信号和量测值的统计特性, 但它仅适用于平稳随机信号, 而且最优滤波器在工程上很难实现, 因此, 这种滤波理论的实用价值受到一定限制. 1960 年出现的卡尔曼滤波也是一种最小方差滤波方法. 它不但考虑了信号与量测值

的基本统计特性(一、二阶统计特性),而且由于采用了状态空间的概念,用状态方程描述系统,信号作为状态,所以,它既能够估计平稳的标量信号随机过程,又能够估计非平稳的矢量信号随机过程.卡尔曼滤波的另一个特点是采用递推计算的方法.它不要求储存过去的量测值,只要根据当时的量测值和前一时刻的估计,按照一套递推公式,利用计算机这个现代计算工具,就可以实时地计算出所需信号的估计.因此,卡尔曼滤波又成为递推线性最小方差估计.图 7.2.4 概略地表示了卡尔曼滤波的工作原理.可以看出,卡尔曼滤波的对象是用状态方程描述的随机线性系统.它按照估计误差的方差最小的准则,从被量测噪声“污染”了的量测值中实际估计出系统的各个状态值.

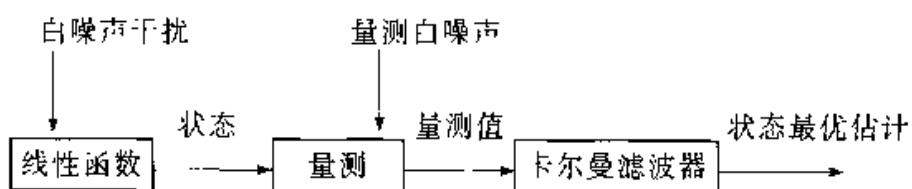


图 7.2.4 卡尔曼滤波原理示意图

卡尔曼滤波是根据概率论、数理统计和线性代数等数学理论发展起来的一门新兴技术,是现代控制工程中的一个重要方面.由于它具有能够估计非平稳的随机矢量过程,可以在计算机上实时计算,以及储存容量少等优点,因此一经提出,就很快在空间技术中(例如飞行器导航系统、导弹制导、测定人造卫星轨道和姿态以及火力控制等方面)得到了应用.20世纪70年代以来,卡尔曼滤波又在动力系统、工业生产的最优控制和气象预报等方面得到了推广应用.

(3) 最优滤波问题的分类

按量测值与被估计值的时间关系,最优滤波问题可分为三类,即最优滤波(或最优估计)、最优预测和最优平滑.

设 $X(t)$ 为被估计的随机矢量, $Z(t)$ 为量测随机矢量, 量测方程为:

$$Z(t) = H(X(t), V(t), t)$$

式中 $V(t)$ 为量测噪声矢量, $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是 $x(t)$ 、 $V(t)$ 和 t 的已知矢量函数. 最优滤波就是利用 t_0 到 t 过程中的量测值 $Z(\tau)$ ($t_0 < \tau \leq t$), 通过一个滤波器去估计 t' 时刻的 X 值, 使之在一定统计意义上估计 $\hat{X}(t'|t)$ 为最优. 如果 $t' = t$, 则这种滤波称为最优滤波或最优估计, $\hat{X}(t'|t)$ 称为 $X(t')$ 的最优滤波值或最优估计; 如果 $t' > t$, 则这种滤波称为最优预测; 如果 $t' <$

t , 则这种滤波称为最优平滑. 而最优滤波是这三种滤波的统称, 有时也表示其中的最优估计.

4. 传递函数

在电路理论中, 为研究电路对输入信号的响应, 采用拉普拉斯(Laplace)变换(简称拉氏变换法)求解微分方程. 通过拉氏变换, 将变量从实数 t 域(称为时域)映射到复数 s 域(称为复频域). 因此, 传递函数是复频域中的模型.

系统的微分方程如(7.2.1)(7.2.4)等可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} & a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y(t) + a_0 y(t) \\ & - b_m r^{(m)}(t) - b_{m-1} r^{(m-1)}(t) - \cdots - b_1 r(t) - b_0 r(t) \\ & n \geq m \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

式中: $y(t)$ — 系统输出;

$r(t)$ — 系统输入;

a_0, a_1, \dots, a_n 及 b_0, b_1, \dots, b_m — 由系统结构和参数决定的常数.

设初始条件为零:

$$\begin{aligned} y(0) = \dot{y}(0) = y^{(2)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \\ r(0) = \dot{r}(0) = r^{(2)}(0) = \cdots = r^{(m-1)}(0) = 0 \end{aligned}$$

对式(7.2.5)进行拉氏变换:

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s) \end{aligned}$$

式中: $R(s), Y(s)$ — 系统输入 $r(t)$ 、系统输出 $y(t)$ 的拉氏变换.

$$\text{定义7.2.1 } G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (7.2.6)$$

$G(s)$ 称为系统的传递函数. 它是系统在零初始条件下, 输出量拉氏变换 $Y(s)$ 和输入量拉氏变换 $R(s)$ 之比. 传递函数的分子 $N(s)$ 、分母 $D(s)$ 分别为:

$$\begin{aligned} N(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ D(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

用 s 代替微分方程(7.2.5)中的微分算符, 所得等式右边对应 $N(s)$, 左边对应 $D(s)$, 即可得到传递函数. 传递函数与微分方程之间有一一对应关系, 所以传递函数也是系统的一种数学模型.

以上是基于连续系统的传递函数. 另外还有基于离散系统的 z 变换、

可以参考有关的资料,在此不再赘述.

5. 由系统的动态方程求传递函数

设系统的动态方程为:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

为了求得相应的传递函数矩阵,可在零初始条件下对动态方程进行拉氏变换,得:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (7.2.7)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (7.2.8)$$

由式(7.2.7)得: $X(s) = [sI - A]^{-1}BU(s)$

代入式(7.2.8)有: $Y(s) = C[sI - A]^{-1}BU(s) + DU(s) = G(s)U(s)$

式中 $m \times r$ 矩阵 $G(s)$, 称为系统的传递函数矩阵.

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mr} \end{bmatrix} = C[sI - A]^{-1}B + D = C\Phi(s)B + D$$

式中, $g_{ij} = G_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)}$ ——由第 j 个输入量在第 i 个输出量中引起的响应分量与第 j 个输入量之间的传递函数;

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1}$$
 ——预解矩阵.

$\Phi(s)$ 的拉氏反变换 $\phi(t)$ 称为系统的转移矩阵. 若已知系统在 $t=t_0$ 的状态及 $t \geq t_0$ 时的输入, 利用状态转移矩阵, 就可以确定系统在任何时刻的行为和变化趋势.

应当指出, 尽管系统的动态方程是非唯一的, 但对同一个系统由不同的动态方程变换成的传递函数阵却是相同的. 系统各个输入量和输出量之间对应的传递函数阵是不变的, 这称为传递函数的不变性.

例 7.2.3 已知系统的动态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

求系统的传递函数.

解 由系统的动态方程可得:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad D = 0 \\ [sI - A]^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 5 & 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]} \\ &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} s^2 + 2s - 3 & s + 2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 2s + 3}{2s^3 + 4s^2 + 6s + 10} \end{aligned}$$

6. 另外几个常用的控制概念

利用反馈得到的偏差产生的控制作用,又去消除偏差的控制原理叫做反馈控制原理.

开环控制系统——被控制量只能受控于控制量,而对控制量不能反实施任何影响的系统称为开环控制系统.

闭环控制系统——控制量通过控制器去控制被控制量,而被控制量有被反馈到输入端和控制量进行运算的比较后产生的偏差再经过控制器的适当变换去控制被控制量.这样整个系统形成了一个闭合的环路,我们把这种输出与输入间存在反馈的系统叫做闭环控制系统.

7. 系统仿真

仿真是一门建立在相似理论、控制理论和计算机技术基础上的综合性和实验性学科.而数学仿真和硬件半实物仿真经常结合使用的两种仿真手段.数学仿真的基础是数学建模.利用合理的数学模型通过合适的算法

从数值分析的角度得到理想模型的过程叫做数学仿真,而硬件半实物仿真是指通过部分实际硬件与控制模型相结合产生的仿真结果.

以上只是本章用到的一些与建模实例有关的内容,详细的控制论内容见有关参考书.

第 7.3 节 模型的应用实例及其解法

1. 滤波应用实例:水面舰艇综合导航系统数学处理模型设计及仿真实验研究

(1) 模型设计

综合导航系统是现代舰艇的关键装备之一,而导航数据的综合优化技术是该关键装备中的一项关键技术.本系统采用的导航数据综合优化处理方法确定为:综合导航计算机实时地接收各导航传感器信息,经过处理,然后,采用有限记忆平滑值或线性滤波估值拟合标称状态值,再进一步进行卡尔曼滤波,最后,把所有优化估值结果按工作方式和数据类型编排成不同的工作画面显示或通过串口、网络接口提供导航和作战使用.据此思路设计综合优化的数学模型,并进一步在 MATRIXx(MATRIXx 是与 MATLAB 类似的产品——作者注)的开发环境下,验证所设计数学模型的可行性.

(2) 分段常增益线形滤波数学模型设计

大型综合导航系统首要的综合模式拟采用自主综合模式.在这种模式下系统可在 GPS 关闭(或其天线受损、设备故障等),甚至受到干扰的情况下,也能满足航行安全和作战使用需要.自主综合模式的基本模型分析如下.

