Capítulo 1

Campos de cargas en movimiento

1.1 Potenciales retardados

Usando el gauge de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\phi$$

con forma general

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t) \tag{1.1}$$

siendo f la que da la distribución de fuentes.

Resolveremos (1.1) con una función de Green. Hacemos Fourier respecto a la frecuencia, de manera que podamos remover el tiempo (además luego nos interesarán fuentes armónicas y por sobre todo cualquier perturbación puede descomponerse en Fourier).

Suponemos que podemos escribir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}, \omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega$$

siendo sus inversas

$$\psi(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x},t)\, \mathrm{e}^{i\omega t} dt$$

$$f(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},t)\, \mathrm{e}^{i\omega t} dt$$

luego la ecuación resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2\psi(\mathbf{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c^2}\psi(\mathbf{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega$$

de manera que se satisface la ecuación de Helmholtz inhomogénea,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{x},\omega) = -4\pi f(\mathbf{x},\omega),$$

para cada valor de frecuencia ω.

Una función de Green satisfacerá

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

donde $\mathbf{x}-\mathbf{x}' = \mathbf{R}$ y la función de Green será simétricamente esférica pues pedimos la no existencia de contornos, entonces llamando a aquella $G_k(R)$ se tiene

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\mathbf{R})$$

donde hemos usado el laplaciano en esféricas. Debemos distinguir dos casos, si $R = 0$ entonces la anterior resulta

$$\lim_{kR\to 0} G_k(R) = \frac{1}{R}$$

mientras que de ser cierto $R \neq 0$ en cambio

$$\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2(RG_k) = 0$$

y entonces se propone como solución general

$$G_k(R) = \frac{A}{R}\,\mathrm{e}^{ikR} + \frac{B}{R}\,\mathrm{e}^{-ikR}$$

donde A, B dependerán de las condiciones de contorno y siendo que el primer término del RHS representa una onda divergente esférica y el segundo una onda convergente esférica.

Se puede interpretar G_k como el potencial de una carga unitaria que aparece en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ en el instante $t = t'$ y luego desaparece (mmm, qué misterio!).

Ahora necesitamos meter la dependencia temporal,

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$$

$$-4\pi f(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t)\mathrm{e}^{i\omega t} dt = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t')\mathrm{e}^{i\omega t} dt$$

$$-4\pi f(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{i\omega t'}$$

de modo que tenemos

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{i\omega t'},$$

usando lo cual se llega a

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(R)\,\mathrm{e}^{-\omega t} d\omega$$

donde τ es el tiempo relativo entre los tiempos de observación y fuente (t') y R es la distancia relativa entre observación y fuente.

En un medio no dispersivo es

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{R}\delta(\tau \mp \frac{R}{c})$$

y así llegamos a

$$G^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(t-t'-\frac{1}{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t - (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green retardada

$$G^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(t-t'+\frac{1}{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t + (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green avanzada.

G^{+} exhibe el comportamiento causal del efecto observado en $\mathbf{x}$ a t causado por la acción de la fuente en el tiempo $(t - R/c)$ donde R/c es la diferencia de tiempo de la señal en propagarse. Al valor

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

se lo llama el tiempo retardado. Es un poco más práctica la nomenclatura

$$G^{+}(R,t,t') = \frac{\delta(t' - [t-(R/c)])}{R} \qquad G^{-}(R,t,t') = \frac{\delta(t' - [t+(R/c)])}{R},$$

Entonces una solución particular de (1) (¿uno qué?) es

$$\psi^{\pm}(\mathbf{x},t) = \int\int G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t') f(\mathbf{x}',t') d^3x' dt'$$

y dos soluciones son

$$\psi_{in}(\mathbf{x},t) + \int\int G^{+} f dv' dt \qquad \psi_{s}(\mathbf{x},t) + \int\int G^{-} f dv' dt$$

con $f(\mathbf{x}',t')$ una fuente que es diferente de cero solo en un intervalo $\sim t'$. Entonces ψ_{in} satisface (1) homogénea en $t \to -\infty$. ψ_s es la onda en $t \to +\infty$ solución homogénea. La situación más común es el caso de ψ_{in} con $\psi_{in} = 0$ entonces

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{v}' \frac{\delta(t' - [t-(R/c)])}{R} f(\mathbf{x}',t') dv' dt',$$

e integrando con la delta

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{v}' \frac{f(\mathbf{x}', t-(R/c))}{R} dv',$$

que es una fuente en una cierta región que se enciende un instante e irradia.

