2021 年秋研究生《随机过程》期末复习题参考答案

一、判断题

第二章 随机过程的基本概念

1、确定性信号可以用一个或几个时间 t 的确定性函数来描绘，而随机信号则不能。（对）

2、对随机过程作重复多次的观测时，各次所得到的时间 t 的函数具有相同的形式。（错）

3、随机过程实际上是一个特殊的随机变量。（对）

4、可以用研究多维随机变量的方法来研究随机过程。（对）

5、数学期望和方差不仅描述了随机过程在各个时刻上取值的特性，还能反映随机过程不同时刻取值之间的内存联系。（错）

6、具有相同的数学期望和方差的两个随机过程统计特性相同。（错）

7、自相关函数的绝对值越大，表示相关性越强。（对）

8、一般而言，自相关函数的两个时刻相隔越远，自相关函数的绝对值就越小。（对）

9、自相关函数可以反映随机过程两个时刻之间的相关性，协方差函数则不能。（错）

10、二阶矩过程的自相关函数必定存在。（对）

11、平稳随机过程的统计特性在相当长的时间内是不变的。（对）

12、如果随机过程 $X(t)$的任意 n 维概率密度在时间上平移任意△

t 后，此函数不变，则称 $X(t)$为广义平稳随机过程。（错）

13、狭义平稳随机过程的任意维概率密度与时间起点无关，即 $X(t)$与 $X(t+\triangle t)$ 有相同的统计特性。（对）

14、狭义平稳随机过程的一维概率密度与时间无关。（对）

15、广义平稳随机过程必定是狭义平稳的，而狭义平稳的随机过程则未必是广义平稳的。（错）

16、相关时间小，意味着相关系数随 τ 的增大而迅速减小，这说明随机过程随时间而激烈变化；反之，相关时间大，则说明随机过程随时间变化缓慢。（对）

17、平稳随机过程的自相关函数是实偶函数。（错）

18、设随机过程 $X(t)=u_m sin(\omega_0 t+\Phi)$，其中 u_m 和 ω_0 皆为常数，Φ为 [0,2π]上均匀分布的随机变量，则 $X(t)$为一平稳随机过程。（对）

19、设随机过程 $X(t)=At$，A 为在[0,1]上均匀分布的随机变量，则 $X(t)$是平稳过程。（错）

20、设随机过程 $Z(t)=Xcost+Ysint$，$-\infty<t<\infty$，其中 X，Y 为相互独立的随机变量，并分别以概率 2/3、1/3 取值-1 和 2，则 $Z(t)$既是广义平稳随机过程，又是狭义平稳随机过程。（错）

21、设随机过程 $X(t)=X(k)$ ，$k=\ldots-2,-1,0,1,2\ldots$， $X(k)$为相互独立且具有相同分布的随机变量序列，已知 $E[X(k)]=0$，$E[X^2(k)]=\sigma_X^2$。则 $X(t)$既是广义平稳随机过程，又是狭义平稳随机过程。（对）

22、确定信号为特殊的随机信号，如果称某个确定信号为平稳的，意味着该信号为常量。（对）

23、若平稳随机过程的功率谱密度函数在$\omega=0$处含有冲激，则该随机过程一定隐含周期性。（错）

24、平稳随机过程一定是各态历经的。（错）

25、若平稳随机过程的协方差函数$K_X(\tau)$不满足$K_X(\infty)=0$，则该过程必定隐含周期性。（对）

第三章 随机过程的线性变换

1、设有一线性时不变系统，如果输入过程$X(t)$是狭义平稳的，则输出过程Y(t)也是狭义平稳的；如果输入过程$X(t)$是广义平稳的，则输出过程$Y(t)$也是广义平稳的。（对）

2、如果随机变量序列$\{X_n\}$依均方收敛于随机变量X，则必依概率收敛于X；反之亦然。（错）

3、设随机过程$X(t)$的相关函数为$R_X(t_1,t_2)$，如果$R_X(t_1,t_2)$沿时间轴$t_1=t_2=t$处处连续，则随机过程$X(t)$于每一时刻都是依均方收敛意义下连续的。（对）