如同连续线性系统的动态状态模型一样,在这种情况下舰船运动可用一组一阶微分方程来描述.

$$X(t) = A(t)X(t) + W(t) \quad (7.3.1)$$

其中具体选择系统状态 $X(t)$ 为 6 维矢量, $A(t)$ 为 6×6 维的随时间变化的矩阵, $W(t)$ 为 6 维系统随机干扰矢量,即

$$X(t) = [La(t), Lo(t), Vc(t), Kc(t), Vln(t), Vle(t)]^T$$

$La(t)$ — 纬度; $Lo(t)$ — 经度; $Vc(t)$ — 航速; $Kc(t)$ — 航向;
 $Vln(t)$ — 北向海流; $Vle(t)$ — 东向海流.

将(7.3.1)式进行离散化处理,并设定滤波周期为 T ,海流是指数相关的马尔可夫过程加白噪声并取海流的反相关时间为 β_c ,则可得到下面的离散化的系统状态方程.

$$X(k)=B(k)X(k-1)+W(k-1) \quad (7.3.2)$$

式中, $X(k)=[La(k), Lo(k), Vc(k), Kc(k), Vln(k), Vlc(k)]^T$

$B(k)$ 为 6×6 维的状态转移矩阵,它可以通过矩阵的级数展开式,并近似地取一次项,忽略高次项来求得.

参与此模式工作的观测设备是平台罗经、电磁计程仪和罗兰C,它们的实际量测量是航向、航速和纬度、经度,可构成4维的观测矢量.

$$Y(k)=[La_m(k) \ La_{om}(k) \ Vc_m(k) \ Kc_m(k)]^T$$

在这里对观测量采用与状态量相一致的量纲,并且采用对状态直接进行滤波估值,故有如下测量方程.

$$Y(k)=H(k)X(k-1)+V(k-1) \quad (7.3.3)$$

式中 $H(k)$ 是 4×6 维的测量矩阵,它具有如下的形式:

$$H(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$V(k)$ 是4维的测量误差矢量.

从工程应用角度,可将系统噪声(含模型误差和外界干扰)和测量噪声全部归入到北向海流和东向海流引起的误差进行估值,这样,模型的滤波增益将采用理论稳态增益并通过实验来确定,而由此可得到其估值方程为:

$$\begin{aligned} X(k/k) = & B(k)X(k-1) + K_i(k) \\ & \times [Y(k) - H(k)B(k)X(k-1)] \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

式中 $K_i(k)$ 为滤波增益阵,实取多组 6×4 维的常值矩阵,根据舰艇实际的运动状态分设五组增益阵(即 $i=1, 2, \dots, 5$),分别相应于静态、低动态……高动态等,其中各元值是经实际航行试验验证确定的稳态值,并通过实时辨识舰艇运动参数(速度和航向的变化)自动选择之.按此模型的计算框图见图 7.3.1.

(3) 卡尔曼滤波模型设计

大型综合导航系统第二级综合模式拟采用最佳组合的综合模式.它是将系统最佳的导航基准设备:平台罗经、GPS、GLONASS、电磁计程仪等的基准测量信息,通过综合导航一体化多功能显控台,采用卡尔曼滤波技术.

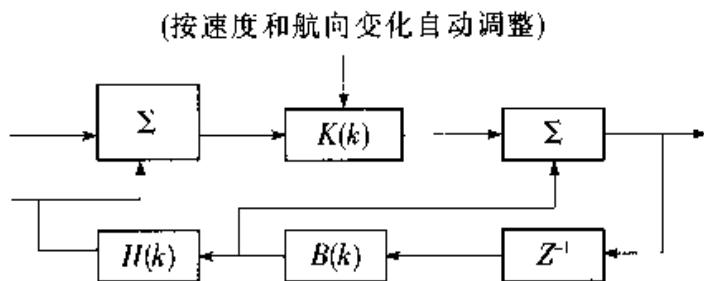


图 7.3.1 常增益滤波计算框图

进行综合优化处理, 获取高精度的导航参数, 达到系统的最佳性能指标. 最佳组合的综合模式模型是建立在对随机非线性离散系统的动态模型围绕标称状态进行线性化处理的基础上, 最终推出线性化的动态系统方程, 现说明如下.

随机非线性离散系统的动态模型可用如下的方程描述.

$$X(k) = A[X(k-1)] + N[X(k-1)]W(k) \quad (7.3.5)$$

$$Y(k) = H[X(k)] + V(k) \quad (7.3.6)$$

此方程应用到本系统时, 将围绕标称状态进行线性化处理. 这里所谓的标称状态是指在无噪声干扰下, 按(7.3.5)式求解的理想状态序列. 即

$$X^*(k) = A[X^*(k-1)]; X^*(0) = E\{X(0)\}$$

而真实状态 $X(k)$ 和标称状态 $X^*(k)$ 之差称为状态偏差. 即

$$\delta X(k) = X(k) - X^*(k)$$

用泰勒级数展开并取一次项而忽略高次项, 则可得到围绕标称状态的线性化动态系统方程.

$$X(k) = [A(k-1)|X^*(k-1)] \times X(k-1) + W(k) \quad (7.3.7)$$

同理可得线性的测量方程:

$$Y(k) = [H(k)|X^*(k)] \times X(k) + V(k) \quad (7.3.8)$$

通过测量状态偏离值对系统状态偏离矢量进行优化滤波, 将噪声误差和系统模型误差采用自适应滤波技术一并处理, 这是本系统应用卡尔曼滤波技术的总思路. 这样, 我们选取系统状态偏离矢量为 6 维矢量.

$$\delta X(k) = [\delta L_a(k), \delta L_o(k), \delta V_c(k), \delta K_c(k), \delta V_{Ln}(t), \delta V_{Le}(k)]^T$$

其中: $\delta L_a(k)$ ——纬度偏差;

$\delta L_o(k)$ ——经度偏差;

$\delta V_c(k)$ ——航速偏差;

$\delta K_c(k)$ ——航向偏差;

$\delta VL_n(t)$ ——北向海流偏差;

$\delta VLC(k)$ ——东向海流偏差.

进而可得系统状态方程:

$$\delta X(k) = B(k) \times \delta X(k-1) + W(k) \quad (7.3.9)$$

方程(7.3.9)式中的系统噪声矢量 $W(k)$ 含有系统模型误差的分量, 具有如下性质:

$$E\{W(k)\} = Mw$$

$$\text{cov}\{W(k), W(j)\} = Q(k) \times \delta_{kj}$$

$Q(k)$ 是 $W(k)$ 的协方差矩阵, 为 6×6 维的对称非负定阵.

在正常情况下, GPS/GLONASS 的量测量是经纬度, 平台罗经和电磁计程仪的量测量是航向和航速, 而上面推演的系统状态和测量方程都是以状态偏离矢量进行处理的. 因此, 就有一个实际测量值要减去标称状态矢量, 以获得偏离矢量的测量值的问题. 如何求得标称船位、航速和航向值呢? 可以采用由过去估值或平滑值外推的办法来计算. 实际工程应用上, 可采用将过去 $-3T, -2T, -T$ 时刻的估值船位拟合本时刻的标称船位, 而用航速的平滑值作为本时刻的速度标称值, 至于航向偏离值就是用瞬时的航向改变量直接作为航向偏离量参与滤波估值. 这样, 系统状态的测量方程为:

$$Y(k) = H(k) \times X(k) + V(k) \quad (7.3.10)$$

式中 $H(k)$ 是 4×6 维的测量矩阵, 它的形式如前面的 $H(k)$, 而系统状态偏差的测量方程为:

$$\delta Y(k) = Y(k) - H(k) \times X^*(k) \quad (7.3.11)$$

实际使用的 $\delta Y(k)$ 是通过传感器实测值 $Y(k)$ 和标称值 $H(k) \times X^*(k)$ 之差来确定. 方程(7.3.10)式中的 $V(k)$ 为 4 维的测量噪声矢量具有如下的性质:

$$E\{V(k)\} = Mv$$

$$\text{cov}\{V(k), V(j)\} = R(k) \times \delta_{kj}$$

其中 $R(k)$ 是 $V(k)$ 的协方差矩阵, 为 4×4 维的对称正定阵. 由于各测量传感器是相互独立的, 因此, $R(k)$ 只有在对角线上存在非零元, 且其值可以由试验统计来确定. 在上述的系统状态和测量方程(7.3.10)和(7.3.11)前提下, 同时考虑不断地对不确切知道的噪声统计特性进行实时的估计和修正来改进滤波.

