

C 题 机场的出租车问题

摘要

出租车是许多旅客尤其是商务旅客首选交通工具，也是大型交通枢纽与城市交通衔接的重要方式之一。飞机这种快速且大容量的交通工具给交通枢纽内到达乘客的及时疏散带来巨大的压力。因此从飞机场出来想要打车的乘客与想要载客的出租车之间存在着非常大的交通疏散问题，一方面出租车会在蓄车池内排队等待乘客，另一方面，乘客会在乘车区排队等待出租车，若在上车点处未设置合理地乘车方案，便会造成“人等车一车等人”的局面，这时乘客离开机场的效率会非常低下，并且司机消耗掉的时间成本会较高，这对司机做抉择是否要进入蓄车池排队载客也有一定的影响。

针对问题一，对于送乘客到达飞机场的出租车司机来说，一般会面临两个选择：一是进入蓄车池进行排队等待乘客，但会消耗一定的时间成本；二是空载返回市区进行拉客，但会消耗一定的空载费。因此我们要对这两种选择进行收益期望的计算，其中运用了等待制模型 $M/M/S/\infty^{[1]}$ ，并运用 LINGO 编程来计算数据。用城市各区域人口密度代表乘客去往各区域的概率，再根据城市出租车的实际情况计算出两种方案的司机收益期望，哪个方案的收益期望大，则选择哪个方案。

针对问题二，首先收集了陕西省延安市南泥湾机场以及延安市出租车的相关信息，包括某天某一时间段内进港和出港的航班信息、飞机入座率、乘客打车率、延安各区域居民人数、机场到各区域的距离和时间、延安出租车收费标准等信息。将收集到的这些信息进行整理、分析，例如在实际情况下若目的地过远，开销较大，乘客将不乘坐出租车，我们对于这些地方进行简化取舍，只选取具有代表性的区域进行分析。将筛选出的信息绘制成图或表，再代入问题一中的模型可得到司机的收益期望，由此可以做出判断。

针对问题三，首先将题中所描述的并行车道以及上车点的方案绘制成简单的地图，分析乘客如何在并行车道上进行高效的乘车，以及如何设置上车点，例如上车点的个数和位置。然后构造目标函数，运用等待机制模型的 LINGO 程序计算数据求出合适的上车点个数。最后分析机场乘车区的所存在弊端，并提出了优化方案，可以对等车的乘客实施叫号措施，然后按号码序列排队，并在蓄车池和乘车区内都设置数字显示屏，以便观察蓄车池内的出租车数目和乘车区内叫号数目，进而实行合理又高效的乘车方案。

针对问题四，我们可根据问题一计算得出的出租车收益期望与收集到的出租车收费标准计算出出租车行驶的路程，便以此作为划分长短途的标准。根据问题一中城市不同区域居民人数表示乘客路程为长途短途概率，并以此计算出出租车行驶的路程期望。而根据长短途相差收益可计算出出租车再次返回机场需要搭载多少路程的乘客才能使出租车收益尽量均衡。机场可通过 GPS 或短途票据来确认出租车行驶路程是否为短途。以延安为例进行运算，得出短途出租车再次返回机场需要搭载的最短路程。

关键词：数学期望；等待制模型 $M/M/S/\infty$ ；泊松分布；LINGO

一、问题的重述

大多数乘客下飞机后要去市区（或周边），出租车是主要的交通工具之一。国内多数机场都是将送客（出发）与载客（到达）通道分开的。送客到机场的出租车司机都会面临两个选择：

(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。出租车必须到指定的“蓄车池”排队等候，依“先来后到”排队进场载客，等待时间长短取决于排队出租车和乘客的数量多少，需要付出一定的时间成本。

(B) 直接放空返回市区拉客。出租车司机会付出空载费用和可能损失潜在的载客收益。在某时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数是司机可观测到的确定信息。通常司机的决策与其个人的经验判断有关，比如在某个季节与某时间段抵达航班的多少和可能乘客数量的多寡等。如果乘客在下飞机后想“打车”，就要到指定的“乘车区”排队，按先后顺序乘车。机场出租车管理人员负责“分批定量”放行出租车进入“乘车区”，同时安排一定数量的乘客上车。在实际中，还有很多影响出租车司机决策的确定和不确定因素，其关联关系各异，影响效果也不尽相同。

问题一：分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，综合考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益，建立出租车司机选择决策模型，并给出司机的选择策略。

问题二：收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，给出该机场出租车司机的选择方案，并分析模型的合理性和对相关因素的依赖性。

问题三：在某些时候，经常会出现出租车排队载客和乘客排队乘车的情况。某机场“乘车区”现有两条并行车道，管理部门应如何设置“上车点”，并合理安排出租车和乘客，在保证车辆和乘客安全的条件下，使得总的乘车效率最高。

问题四：机场的出租车载客收益与载客的行驶里程有关，乘客的目的地有远有近，出租车司机不能选择乘客和拒载，但允许出租车多次往返载客。管理部门拟对某些短途载客再次返回的出租车给予一定的“优先权”，使得这些出租车的收益尽量均衡，试给出一个可行的“优先”安排方案。

二、模型假设

1. 问题一以及问题二中，假设只有一个上站口。
2. 假设乘客数和出租车数不受限制，并且遵循泊松分布。
3. 将乘坐出租车的乘客去往各区域的概率近似等于各区域人口数量占整个城市人口数量的比值。
4. 假设出租车在等待过程、乘客上车过程和出租车行驶途中无突发事件，不付出额外成本。

5. 假设乘客上车速率不变，不受外界干扰。
6. 假设本文中所选取数据均真实可靠。

三、符号说明

符号	符号意义
S	服务台个数
λ	单位时间到达的顾客平均数
μ	接待人员单位时间内服务顾客数
W_q	平均等待时间
G	出租车单位时间成本
Q_1	出租车在蓄车池排队所消耗成本
$A_i (i=1,2,3\cdots)$	某城市的各区县名称
$M_i (i=1,2,3\cdots)$	各区县的人口
M	某城市总人口数
$S_i (i=1,2,3\cdots)$	从机场到达各区域的距离
$t_i (i=1,2,3\cdots)$	从机场到达各区域的时间
$C_i (i=1,2,3\cdots)$	从机场到达各区域的利润
$W_i (i=1,2,3\cdots)$	从机场到达各区域的载客费
$P_i (i=1,2,3\cdots)$	从机场去往各区域的概率
E_i	出租车收益期望
Q_2	出租车空车回市区的空载费用
E_t	时间期望
F	每公里的燃油费
U	出租车司机平均每小时收入
S_0	机场到市区的距离
t_0	出租车从机场到市区所用时间
$B_i (i=1,2,3\cdots)$	乘车站上车点

四、问题的分析

4.1 问题一的分析

当出租车送客到机场后，会面临两个选择：一是进入蓄车池排队等待载客，但可能面临等待时间过长的情况，这将会使其付出一定的成本；二是直接离开飞机场，空载返

回市区载客，但司机会付出空载费用和可能损失的潜在载客收益。因此我们需要找到影响司机做决策的各种相关因素，直接因素为司机所获得的收益期望，其次收益期望受乘客人数、蓄车池内排队的出租车数以及拉载乘客的距离有关，天气因素也会对这些因素有一定的影响。我们应综合分析这些因素导致的期望结果，进而为司机作出决策。

4.2 问题二的分析

问题二需要我们搜集国内某机场以及所在城市出租车的相关数据，例如：机场航班数、机场吞吐量、该机场旅客的平均打车率、出租车的时间成本以及拉载乘客的平均距离等。将这些数据代入问题一所建立的模型中即可求出两种方案的收益期望，进行决策。

4.3 问题三的分析

当机场客流量较大时，若乘车区没有相应的高效管理方案，则会造成蓄车池里的出租车排队载客以及乘车区内的旅客排队等出租车的现象，这样使得乘客乘车效率低，出租车驶离机场过慢，因此我们应设置合理的上车点，使得乘车效率提高，使人等车、车等人的现象减缓成只有车等人，提高旅客出行效率。

4.4 问题四的分析

出租车的载客收益与载客的行驶里程有关，乘客的目的地有远有近，但是出租车司机载客时不能选择乘客，若拉载长途乘客则收益大，若拉载短途乘客则受益较小，且司机在蓄车池等待载客需要花费较长时间，需要付出较大的时间成本，这时司机的收益与付出不成正比，较长途司机来说，稍有不公。为了平衡不同司机之间的收益，机场允许出租车司机多次往返载客。而有关管理部门拟对某些短途载客再次返回的出租车给予一定的“优先权”，所以我们应找到一个可行的“优先”方案，使出租车司机之间的收益尽量平衡。