4、当随机过程$X(t)$依均方收敛意义连续，则其均值$m_X(t)$亦必为连续的。（对）

5、平稳随机过程$X(t)$与其导数过程在同一时刻是不相关的。（对）

6、若两个随机过程的均方导数相等，则它们只相差一个随机变量或一个常数。（对）

第四章 白噪声和高斯随机过程

1、平稳白噪声的自相关函数是冲激函数。（对）

2、白噪声在任意相邻时刻的取值是不相关的。（对）

3、白噪声的平均功率是无限的。（对）

4、如果两个随机变量 X_1 和 X_2 是联合正态的，则它们的边缘分布也是正态分布的。（对）

5、两个正态随机变量如不相关，则必相互独立。（对）

6、如果两个随机变量 X_1 和 X_2 是联合正态的，则它们的条件分布也是正态分布的。（对）

7、对于正态过程而言，广义平稳与狭义平稳的概念是等价的。（对）

8、一般平稳正态噪声与信号之和是非平稳的正态过程。（对）

9、若正态随机过程在某两个时刻互不相关，则在该两个时刻相互独立。（对）

10、若正态随机过程平稳，则其均值函数及相关函数可以确定其全部统计特性。（对）

第七章 马尔可夫随机过程

1、齐次马尔可夫链任意两个不同时刻的联合分布律及转移概率只与时刻差有关。（错）

2、如果齐次马尔可夫链可以从任意一个状态转移到任意状态，则一定遍历或渐近平稳。（错）

3、对于有限状态的马尔可夫链，至少有一个状态为常返态。（对）

4、若马尔可夫链为齐次的，则其任意时刻的概率密度分布函数不随时间变化而变化。（错）

5、马尔可夫链的状态转移矩阵的所有元素值非负，且任意行内

的所有元素值之和为 1，任意列内的所有元素值之和也为 1。（错）

6、齐次马尔可夫链的状态转移矩阵刻画了其全部的统计特性。（错）

二、填空题

第二章 随机过程的基本概念

1、自然界的信号通常可以分两大类：确定性信号和随机信号。

2、随机过程 $X(t)$的一维分布函数取决于给定的时刻 t 和 t 时刻相应的状态取值 x。

3、随机过程的数学期望表示随机过程的瞬时统计均值。

4、随机过程的方差描述了随机过程诸样本偏离其数学期望的程度。

5、随机过程的自相关函数反映了随机过程在任意两个不同时刻取值之间的相关程度。

6、均值（数学期望）、方差与均方值是刻画随机过程在某个孤立时刻状态的数字特征，而自相关函数和协方差函数则是刻画随机过程自身在两个不同时刻状态之间的线性依从关系的数字特征。

7、随机过程按状态和时间的连续性可以分成连续随机过程、连续随机序列、离散随机过程与离散随机序列四类。

8、随机相位信号包含了无穷多个样本函数。

9、平稳随机过程的主要特点是其统计特性不随时间的平移而变

化，它的初始时间可以任意选择，其统计特性与时间起点的选择无关。

10、平稳随机过程的两个条件是数学期望为一常数和相关函数仅与时间间隔相关。

11、设 $X(t)$， $-\infty<t<\infty$ 是平稳随机过程，自相关函数 $R_X(\tau)=\alpha e^{-\beta|\tau|}$，其中 α,β 是正数，则 $X(t)$ 的功率谱密度为________。

12、对于均值为 m_X 、相关函数为 $R_X(\tau)$ 的各态经历随机过程的任意样本函数 $x(t)$，必有： $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt=$______$m_X$________，$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t+\tau)x(t)dt=$_____$R_X(\tau)$_________。

13、若平稳随机过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2|\tau|}+\frac{1}{4}$，则该过程的直流功率为__1/4____。

14、随机信号的功率谱密度从频域反映了随机信号的统计特性，它表示信号的平均功率在整个频率轴上的分布情况。

第三章 随机过程的线性变换

1、线性变换的两个基本特性是齐次性和叠加性。

2、平稳随机过程 $X(t)$依均方收敛意义下连续的充要条件是其相关函数 $R_X(\tau)$在 $\tau=0$ 处连续。

3、平稳随机过程 $X(t)$可导的充要条件是其相关函数 $R_X(\tau)$在 $\tau=0$ 处存在一、二阶导数。

第四章 白噪声和高斯随机过程

1、平稳高斯过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(\tau)=6e^{-|\tau|/2}$，则随机变量 $X(t)$，$X(t+1)$，$X(t+2)$和 $X(t+3)$的协方差矩阵 $K=$_______________。

2、若零均值二维联合正态分布随机变量 X 、Y 的联合概率密度分布函数为 $f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi A}\exp\{-(\frac{x^2}{6}-\frac{xy}{9}+\frac{y^2}{13.5})\}$，则随机变量 X 的方差为_____，Y 的方差为_____， X 、Y 的相关系数为_____， $A=$_____。