(4) 在 MATRIXx 开发环境下对两种基本模型的仿真实验研究

综合导航系统数学仿真的重点在于：建立各传感器误差模型、确定系统扰动误差函数，确定系统信息流程和设计高精度滤波算法等，针对完善后的分段常增益线性滤波和卡尔曼滤波两种基本模型，在宿主工作站上基于仿真软件 MATRIXx 进行综导系统的数学仿真实验研究。我们将舰艇运行时非滤波情形的实际数据记录下来还可以脱离实际运行环境将数据作为仿真的输入反复调试、观察仿真结果，根据几十年的实践经验调整矩阵内各参数。在实时仿真中采用的半实物仿真硬件可以根据实际情况进行选择连接。图 7.3.2 是仿真时采用的步骤之一。

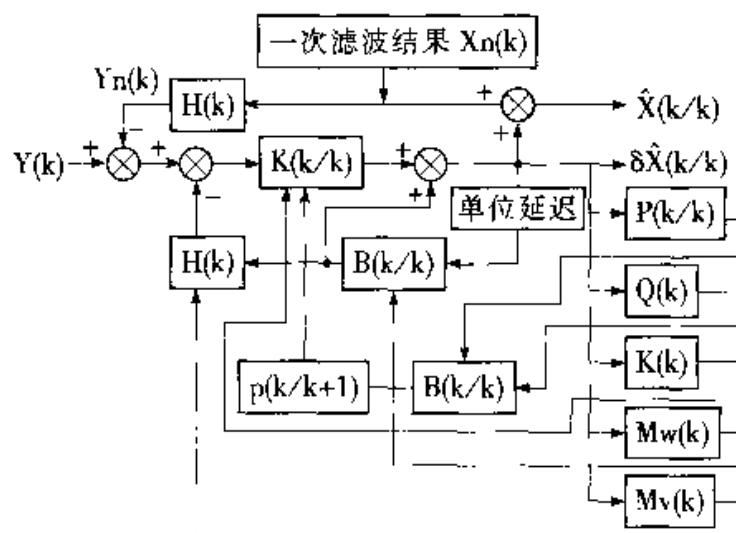


图 7.3.2 综合导航系统采用的卡尔曼滤波数字仿真框图

(5) 仿真实验与结果分析

在宿主工作站上基于 MATRIXx 开发环境下进行了综合导航系统数学仿真实验所得的仿真曲线如图 7.3.3 到图 7.3.6 所示。其中图 7.3.3、图 7.3.5 是分段常增益线性滤波(model1)的仿真结果，图 7.3.4、图 7.3.6 是卡尔曼滤波(model2)的仿真结果。

仿真曲线图 7.3.3、图 7.3.4 的纵轴 λ_a 、 λ_o 、 V_c 、 K_c 分别定义为纬度、经度、航速、航向，其单位分别为弧度、弧度、海里/小时、弧度；横轴为采样点的时间轴，其单位定义为秒，采样间隔为 2 秒，共有 50 个采样点。

仿真曲线图 7.3.5、图 7.3.6 的纵轴 λ_a 、 λ_o 分别定义为纬度、经度，其单位均为弧度；横轴为采样点的时间轴，其单位定义为秒，采样间隔为 2 秒，共有 50 个采样点。

由图 7.3.3 至图 7.3.6 仿真曲线明显可得初步结论如下：

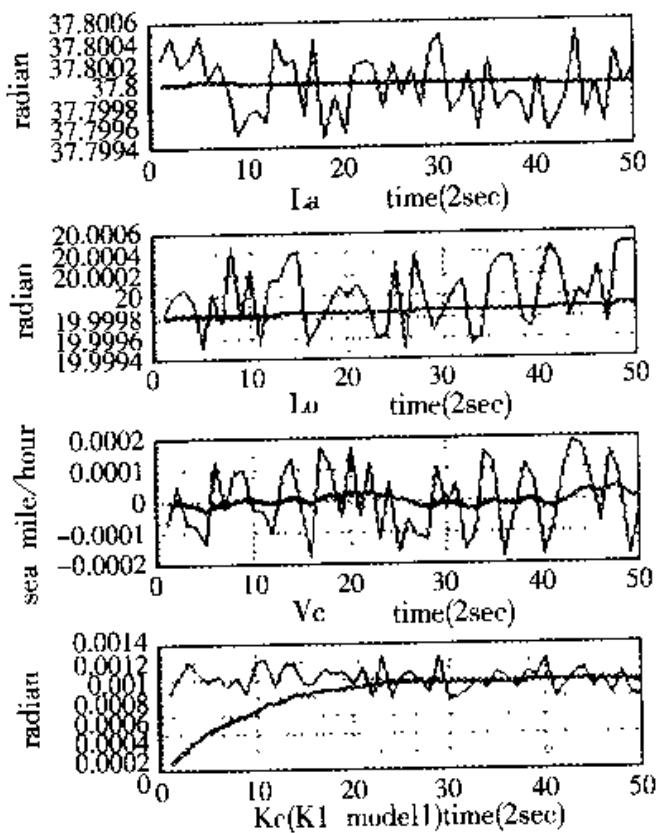


图 7.3.3 静态时常增益滤波前后(纬经度、航速、航向)的比较

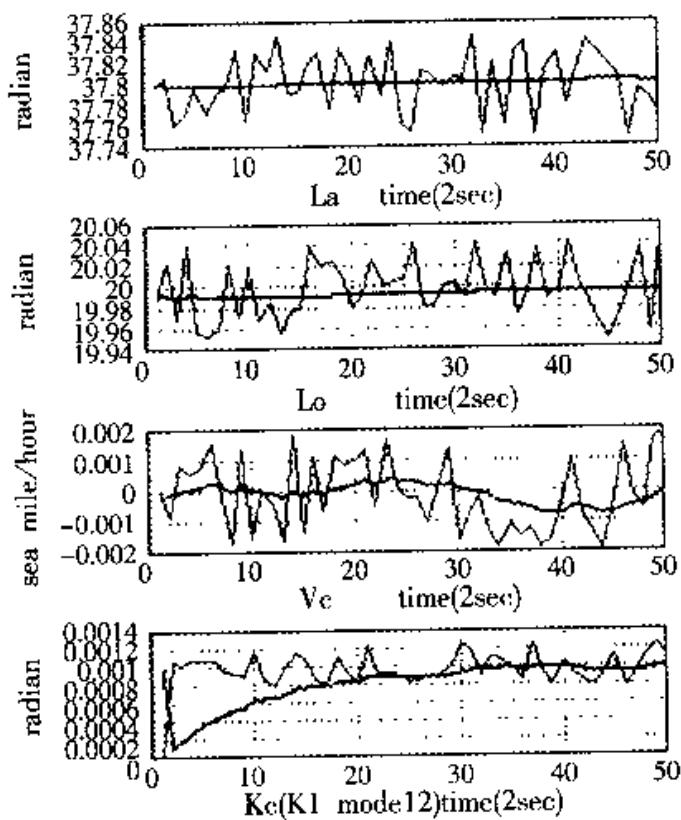


图 7.3.4 静态时卡尔曼滤波前后(纬经度、航速、航向)的比较

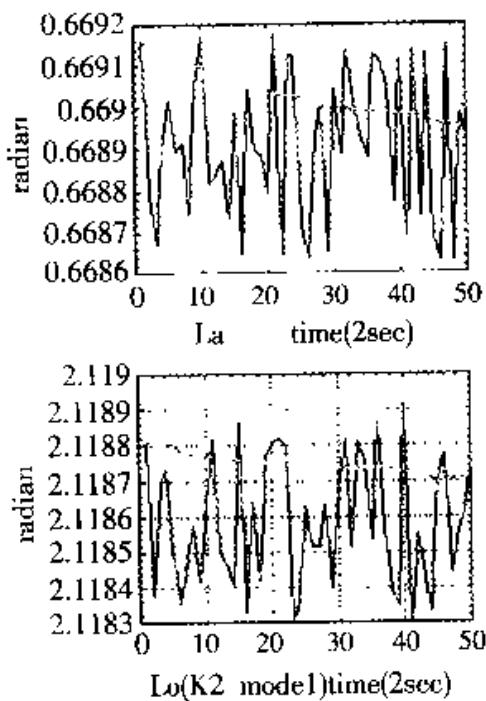


图 7.3.5 匀速运动时常增益滤波前后(纬经度)的比较

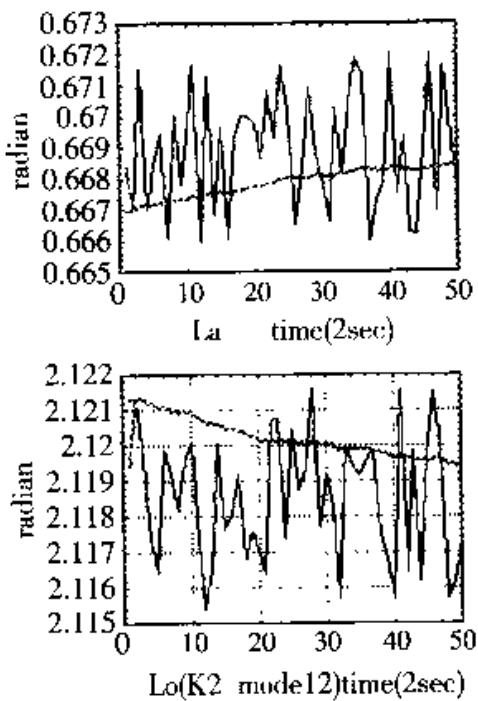


图 7.3.6 匀速运动时卡尔曼滤波前后(纬经度)的比较

- 1) 综合系统拟将采用的两种基本模型均为可行。
- 2) 两种基本模型具可控性、可观性和良好的收敛性、稳定性；滤波效果良好。
- 3) 卡尔曼滤波模型比常增益线性滤波模型具有更好的滤波效果，且跟

踪更快。

附：数学仿真时用到的部分脚本语言的源码（此处的源码是用 MATRIXx 中的 mathscript 语言编写，它是一种类似于 MATLAB 中的.m 的语言，其源文件 K1M1.ms 见光盘）。

