

Capítulo 1

Picture de interacción y perturbación dependiente del tiempo

Puédense escribir perturbaciones dependientes del tiempo

$$H = H_0 + V(t)$$

con $|n\rangle$ no dependiente del tiempo. Se estudiarán transiciones entre autoestados del H_0 (que son estacionarios). Un autoestado permanece en el tiempo como tal pero con fase oscilante

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0, t\rangle_s &= e^{-iH/\hbar(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle_s \\ &= e^{-iH/\hbar(t-t_0)} e^{-iV(t)/\hbar(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle \\ &= \sum_n e^{-iH_0/\hbar t} e^{-iV(t)/\hbar t} |n\rangle \langle n | \alpha, t_0\rangle \\ &= \sum_n e^{-iE_n^0/\hbar t} |n\rangle e^{-iV(t)/\hbar t} \langle n | \alpha, t_0\rangle \\ e^{iH_0/\hbar t} |\alpha, t_0, t\rangle_s &= \sum_n \underbrace{e^{-iV(t)/\hbar t} \langle n | \alpha, t_0\rangle |n\rangle}_{C_n(t)} = |\alpha, t_0, t\rangle_I \end{aligned}$$

es decir

$$|\alpha, t_0, t\rangle_I = e^{iH_0/\hbar t} |\alpha, t_0, t\rangle_s$$

Aquí se puede pensar que

- $C_n(t)$ evoluciona por $V(t)$

- $e^{-iE_n^0 t/\hbar}$ evoluciona por H_0

Esto introduce la *picture* de interacción de Dirac; en la cual los estados evolucionan con $V(t)$.

	Dirac	Schrödinger	Heisenberg
estados $ \alpha\rangle$	evolucionan con $V(t)$	evolucionan con H	fijos
operadores	evolucionan con H_0	fijos	evolucionan con H
base $ a'\rangle$	fijos	fijos	evolucionan

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_s = H |\alpha, t_0, t\rangle_s$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_I \right) = H e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_I$$

$$i\hbar e^{-iH_0 t/\hbar} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I = V(t) e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_I$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I = V(t) |\alpha, t_0, t\rangle_I,$$

que es la ecuación de evolución de los kets. Pediremos asimismo que

$${}_s \langle A_s \rangle_s = {}_I \langle A_I \rangle_I$$

$${}_I \langle \alpha, t_0, t | A_I | \alpha, t_0, t \rangle_I = {}_s \langle \alpha, t_0, t | e^{-iH_0 t/\hbar} A_I e^{iH_0 t/\hbar} | \alpha, t_0, t \rangle_s = {}_s \langle \alpha, t_0, t | A_s | \alpha, t_0, t \rangle_s =$$

Y los operadores evolucionan según

$$A_I = e^{iH_0 t/\hbar} A_s e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_I, H_0]$$

que es igual que la ecuación de Heisenberg pero con \hat{H}_0 en lugar de H . Los kets base permanecen fijos, porque así lo hacen en Schrödinger, en realidad oscila su fase; entonces

$$|n, t_0, t\rangle_s = e^{-iHt/\hbar} |n, t_0\rangle_s$$

$$|n, t_0, t\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} e^{-iHt/\hbar} |n, t_0\rangle_s = e^{-iVt/\hbar} |n, t_0\rangle_s = e^{iH_0 t/\hbar} |n, t_0\rangle_s$$

$$|n, t_0, t\rangle_I = e^{iE_0 t/\hbar} |n, t_0, t\rangle_s$$

1.0.1 Evolución de los coeficientes

$$as$$

$$C_n(t) =$$

$$d$$

y le pego un $\langle n|$ a la ecuación de evolución de kets,

$$i\hbar$$

$$s$$

$$i\hbar$$

donde $V_{nm}(t) \equiv \langle n|V(t)|m\rangle$ y $\omega_{nm} \equiv (E_n - E_m)/\hbar$. Esta es la ecuación que cumplen los coeficientes, donde $|C_n(t)|^2$ es la probabilidad de hallar al sistema en el autoestado $|n\rangle$. Es decir

$$=$$

que puede ser de difícil solución.