3、常见的限带随机信号有低通随机信号和带通随机信号。

4、当白噪声通过低通滤波器后，其输出是低通随机信号。

5、当白噪声通过带通滤波器后，其输出是带通随机信号。

6、平稳白噪声的特点是平稳白噪声的功率谱在整个频率轴上的分布是均匀的。

第七章 马尔可夫随机过程

1、设马尔可夫链的状态集为$\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$， s 时刻到 r 时刻及 r 时刻到 n 时刻的状态转移概率为 $p_{ik}(s,r)=P\{X(r)=a_k\mid X(s)=a_i\}$、

$p_{kj}(r,n)=P\{X(n)=a_j\mid X(r)=a_k\}$，则

$p_{ij}(s,n)=P\{X(n)=a_j\mid X(s)=a_i\}=$______________________________。

2、设 $X(t)$ 为马尔可夫过程， $t_s<t_r<t_n$， 若已知条件概率密度

$f_X(x_r,t_r\mid x_s,t_s)$、 $f_X(x_n,t_n\mid x_r,t_r)$，则

$f_X(x_n,t_n\mid x_s,t_s)=$ ________________________。

三、综合题

第二章 随机过程的基本概念

1、已知随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}\qquad G_Y(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

分别求 $X(t)$和 $Y(t)$的自相关函数和均方值。

结果：$R_X(\tau)=\frac{5}{48}e^{-3|\tau|}+\frac{3}{16}e^{-|\tau|}$

$$E\left[X^2(t)\right]=R_X(0)=\frac{7}{24}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

$$E\left[Y^2(t)\right]=R_Y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$$

2、证明：当且仅当 U 与 V 是不相关的随机变量，并且均值都为 0，方差相等时，过程 $X(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t$ 是广义平稳过程。（提示：要分别证明充分性和必要性。）

解答提示：

充分性：

$$m_X(t)=0$$
$$R_X(t+\tau,t)=\sigma^2\cos\omega\tau$$

必要性：

$$m_X(t)=m_u\cos\omega t+m_v\sin\omega t=m_X$$
$$\Rightarrow m_X=m_u=m_v=0$$
$$R_X(t+\tau,t)=E[U^2]\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t+E[V^2]\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t$$
$$+E[UV]\sin\omega(\tau+2t)$$
$$\Rightarrow E[U^2]=E[V^2]=\sigma^2,E[UV]=0$$

3、下列函数是否可能是实平稳随机过程的自相关函数？为什么？

1、$f(\tau)=\sin(2\pi f_0\tau)$，其中$f_0$是常数

2、$f(\tau)=\tau^2$

3、$f(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & |\tau|\le 1\\ 1+|\tau| & |\tau|>1\end{cases}$

解：①不可能是，因为不是偶函数

②不可能是，因为在 0 处没有最大值

③不可能是，因为在 0 处没有最大值

4、下列函数是否可能是实平稳随机过程的自相关函数？为什么？

1、$f(\tau)=1/\tau$

2、$f(\tau)=\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$，其中$f_0$是常数

3、$f(\tau)=\sigma^2 e^{-a^2\tau^2}$，其中$a$和$\sigma$是常数

解：①不可能是，因为不是偶函数

②是，满足实平稳随机过程自相关函数的性质

③是，满足实平稳随机过程自相关函数的性质

5、下列函数是否可能是实平稳随机过程的自相关函数？为什么？

①、$f(\tau)=1/\tau^2$

②、$f(\tau)=\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0|\tau|)$，其中 f_0 是常数

③、 $f(\tau)=\sigma^2 e^{-a^2\tau^2}(1+a|\tau|+\frac{1}{3}a^2\tau^2)$，其中 a 和 σ 是常数

解：①不是，因为在 0 处没有最大值

②是，满足实平稳随机过程自相关函数的性质

③可能是，首先是偶函数，其次当 a 取特定值时在 0 处有最大值（可以通过令导数为 0 来求解）

6、两个统计独立的平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其均值都为 0，自相关函数分别为

$$R_X(\tau)=e^{-3|\tau|} \qquad R_X(\tau)=\cos 5\pi\tau$$

试求：①、$Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的功率谱密度；

②、$W(t)=X(t)-Y(t)$ 的功率谱密度；

③、互功率谱密度 $G_{ZW}(\omega)$。

①、 $R_Z(\tau)=e^{-3|\tau|}+\cos 5\pi\tau$

②、$R_W(\tau)=e^{-3|\tau|}+\cos 5\pi\tau$

③、$R_{ZW}(\tau)=e^{-3|\tau|}-\cos 5\pi\tau$

7、随机过程 $X(t)$ 定义为 $X(t)=f(t+\varepsilon)$，其中 $f(t)$ 是具有周期 T 的周期信号，ε 是在区间[0，T]内均匀分布的随机变量。证明 $X(t)$ 是平稳随机过程。（提示：利用周期函数的性质