2. 通过合理配置提高步进链轮机构的总体精度的应用实例

为了提高在第 7.1 节中涉及的步进链轮机构的总体精度，需进一步建立详细的数学模型。

图 7.1.1 中 X_{k1-1} 和 X_{k1-2} 构成总开环方案， X_{k1-1} 和 X_{k1-3} 构成总闭环方案，这两个方案在此详细讨论。

（1）总开环和总闭环两方案的分析和比较

1) 传递函数的方框图。总开环方案和总闭环方案的传递函数方框图见图 7.3.7 和图 7.3.8。

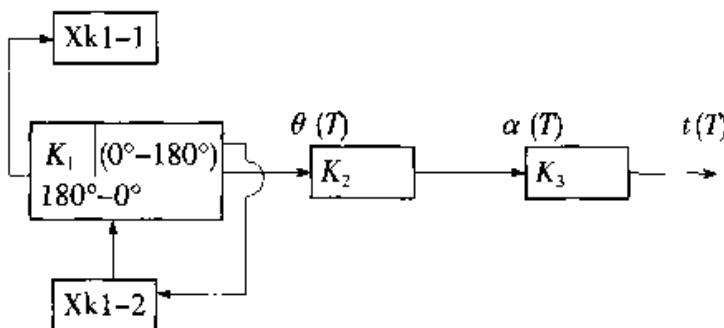


图 7.3.7 总开环传递函数方框图

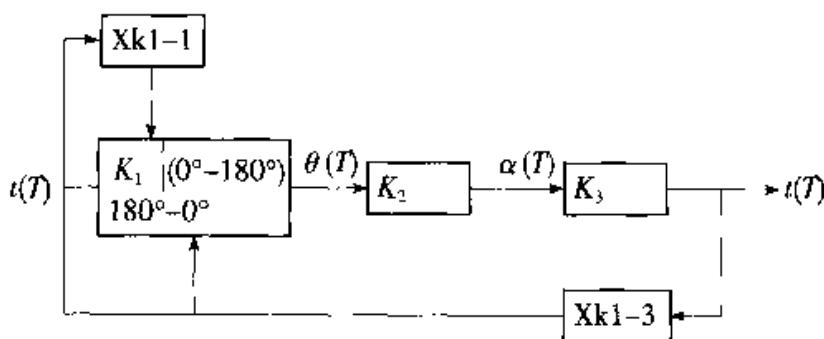


图 7.3.8 总闭环传递函数方框图

2) 总开环和总闭环两方案相比较主要区别是：

(a) 结构上，总开环方案的限位开关 X_{k1-2} 装在摆动气缸上，且有外部

挡块;而总闭环方案的限位开关 Xkl-3 装在链条环节里没有外部挡块.

(b)由传递函数方框图图 7.3.7、图 7.3.8 见总开环的特点是开环,多个环节的误差会累积地反映到步长误差 Δt 上,而总闭环的特点是闭环,理论上,多个环节的误差不会累积到 Δt 上.

(2)实验数据及误差分析

1)根据以上的方案比较我们选用了总闭环方案. 在 Xkl-1 和 Xkl-3 位置上完成了相应软件设计并调试正常,进行了步进精度、重复精度的测试,见表 7.3.1、表 7.3.2,并绘制相应的图 7.3.14、图 7.3.15、图 7.3.16、图 7.3.17. 对应的曲线由此可见.

各位置的重复误差最大值 $\Delta t_{1\max} = 12.8\text{mm}$;链轮一圈内的步进误差 $\Delta t_{2\max} = 11\text{mm}$.

因为总误差要求是 $\pm 0.5\text{毫米}$,而实测若将上述二项加起来达到 23.8毫米 ,离要求相差甚远,反复实验实测后均为此数量级. 也就是说我们采用了总闭环方案,从理论上消除了累计误差,但是步进精度低.

表 7.3.1 Xkl-3 位置时传动精度测试数据

位置	第一圈	第二圈	第三圈	每个位置的重复精度
1	12	11	10.5	-1.5
2	12	11	10	-2
3	11	11	14	-3
4	10	10	12	2
5	11	12	12	1
6	12	11	9	-3
7	14	13	12	-2
8	8	*	5	-3
9	11	8	3	-8
10	10	12	13	3
11	10	6	11	-5
12	11.5	7	11	-4.5
13	13	10	10	-3
14	13	11	10	-3
15	11	10	9.5	-1.5

续表

位置	第一圈	第二圈	第三圈	每个位置的重复精度
16	10.3	10	13	3
17	9	10.5	9	1.5
18	8.5	8	9	1.0
19	9	7.5	7	-2.0
20	13	8	6	-7.0
21	10	6	5.5	-4.5
22	7	6	5	-2.0
23	12	8	8	-4
24	9	10	10	1
25	8.5	10	8.5	1.5
26	11	10.5	8	-3.0
27	13	9	6	-7.0
28	11	8	10	-3

圈内误差: 7mm 7mm 11mm -8mm-3mm

注: * 代表没能有效停止。

表 7.3.2 Xk1-4 位置时传动精度测试数据

位置	第一圈	第二圈	第三圈	第四圈	每个位置的重复精度
1	12	7	10.2	8	-5
2	9.7	9	8	6	3.7
3	8.1	8.5	9	7	-2
4	10.4	11	10	8	-3
5	12.3	8.4	7.3	9	-5
6	12	8.2	7.3	10.5	-1.7
7	11	14	7	7.2	-7
8	9.2	12	9.3	10	-2.7
9	11	10.5	10.2	16	5.8
10	10.2	8.5	9	9.2	-1.7
11	9.8	12.4	9.5	9	-3.4
12	10	12	8.6	12.8	4.2

续表

位置	第一圈	第二圈	第三圈	第四圈	每个位置的重复精度
13	10	11	8.4	8.6	-2.6
14	7.9	11	9	8.8	3.1
15	6	*	*	6	0
16	8	9	10	8.5	2.0
17	9	7.5	6.7	7	-2.3
18	8	7.2	6	7	-2.0
19	9.7	10	8	7	-3.0
20	8	9.5	7.5	10	2.5
21	9	9	9	8	-1.0
22	10.5	10	9	8.5	-2.0
23	6.6	9	8.7	9.5	2.9
24	8	9	8	9.7	1.7
25	10	12	10.7	8	-4.0
26	*	*	*	*	*
27	16	11	13	13	-5.0
28	6.5	9	11	8.6	4.5

圈内误差: 10mm 7mm 7mm -7mm -5.8mm

注: * 代表没能有效停止。

2) 误差分析

(a) 摆动气缸 DSR-16-180-P 的工作原理及误差分析, 图 7.3.9 表示摆动气缸的工作原理。图中 DSR-16-180-P 代表缸径 16 毫米, 行程 0°-184°, P 表示有缓冲的气缸。Xk1-1、Xk1-2 为微动限位开关, 采用舌簧开关, 型号为 SMEO-4-K-LED-24, 其重复精度为 ±0.1 毫米, 最大切断频率为 2kHz, GRLA-M5-QS-6 为调速阀, MEBH-5/2-1/8-230AC 为电磁阀, 该电磁阀为二位五通带弹簧型式, 它的特点是单线圈, 气缸位置无记忆, 弹簧复位, 其工作过程如下。

当线圈不得电时, 在弹簧力的作用下, 电磁铁左移, 使气路从 ① → ② → 右调速阀 → 气缸右进气口 → 将活塞推至 Xk1-1 得电为止。如果要使气缸顺时针方向运动就必须使线圈得电, 此时电磁力大于弹簧力, 使电磁铁右移, 气路从 ① → ④ → 左调速阀 → 气缸左进气口 → 将活塞推动到 Xk1-2 得

电为止。这样线圈得电、失电，电磁铁换位，气路换向，活塞换向，反复运动。图 7.3.10 表示步进链轮传动机构的动作流程。

DSR-16-180-P 型摆动气缸是一种叶片式摆动气缸，终端带有缓冲弹性环，通过一个旋转叶片直接将气缸作用力传递到输出轴。摆动角度在 0° — 180° 之间可以任意调节。因可调挡块装置和旋转叶片之间是分开的，所以作用在挡块上的冲击力可由终端弹性缓冲装置吸收。在两终端位置由于旋转叶片自身不适用于用作挡块，因此行程挡块不能缺少。

