一(20分)、给定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&5&-2\\-2&-1&1\\-1&-1&2\end{bmatrix}.$$

求A的Jordan标准形J，并求相似变换矩阵P，使得$P^{-1}AP=J$.

1. 将A的特征矩阵$\lambda I-A$化为Smith标准形:

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-5&-5&2\\2&\lambda+1&-1\\1&1&\lambda-2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0&-\lambda&-\lambda^2+7\lambda-8\\0&\lambda-1&-2\lambda+3\\1&1&\lambda-2\end{bmatrix}$$
$$\simeq\begin{bmatrix}0&-1&-\lambda^2+5\lambda-5\\0&\lambda-1&-2\lambda+3\\1&0&0\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0&-1&-\lambda^2+5\lambda-5\\0&0&-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8\\1&0&0\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)^3\end{bmatrix};$$

2. $\lambda I-A$的不变因子为：$\{1,1,(\lambda-2)^3\}$;

3. $\lambda I-A$的初等因子为：$\{(\lambda-2)^3\}$;

4. 初等因子$(\lambda-2)^3$对应的Jordan块为：$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$;

5. Jordan块构成的A的Jordan标准形为：$J=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$;

6. 将P按列分块，记$P=[P_1,P_2,P_3]$，则由$AP=PJ$得：

$$\begin{cases}AP_1=2P_1,\\AP_2=P_1+2P_2,\\AP_3=P_2+2P_3.\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}(A-2I)P_1=\vec{0},\\(A-2I)P_2=P_1,\\(A-2I)P_3=P_2.\end{cases}$$

其中$A-2I=\begin{bmatrix}3&5&-2\\-2&-3&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$，$(A-2I)^2=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}$. 可取$P_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，则$P_2=\begin{bmatrix}3\\-2\\-1\end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$，$\{P_1,P_2,P_3\}$线性无关.

综上，可取相似变换矩阵$P=\begin{bmatrix}1&3&1\\-1&-2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}$（不唯一）.

二(20分)、求矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{bmatrix}$的QR(正交三角)分解.

- 将A按列分块，记$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$;
- 对向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$施行正交化，令：
  1. $\beta_1=\alpha_1=[1,1,1,1]^T$;
  2. $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\alpha_2-\frac{15}{4}\beta_1=\frac{1}{4}[-11,-7,1,17]^T$;
  3. $\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=\alpha_3-10\beta_1-\frac{436}{115}\beta_2=\frac{2}{115}[82,-21,-112,51]^T$;
  4. $\beta_4=\alpha_4-\frac{\langle\alpha_4,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_4,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2-\frac{\langle\alpha_4,\beta_3\rangle}{\langle\beta_3,\beta_3\rangle}\beta_3=\alpha_4-\frac{85}{4}\beta_1-\frac{213}{23}\beta_2-\frac{735}{194}\beta_3=\frac{3}{97}[-6,11,-6,1]^T$.
- 对向量组$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$施行单位化：
  1. $|\beta_1|=2$，$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^T$;
  2. $|\beta_2|=\frac{\sqrt{460}}{4}$，$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=[-\frac{11}{\sqrt{460}},-\frac{7}{\sqrt{460}},\frac{1}{\sqrt{460}},\frac{17}{\sqrt{460}}]^T$;
  3. $|\beta_3|=\frac{2}{115}\sqrt{22310}$，$\gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=[\frac{82}{\sqrt{22310}},-\frac{21}{\sqrt{22310}},-\frac{112}{\sqrt{22310}},\frac{51}{\sqrt{22310}}]^T$;
  4. $|\beta_4|=\frac{3}{97}\sqrt{194}$，$\gamma_4=\frac{\beta_4}{|\beta_4|}=[-\frac{6}{\sqrt{194}},\frac{11}{\sqrt{194}},-\frac{6}{\sqrt{194}},\frac{1}{\sqrt{194}}]^T$.
- $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]\begin{bmatrix}1&\frac{15}{4}&10&\frac{85}{4}\\0&1&\frac{436}{115}&\frac{213}{23}\\0&0&1&\frac{735}{194}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$$=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&\frac{\sqrt{460}}{4}&0&0\\0&0&\frac{2}{115}\sqrt{22310}&0\\0&0&0&\frac{3}{97}\sqrt{194}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{15}{4}&10&\frac{85}{4}\\0&1&\frac{436}{115}&\frac{213}{23}\\0&0&1&\frac{735}{194}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{11}{\sqrt{460}}&\frac{82}{\sqrt{22310}}&-\frac{6}{\sqrt{194}}\\\frac{1}{2}&-\frac{7}{\sqrt{460}}&-\frac{21}{\sqrt{22310}}&\frac{11}{\sqrt{194}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{460}}&-\frac{112}{\sqrt{22310}}&-\frac{6}{\sqrt{194}}\\\frac{1}{2}&\frac{17}{\sqrt{460}}&\frac{51}{\sqrt{22310}}&\frac{1}{\sqrt{194}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&\frac{15}{2}&20&\frac{85}{2}\\0&\frac{\sqrt{115}}{2}&\frac{218}{\sqrt{115}}&\frac{213\sqrt{5}}{2\sqrt{23}}\\0&0&\frac{2\sqrt{194}}{\sqrt{115}}&\frac{147\sqrt{10}}{\sqrt{2231}}\\0&0&0&\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{97}}\end{bmatrix}.$$