$\int_{x_0}^{T+x_0} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$ ）

8、给定一个随机过程 $X(t)$ 和任一实数 x，按如下方式定义另一个随机过程 $Y(t)$：

$$Y(t)=\begin{cases}1 & X(t)\le x\\ 0 & X(t)>x\end{cases}$$

证明：$Y(t)$ 的均值函数和自相关函数分别是 $X(t)$ 的一维和二维分布函数。

提 示：

$$\begin{aligned}m_X(t_i)&=1\bullet P\{Y(t_i)=1\}+0\bullet P\{Y(t_i)=0\}\\&=F_X(x_i,t_i)\end{aligned}$$（利用一维分布律）

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2\}\\&=F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\end{aligned}$$（利用二维分布律）

9、质点在直线上作随机游动，即 t=1,2,3,…在时质点可以在 x 轴上往右或往左作一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为 p，往左移动一个单位距离的概率为 q，即 $P\{\xi_i=1\}=p$，$P\{\xi_i=-1\}=q$，$p+q=1$，且各次游动是相互统计独立的。经过 n 次游动，质点所处的位置为 $\eta(n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 。

①、求 $\eta(n)$ 的均值

②、求 $\eta(n)$ 的相关函数和协方差函数。

解：(1) $m_Y(n)=E[Y(n)]=E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\sum_{i=1}^{n}[p\times 1+q\times(-1)]=n(p-q)$

(2) 当 $n_2 \geq n_1$

$$R_Y(n_1,n_2)=E[Y(n_1)Y(n_2)]=E[(\sum_{i=1}^{n_1}X_i)(\sum_{j=1}^{n_2}X_j)]=E[\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}X_iX_j]=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}E[X_iX_j]$$
$$=\sum_{i=1}^{n_1}E[X_i^2]+\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n_2}E[X_i]E[X_j]=\sum_{i=1}^{n_1}[1^2\times p+(-1)^2q]+\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n_2}[1\times p+(-1)\times q]^2$$
$$=n_1(p+q)+n_1(n_2-1)(p-q)^2=n_1n_2(p-q)^2+n_1[1-(p-q)^2]$$

当 $n_2<n_1$ 时，根据乘法交换律， $R_Y(n_1,n_2)=R_Y(n_2,n_1)=n_1n_2(p-q)^2+n_2[1-(p-q)^2]$**，综合得到**

$$R_Y(n_1,n_2)=n_1n_2(p-q)^2+\min(n_1,n_2)[1-(p-q)^2]$$

$$K_Y(n_1,n_2)=R_Y(n_1,n_2)-m_Y(n_1)m_Y(n_2)$$
$$=n_1n_2(p-q)^2+\min(n_1,n_2)[1-(p-q)^2]-n_1(p-q)\times n_2(p-q)=\min(n_1,n_2)[1-(p-q)^2]$$

10、下列函数哪些可能是实平稳随机过程功率谱密度的正确表达式？为什么？

1 $F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{\omega^6+3\omega^2+3}$

2 $F(\omega)=\exp[-(\omega-1)^2]$

3 $F(\omega)=\dfrac{\omega^2}{\omega^4-1}-\delta(\omega)$

1、可能是。满足功率谱密度的性质。

2、不可能是。因为它不是偶函数。

3、不可能是。不全是非负的（在零时）。

11、下列函数哪些可能是实平稳随机过程功率谱密度的正确表达式？为什么？

1 $F(\omega)=\dfrac{\cos 3\omega}{1+\omega^2}$

2 $F(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$

3 $F(\omega)=\dfrac{|\omega|}{1+2\omega+\omega^2}$

1、不可能是。因为它不全是非负的。

2、可能是。满足功率谱密度的性质。

3、不可能是。因为它不是偶函数。

12、下列函数哪些可能是实平稳随机过程功率谱密度的正确表达式？为什么？

1 $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1-3\omega^2}}$

2 $F(\omega)=\dfrac{\omega^4}{j\omega^6+\omega^2+1}$

3 $F(\omega)=\dfrac{|\omega|}{1+2\omega^2+\omega^4}$

1、不可能是。因为它不全是实的。

2、不可能是。因为它不是实函数。

3、可能是。满足功率谱密度的性质。

13、由联合平稳随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$定义的过程 $W(t)$表示为：$W(t)=AX(t)+BY(t)$，其中 A 和 B 是实常数；