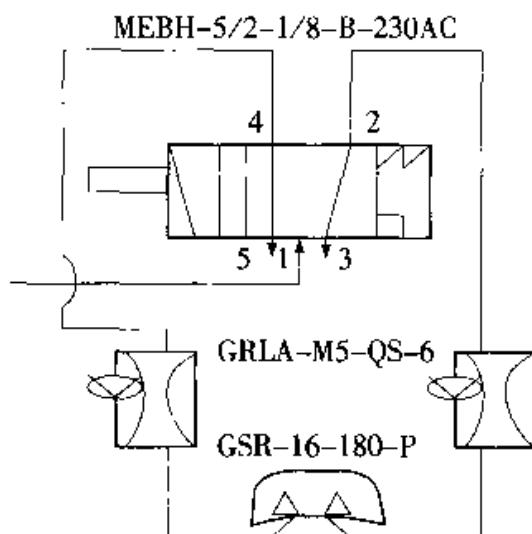


图 7.3.9 摆动气缸工作原理示意图

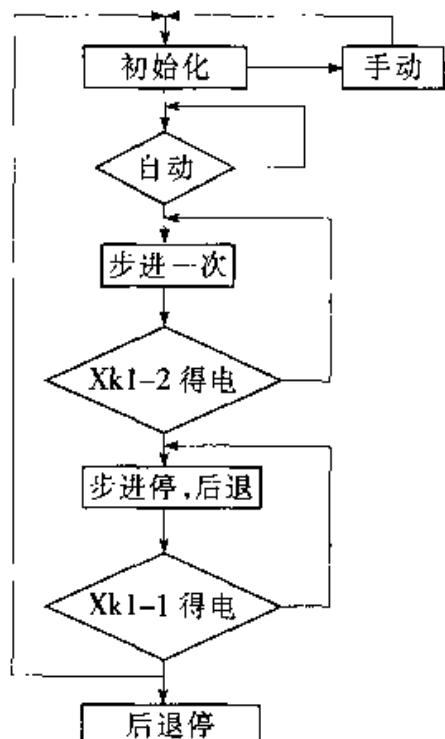


图 7.3.10 摆动气缸动作流程图

(b) 棘轮装置的精度。适用于 DSR-P 型叶片式摆动气缸的棘轮装置选用 FLSR-16-R，其最小摆动角度是 0.4° 。步进精度取决于其速度和所带负载的大小，其速度太快，则精度就会降低。要采用调整结构的办法来提高步进精度。因为棘轮上没有限过载装置，所以转动惯量并不影响其承载能力，一旦摆动气缸停止运动，棘轮会因为内部摩擦而停止运动。如果需要精确定位，须使用外部挡块，挡块将影响棘轮的步进精度。

由上所述，摆动气缸的外部挡块将影响步进运动的精度。而在总闭环方案中由于没有采用完整的外部挡块（即 Xk1-2 变成 Xk1-3 了），所以使步进精度降低了。

(c) 不精密的链轮链条传动。由表 7.3.1、表 7.3.2，我们将一圈内 28

个位置误差叫细分误差,各个位置的重复误差叫零位误差,则系统的步进误差由零位和细分两部分误差构成.

比较和整理表 7.3.1、表 7.3.2 数据可得到表 7.3.3. 由表 7.3.3 从平均值来看 X_{k1-4} 的步进误差比 X_{k1-3} 的要大, 跳空次数也明显增多. 这说明 X_{k1-4} 位置比 X_{k1-3} 位置的上下跳动量大得多, 从而使 X_{k1-4} 没有感应到信号的次数明显增多. 由此可以看到不精密的链轮传动会带来极大的步进误差.

表 7.3.3

	零位误差		细分误差		跳空次数
	平均值	最大值	平均值	最大值	
X_{k1-3} 位置	5.5mm	11	8.33	11	1 次
X_{k1-4} 位置	6.4	12.8	8.50	10	6 次

综上所述, 总闭环控制方案由于 X_{k1-2} 换成 X_{k1-3} , 弃用摆动气缸结构上的外部挡块, 则降低了摆动气缸、棘轮装置的步进精度; X_{k1-3} 的控制是离散型的, 即 0, 1(无, 有), 它属于低精度的控制; 不精密的链轮、链条传动, 这是造成总闭环方案步进误差大的三个基本原因.

通过实验和分析, 我们可知, 总闭环方案由于上述三大因素造成步进误差大. 但是由于 X_{k1-3} 、 X_{k1-4} 处于不同位置, 步进误差也相差甚远, 因此我们能否大胆预测在目前的不精密的链轮传动机构改进后, 找出步进误差最小的范围, 至少是零位误差最小的范围(见图 7.3.11, 图 7.3.12 和图 7.3.13).

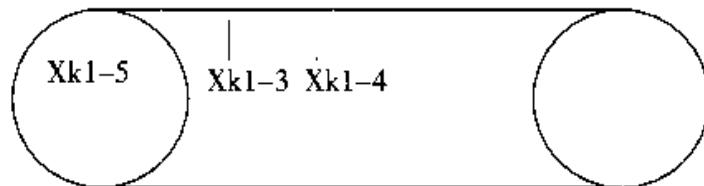


图 7.3.11 减少零位误差示意图

如果最小误差区域能证实, 那么精密链轮传动的工作必将提到议事日程上来, 它包括精选、精加工、精安装. 总之链轮工位的几何步进误差必须在允许的范围内.

总开环方案, 由于采用外部挡块可以确保步进精度. $\Delta\theta = \pm 0.1^\circ$, $\Delta\alpha =$

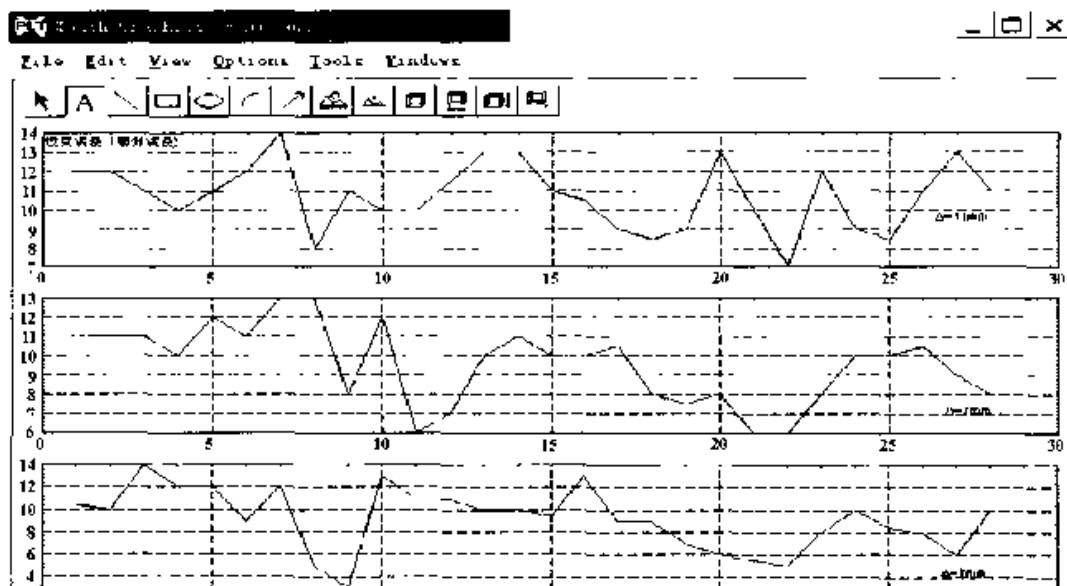


图 7.3.12 Xk1-3 位置时的细分误差

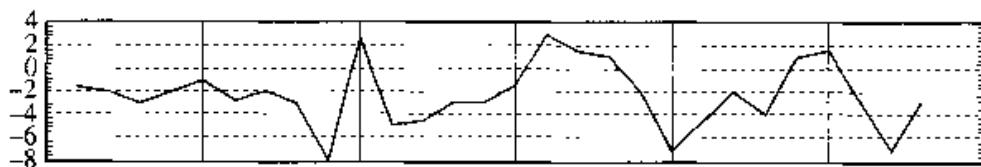


图 7.3.13 Xk1-3 位置时零位误差

$\pm 0.2^\circ$ 带来的步进误差很小,所以我们将提出综合方案:零位误差由Xk1-1与Xk1-5的总闭环方案来归零,细分误差由Xk1-1与Xk1-2总开环方案来实施.

(3) 仿真及结果

根据以上讨论和分析我们对总开环和总闭环两方案进行了仿真模拟.

1) 总开环方案的仿真及结果. 根据图 7.3.4 对图 7.3.7 总开环方案进行仿真,仿真的目的是关心 $\Delta t(T)$ 即步进的误差. 图 7.3.14 是其仿真流程模型图. 我们对下列情况进行仿真: $\Delta\theta = \pm 0.1^\circ$, $\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$, $T = 28\text{s}$ (半圈); 56s (一圈); 3600s (1 小时); 28800s (8 小时) 的 $\Delta t(T)$ 的误差曲线见图 7.3.15. 由此可得表 7.3.4.

表 7.3.4

$T(\text{s})$	$\Delta t(\text{mm})$	28	56	3 600	28 800
扰动					
$\Delta\theta = +0.1^\circ$, $\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$		-0.154-0.075	-0.154-0.075	-3.7-0.25	-5.6-4.5

由表 7.3.4 可见, 总开环方案在 $\Delta\theta = \pm 0.1^\circ$, $\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$ 的条件下, 链轮机构走 28 步(每步 2 秒)即一圈时步进误差 $\Delta t_{max} \leq \pm 0.5$ 毫米。如果实际情况确是这样则为寻找实施一圈归零提供了可靠的前提。同时, 连续工作 1 小时的 Δt 范围是 $-3.7 - 0.25$, 8 小时则为 $-5.6 - 4.5$ 。表明总开环方案在 $\Delta\theta = \pm 0.1^\circ$, $\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$ 条件下误差大了, 但不是发散的。

2) 总闭环方案的仿真及结果。根据图 7.3.4 对图 7.3.8 总闭环方案仿真, 图 7.3.16 是其仿真流程模型图。当 $\Delta\theta = \pm 0.2^\circ$, $\pm 2.0^\circ$, $\pm 5.0^\circ$, $\pm 20^\circ$, $\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$, $T = 28s$ (半圈), $56s$ (一圈), $3600s$ (1 小时)时的 $\Delta t(T)$ 的误差曲线见图 7.3.17~图 7.3.24, 下图 7.3.14 及图 7.3.15 分别为开环方案仿真模型和仿真结果。

