一(10+10+15+15=50分)、设a,b为实数，且$a^2-b^2\neq 0$，令$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

计算: (1)$\rho(A)$; (2)$||A||_2$; (3)$\mathrm{cond}(A)_\infty$; (4)e^A.

(1)$|\lambda I-A|=(\lambda-a)^2-b^2=[\lambda-(a+b)][\lambda-(a-b)]$. A的特征值为: $a+b, a-b$，因此$\rho(A)=\max\{|a+b|,|a-b|\}=|a|+|b|$.

(2)$A^TA=A^2$的两个特征值为$(a+b)^2,(a-b)^2$，因此$||A||_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}=\sqrt{\max\{(a+b)^2,(a-b)^2\}}=|a|+|b|$.

(3)$|A|=a^2-b^2$，$A^*=\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$. $||A||_\infty=|a|+|b|$，$||A^{-1}||_\infty=\frac{|a|+|b|}{|a^2-b^2|}$，$\mathrm{cond}(A)_\infty=||A^{-1}||_\infty||A||_\infty=|\frac{|a|+|b|}{|a|-|b|}|$.

(4)解法一(求Jordan标准形/相似对角化):

1. 对A进行(正交)相似对角化，容易验证$[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]^T$是$A$的特征值$a+b$的一个单位特征向量，$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]^T$是$A$的特征值$a-b$的一个单位特征向量.

2. 记$U=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$，则$U$为正交矩阵，且$U^TAU=\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$.

3. $U^Te^AU=U^T\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}U=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(U^TAU)^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\begin{bmatrix} \frac{(a+b)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{(a-b)^k}{k!} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{a+b} & 0 \\ 0 & e^{a-b} \end{bmatrix}$.

4. $e^A=U\begin{bmatrix} e^{a+b} & 0 \\ 0 & e^{a-b} \end{bmatrix}U^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{a+b}+\frac{1}{2}e^{a-b} & \frac{1}{2}e^{a+b}-\frac{1}{2}e^{a-b} \\ \frac{1}{2}e^{a+b}-\frac{1}{2}e^{a-b} & \frac{1}{2}e^{a+b}+\frac{1}{2}e^{a-b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^a\cosh b & e^a\sinh b \\ e^a\sinh b & e^a\cosh b \end{bmatrix}$.

   (备注：$\cosh b=\frac{e^b+e^{-b}}{2}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{b^{2k}}{(2k)!}$, $\sinh b=\frac{e^b-e^{-b}}{2}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!}$分别称为双曲余弦函数、双曲正弦函数.)

解法二(运用Hamilton-Cayley定理):

1. A的特征多项式为$g(\lambda)=(\lambda-a)^2-b^2$，由Hamilton-Cayley定理可得：$g(A)=(A-aI)^2-b^2I=0$，$(A-aI)^2=b^2I$.

2. 将e^x在$x=a$处Taylor展开，有：$e^x=e^a\cdot e^{x-a}=e^a\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^k}{k!}$.

3. 由矩阵函数的矩阵幂级数定义：

$$e^A=e^a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(A-aI)^k}{k!}=e^a[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(A-aI)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(A-aI)^{2k+1}}{(2k+1)!}]$$

$$=e^a[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[(A-aI)^2]^k}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[(A-aI)^2]^k}{(2k+1)!}(A-aI)]$$

$$=e^a[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^{2k}}{(2k)!}I+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^{2k}}{(2k+1)!}(A-aI)]$$

$$=e^a[\cosh bI+\frac{\sinh b}{b}(A-aI)]=e^a\begin{bmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{bmatrix}.$$

二(50分)、已知：$J_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, $J_2=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}J_1&0\\0&J_2\end{bmatrix}$, $f(\vec{t})=[0,0,0,0,e^{2t}]^T$, 求解非齐次微分方程组:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}x(\vec{t})=Ax(\vec{t})+f(\vec{t})\\ x(\vec{0})=[1,1,1,1,1]^T.\end{cases}$$

1. $\frac{d}{dt}[e^{-tA}x(\vec{t})]=e^{-tA}(-A)x(\vec{t})+e^{-tA}\frac{d}{dt}x(\vec{t})$
$=e^{-tA}[\frac{d}{dt}x(\vec{t})-Ax(t)]=e^{-tA}f(\vec{t})$.

2. J_1的特征多项式为$|\lambda I-J_1|=(\lambda-2)^2$，由Hamilton-Cayley定理可得：$(J_1-2I)^2=0$；同理，$(J_2-3I)^3=0$.

3. 将e^{tx}分别在$x=2$和$x=3$处Taylor展开，有：
$$e^{tx}=e^{2t}\cdot e^{t(x-2)}=e^{2t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k(x-2)^k}{k!},\quad e^{tx}=e^{3t}\cdot e^{t(x-3)}=e^{3t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k(x-3)^k}{k!}.$$

4. $e^{tA}=\mathrm{diag}\{e^{tJ_1},e^{tJ_2}\}$，其中：
$$\begin{aligned}e^{tJ_1}&=e^{2t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}(J_1-2I)^k=e^{2t}[I+t(J_1-2I)]=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix},\\ e^{tJ_2}&=e^{3t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}(J_2-3I)^k=e^{3t}[I+t(J_2-3I)+\frac{1}{2}t^2(J_2-3I)^2]=e^{3t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5. $$\frac{d}{dt}[e^{-tA}x(\vec{t})]=e^{-tA}f(\vec{t})=\begin{bmatrix}e^{-tJ_1}&0\\0&e^{-tJ_2}\end{bmatrix}f(\vec{t})$$
$$=\left[\begin{array}{cc|ccc}e^{-2t}&-te^{-2t}&0&0&0\\0&e^{-2t}&0&0&0\\ \hline 0&0&e^{-3t}&-te^{-3t}&\frac{1}{2}t^2e^{-3t}\\0&0&0&e^{-3t}&-te^{-3t}\\0&0&0&0&e^{-3t}\end{array}\right]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}t^2e^{-t}\\-te^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix}.$$

6. 对上式从0到t积分： $e^{-tA}x(\vec{t})-x(\vec{0})$
$$=[0,0,\int_0^t\frac{1}{2}t^2e^{-t}dt,-\int_0^t te^{-t}dt,\int_0^t e^{-t}dt]^T$$
$$=[0,0,1-(\frac{1}{2}t^2+t+1)e^{-t},-1+(t+1)e^{-t},1-e^{-t}]^T.$$

7. 解为： $x(\vec{t})=e^{tA}[1,1,2-(\frac{1}{2}t^2+t+1)e^{-t},(t+1)e^{-t},2-e^{-t}]^T$
$$=\left[\begin{array}{cc|ccc}e^{2t}&te^{2t}&0&0&0\\0&e^{2t}&0&0&0\\ \hline 0&0&e^{3t}&te^{3t}&\frac{1}{2}t^2e^{3t}\\0&0&0&e^{3t}&te^{3t}\\0&0&0&0&e^{3t}\end{array}\right]\begin{bmatrix}1\\1\\2-(\frac{1}{2}t^2+t+1)e^{-t}\\(t+1)e^{-t}\\2-e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(t+1)e^{2t}\\e^{2t}\\(t^2+2)e^{3t}-e^{2t}\\2te^{3t}+e^{2t}\\2e^{3t}-e^{2t}\end{bmatrix}.$$