1.1.1 Fuente armónica

Sea una fuente armónica en el tiempo

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}',t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}$$

entonces el potencial vector es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{4\pi}{c}\int_{v}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}\Big|_{t_{ret}} dv' = \frac{4\pi}{c}\int_{v}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{e}^{i\omega R/c}\Big|_{t_{ret}} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\int_{v} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{R}\,\mathrm{e}^{i\omega R/c} dv$$

se puede ver como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{4\pi}{c}\int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dv'\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Si la fuente oscila armónicamente con frecuencia ω entonces los campos tendrán la misma frecuencia ω.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{i\omega/c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dv'$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \quad \text{si} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}',t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}$$

La aproximación consiste en desarrollar

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

y ver condiciones asintóticas. Cuando $\ell = 0$ (el primer término de la sumatoria en ℓ) y $kx' \ll 1$ tenemos una antena ineficiente. La longitud de onda λ de la radiación es mucho mayor al tamaño del emisor, $2\pi x' \ll \lambda$ (longitud de onda larga). En cambio tenemos $2\pi x \gg \lambda$ que es la condición de campo lejano (siempre la usaremos).

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{(0)} = -ik\mathbf{p}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x}$$

es una onda esférica saliente. Es el potencial vector $\mathbf{A}$ de un dipolo magnético oscilante armónicamente. Recordemos que falta siempre *pegarle* un factor $\exp(i\omega t)$. Usando $\mathbf{E}0i/k\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}, \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = k^2(\hat{r}\times\mathbf{p})\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x}\left(1-\frac{1}{ikx}\right) \tag{1.2}$$

siendo $\hat{r}$ la dirección de propagación y $x \equiv |\mathbf{x}|$ que puede ser $|r\hat{r}|$ en esféricas. El que contribuye a la radiación es el primer término de (1.2) (campo lejano) mientras que el segundo se va a cero rápidamente.

Cerca de la antena es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = ik(\hat{r}\times\mathbf{p})\frac{1}{r^2},$$

pues $kx \ll 1$ y entonces $\exp(ikx) \sim 1$ (campo cercano) de manera que si $\lambda\to\infty$ entonces $\mathbf{B}^{(0)} \sim 0$. El campo $\mathbf{E}$ cerca de la antena es

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} \qquad \to \qquad \mathbf{E}^{(0)} = \frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}}{r^3}$$

que es el campo de un dipolo eléctrico. $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ son transversales a $\hat{r}$ y tienen la misma longitud (en unidades CGS). La potencia media (en un número entero de períodos) será

$$\langle dP \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d\Omega$$

y entonces

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2$$

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin(\theta)^2$$

y este cálculo podemos ver de dónde sale

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{24\pi} \Re\{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\} = \frac{c}{8\pi} \Re\{(\mathbf{B}^0 \times \hat{r}) \times k^2 (\hat{r} \times \mathbf{p})/r\}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re\{(-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\theta}) \times (-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\phi}\} = \frac{c}{8\pi} p^2 k^4 \sin(\theta)^2 \hat{r} \cdot \hat{r}$$

Tenemos un cálculo auxiliar de esta cuenta pero no sé si suma meterlo acá.

Luego, la potencia irradiada es máxima en $\theta = \pi/2$ (ver figura)

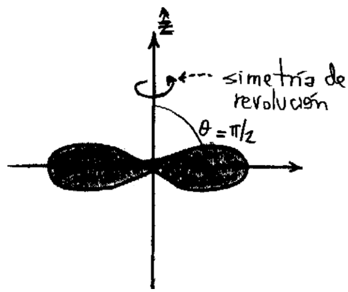

Figura 1.1

Entonces,

- Si $\mathbf{B} = 0$ se da que $\mathbf{S} = 0$, es decir que no hay radiación.
- Un monopolo no produce campo de radiación por su simetría esférica. Una corriente $J\hat{r}$ no produce $\mathbf{B}$ y se tienen

$$\mathbf{B}^0_{rad} = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ikr} \qquad \mathbf{E}^0_{rad} = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ikr} \times \hat{r}$$