1.0.2 Método perturbativo (dependiente del tiempo)

Pensaremos en una serie perturbativa

$$C_n(t) =$$

El evolucionador temporal en la picture de interacción cumple

$$| \rangle =$$

que viene de

$$i\hbar$$

la cual resolviendo nos hace llegar a

$$U$$

y esto lleva a la serie de Dyson:

$$U$$

1.0.3 Transiciones entre autoestados del hamiltoniano H_0

$$| \rangle =$$

$$a$$

La amplitud de transición será

$$C$$

con $|i\rangle, |n\rangle$ autoestados de H_0 . Sea $\tilde{C}_n(t) = \langle n | U_s(t) | i \rangle$ y busquemos una expresión

$$a$$

$$b$$

y notemos que \hat{U} no obedece la ley de transformación de operadores.

$$a$$

$$b \Rightarrow |C_n(t)|^2 = |\tilde{C}_n(t)|^2$$

Para transiciones entre autoestados de H_0 los coeficientes dan la misma probabilidad (evaluados con el evolucionador de Dirac que con el de Schrödinger). Vamos a las transiciones a los tres

- orden 0
- orden 1
- orden 2

1.0.4 Ejemplo: potencial constante encendido abruptamente

Notemos que $V \neq V(t)$. Dependerá de cualquier otra cosa.

$$a$$

$$b$$

Es máxima la probabilidad cuando $\Delta E \rightarrow 0$. En ese caso las transiciones son a estados de la misma energía. A tiempo largo la probabilidad es no nula para aquellos estados

$$t \sim \frac{2\pi}{|\omega_{ni}|}$$

Hay probabilidad de transición $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$ apreciable con $\Delta E \sim 0$.

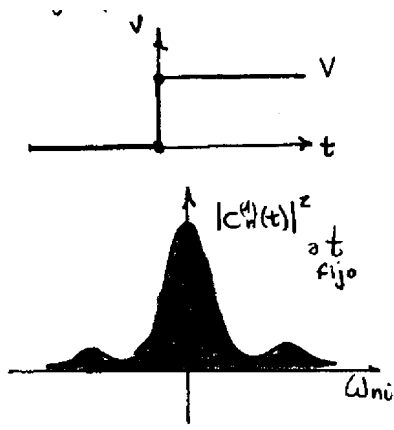


Figura 0.1

1.1 Scattering: orden 1

Este último ejemplo puede aplicarse a colisiones elásticas. Prendemos y apagamos un potencial que es el masacote al cual impactamos. De entrada ha partículas libres y de salida (lejos de V) partículas libres. Entonces $E_n - E_c \sim 0$ y consideraremos lo que sucede a tiempos largos. Interesará la probabilidad total de transicionear a estados de energía similares a E_i . Por ello se considera

$$\sum$$

donde el integrando es el número de estados dentro de un intervalo de energías $(E, E + dE)$. En tiempos muy largos la expresión [1] tiende a una delta de Dirac

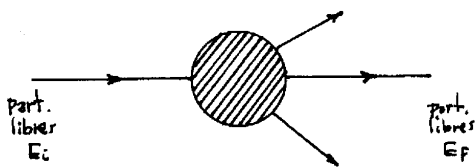


Figura 1.2

y se integra fácil,

$$\lim$$

La probabilidad de transición es proporcional a t . Se suele definir una tasa de transición (probabilidad de transición por unidad de tiempo)

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n(E_n \sim E_i)} |C_n^1|^2 \right) =$$

que es la regla de oro de Fermi.

1.2 El método variacional

Se puede usar para aproximar la energía del estado fundamental (el estado de energía mínima)

$$=$$

$$=$$

y usamos

$$\frac{1}{1} \geq E_0$$

1.2.1 Scattering a orden dos y OFPT

Continuando con el orden dos de scattering por un $V \neq V(t)$ se tiene:

$$\omega$$

Para obtener los siguientes términos dentro del $||^2$ podemos emplear un ardid gráfico conocido como *Old Fashioned Perturbation Theory*

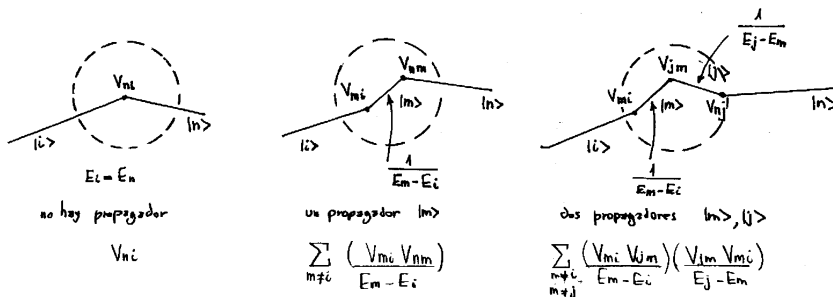


Figura 2.3

Fíjese que en los estados intermedios estados virtuales $|m\rangle, |j\rangle$ no se conserva la energía. Son propagadores.