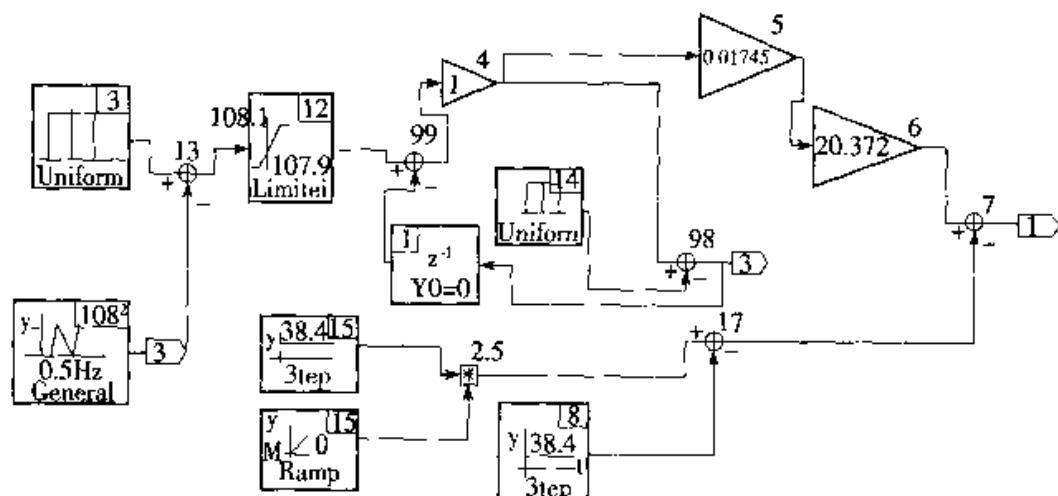


图 7.3.14 步进链轮总开环控制仿真流程模型图

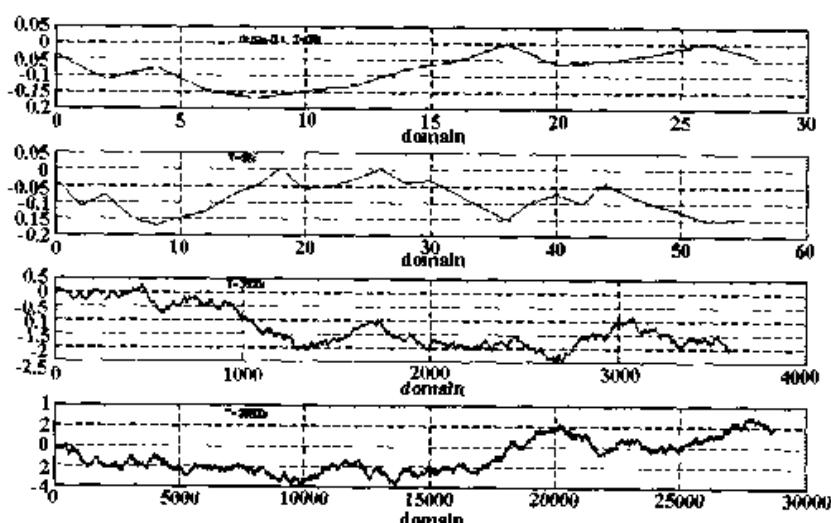


图 7.3.15 $\Delta\theta = -0.1^\circ$ 时时间分别为半圈、一圈、8 小时、24 小时的开环仿真

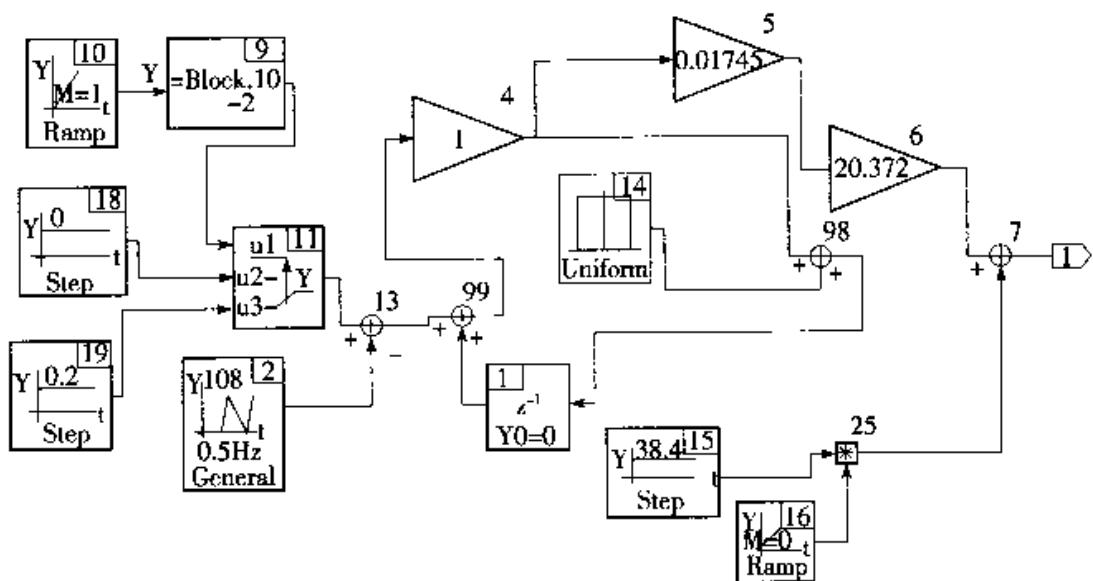


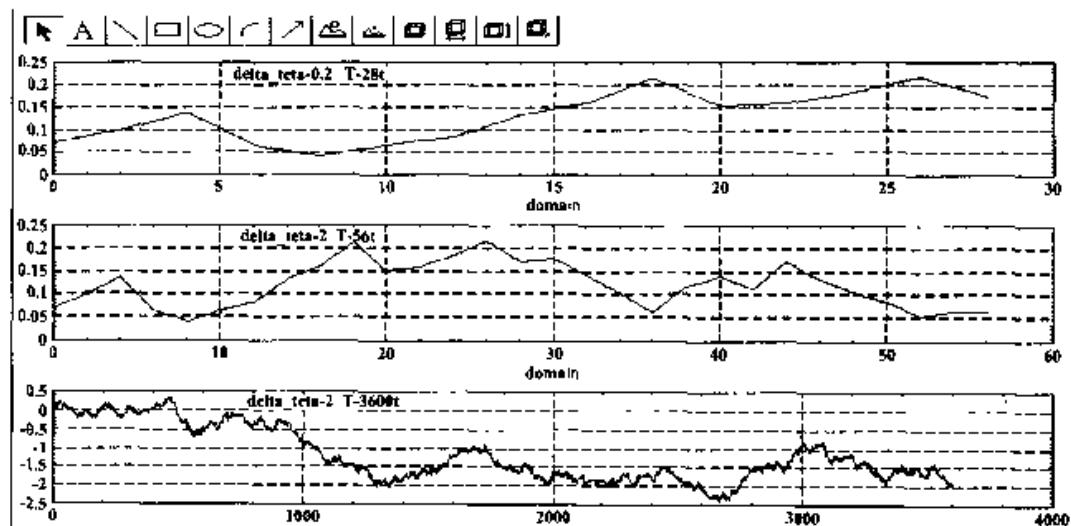
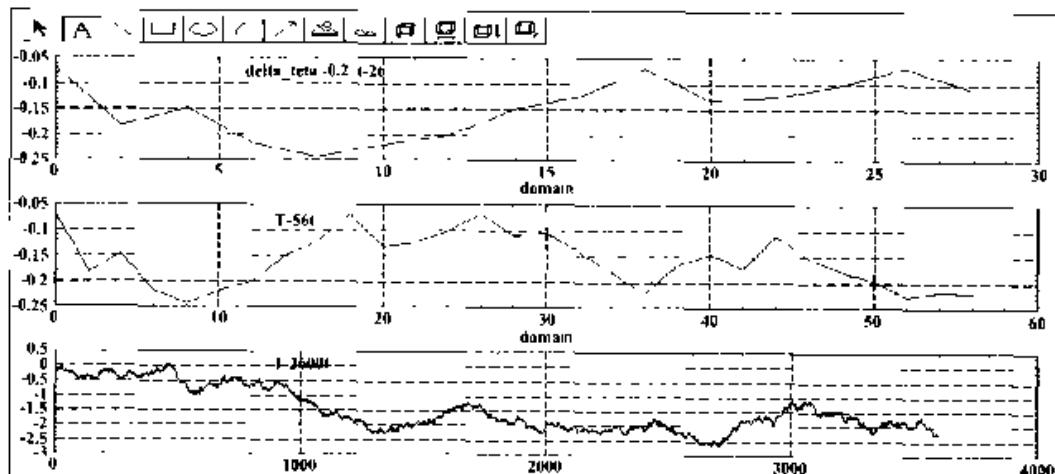
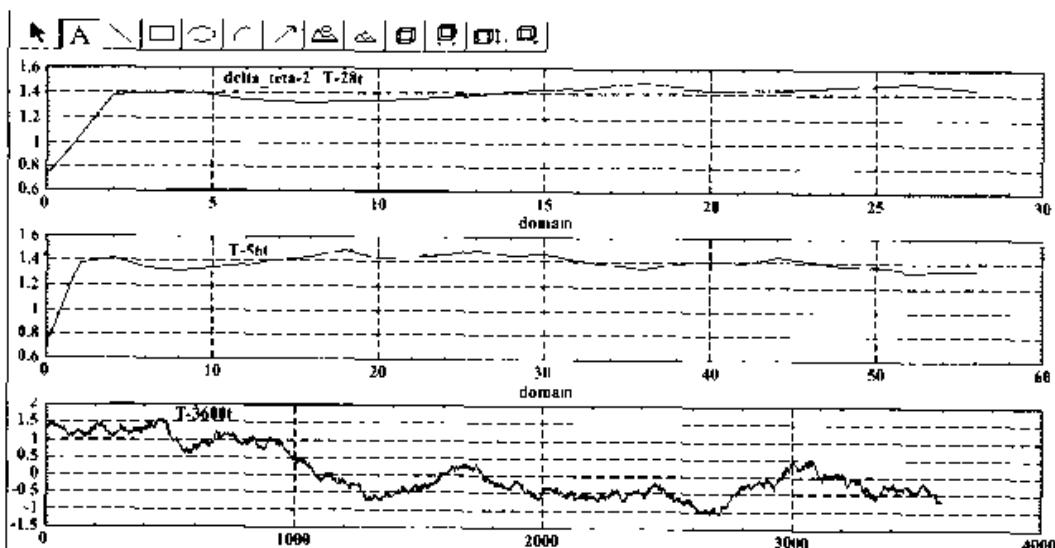
图 7.3.16 步进链轮闭环控制流程模型图