五、模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立

5.1.1 问题一的解题思路

为建立出租车司机选择决策模型，我们综合考虑机场乘客数量的变化，航班信息，天气影响，蓄车池里的待客出租车数量以及出租车的时间成本等因素对出租车司机收益的影响。根据排队模型求解出租车在蓄车池里排队等待时间，进而结合单位时间的成本计算所消耗的总成本。通过对数据的统计计算出乘客去往各区域的利润和概率，则可计算收益期望，用相同的方法也可计算出出租车空载返回市区拉客所获收益期望，进行比较即可得到决策方案。

5.1.2 模型建立

1. 出租车进入蓄车池中等待载客的收益期望

(1) 出租车排队所消耗的成本(不包括燃油费)

首先需要计算排队时间，这里我们用到排队论中的等待制模型 $M/M/S/\infty$ ，出租车

相当于等待制模型中的顾客，乘客相当于等待制模型中的服务接待人员，乘客上车准备出发的时间相当于等待制模型中的顾客接受服务的时间，假设出租车到达蓄车池规律服从参数为 λ 的 Poisson 分布，在 $[0,t]$ 时间内到达的出租车数 $X(t)$ 服从的分布为：

$$P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

其单位时间到达的出租车平均数为 λ ， $[0,t]$ 时间内到达的出租车平均数为 λt 。

乘客上车准备出发的时间服从负指数分布，单位时间内离开蓄车池的出租车平均数为 μ ，乘客上车准备出发时间的分布为：

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

对于每个出租车来说，乘客上车准备出发的平均时间为 $\frac{1}{\mu}$ 。

现考虑只有一个上车点，即对应等待制模型中只有一个服务台（ $s=1$ ）的情形。

可以计算出稳定状态下系统有 n 个出租车的概率为：

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

其中 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 称为系统的服务强度。

则系统没有出租车的概率为：

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

系统中出租车的平均队长为：

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

系统中出租车的平均等待队长为：

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) p_n = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) \rho^n = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

系统中出租车的平均逗留时间为：

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

系统中出租车的平均等待时间为：

$$W_q = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

进而可以得出：

$$L_s = \lambda W_s, \quad L_q = \lambda W_q$$

或

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

该公式称为 Little 公式。

Little 公式直观意义的表述：

$L_s = \lambda W_s$ 表明排队系统的队长等于一个出租车平均逗留时间内到达的出租车数。

$L_q = \lambda W_q$ 表明排队系统的等待队长等于一个出租车平均等待时间内到达的出租车数。

其次，我们要根据不同城市的出租车行情来得到出租车单位时间内的成本价 G （包括保险费、车租费、维修保养费等，但不包括燃油费 F ）。

因此可以得到出租车排队所消耗的成本：

$$Q_1 = G * W_q \quad (1)$$

（2）出租车载客的收益期望

影响出租车司机收益的因素有出租车的运营成本、燃油费、载客费，而载客费 W 又与乘客目的地距离 s 有关，因此我们需要预测出租车所拉载乘客的去向，可以用城市各区域居民人口密度来表示去往各区域的概率。设该城市居民数量为 M ，城市共有 A_1 、 A_2 、 A_3 ... 个区县， A_1 区域内居民数量为 M_1 ， A_2 区域内居民数量为 M_2 ， A_3 区域内居民数量为 M_3 ...，从机场到达 A_1 区域的距离为 S_1 ，时间为 t_1 ；从机场到达 A_2 区域的距离为 S_2 ，时间为 t_2 ；从机场到达 A_3 区域的距离为 S_3 ，时间为 t_3 ...，因此乘客去往各区域的概率即为：

表-1 乘客去往各个区域的概率

区域 A_i	A_1	A_2	A_3	...
概率 $P_i = \frac{M_i}{M}$	$P_1 = \frac{M_1}{M}$	$P_2 = \frac{M_2}{M}$	$P_3 = \frac{M_3}{M}$...

设该城市出租车的起步价为 a 元（ X 公里以内），超出 X 公里至 Y 公里以内每公里收费 b 元，超过 Y 公里后每公里收费 c 元。则出租车司机赚取的载客费 W 可表示为如下函数：

$$W = \begin{cases} a & , s \leq X \\ a + (s - X)b & , X < s \leq Y \\ a + (Y - X)b + (s - Y)c & , s > Y \end{cases} \quad (2)$$

根据此函数可计算出去往 A_1 区域的载客费为 W_1 ，去往 A_2 区域的载客费为 W_2 ，去往 A_3 区域的载客费为 W_3 ...，但司机的所获利润 C 应是载客费减去燃油费和运行成本，

$$\begin{aligned} C_1 &= W_1 - F * S_1 - G * t_1 \\ C_2 &= W_2 - F * S_2 - G * t_2 \\ C_3 &= W_3 - F * S_3 - G * t_3 \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (3)$$

得到表 2

表-2 从机场到达各区域的利润与概率

区域 A	A_1	A_2	A_3	...
从机场到达各区域的利润 C	C_1	C_2	C_3	...
从机场到达各区域的概率 P	P_1	P_2	P_3	...

由此可计算出出租车司机载客的收益期望为

$$E_0 = C_1 * P_1 + C_2 * P_2 + C_3 * P_3 + \dots \quad (4)$$

(3) 出租车选择进入蓄车池中等待载客的收益期望

$$E_1 = E_0 - Q_1 \quad (5)$$

2. 出租车空车返回市区拉客的收益期望

(1) 出租车消耗的空载费用

出租车空载费用包括成本费和燃油费，所以我们要获取出租车的单位时间内的成本价 G 、所在城市的每公里油价 F 、出租车从机场回到市区所跑路程 S_0 以及所用时间 t_0 ，因此空载费为：

$$Q_2 = G * t_0 + F * S_0 \quad (6)$$

(2) 出租车回到市区内载客所获得的收益

需要收集某城市出租车司机每小时平均收入 U 和平均公里数 L ，且设 E_t 为司机从机场载客到达乘客下车点所用的时间期望

表-3 从机场去往各区域的时间与概率

区域 A	A_1	A_2	A_3	...
从机场去往各区域的时间 t	t_1	t_2	t_3	...
从机场去往各区域的概率 P	P_1	P_2	P_3	...

则可得时间期望为：

$$E_t = t_1 * P_1 + t_2 * P_2 + t_3 * P_3 + \dots \quad (7)$$

因为要比较在机场等待载客和空车回市区载客的收益期望，则需要控制两者的时间相同，因此设出租车空车回市区后载客的工作时间为 t_4 ，则有：

$$\begin{aligned} t_4 + t_0 &= W_q + E_t \\ t_4 &= W_q + E_t - t_0 \end{aligned} \quad (8)$$

则所获得收益为：

$$E_2 = U \cdot t_4 - L \cdot F \cdot t_4 - G \cdot t_4 \quad (9)$$

(3) 出租车空车返回市区拉客的收益期望

$$E_3 = E_2 - Q_2$$

3. 将出租车进入蓄车池中等待载客的收益期望与出租车空车返回市区拉客的收益期望进行对比可得出结论，若 $E_1 > E_3$ ，则选择在机场等待载客；若 $E_1 < E_3$ ，则选择空载回市区拉客。

5.2 问题二的求解

5.2.1 问题二的解题思路

在收集数据的过程中，我们并未找到某机场的准确日客流量或者具体航班的客流量，但我们收集到了某机场的航班信息，并且知道该机场的飞机座位数量以及飞机座位的年平均入座率，因此可以估算出具体时间段内的客流量，若能知道该机场的平均打车率，以及平均每辆出租车所载乘客数，即可判断出具体时间段内所要打车的乘客流量，进而判断是否应进入蓄车池内排队等候载客。

5.2.2 问题求解

1. 出租车进入蓄车池中等待载客的收益期望

(1) 出租车排队所消耗的成本(不包括燃油费)

我们收集了国内延安市延安南泥湾机场的进港与出港的航班信息^[2]，并绘制成表，如下

表-4 国内延安市延安南泥湾机场的出港的航班信息

始发地	目的地	时间段	班期
	北京首都	10:35~12:10	5
		12:15~13:50	3 7
		08:20~09:55	1 2 4 6
	北京南苑	20:05~21:25	每天
	西安	21:45~22:40	每天
		12:10~12:55	每天
	上海虹桥	12:10~16:20	每天
	重庆	13:05~14:50	1 3 5 7
	厦门	13:05~18:15	1 3 5 7