①、求 $W(t)$的功率谱密度；

②、若 $X(t)$和 $Y(t)$不相关，求 $W(t)$的功率谱密度；

③、求 $W(t)$与 $X(t)$和 $Y(t)$的互功率谱密度。

①

$$\begin{aligned} R_W(\tau) &= E\{W(t)W(t-\tau)\} = E\{[AX(t)+BY(t)][AX(t-\tau)+BY(t-\tau)]\} \\ &= E\{A^2X(t)X(t-\tau)+B^2Y(t)Y(t-\tau)+ABX(t)Y(t-\tau)+ABY(t)X(t-\tau)\} \\ &= A^2R_X(\tau)+B^2R_Y(\tau)+ABR_{XY}(\tau)+ABR_{YX}(\tau) \end{aligned}$$

$$G_W(\omega) = A^2G_X(\omega)+B^2G_Y(\omega)+ABG_{XY}(\omega)+ABG_{YX}(\omega)$$

②

若 $X(t)$和 $Y(t)$不相关，则有 $K_{XY}(\tau)=0, K_{YX}(\tau)=0$

所以有：
$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= K_{XY}(\tau)+m_Xm_Y = m_Xm_Y \\ R_{YX}(\tau) &= K_{YX}(\tau)+m_Xm_Y = m_Xm_Y \end{aligned}$$

因此可得：$R_W(\tau) = A^2R_X(\tau)+B^2R_Y(\tau)+2ABm_Xm_Y$

$$G_W(\omega) = A^2G_X(\omega)+B^2G_Y(\omega)+4\pi ABm_Xm_Y\delta(\omega)$$

③

$$\begin{aligned} R_{WX}(\tau) &= E\{W(t)X(t-\tau)\} = E\{[AX(t)+BY(t)]X(t-\tau)\} \\ &= AR_X(\tau)+BR_{YX}(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{WY}(\tau) &= E\{W(t)Y(t-\tau)\} = E\{[AX(t)+BY(t)]Y(t-\tau)\} \\ &= AR_{XY}(\tau)+BR_Y(\tau) \end{aligned}$$

$$G_{WX}(\omega) = AG_X(\omega)+BG_{YX}(\omega)$$

$$G_{WY}(\omega) = AG_{XY}(\omega)+BG_Y(\omega)$$

14、设 $X(t)$是平稳过程，$Y(t)= A+B X(t)$，其中 A 和 B 是常数，求 $Y(t)$的功率谱密度。

$$R_Y(\tau)=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=E\{[A+BX(t)][A+BX(t-\tau)]\}$$
$$=A^2+2ABm_X+B^2R_X(\tau)$$
$$G_Y(\omega)=2\pi(A^2+2ABm_X)\delta(\omega)+B^2G_X(\omega)$$

15、随机过程 $Y(t)$定义为 $Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中 $X(t)$是平稳随机过程，ω_0 是实常数；Θ 是与 $X(t)$不相关的随机变量，并且在区间（$-\pi$，π）上均匀分布。

①、求 $Y(t)$的均值；

②、求 $Y(t)$的自相关函数；

③、$Y(t)$平稳吗？

16、设 A 和 B 是两个随机变量，$X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，其中 ω_0 是实常数；

①、若 A 和 B 具有零均值，相同方差且不相关，证明 $X(t)$是平稳随机过程；

②、求 $X(t)$的自相关函数；

③、求 $X(t)$的功率谱密度。

17、由联合平稳随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$定义的过程 $W(t)$表示为：$W(t)=X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t$，其中 ω_0 是实正常数；

①、若要使 $W(t)$成为一个平稳随机过程，则 $X(t)$和 $Y(t)$的均值和相关函数应满足什么条件？

②、若 1 所要求的条件成立，求 $W(t)$的功率谱密度；

③、若 1 所要求的条件成立，并且 $X(t)$和 $Y(t)$不相关，求 $W(t)$的功率谱密度。

解：

1、要使 $W(t)$为一平稳随机过程，则要求其均值为一常数，自相关函数只与时间差有关

$$\begin{aligned}m_W(t)&=E\{X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t\}\\&=E\{X(t)\}\cos\omega_0 t+E\{Y(t)\}\sin\omega_0 t\\&=m_X(t)\cos\omega_0 t+m_Y(t)\sin\omega_0 t\end{aligned}$$