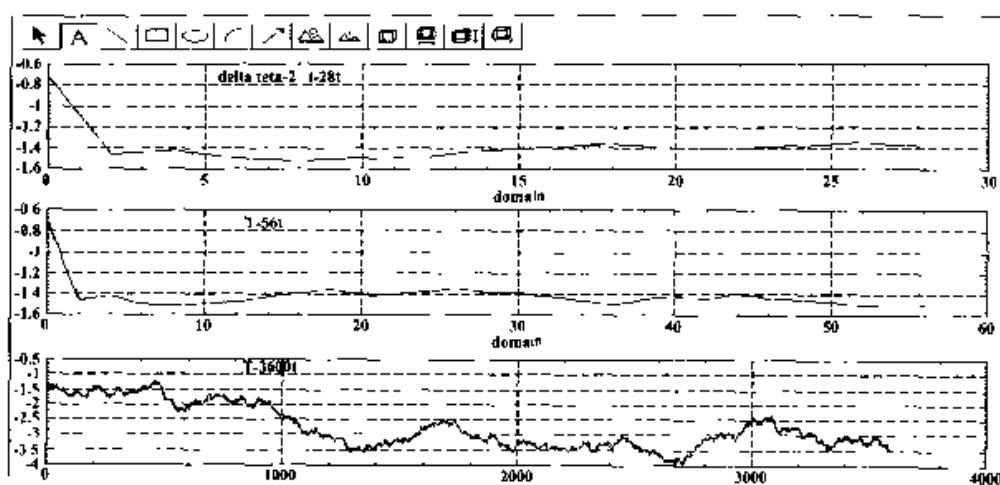
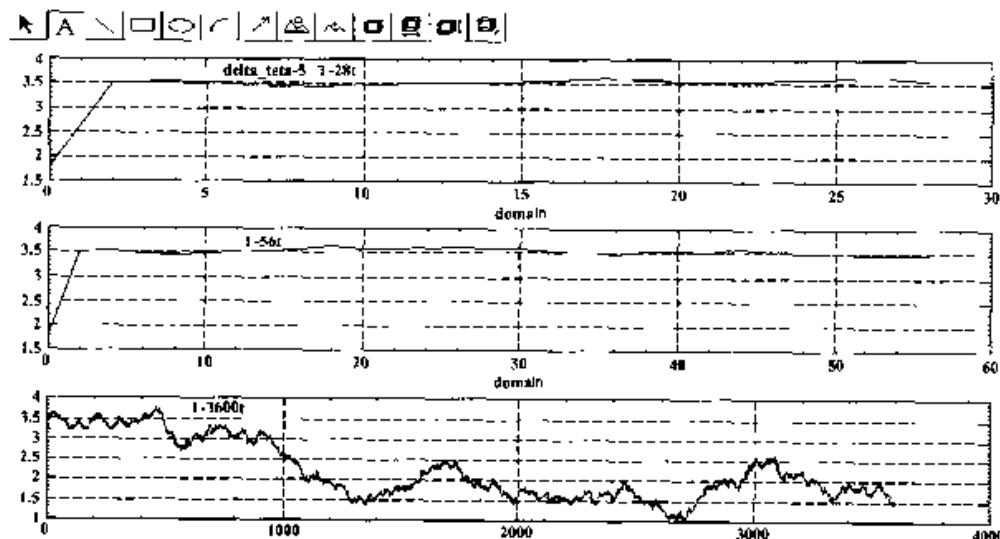
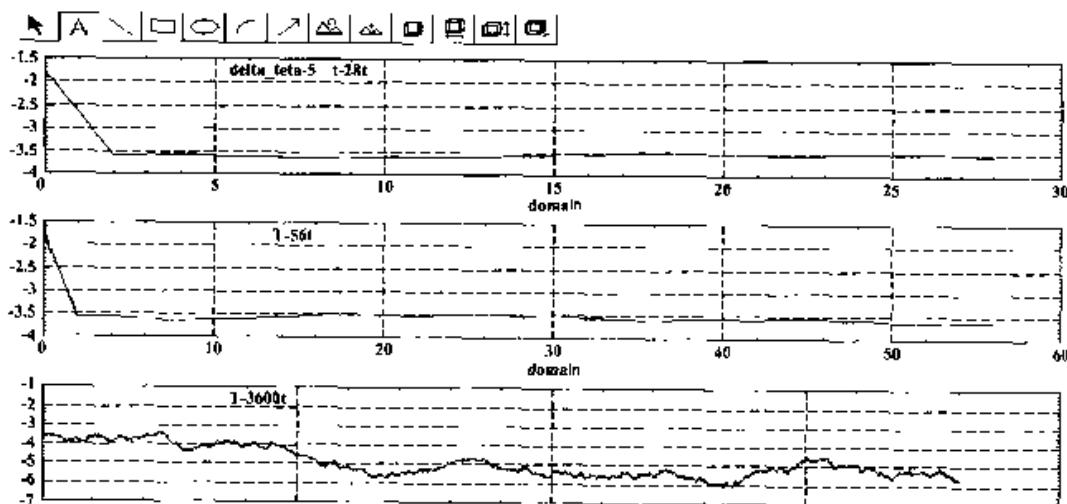
图 7.3.17~图 7.3.24 是时间分别为半圈、一圈、8 小时的仿真结果。
将以上的仿真结果列在表 7.3.5 中。

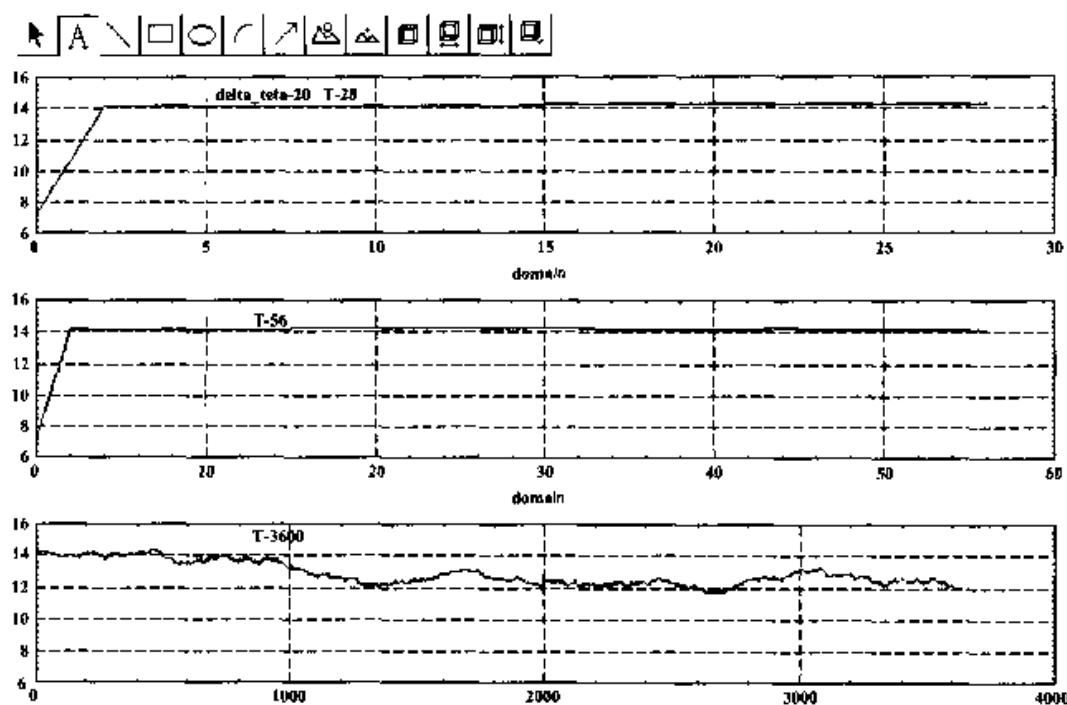
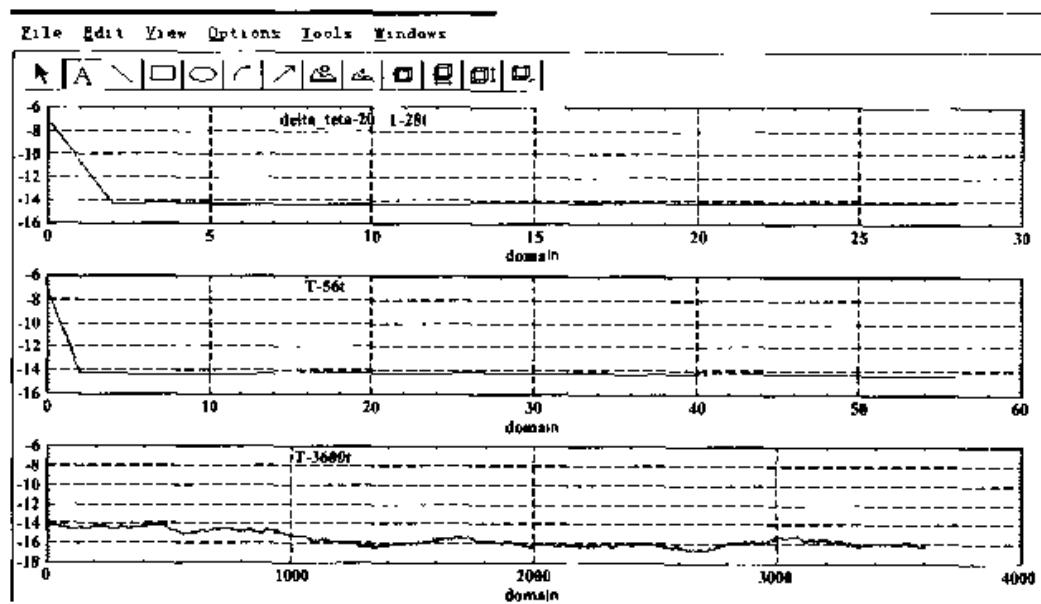
表 7.3.5 仿真结果