三(20分)、设A为n阶实方阵，证明：$\frac{1}{n}||A||_1\leq||A||_\infty\leq n||A||_1$. (注：$||A||_1=max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$表示矩阵$A$每列元素绝对值求和中的最大值，称列范数; $||A||_\infty=max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$表示矩阵$A$每行元素绝对值求和中的最大值，称行范数.)

1. $||A||_1=max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leq n\,max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=n||A||_1$;
2. $||A||_\infty=max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq n\,max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=n||A||_\infty$;
3. 综上：$||A||_1\leq\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|\leq n||A||_\infty$, $||A||_\infty\leq\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|\leq n||A||_1$.

四(20分)、求解非齐次微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(\vec{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(\vec{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \\ x(\vec{0}) = [1,1,1]^T. \end{cases}$$

1. 记$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$f(\vec{t}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$,原方程组可记为:$\frac{d}{dt}x(\vec{t}) = Ax(\vec{t}) + f(\vec{t})$;

2. $\frac{d}{dt}[e^{-tA}x(\vec{t})] = e^{-tA}(-A)x(\vec{t}) + e^{-tA}\frac{d}{dt}x(\vec{t}) = e^{-tA}[\frac{d}{dt}x(\vec{t}) - Ax(\vec{t})] = e^{-tA}f(\vec{t})$;

3. $|\lambda I - A| = (\lambda-1)^3$,由Hamilton-Cayley定理,$(A-I)^3 = 0$;

4. 将e^{tx}在$x=1$处Taylor展开，有：$e^{tx} = e^t \cdot e^{t(x-1)} = e^t \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (x-1)^k}{k!}$;

5. $e^{tA} = e^t \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(A-I)^k = e^t[I + t(A-I) + \frac{1}{2}t^2(A-I)^2] = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t+\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

6. $\frac{d}{dt}[e^{-tA}x(\vec{t})] = e^{-tA}f(\vec{t}) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & -t & -t+\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}t^2 - t)e^t \\ -te^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

7. 从0到t积分得：

$$e^{-tA}x(\vec{t}) - x(\vec{0}) = [\int_0^t (\frac{1}{2}t^2 - t)e^t dt, -\int_0^t te^t dt, \int_0^t e^t dt]^T$$

$$= [(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2)e^t - 2, -(t-1)e^t - 1, e^t - 1]^T.$$

8. 解为：

$$x(\vec{t}) = e^{tA}[(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2)e^t - 1, -(t-1)e^t, e^t]^T$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t+\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2)e^t - 1 \\ -(t-1)e^t \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

五(20分)、给定矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，列向量$\vec{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$，求矩阵$A$的Moore-penrose广义逆矩阵$G$，并用广义逆矩阵方法给出线性方程组$A\vec{x} = \vec{b}$有解的充要条件，在$A\vec{x} = \vec{b}$有解的情形，给出通解及极小范数解.

1. 对A进行行初等变换：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 从上述行初等变换可以看出：A的第1，2，3列线性无关，第4列可用前3列线性表示. A的满秩分解为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

3. 记$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, 则：

$$B^TB = \begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}, (B^TB)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&3\end{bmatrix};$$

$$CC^T = \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}, (CC^T)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}.$$

4. 代入$G=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$得：

$$G=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&-1&-1&3\\3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\end{bmatrix}.$$

5. $A\vec{x}=\vec{b}$有解当且仅当$AG\vec{b}=\vec{b}$或$(I-AG)\vec{b}=\vec{0}$，计算可得:

$$I-AG=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\end{bmatrix}.$$

因此$[1,-1,1,-1]\vec{b}=0$，或$a-b+c-d=0$.

6. 有解时，通解为：

$$\vec{x}=G\vec{b}+(I-GA)\vec{z}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&-1&-1&3\\3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\end{bmatrix}\vec{z};$$

极小范数解为：$G\vec{b}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&-1&-1&3\\3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$.