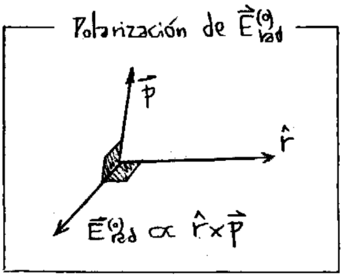

Figura 1.2

- Para que un campo sea de radiación debe tener flujo $\mathbf{S}$ no nulo en el infinito. Si los campos van como $1/r$ entonces el Poynting va como $1/r^2$ y dS va como r^2 de modo que $\langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S}$ tiene valor constante (un flujo que se va y no retorna a la fuente). Si el campo va como $1/r^2$ y entonces no produce flujo lejos.
- Si hacemos la aproximación $\ell = 1$ en $\sum_\ell$ resulta que se obtiene un momento magnético oscilante más un cuadrupolo eléctrico.
- La radiación a orden $\ell = 0$ es un dipolo eléctrico oscilante (ver figura)

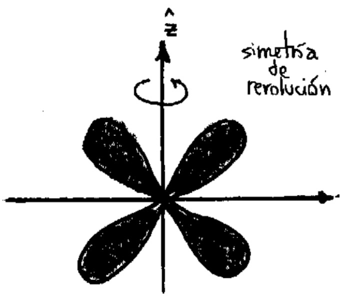

Figura 1.3

- La distribución angular de potencia para la parte cuadrupolar que surge con $\ell = 1$ es
$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2$$

que es para una fuente con simetría de revolución.

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \frac{ck^6}{128\pi} |\hat{r} \times \mathbf{Q}|^2,$$

donde $\mathbf{Q}$ es un vector que vale $\hat{n} \cdot \overline{Q}$, o bien indicialmente $n_i Q_{ij}$.

1.1.2 Radiación a orden $\ell = 1$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR}\dot{\mathbf{p}}(t') + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t')}{cR} \times \hat{n} + \frac{1}{6c^2 R}\overline{Q}(t') \cdot \hat{n}$$

que es la radiación dipolar eléctrica, magnética y cuadrupolar eléctrica.

1.1.3 Ejemplo de antena

Sea una pequeña antena de longitud d (ver figura) tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I \sin(k[d/2 - |z|])\delta(x')\delta(y')\hat{z}$$

que tiene nodos de la corriente en los extremos. Luego considerando fuente armónica ($A = A(x)\exp(i\omega t)$) será

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_V' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\, \mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dv'$$

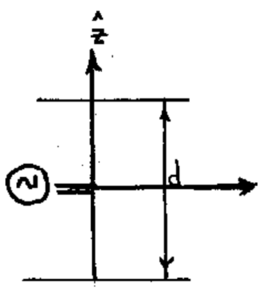

Figura 1.4

Hacemos algunas aproximaciones geométricas de distancia amparadas en la figura de más abajo.

Estas aproximaciones son clásicas de los problemas de difracción.

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx'\cos(\theta)} = x(1 - 2x'/x\cos(\theta) + (x'/x)^2)^{1/2}$$

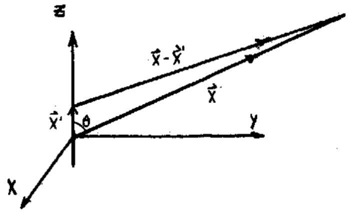

Figura 1.5

y quedándonos a primer orden,

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx x(1 - x'/x\cos(\theta))$$

de manera que aceptamos una buena aproximación y una bruta,

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx x - x'\cos(\theta) \qquad\qquad |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx x$$

para así escribir

$$\approx \frac{1}{|\mathbf{x}|}\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{e}^{-ikx'\cos(\theta)}$$

donde notamos que hemos aproximado de una forma dentro del argumento de la exponencial compleja y de otra en el denominador de la fracción.