要使均值为一常数，则 $m_X(t)=m_Y(t)=0$

$$\begin{aligned}&R_W(t,t-\tau)\\&=E\{[X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\sin\omega_0 t][X(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)+Y(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}\\&=E\{X(t)X(t-\tau)\}\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)+E\{Y(t)Y(t-\tau)\}\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)\\&\quad+E\{X(t)Y(t-\tau)\}\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+E\{Y(t)X(t-\tau)\}\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)\\&=R_X(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)+R_Y(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)\\&\quad+R_{XY}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+R_{YX}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)\end{aligned}$$

要使得自相关函数只与时间差相关，则要求

$$R_X(\tau)=R_Y(\tau),R_{XY}(\tau)=-R_{YX}(\tau)$$

此时的自相关函数为：

$$R_W(\tau)=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau-R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

（两角和公式：

sin(A+B) = sinAcosB+cosAsinB ，

sin(A-B) = sinAcosB-cosAsinB ，

cos(a+b)=cosacosb-sinasinb，

cos(a-b)=cosacosb+sinasinb）

综上所述，可得 $W(t)$平稳的条件为：

$$m_X(t)=m_Y(t)=0,R_X(\tau)=R_Y(\tau),R_{XY}(\tau)=-R_{YX}(\tau)$$

2、直接对自相关函数作傅立叶变换，并利用傅立叶变换的频移定理，可得

$$\begin{aligned}G_W(\omega)&=\frac{1}{2}[G_X(\omega+\omega_0)+G_X(\omega-\omega_0)]\\&\quad-\frac{1}{2j}[G_{XY}(\omega-\omega_0)-G_{XY}(\omega+\omega_0)]\end{aligned}$$

3、若 $X(t)$和 $Y(t)$不相关，则有互方差函数等于 0，即有

$$K_{XY}(\tau)=K_{YX}(\tau)=0$$

$$R_{XY}(\tau)=K_{XY}(\tau)+m_X m_Y=0$$
$$R_{YX}(\tau)=K_{YX}(\tau)+m_X m_Y=0$$

此时，有

$$R_W(\tau)=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau$$

$$G_W(\omega)=\frac{1}{2}\left[G_X(\omega+\omega_0)+G_X(\omega-\omega_0)\right]$$

18、设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega\cdot t)$，其中 $0<t<\infty,\omega$ 为常数, A 是服从[1,2]上的均匀分布，确定 t 分别为 π/ω 和 $\pi/4\omega$ 时，求随机变量 $X(t)$ 的概率密度。

19、设随机过程 $X(t)=e^{-At}$， $t>0$，其中 A 是在区间（1，2）上服从均匀分布的随机变量，求随机变量 $X(1)$ 的一维概率密度函数 $f(x;1)$ 和一维分布函数 $F(x;1)$。

20、已知平稳随机过程 $X(t),-\infty<t<\infty$ 的谱密度为 $G_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$，求 $X(t)$ 的自相关函数和均方值。

第三章 随机过程的线性变换

1、设一平稳随机过程 $X(t)$，其导数过程为 $Y(t)=X'(t)$，已知 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau)=e^{-\tau^2}$$

令 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 构成一个新的随机过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$，求 $Z(t)$

的自相关函数 $R_Z(\tau)$。

$$R_Z(\tau)=E\{Z(t)Z(t-\tau)\}=E\{[X(t)+Y(t)][X(t-\tau)+Y(t-\tau)]\}$$
$$=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

$$\because R_{XY}(\tau)=-R_{YX}(\tau)$$

$$\therefore R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)$$
$$=e^{-\tau^2}+(2-4\tau^2)e^{-\tau^2}$$
$$=(3-4\tau^2)e^{-\tau^2}$$

2、设 $X(t)$是平稳随机过程，$E[X(t)]=1$，$R_X(\tau)=1+e^{-2|\tau|}$，求随机变量 $S=\int_0^1 X(t)dt$ 的均值及方差。

第四章 白噪声和高斯随机过程

1、设随机过程 $X(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t$，其中 ω为常数，U 和 V 是两个相互独立的高斯随机变量。已知 $E[U]=E[V]=0$，$E[U^2]=E[V^2]=\sigma^2$， 求 $X(t)$ 的一维和二维概率密度。