延安	广州	13:50~16:50	2 4 6
	青岛	14:55~17:00	1 3 5
	沈阳	14:55~19:35	1 3 5
	杭州	10:30~12:50	6
		11:00~13:20	2 4
		13:10~15:40	5
		13:40~16:10	1 3 7
	南京	06:35~08:55	每天
	深圳	13:15~16:05	1 3 5 7
	长沙	14:25~16:15	2 4 6 7
	天津	09:55~11:15	2 4 6 7
	成都	00:25~02:05	1 2 4 6
	大连	09:10~11:00	1 3 5 7
	温州	12:55~15:40	2 4 6

表-5 国内延安市延安南泥湾机场的进港的航班信息

始发地	目的地	时间段	班期
北京首都		07:55~09:40	5
		08:30~10:15	3 7
		09:40~11:30	1 2 4 6
北京南苑		17:40~19:20	每天
西安		23:05~00:10	每天
		10:35~11:25	每天
上海浦东		06:40~11:25	每天
重庆		10:50~12:20	1 3 5 7
厦门		07:15~12:20	1 3 5 7

广州	延安	10:15~13:00	2 4 6
青岛		11:40~14:05	1 3 5
沈阳		09:00~14:05	1 3 5
杭州		07:05~09:45	6
		07:45~10:15	2 4
		16:55~19:35	5
		17:15~19:55	1 3 7
南京		09:55~12:15	每天
深圳		08:35~11:20	1 3 5 7
长沙		07:05~09:10	2 4 6 7
天津		12:15~13:40	2 4 6 7
成都		05:55~07:20	1 3 5 7
大连		20:50~23:00	1 3 5 7
温州		17:00~19:55	2 4 6

由于 24 小时内乘客打车的概率不同，例如夜间打车率更高，而白天打车率则会略低，因此，我们只选取一天内的某个时间段的航班信息进行分析，选取周一 10:00~15:00 的航班信息并绘制成图，如下

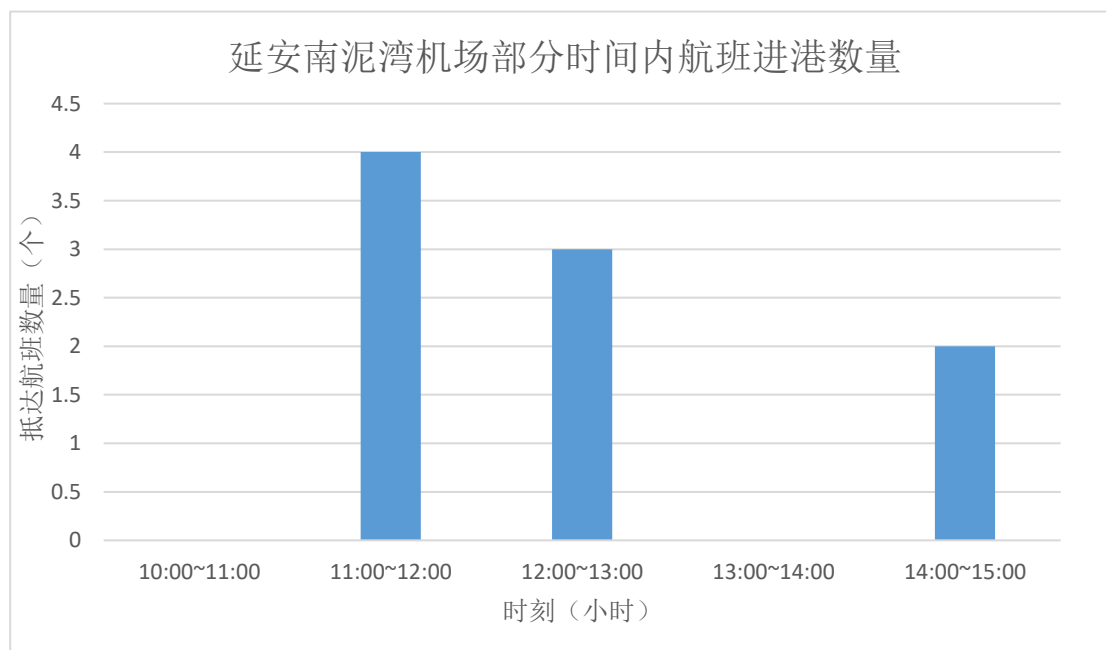


图-1 周一 10:00~15:00 南泥湾机场的进港航班信息

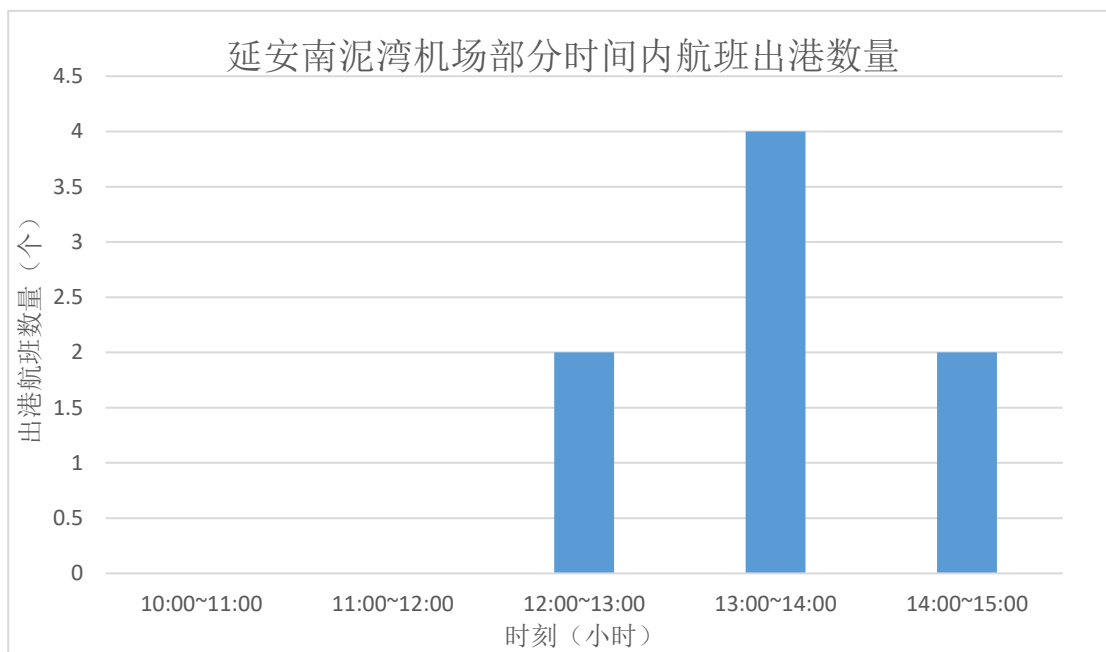


图-2 周一 10: 00~15:00 南泥湾机场的出港航班信息

由道客巴巴某论文^[3]可知，2018 年全国生产统计公报显示延安南泥湾机场 2018 年的吞吐量为 140121 人次，也就是说南泥湾机场每天的旅客吞吐量为 384 人，而该机场每天可提供的座位数为 540（人），那么南泥湾机场平均客座率为：

$$384/540=71\%$$

我们搜集到延安南泥湾机场飞机内座位数量约为 160 个，平均每架飞机入座率为 70%，白天机场打车率约为 15%，平均每量出租车所载乘客为 1.5 人，由图 1 与图 2 可知在 10:00 至 15:00 五个小时内，进港航班数为 9，出港航班数为 8。

那么单位时间内出租车进入蓄车池的数量为：

$$8*160*70\%*15\%\div 1.5\div 5=17.92\approx 18$$

即等待制模型中的单位时间到达的出租车平均数为：

$$\lambda =18 \text{ 辆/h}$$

单位时间内进港乘客需要出租车数量为：

$$9*160*70\%*15\%\div 1.5\div 5=20.16\approx 20$$

根据实际情况推断，乘客上出租车准备出发的时间约 3min，即两辆出租车离开机场时间间隔为 3min，那么等待制模型中单位时间内离开蓄车池的出租车平均数为：

$$\mu=20 \text{ 辆/h}$$

现已知 $\lambda =18$ 、 $\mu=20$ 、 $s=1$ ，运用等待制模型的 LINGO 程序（见附录 1）计算出出租车司机的平均等待时间（如图 3）为：