Así, resulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x}\int_V' \mathbf{J}(\mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{ikx'\cos(\theta)}dv'$$

Existe condición de contorno que en los extremos la corriente debe ser nula, entonces debe haber nodos del seno (en $\pm d/2$) y los d posibles son $n\lambda/2$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \hat{z}\frac{2I\,\mathrm{e}^{ikx}}{ckx}\left[\cos(kd/2\cos(theta)) - \cos(kd/2)\right]\frac{1}{\sin(\theta)^2}$$

entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_z\hat{z} \qquad\qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_z\cos(\theta)\hat{\theta} - A_z\sin(\theta)?$$

Falta un vegsor

.

Entonces con $kx' \ll 1$ (longitud de onda larga, $\lambda \gg d$) tenemos

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi}\left(\frac{kd}{2}\right)^4\sin(theta)^2$$

identificando con $|\mathbf{p}| = Id^2/(2c)$ y este es el primer término multipolar. El paréntesis es muy chico. Con media longitud de onda ($kd = \pi$) ($\lambda/2 = d$) es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \frac{\cos(\pi/2\cos(\theta))^2}{\sin(\theta)^2}$$

y finalmente para una longitud de onda ($\lambda = 2$ y $kd = 2\pi$) se tiene

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \left[\frac{2\cos(\pi/2\cos(\theta))^2}{\sin(\theta)^2} \right]^2$$

Las ilustraciones sucesivas de la figura bajo estas líneas dan cuenta de estas diferentes longitudes.

Figura 1.6

Como referencia tengamos en cuenta que las expresiones salen de

$$\mathbf{B}_{rad} = -\frac{1}{c}\hat{n} \times \dot{\mathbf{A}} = ik\hat{n} \times \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{E}_{rad} = \mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$$

Estas equivalencias son para campos de radiación nomás,

$$\mathbf{B}_{rad} = ik\hat{n} \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E}_{rad} = \mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$$

1.2 Campos de una partícula cargada en movimiento

Escribimos la densidad de corriente y la densidad de carga según

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = q\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

$$\rho(\mathbf{x}', t') = q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

de manera que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int_{t'}\int_{V'} \frac{q\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' dt'$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int_{t'}\int_{V'} \frac{q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' dt'$$

donde hemos usado $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ de modo que es $R = R(t')$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int_{v}^{\prime} \frac{q\mathbf{v}\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} dt' \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{q}{c}\frac{\mathbf{v}(t')}{(1 - \hat{n}\cdot\boldsymbol{\beta})R(t')}\right|_{t'=t-R/c}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int_{v}^{\prime} \frac{q\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} dt' \Rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{q}{c}\frac{1}{(1 - \hat{n}\cdot\boldsymbol{\beta})R(t')}\right|_{t'=t-R/c}$$

cuyas expresiones son los potenciales de Liènard-Wiechert. Hemos usado en las cuentas que

$$\delta[t' - (t - R(t')/c)] = \frac{1}{\frac{d}{dt'}(t' + R(t')/c)}\delta(t - t')$$

(idea que viene de $\delta f = (1/(df/dx_0))\delta(x - x_0)$) y que

$$R = |\mathbf{x} {-} \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'} \qquad \frac{dR}{dt'} = \frac{\dot{\mathbf{x}}'\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{R} = -\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R} = -\hat{n}\cdot\mathbf{v}$$

$$1 + \frac{1}{c}\frac{dR}{dt'} = 1 - \hat{n}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} = 1 - \hat{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$$

según la figura que ilustra bajo estas líneas

y como los campos serán

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi$$

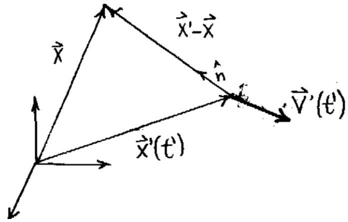

Figura 2.7

se tiene que

$$\mathbf{E} = q\frac{(\hat{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{K^3R^2}\bigg|_{ret} + \frac{q}{c}\frac{\hat{n}\times[(\hat{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{K^3R}\bigg|_{ret}$$

donde se ve que vale $\mathbf{B} = \hat{n}\times\mathbf{E}$ que ya sabíamos para $\mathbf{E}_{rad}$ y $\mathbf{B}_{rad}$ y donde $K \equiv 1-\hat{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$

De acuerdo a la figura xxxx en t' se produce el campo. Cuando la radiación llega a $\mathbf{x}$ en tiempo t la partícula se halla en $\mathbf{x}'$ (tiempo t), de manera que la moraleja es que t y t' son instantes de tiempo diferentes en un mismo sistema inercial.