1.2.2 Perturbación armónica

Sea un potencial armónico y hermítico

$$V(t) =$$

quiero ver probabilidad de transición a orden uno,

$$C_n(t)^1 =$$

a

b

c

Luego será nulo sólo si

ω

ω

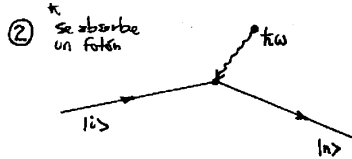


Figura 2.4

Luego,

\lim

representa la probabilidad de emitir o absorber fotones en una interacción. Se puede asociar que V crea fotones y V^\dagger destruye fotones. Para un átomo se tiene

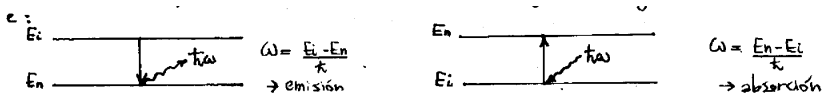


Figura 2.5

1.3 Despoblamiento de estados iniciales

Queremos ver con cual v se despoblan los $|i\rangle$. Para ello me construyo un potencial suave

$$\lim$$

donde η es un parámetro regularizador.

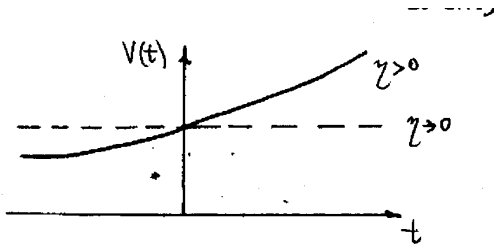


Figura 3.6

a

b

c

y tomando el límite $\eta \rightarrow 0$

d

y llegamos a la regla de oro de Fermi,

d

1.3.1 Scattering sección eficaz

$|k\rangle, |k'\rangle$ son autoestados de momento (partículas libres),

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$$

se conserva la energía. Consideraremos la aproximación más baja (aproximación de Born).

ω

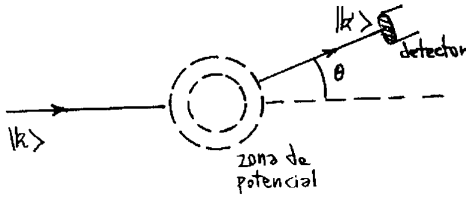


Figura 3.7

queremos calcular la densidad de estados de energía entre $(E, E + dE)$. Pensamos en una partícula libre en una caja $1D$ de longitud L .

$$N$$

pidiendo normalización unitaria $\langle k | k \rangle = 1$ se tiene

$$d$$

con $L \rightarrow \pm\infty$ son n_x, k_x continuas.

$$d$$

$$d$$

donde $n^2 dn d\Omega$ es la densidad de estados de energía $(E, E + dE)$ en $d\Omega$

$$n^2 dn d\Omega = \rho(E') dE'$$

Con esto sale la integral obteniéndose

$$\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{L^3}{(2\pi)^2} \frac{m}{\hbar^3} |\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle|^2 k' d\Omega$$

Esta es la probabilidad de transición entre los impulsos \mathbf{k}, \mathbf{k}' . Es el número de partículas en la unidad de tiempo por unidad de área

$$\text{seccion eficaz} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\# \text{ de part en } d\Omega \text{ en la unidad de t}}{\# \text{ de part incidentes en la unidad de t por unidad de área}}$$

Un elemento de matriz $\langle k' | V | k \rangle$ será

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int dx' \langle \mathbf{k}' | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int dx' \frac{1}{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}'),$$

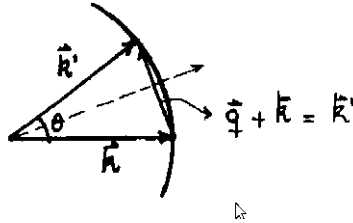


Figura 3.8

la transformada de Fourier del potencial es, amén de constantes, la amplitud a primer orden

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \sin(\theta/2) \quad \text{con } k = k'$$

Entonces para cualquier potencial esféricamente simétrico se puede hacer la integral

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \left(\frac{2m}{4\pi\hbar} \right)^2 \int d^3x' V(x) e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}'} \right|^2$$

y expresamos todo en función de $q = q(\theta)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr) dr \right|^2$$

Utilizando un potencial de Yukawa primero y tomando el límite para llegar al de Coulomb tenemos la sección eficaz de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2m^2 e^4}{\hbar^4} \frac{1}{16k^4 \sin^4(\theta/2)}$$

hay que tomar el potencial de Yukawa y luego el límite porque el de Coulomb diverge de entrada