$$W_q=0.45h=27min$$

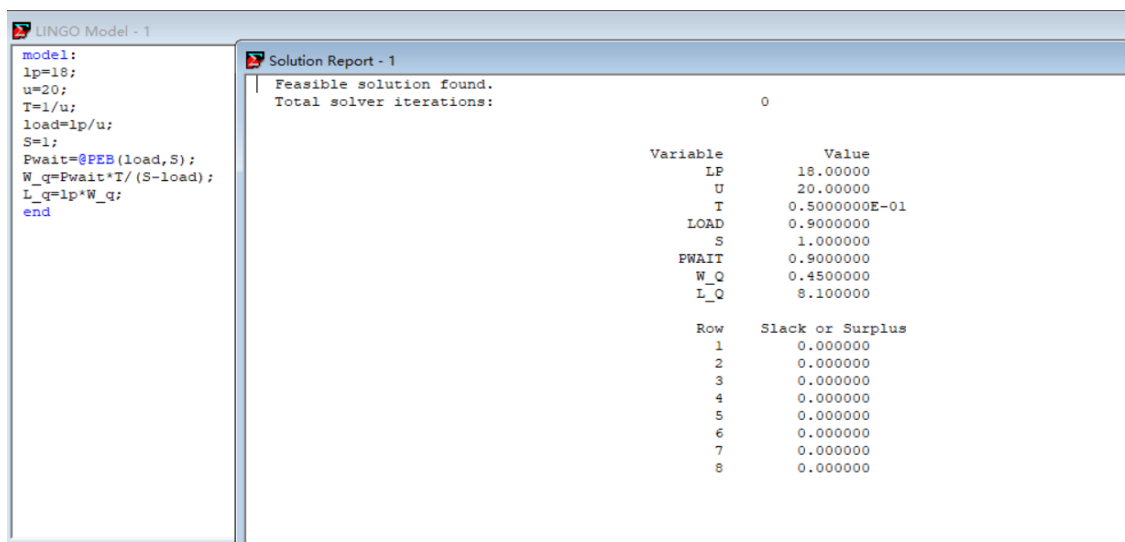


图-3 运用 LINGO 程序计算出出租车司机的平均等待时间

据新浪网新闻^[4]了解到延安市出租车司机平均的运行成本 $G=28$ 元/h，将数据代入（1）式可得，出租车进入蓄车池排队等待载客所消耗的成本为：

$$Q_1=W_q \cdot G=0.45 \cdot 28=12.6 \text{ 元}$$

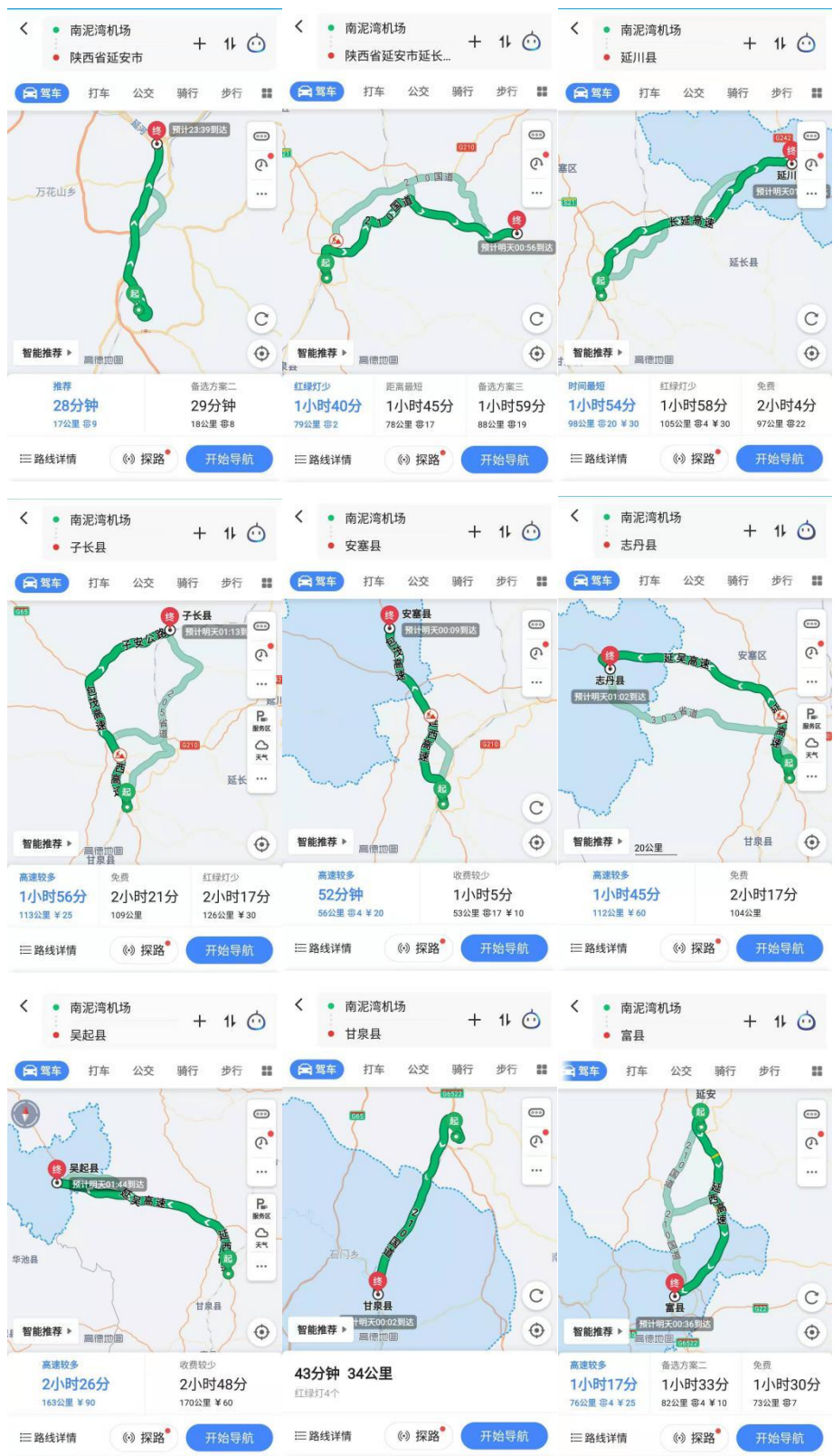
（2）出租车载客的收益期望

据南方财富网新闻^[5]显示延安市共划分为 13 个区域： A_1 延安市、 A_2 延长县、 A_3 延川县、 A_4 子长县、 A_5 安塞县、 A_6 志丹县、 A_7 吴起县、 A_8 甘泉县、 A_9 富县、 A_{10} 洛川县、 A_{11} 宜川县、 A_{12} 黄龙县、 A_{13} 黄陵县，共有居民人数为 1574778 人，各区域居民数量以及南泥湾机场到各区域的距离（如图 4）表示如下：

表-6 各区域居民数量以及南泥湾机场到各区域的距离

区域 A	各区域居民人数 M_i	机场到各区域距离 S_i
A_1	289835	17 公里
A_2	123859	79 公里
A_3	130901	98 公里
A_4	177201	113 公里
A_5	127103	56 公里
A_6	91734	112 公里
A_7	98940	163 公里
A_8	59939	34 公里
A_9	120121	76 公里
A_{10}	154899	104 公里
A_{11}	96573	142 公里
A_{12}	46183	195 公里
A_{13}	87490	135 公里

据高德地图可知由南泥湾机场到各区域距离以及时间，如图 4 所示



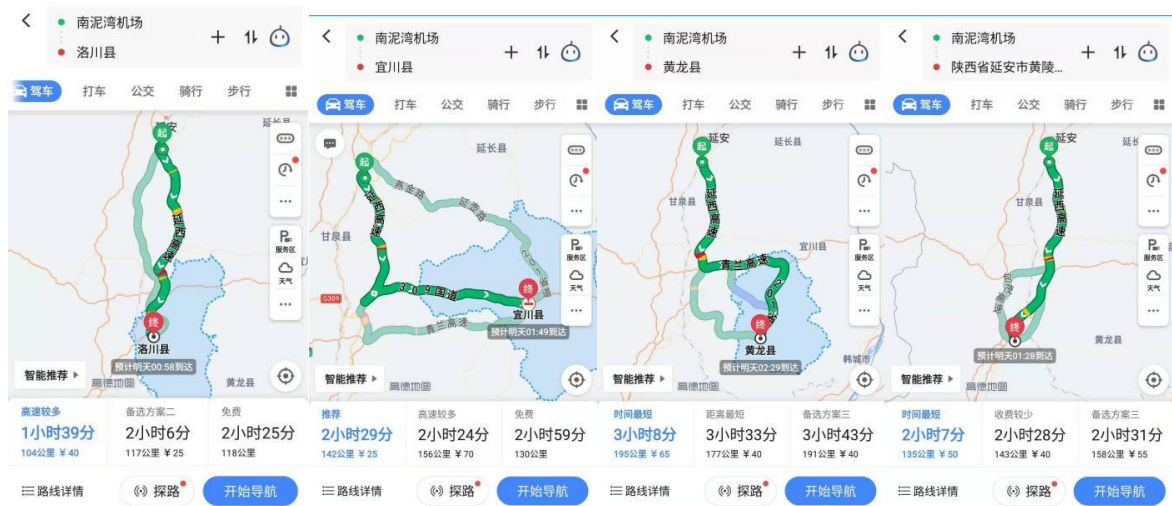


图-4 南泥湾机场到各区域距离以及时间

而在实际情况下，若目的地与机场距离过远，选择出租车会有较大开销，例如从南泥湾机场到距离 113 公里的子长县所需费用大约 400 元，因此打车到该地区的概率极小，乘客大概率会选择乘坐机场大巴或其他交通工具，所以我们可以忽略有乘客打车到达 100 公里以外地区的情况。由此可筛选出六组数据，如表 7