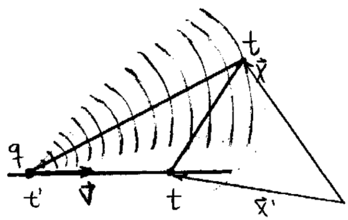

Figura 2.8

Podemos sacar un par de frases importantes ya que

- Si una partícula se mueve con $\mathbf{v}$ constante puedo pasar a un frame inercial S' donde es $\mathbf{v}=0$ y entonces $\mathbf{B}'=0$ de manera que como $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{B}'\cdot\mathbf{E}'=0$ se tiene $\mathbf{B}\perp\mathbf{E}$ en todo frame inercial.
- El $\mathbf{E}_{rad}$ estará dado por el $\mathbf{E}_a$.
- Toda partícula que está acelerada en un frame inercial debe irradiar ondas EM, entonces una partícula recorre una circunferencia (en un campo $\mathbf{B}$) si aceptamos que lo que irradia es despreciable.

Sea ahora una partícula e con $|\mathbf{v}|$ constante, entonces

$$\mathbf{B}_{bs} = e\frac{\boldsymbol{\beta}\times\hat{n}}{\gamma^2 k^3 R^2} \quad \text{(Lienard-Wiechert)} \qquad\qquad \mathbf{B}_{bs} = e\frac{\mathbf{v}\times\hat{n}}{cR^2} \quad \text{(Biot-Savart)}$$

y

$$\mathbf{E}_v = e\frac{\hat{n}-\hat{\beta}}{\gamma^2 k^3 R^2}$$

donde vemos que difieren en

$$\frac{1-\beta^2}{(1-\hat{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}$$

1.3 Campo de una carga en movimiento

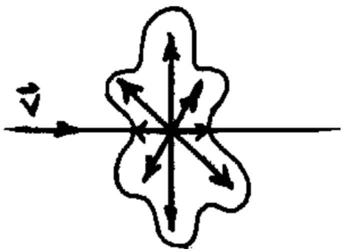

Figura 3.9

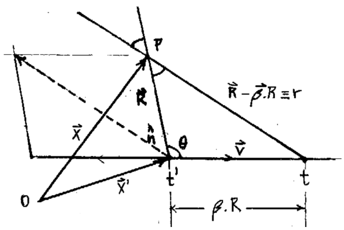

Figura 3.10

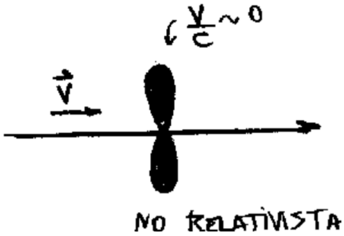

Figura 4.11

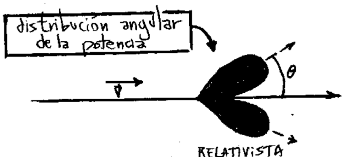

Figura 4.12

1.4 Cálculo de potencia irradiada

1.5 Frenado magnético

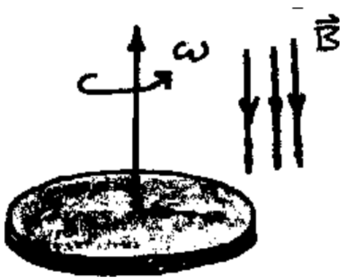

Figura 5.13

1.5.1 Esponja electromagnética

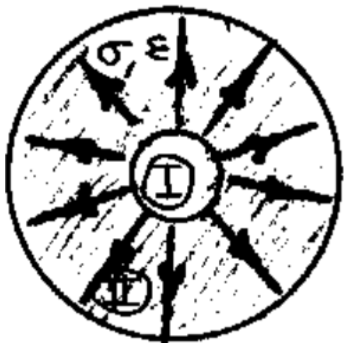

Figura 5.14