$\Delta t(\text{mm})$	$T(\text{s})$	28	56	3 600
扰动 ($\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$)				
$\Delta\theta = +0.2^\circ$		0.04–0.21	0.04–0.21	-2.35–0.3
$\Delta\theta = -0.2^\circ$		-0.24–0.07	-0.24–0.07	-2.63–0.05
$\Delta\theta = +2.0^\circ$		0.72–1.50	0.72–1.50	-1.08–1.60
$\Delta\theta = -2.0^\circ$		-0.72–1.52	-0.72–1.50	-1.25–3.90
$\Delta\theta = +5.0^\circ$		1.80–3.65	1.80–3.65	1.05–3.70
$\Delta\theta = -5.0^\circ$		-1.80–3.65	-1.80–3.65	-6.10–3.40
$\Delta\theta = +20^\circ$		7.20–14.40	7.20–14.40	11.60–14.40
$\Delta\theta = -20^\circ$		-7.20–14.40	-7.20–14.40	-14.00–16.80

仿真结果说明, 对应 $\theta \pm 0.2^\circ, \theta \pm 2.0^\circ, \theta \pm 5.0^\circ, \theta \pm 20^\circ$ 的 8 个不同的 $\Delta\theta$ 扰动, $\Delta\alpha = \pm 0.2^\circ$ 产生相应的步长误差 $\Delta t(T)$. 通过对 $T=28\text{s}$ (半圈)、 56s (一圈)中相应的零位误差最小点的分析, 可以找到符合实际误差要求的综合实施方案.

图 7.3.17 $\Delta\theta=0.2^\circ$ 时的仿真结果图 7.3.18 $\Delta\theta=-0.2^\circ$ 时的仿真结果图 7.3.19 $\Delta\theta=2^\circ$ 时的仿真结果

图 7.3.20 $\Delta\theta = -2^\circ$ 时的仿真结果图 7.3.21 $\Delta\theta = 5^\circ$ 时的仿真结果图 7.3.22 $\Delta\theta = -5^\circ$ 时的仿真结果

图 7.3.23 $\Delta\theta=20^\circ$ 时的仿真结果图 7.3.24 $\Delta\theta=-20^\circ$ 时的仿真结果

习题

1. 证明以下两图(图 a 和图 b)表示的系统是相似系统. 图中 u_i 为输入电压, u_o 为输出电压; X_i, X_o 分别为 a, b 两点的位移, X_i 为输入量, X_o 为

输出量.

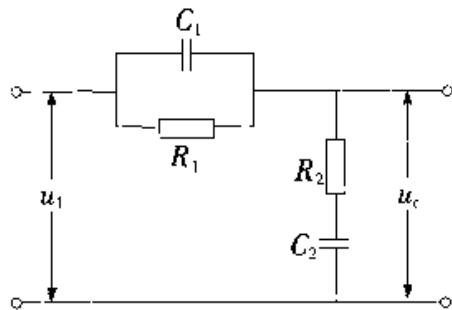


图 a

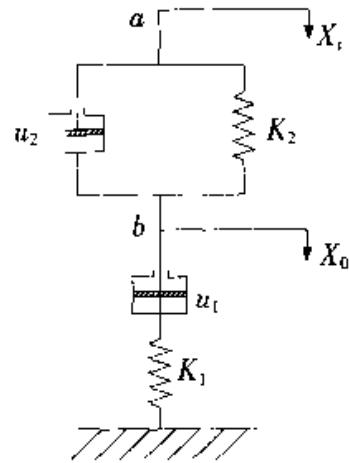


图 b

2. 已知系统的传递函数为 $\frac{2s+1}{s^2}$, 当系统输入频率为 1 赫兹, 幅值为 1. 脉宽为 0.5 的脉冲时, 观察它的输出结果.

3. 已知系统的动态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

求系统的传递函数阵.

4. 某系统为自动测量某种液体密度的装置, 带存储器的智能精密仪器有能力每 4 秒钟测量一次, 而打印设备只允许每小时记录一个结果, 无干扰时密度变化不大, 仪器的精度会在偶有(最多 20 分钟一次)干扰时瞬时异常(但不会持续 4 秒以上), 如何通过滤波处理使打印结果反映真实密度情况?

习题答案与提示

1. 证明两个系统具有相同形式的传递函数.
2. 用 MATRIXx 中的 SystemBuild 或 MATLAB 中的 SIMULINK 建

立模型。

$$3. G(s) = \frac{1}{s^2 + 6s^2 + 11s + 6} \cdot \frac{s^2 + 4s + 29s^2 + 3s - 4}{4s^2 + 56s + 52 - 3s^2 - 17s - 14}$$

1. 使用线性滤波即可。具体操作为：采集数据满 20 分钟保留 300 个采样点存储在存储器内取均值，将该值作为第一个记录值，并代替存储器 300 个点中的第一个，每 4 秒会有一个刷新结果，打印设备每小时打印的即为反映真实情况的最新结果。

参 考 文 献

- [1] 姜启源. 数学模型(第二版). 北京: 高等教育出版社, 1993
- [2] 杨启帆, 边馥萍. 数学模型. 杭州: 浙江大学出版社, 1990
- [3] 雷功炎. 数学模型讲义. 北京: 北京大学出版社, 1999
- [4] 叶其孝. 数学建模教育与国际数学建模竞赛. 北京:《工科数学》杂志社, 1994
- [5] 寿纪麟. 数学建模——方法与范例. 西安: 西安交通大学出版社, 1993
- [6] 刘来福, 曾文艺. 数学模型与数学建模. 北京: 北京师范大学出版社, 1997
- [7] 沈继红等. 数学建模. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 1996
- [8][美] W. F. 卢卡斯. 微分方程模型. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988
- [9] 刘满风等. 运筹学模型与方法教程例题分析与题解. 北京: 清华大学出版社, 2002
- [10] 吴明隆. SOSS 统计应用实务. 北京: 中国铁道出版社, 2000
- [11] 李友善主编. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 1980
- [12] 孙增圻编著. 计算机控制理论应用. 北京: 清华大学出版社, 1989
- [13][美] 罗伯特. D. 斯特拉姆, 唐纳德. E. 柯克. 现代线性系统——使用 MATLAB. 西安: 西安交通大学出版社, 2002

参 考 文 献

- [1] 姜启源. 数学模型(第二版). 北京: 高等教育出版社, 1993
- [2] 杨启帆, 边馥萍. 数学模型. 杭州: 浙江大学出版社, 1990
- [3] 雷功炎. 数学模型讲义. 北京: 北京大学出版社, 1999
- [4] 叶其孝. 数学建模教育与国际数学建模竞赛. 北京:《工科数学》杂志社, 1994
- [5] 寿纪麟. 数学建模——方法与范例. 西安: 西安交通大学出版社, 1993
- [6] 刘来福, 曾文艺. 数学模型与数学建模. 北京: 北京师范大学出版社, 1997
- [7] 沈继红等. 数学建模. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 1996
- [8][美] W. F. 卢卡斯. 微分方程模型. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988
- [9] 刘满风等. 运筹学模型与方法教程例题分析与题解. 北京: 清华大学出版社, 2002
- [10] 吴明隆. SOSS 统计应用实务. 北京: 中国铁道出版社, 2000
- [11] 李友善主编. 自动控制原理. 北京: 国防工业出版社, 1980
- [12] 孙增圻编著. 计算机控制理论应用. 北京: 清华大学出版社, 1989
- [13] [美] 罗伯特. D. 斯特拉姆, 唐纳德. E. 柯克. 现代线性系统——使用 MATLAB. 西安: 西安交通大学出版社, 2002