表-7 各区域人口数及机场到各区域距离

区域	各区域居民人数	机场到各区域距离
A ₁	289835	17 公里
A ₂	123859	79 公里
A ₃	130901	98 公里
A ₅	127103	56 公里
A ₈	59939	34 公里
A ₉	120121	76 公里

这六个区域共有 851758 个居民，根据 $P=M_i/M$ 可计算出各个区域的居民人口区域密度即乘客去往各区域的概率，结果如图 5

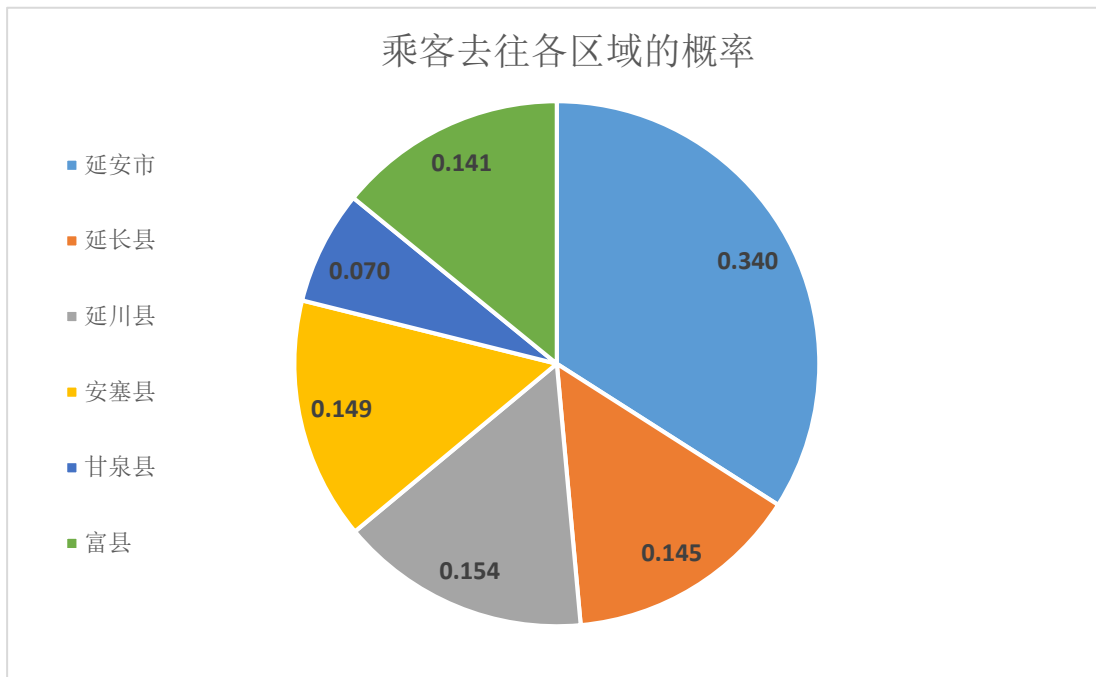


图-5 乘客去往各区域的概率

据腾讯网新闻^[6]延安市的出租车收费情况如下：起步价 $a=7$ 元 ($X=3$ 公里以内)，超出 $X=3$ 公里至 $Y=10$ 公里以内每公里收 $b=1.50$ 元，超过 $Y=10$ 公里每公里收费 $c=2.25$ 元，每个小时成本 G 约为 28 元，每公里消耗油费 F 为 0.4 元，司机日平均收入为 400 元，每天平均工作 14 个小时，平均每个小时收入 U 为 29 元，在市区内平均车速为 60 公里每小时。代入 (2) 式可计算出去往各区域的载客费用 W ，如图 6

