Capítulo 1

Teorema de Green

1.1 Imágenes y método de Green

El método de las imágenes es un procedimiento gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extras (cargas imagen) las condiciones de contorno.

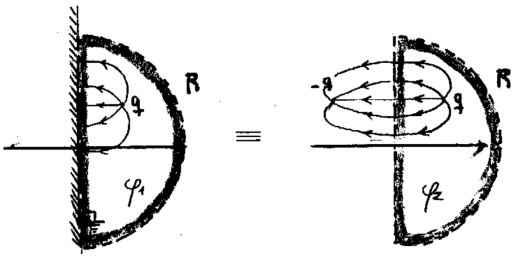

Figura 1.1

Los problemas que ilustra la figura satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado, entonces sus soluciones internas son la misma: $\phi_1 = \phi_2$ por unicidad.

1.1.1 El Método de Green

El concepto tras el método de Green es evaluar el ϕ de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación elemental.

Restando entre sí

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\psi)=\phi\nabla^2\psi+\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)=\psi\nabla^2\phi+\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi$$

e integrando ambos miembros y utilizando el teorema de la divergencia, se llega a

$$\int_V\left[\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right]dV=\int_S\left[\phi\boldsymbol{\nabla}\psi-\psi\boldsymbol{\nabla}\phi\right]dS,$$

que es la segunda identidad de Green.

Consideremos lo que llamaremos caso A, según vemos en figura, caracterizado según

$$\rho_{int}\qquad \mathbf{x}'\in R,\mathbf{x}\in R$$

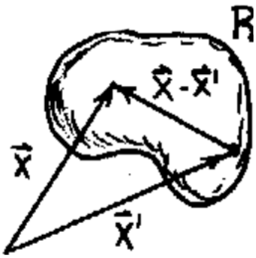

Figura 1.2

$$\psi=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\qquad \nabla^2\psi=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$-\phi(\mathbf{x})4\pi+\int_V 4\pi\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\;dV'=\int_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\;dS$$

donde estamos usando la abreviatura $\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{n}=\partial\phi/\partial n$ que es la derivada normal en la superficie.

,

El caso B, según figura, corresponde a

$$\rho_{int}\qquad \mathbf{x}'\notin R,\mathbf{x}\in R$$

1.2 Funciones de Green

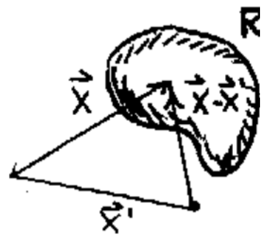

Figura 1.3

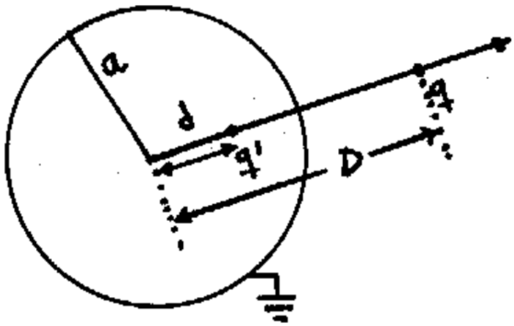

Figura 2.4

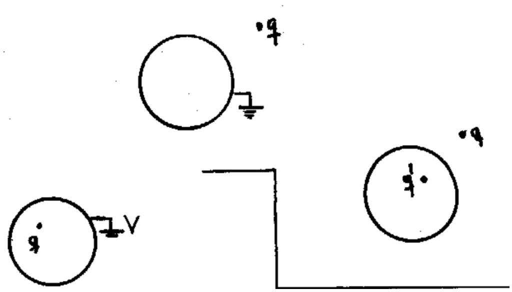

Figura 2.5

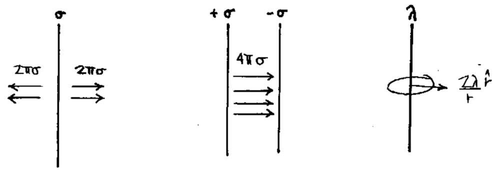

Figura 2.6