哈尔滨工业大学

大学生数学建模竞赛
Python 学习讲座

数学学院

2020 年 8 月 29 日

1 数值积分

问题：用 5 点 Gauss 数值积分求逼近函数

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x \qquad x \in [-1, 1]$$

的 4 次多项式函数。要求使用Legendre 多项式基底为 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$，且 5 点 Gauss 数值积分公式的节点为

$$\boldsymbol{x} = (-0.906, -0.538, 0, 0.538, 0.906),$$

对应节点的权重为

$$\boldsymbol{\omega} = (0.237, 0.479, 0.569, 0.479, 0.237).$$

求解原理

设逼近 $f(x)$ 的多项式函数 u 为

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{4} c_\ell \cdot P_\ell(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + c_3P_3(x) + c_4P_4(x)$$

即目标为

$$u - f(x) = 0.$$

考虑上式在积分意义下成立，可设对于任意多项式函数 $\varphi \in P([-1,1])$ 有

$$\int_{-1}^{1} u\varphi \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi \, \mathrm{d}x, \qquad \forall \varphi \in P([-1,1]).$$

将 φ 分别取为 Legendre 多项式基底，即 $\varphi = P_\ell(x)$, $\ell = 0, 1, \cdots, 4$，则通过 Legendre 多项式的正交性质可以得到如下的方程

$$\frac{2}{2\ell+1} \cdot c_\ell = \int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x) \, \mathrm{d}x, \quad \ell = 0, 1, \cdots, 4.$$

求解原理

通过 5 点 Gauss 积分公式可得

$$c_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\sum_{i=1}^{5}\omega_i \cdot f(x_i)P_\ell(x_i), \qquad \ell = 0, 1, \cdots, 4.$$

将系数 c 代入到多项式函数 u 中，则可以得到最终的逼近多项式。