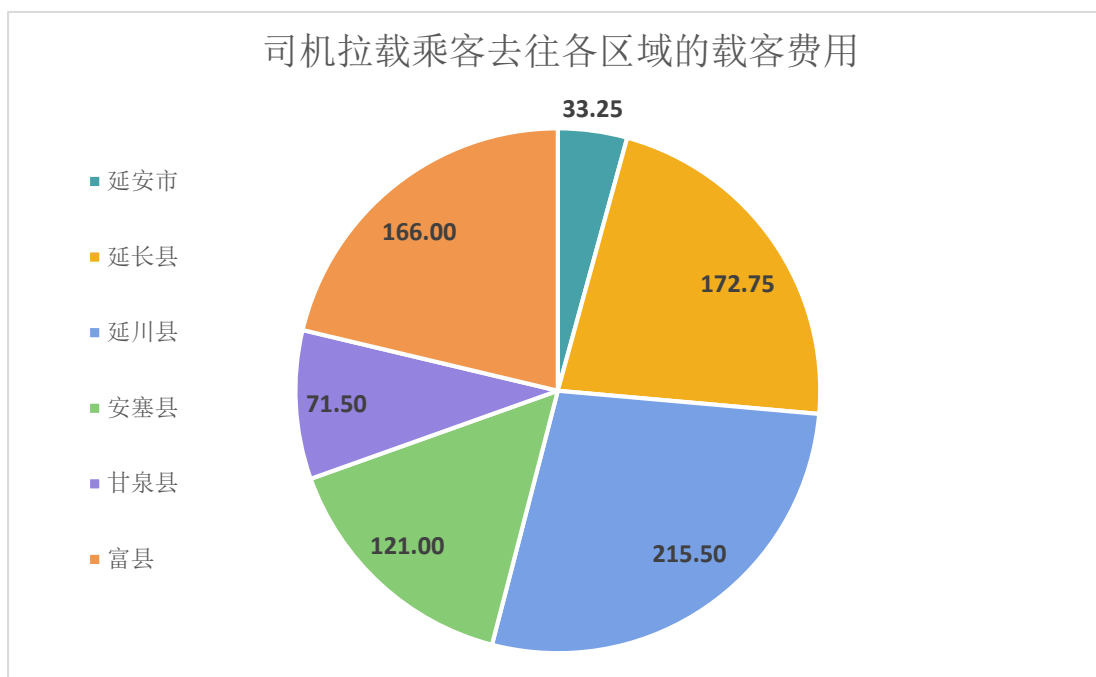


图-6 司机拉载乘客去往各区域的载客费用

代入（3）式可计算出司机所得利润 C ，如图 7

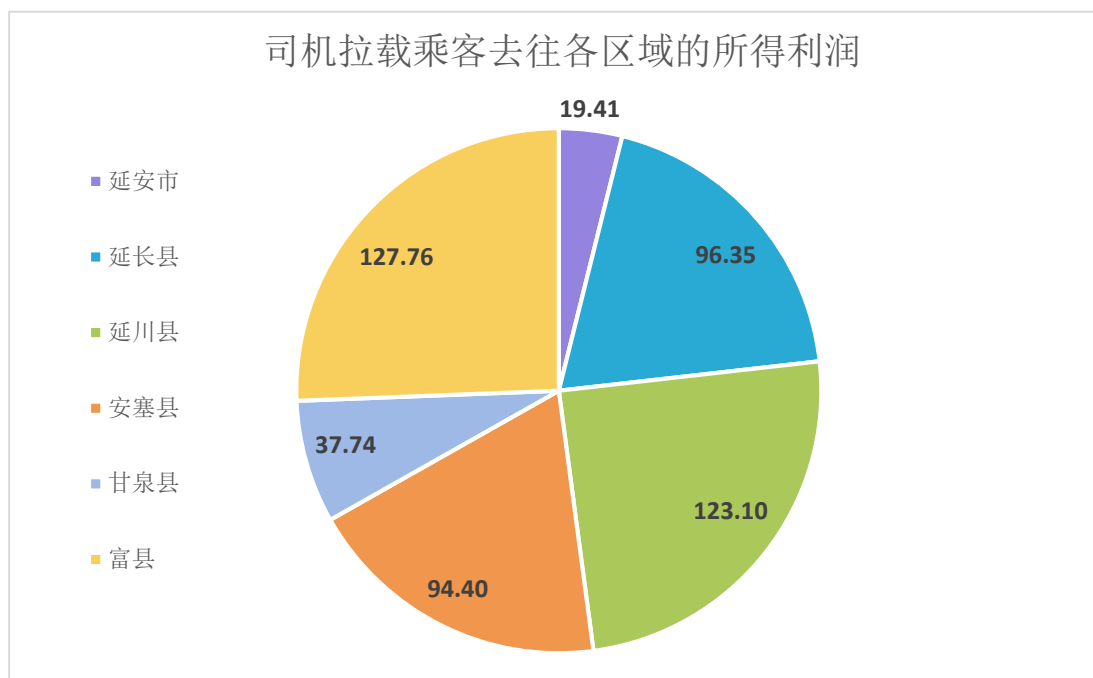


图-7 司机拉载乘客去往各区域的所得利润

将数据代入（4）式可以得出出租车司机载客的收益期望为：

$$E_0 = 74.25 \text{ 元}$$

(3) 出租车选择进入蓄车池中等待载客的收益期望：

将 E_0 和 Q_1 代入(5)式中，得到出租车司机选择进入蓄车池中等待载客的收益期望为：

$$E_1 = E_0 - Q_1 = 74.25 - 12.6 = 61.65 \text{ 元}$$

2. 出租车空车返回市区拉客的收益期望

(1) 出租车消耗的空载费用

据高德地图显示出租车从南泥湾机场回到市区所跑路程 $S_0 = 17\text{km}$ ，以及所用时间 $t_0 = 0.47\text{h}$ ，将 F 、 G 、 S_0 和 t_0 代入(6)式方程中可得空载费为：

$$Q_2 = G \cdot t_0 + F \cdot S_0 = 28 \cdot 0.47 + 0.4 \cdot 17 = 19.96 \text{ 元}$$

(2) 出租车回到市区内载客所获得的收益

E_t 需要根据从机场到各区域的时间 t_i 与乘客到各区域的概率 P_i 来计算如表 8

表 8 机场到各区域的时间

t_1	t_2	t_3	t_5	t_8	t_9
0.47 小时	1.67 小时	1.9 小时	0.87 小时	0.72 小时	1.28 小时

根据(7) ~ (9)式, 得到时间期望、出租车空车回市区后载客的工作时间和出租车回到市区内载客所获得的收益为:

$$E_t = 1.06h$$

$$t_4 = W_q + E_t - t_0 = 0.45 + 1.06 - 0.47 = 1.04h$$

$$E_2 = U * t_4 - L * F * t_4 - G * t_4 = 29 * 1.04 - 60 * 0.4 * 1.04 - 28 * 1.04 = -23.92 \text{ 元}$$

(3) 出租车空车返回市区拉客的收益期望

根据(10)式得

$$E_3 = E_2 - Q_2 = -23.92 - 19.96 = -43.88 \text{ 元}$$

3. 对比结果, 得出决策方案

在蓄车池中排队等待载客的收益期望 $E_1 = 61.65 \text{ 元}$

空载返回市区拉客的收益期望 $E_3 = -43.88 \text{ 元}$

可判断 $E_1 > E_3$, 那么我们将选择在蓄车池排队等待载客。

5.2.3 模型分析

本文为了解决某城市出租车司机在某时刻到达机场选择是否载客回市区的问题, 选择运用排队论与概率期望求解。排队论通过泊松分布与机场乘客人数可计算出出租车司机在蓄车池平均等待时间, 概率期望将城市各区域居民人口密度作为出租车搭载乘客去向概率分布, 可计算出某城市出租车司机选择在蓄车池等待载客的期望收益和选择空车回市区载客的期望收益, 通过两者的比较可以判断出租车司机是否等待载客。

而在这种方法中, 我们用城市各区域居民人数密度来预估乘客的去向, 但是某些城市各区域占地面积较大, 所以我们取一个中间值来代表机场到各个区域的平均距离, 会与实际情况出租车行驶路程有出入, 影响判断出租车司机的收益。若要建立更精确的数学模型, 可运用模糊因子分析模型得到机场到各区域的平均距离, 再建立评价模型来决策出租车司机的选择策略, 但由于时间原因和数据的有限性我们选择用概率期望来粗略估计, 在此将不作具体研究。另外, 白天和夜间到达机场的乘客乘车概率不同, 也会影响出租车的收益期望。而我们只对白天某一时段内进行分析, 从而影响模型的普遍性。且当有其他因素干扰时, 乘客的去向会发生很大变化。例如节假日 (尤其是春运期间)、旅游旺季、天气等不可控因素、城市开展大型会议或举办大型活动等, 若有这些因素干扰, 客流量会非常大, 乘坐出租车到机场和从机场打车回市区的人都会有很多, 这个时候虽然蓄车池里车辆数目很大, 但是乘客的乘坐速度和乘坐率也会大幅提升, 那么司机载客的几率也会大幅提高。

5.3 问题三的求解

5.3.1 问题三的分析

在现实生活中，由于上车点的出租车与乘客未能高效的进行“进站—上车—离站”这一过程，导致经常会出现出租车在蓄车池排队载客和乘客排队乘车的情况，这对双方都有弊端，因此我们考虑对上车点的数量进行控制，虽然上车点越多，乘客上车的效率越大，但是已上车的乘客会因为站内车辆过多而无法尽快离开上车点，依旧需要花费时间排队离开上车点，在这里我们依旧运用等待制模型进行计算合理的上车点数量。

5.3.2 问题求解

1. 问题分析

某机场设有两条车道，为了提高乘车效率，出租车应并行进入两条车道进行拉载客人，但若只有一个上车点，则乘客上车的时间会较长，所以应设置多个上车点，乘客在多个上车点同时进行排队，如图 8，当出租车管理人员放一批车进入乘车区后，出租车应按顺序停到各个上车点 B_i ，每个上车点的乘客只能乘坐该上车点的两辆出租车，且多个上车点的乘客同时进行上车，因此短时间内即可使进入的出租车载好乘客准备出发，当这批出租车驶出乘客区后，管理人员即可立即放入下一批车辆。

但如若设置的上车点数量过多，则将会使车队驶出乘客区的时间加长，因此应设置合适的上车点，使乘客高效的乘车离开机场。

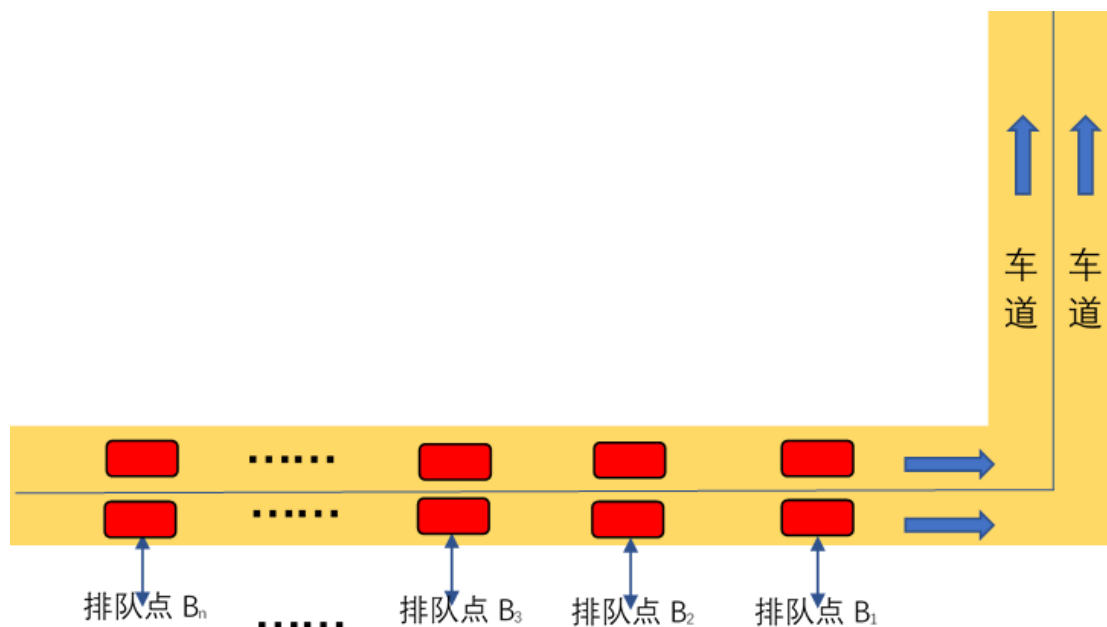


图-8 并行车道排队点示意图

2. 求解上车点的个数

(1) 模型建立

如果多设置一个站口，则会多出大概一个停车位的长度 6m，若汽车起步速度算作 10km/h，那么多出的时间即为

$$t' = 2.16s = 0.0006h$$

因为是双排车道，所以有两伙乘客同时上两辆出租车准备出发，根据实际情况推断，这段时间约 5min，一辆出车平均人数为 V ，那么 5min 会有 $2V$ 个人上车准备出发，那么等待制模型中单位时间内离开排队处的平均数

$$\mu' = 24V \text{ 人/h}$$

若乘客按 Poisson 分布到达排队处，且知道平均每小时到达排队处的，即等待制模型中的参数 λ' ，则能够运用问题一中的 LINGO 程序（见附录 1）算出乘客排队的平均等待时间 W_q' ，进而可以运用 LINGO 程序（见附录 2）计算出合适的上车点数量。