2、一正态随机过程的均值为 $m_X(t)=3$，协方差为 $K(t_1,t_2)=4\cos\pi(t_1-t_2)$，求当 $t_1=1/2$、$t_2=1$ 时的二维概率密度。

$$K=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix},|K|=16,\ K^{-1}=\begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/4\end{pmatrix},m=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi|K|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-m)^T K^{-1}(X-m)\}$$

第七章 马尔可夫随机过程

1、如果明天是否有雨仅与今天的天气有关，而与过去的天气无关，并设今天下雨而明天有雨的概率为 0.7，今天无雨而明天有雨的概率为 0.4，已知今天已经下雨，求第四天仍有雨的概率。

$$P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$P\{X_4=0\mid X_0=0\}=0.5749$$

2、设 X_n 为三个状态｛a，b，c｝的马尔可夫链，其转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4\\ 2/3 & 0 & 1/3\\ 3/5 & 2/5 & 0\end{bmatrix}$$

试求：

1、$P\{X_1=b,X_2=c,X_3=a\mid X_0=c\}$

2、$P\{X_{n+2}=c\mid X_n=b\}$

3、该链的平稳分布是否存在？为什么？如存在，求其平稳分布。

1、$P\{X_1=b,X_2=c,X_3=a\mid X_0=c\}=\frac{2}{5}\bullet\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{5}=\frac{2}{25}$

2、$P\{X_{n+2}=c\mid X_n=b\}=0.1667$

3、平稳分布存在，因为该链是有限状态的、不可约的、非周期的。其平稳分布为｛0.5591，0.2258，0.2151｝

3、设齐次马尔可夫链 X_n 有四个状态 S_1，S_2，S_3，S_4，其转移矩阵如下：

$$P=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

①、如果该马尔可夫链在 n 时刻处于 S_3 状态，求在 $n+2$ 时刻处于 S_1 状态的概率；

②、如果该马尔可夫链在 0 时刻处于 S_1 状态，求在 1 时刻处于状态 S_4 而 2 时刻处于状态 S_3 的概率。

4、在数字通信系统中，传输的信号只有 0、1 两种，一般分为多个阶段传输。设在每一个阶段中出错的概率为 a（$0<a<1$）。设 $X(0)=0$ 是要传输的最原始的信号，$X(n)$（$n>0$）表示经过 n 个阶段传输后收到的信号，设 $X(n)$（$n>0$）是一个马尔可夫链，试求：

①、$X(n)$的一步转移概率矩阵；

②、在头三个阶段中原始信号传输均不出错的概率；

③、原始信号经过头三个阶段的传输后收到正确信号的概率；

④、该链的平稳分布是否存在？为什么？如存在，求其平稳分布。

1、$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$

2、$P\{X_1=0，X_2=0，X_3=0\,|\,X_0=0\}=(1-a)^3$

3、$P\{X_3=0\,|\,X_0=0\}=(1-a)(1-2a+4a^2)$

4、平稳分布存在，因为该链是有限状态的、不可约的、非周期的。平稳分布为 1/2,1/2。

5、设有 6 个球（其中 2 个红球，4 个白球），分别放于甲、乙两个盒子中，每盒放 3 个，今每次从两个盒中各任取一球并进行交换，以 $X(0)$表示开始时甲盒中红球的个数，$X(n)$（$n>0$）表示经 n 次交换后甲盒中的红球数，则 $X(n)$构成一个马尔可夫链。

①、求 $X(n)$的一步转移概率矩阵；

②、该链的平稳分布是否存在？为什么？如存在，求其平稳分布。

③、若 $X(0)=0$，求经过两次交换后甲盒中有两个红球的概率。

1、$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

2、由$\begin{cases} \pi P=\pi \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1 \end{cases}$解得

$\pi_0=1/5, \pi_1=3/5, \pi_2=1/5$

求解过程如下：

设$\pi=[\pi_0,\pi_1,\pi_2]$

第一种解法：

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_0+\frac{2}{9}\pi_1=\pi_0 \Rightarrow 3\pi_0+2\pi_1=9\pi_0 \Rightarrow \pi_1=3\pi_0 & ① \\ \frac{2}{9}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2=\pi_2 \Rightarrow 2\pi_1+3\pi_2=9\pi_2 \Rightarrow \pi_1=3\pi_2 & ② \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1 & ③ \end{cases}$$

