CBFT

Mecánica clásica

1 de noviembre 2015

Contenidos

§1. Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

Sea una función de las coordenadas y del tiempo $F = F(q_i, t)$ que sumamos al lagrangiano $\mathcal{L}$, de modo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este nuevo lagrangiano son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

Ahora es necesario escribir la derivada total de F,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Luego, usando esta información, resulta que los términos que surgen de la adición de la derivada total de F resultan ser

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

y si aceptamos que F es de clase C^2 se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

de modo que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos una derivada total respecto del tiempo de una función de q_j, t.

Referencias