(2) 模型求解

以延安南泥湾机场为例，平均一辆出租车为 1.5 人，则 $\mu' = 36$ 人/h。

从周一 10:00 至 15:00 之间有 9 辆航班进港，延安南泥湾机场飞机内座位数量约为 160 个，平均每架飞机入座率为 70%，白天机场打车率约为 15%，因此单位时间内到达排队处的人数约为

$$\lambda' = 9 * 160 * 70\% * 15\% \div 5 = 30.24 \approx 30 \text{ 人/h}$$

将 $\lambda' = 30$ ， $\mu' = 36$ ， $S = 1$ 代入问题一中的 LINGO 程序（见附录 1），可得出如图 9 的乘客排队的等待时间

$$W_q' = 0.139\text{h}$$

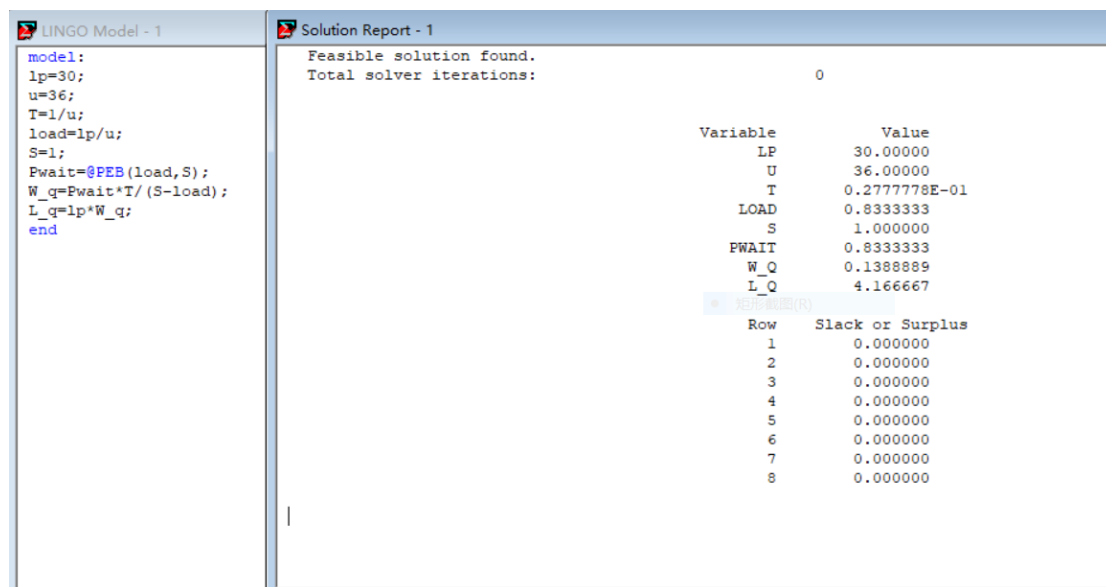


图-9 运用 LINGO 程序乘客排队的等待时间

由此可构建目标函数

$$\min z = t' * S + W_q' * L_s$$

其中，S 为上车点数量；L_s 为等待乘客队长。

将 λ'=30, μ'=60 代入 LINGO 程序（见附录 2），则可得到如图 10 的合适上车点数量

$$S=4$$

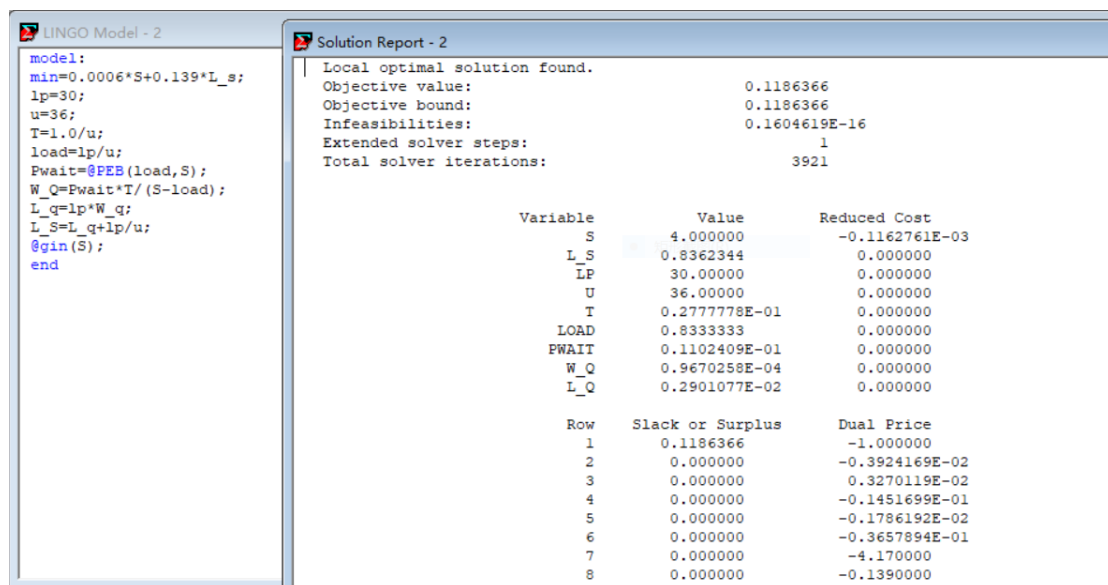


图-10 运用 LINGO 程序得出上车点数

当上车点数 S=4 时，所用时间 z=0.119h=7.14min，此时为最短时间，乘车效率最高。

3. 方案优化

为了让等待载客的出租车了解等车乘客所叫出租车数量，以及等车的乘客了解自己所处队伍位置，可在各个排队点以及蓄车池设置数字显示屏以便查看实时信息，如图 11

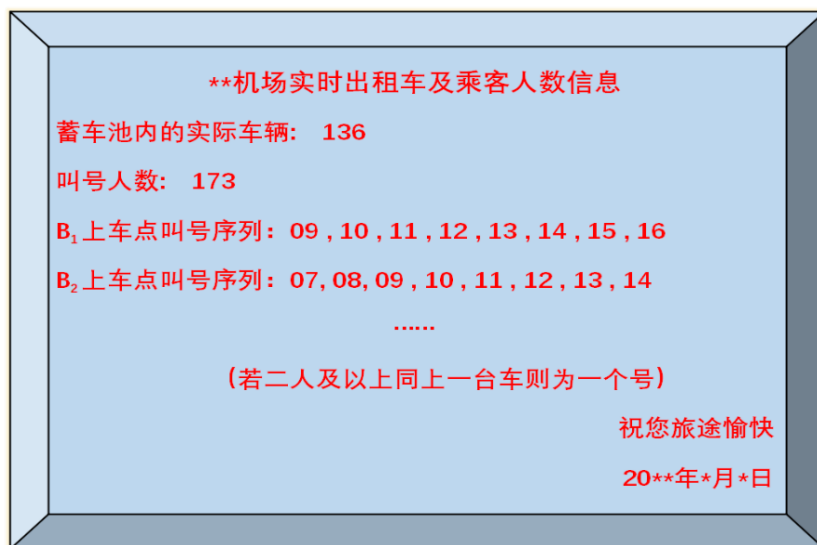


图-11 数字显示屏

设置数字显示屏，一是方便出租车司机了解目前已叫出租车数量和蓄车池内出租车数量，进而可以大概估计出等待时间以及判断是排队载客还是空载回城；二是便于等待乘客了解到自己排在第几位，大概估计等车时间；三是方便出租车调度人员进行管理，如若叫号数量多于蓄车池内出租车数目，即供不应求，那么调度人员应尽快安排出租车进入蓄车池，等待载客，减少了人等车的情况。