由①和② $\Rightarrow \pi_0=\pi_2$ ④

①④代入③，解得$\pi_0=1/5, \pi_1=3/5, \pi_2=1/5$

第二种解法：

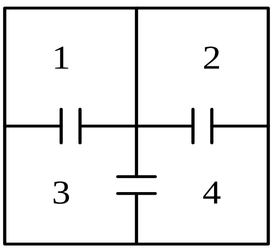
$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}\pi_0+\dfrac{2}{9}\pi_1=\pi_0\Rightarrow 3\pi_0+2\pi_1=9\pi_0\Rightarrow \pi_1=3\pi_0 & ① \\ \dfrac{2}{3}\pi_0+\dfrac{5}{9}\pi_1+\dfrac{2}{3}\pi_2=\pi_1\Rightarrow 6\pi_0+6\pi_2=4\pi_1 & ② \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1 & ③\end{cases}$$

①代入②$\Rightarrow \pi_0=\pi_2$ ④

①④代入③，解得$\pi_0=1/5,\pi_1=3/5,\pi_2=1/5$

3、$P\{X(2)=2\,|\,X(0)=0\}=4/27$

6、老鼠在下图的迷宫中作随机游动。当它处在某个方格中有k条通道时，以概率$\dfrac{1}{k}$随机通过任意一个通道。求老鼠作随机游动的状态空间及一步转移概率矩阵。



7、设$X_n,n\geq 0$是具有三个状态 I={0，1，2}的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 3/4\end{bmatrix}$$

初始分布为$p_i(0)=P\{X_0=i\}=1/3,i=0,1,2$， 试求：

① $P\{X_1=1,X_3=2\}$

② $P_{02}(4)$

③ 判断此链是否具有遍历性，若是遍历的，求其平稳分布。

第八章 泊松过程

1、设泊松过程 $N(t)$ ($t\geq 0$)的强度 $\lambda=2$，求：

① $P\{N(5)=4\}$

② $P\{N(5)=4, N(7.5)=6, N(12)=9\}$

③ $P\{N(12)=9 \mid N(5)=4\}$

④ $E\{N(5)\}$、$D\{N(5)\}$、$Cov\{N(5), N(12)\}$

2、设某泊松过程 $X(t)$ 的到达率参数为 λ。给定两个时刻 s 和 t（$s < t$），如果已知 s 时刻的事件发生次数为 k，求 t 时刻事件发生次数为 n 的概率 $P\left\{X(t)=n \middle| X(s)=k\right\}$。

3、泊松过程的其他题目参见课件。

附录一 常见平稳过程的自相关函数和功率谱密度对应关系

1、$R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-a|\tau|}$，$G_X(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$；

2、$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T} & |\tau|<T \\ 0 & |\tau|\geq T\end{cases}$，$G_X(\omega)=\dfrac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$；

3、$R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau$；$G_X(\omega)=\dfrac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\dfrac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$；

4、$R_X(\tau)=\dfrac{\sin\omega_0\tau}{\pi\tau}$；$G_X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_0 \\ 0 & |\omega|\geq\omega_0\end{cases}$；

5、$R_X(\tau)=1$；$G_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$；

6、$R_X(\tau)=\delta(\tau)$， $G_X(\omega)=1$；

7、$R_X(\tau)=\cos\omega_0\tau$， $G_X(\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

8、$R_X(\tau)=\sin\omega_0\tau$， $G_X(\omega)=\dfrac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

附录二 傅立叶变换的常见性质

如果$R_X(\tau)$的傅立叶变换为$G_X(\omega)$，则有：

1、傅立叶变换的频移定理

$$R_X(\tau)e^{j\omega_0\tau}\leftrightarrow G_X(\omega-\omega_0)$$

$$R_X(\tau)\cos\omega_0\tau\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[G_X(\omega-\omega_0)+G_X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$R_X(\tau)\sin\omega_0\tau\leftrightarrow\frac{1}{2j}\left[G_X(\omega-\omega_0)-G_X(\omega+\omega_0)\right]$$

2、傅立叶变换的时移定理

$$R_X(\tau-\tau_0)\leftrightarrow G_X(\omega)e^{-j\omega\tau_0}$$

3、傅立叶变换的时域卷积定理

$R_X(\tau)\otimes R_Y(\tau)\leftrightarrow G_X(\omega)G_Y(\omega)$ 注:$\otimes$表示卷积运算

即时域卷积，则频域相乘

4、傅立叶变换的频域卷积定理

$R_X(\tau)R_Y(\tau)\leftrightarrow G_X(\omega)\otimes G_Y(\omega)$ 注:$\otimes$表示卷积运算

即时域相乘，则频域卷积