5.4 问题四的求解

5.4.1 问题四的解题思路

为了均衡出租车司机收益，机场给予再次返回机场的短途司机一定的“优先权”，即可不排队直接进入出租车短途专用道。我们可根据问题一计算得出的出租车收益期望与收集到的出租车收费标准计算得出出租车行驶的路程，便以此为划分长短途的标准。根据问题一中城市不同区域居民人数表示乘客路程为长途短途概率，并以此计算出出租车行驶的路程期望。而根据长短途相差收益可计算出出租车再次返回机场需要搭载多少路程的乘客才能使出租车收益尽量均衡。

5.4.2 问题求解

不同城市的短途与长途区分标准不同，应与机场位置、机场到城市各区域的距离有关。

在第一个问题中，我们根据某城市机场到城市各地区的距离、机场乘客到各地区的概率、城市出租车收费标准、出租车成本价以及所需要的燃油费得出了出租车司机载客的期望收益 E_1 。而由城市出租车的收费标准和 E_1 可计算出在期望收益下，出租车行驶的 D 公里，可以此距离作为长途和短途的划分标准。

且需要考虑短途司机再次返回应该搭载短途或长途的乘客，才能平衡司机的收入。这时只需要根据上面所求的 D 公里划分，可求出在 D 公里内各区域乘客去向概率和在 D 公里之外各区域乘客去向概率,如表 9、表 10

表-9 出租车去往 D 公里之内各区域的距离与概率

D 公里之内区域	R_1	R_2	R_3	...
到机场平均距离	S_1'	S_2'	S_3'	...
去往各区域概率	V_1	V_2	V_3	...

表-10 出租车去往 D 公里之外各区域的距离与概率

D 公里之外区域	H_1	H_2	H_3	...
到机场平均距离	J_1	J_2	J_3	...

去往各区域概率	K_1	K_2	K_3	...
---------	-------	-------	-------	-----

由此求出短途行驶的路程期望 Z_1 和长途行驶的路程期望 Z_2 :

$$Z_1 = S_1' * V_1 + S_2' * V_2 + S_3' * V_3 + \dots$$

$$Z_2 = J_1 * K_1 + J_2 * K_2 + J_3 * K_3 + \dots$$

$Z_2 - Z_1$ 即为长短途相差距离 Z_3 。且要考虑司机再次返回机场时的空载费用 Q ，则短途司机再次返回拉客时，需补上长短途相差路程 Z_3 与空载费用 Q 可走路程 Z_4 之和 Z_5 ，才能平衡司机收益。

运算得出：

$$Q = G * Z_1 / 90 + Z_1 * F$$

其中 90 为去往机场走高速的平均速度。

$$Z_4 = \begin{cases} X & , Q < a \\ \frac{X + (Q - a)}{b} & , a < Q < a + (Y - X) * b \\ \frac{Y + (Q - a - (Y - X) * b)}{c} & , Q > a + (Y - X) * b \end{cases}$$

所以求得：

$$Z_5 = Z_2 - Z_1 + Z_4$$

那么短途出租车返回机场后，机场应该给其安排相应里程的乘客才可以均衡收益。

安装 GPS 出租车可供机场进行实时定位，从而可根据定位的路线确定出租车行驶路程为长途或短途；对于未安装 GPS 的出租车，机场可向出租车司机发放短途票据，在询问乘客目的地后登录车辆信息，从而确认该车辆为短途车辆。而在出租车司机搭载短途乘客离开后，司机可选择是否回到机场。若短途司机再次回到机场，机场可通过车辆信息或票据确认该车为短途车辆，那么出租车司机将会拥有不排队而直接进入出租车短途专用道的“优先权”。

以陕西省延安市和南泥湾机场为例，由问题二获得以下数据：

$E1=61.65$ 元 $a=7$ 元 $b=1.5$ 元 $c=2.25$ 元 $X=3$ 公里 $Y=10$ 公里 $G=28$ 元 $F=0.4$ 元

当收益期望为 61.65 元时，设出租车行驶里程为 D 公里，出租车从机场回市区走高速的平均速度为 90km/h，可得方程如下：

$$7 + 7 * 1.5 + (D - 10) * 2.25 - D * 0.4 - D / 90 * 28 = 61.65$$

可解得：

$$D \approx 30.15 \text{ km}$$

根据此距离我们可以判断出延安市从南泥湾机场出发，以 $D=30.15 \text{ km}$ 为分界线，出租车行驶路程小于或等于 $D=30.15$ 公里为短途，则出租车司机再次返回机场时可拥有“优

先权”；出租车行驶路程大于 $D=30.15$ 公里为长途，则不拥有“优先权”。

表-11 出租车短途去往各区域的距离与概率

短途	R_1
到机场距离	17km
去往各区域概率	1

表-12 出租车长途去往各区域的距离与概率

长途	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
到机场距离	79km	98km	56km	34km	76km
去往各区域概率	0.220	0.233	0.226	0.107	0.214

由上文公式求得：

$$Z_1=17*1=17\text{km}$$

$$Z_2=79*0.22+98*0.233+56*0.226+34*0.107+76*0.214=72.772\text{km}$$

$$Q=28*17/90+17*0.4=12.1 \text{ 元}$$

$$Z_4=3+(12.1-7)/1.5=6.4\text{km}$$

$$Z_5=72.772-17+6.4=62.172\text{km}$$

因此得出在这一时间段内，当短途司机再次返回机场时，机场需要安排路程至少为 62.172 公里的乘客才能均衡出租车司机收益。

六、模型评价

6.1 模型评价

本文亮点为等待制模型，发现出租车排队或乘客排队都与排队论中的服务人员接待顾客机制相似，因此多次用到该模型进行数据计算，且不同城市均可根据此模型得到不同的结果，通过等待制与泊松分布可较为精确的计算出租车等待时间。

但若因不可控因素出现而导致客流量变化过大，此模型模拟结果会与现实结果有较大差距；用机场到各区的平均距离代表乘客到达各区域的距离计算乘车费用会与实际情况有出入；文中所使用出租车计费方法较简便，实际生活中计费方法较繁琐，在计算出出租车司机收益是会有误差；而且本文为了解决某城市出租车司机在某时刻到达机场选择是否载客回市区的问题，选择运用排队论与概率期望求解。而在概率论这种方法中，我们用城市各区域居民人数密度来预估乘客的去向，但是某些城市各区域占地面积较大，所以我们取一个中间值来代表机场到各个区域的平均距离，会与实际情况出租车行驶路程有出入，会影响判断出租车司机的收益。若要建立更精确的数学模型，可运用模糊因子分析模型得到机场到各区域的平均距离，再建立评价模型来决策出租车司机的选择

策略，但由于时间原因和数据的有限性我们选择用概率期望来粗略估计，在此将不作具体研究。另外，白天和夜间到达机场的乘客乘车概率不同，也会影响出租车的收益期望。而我们只对白天某一时段内进行分析，从而影响模型的普遍性。且当有其他因素干扰时，乘客的去向会发生很大变化。例如节假日（尤其是春运期间）、旅游旺季、天气等不可控因素、城市开展大型会议或举办大型活动，若有这些因素干扰，客流量会非常大，乘坐出租车到机场和从机场打车回市区的人都会有很多，这个时候虽然蓄车池里车辆数目很大，但是乘客的乘坐速度和乘坐率也会大幅提升，那么司机载客的几率也会大幅提高。

6.2 模型改进

对于数据的处理应用更精确的方法，可以尝试模糊因子分析模型、灰箱模型等方法。

参考文献

- [1]肖华勇.实用数学建模与软件应用.陕西：西北工业大学出版社，2014
- [2]吉洁，高飞.搜狐网.http://www.sohu.com/a/301638739_100034177
- [3]道客巴巴.<https://www.doc88.com/p-8478524646115.html>
- [4]刘德宾.新浪新闻.
<https://news.sina.cn/gn/2015-09-07/detail-ifxhqtsx3582384.d.html?from=groupmessage>
- [5]南方财富网.<http://www.southmoney.com/paihangbang/201710/1688876.html>
- [6]腾讯新闻.<https://xw.qq.com/xian/20160603046255?from=groupmessage>

附录

附录 1.

LINGO 程序:

```
model:
lp=18;
u=20;
T=1/u;
load=lp/u;
S=4;
Pwait=@PEB(load,S);
W_q=Pwait*T/(S-load);
L_q=lp*W_q;
end
```

附录 2.

LINGO 程序:

```
model:
min=0.028*S+0.45*L_s;
lp=18;
u=20;
T=1.0/u;
load=lp/u;
Pwait=@PEB(load,S);
W_Q=Pwait*T/(S-load);
L_q=lp*W_q;
L_S=L_q+lp/u;
@gin(S);
end
```