Capítulo 1

Ecuaciones de Hamilton

Se pasa de las variables $(q, \dot{q})$ hacia el par (q, p) con

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Se parte del

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i}^{3N-k} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

y consideramos el diferencial

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

se deducen entonces,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

que son las ecuaciones de Hamilton. Donde (p, q) son $2N$ grados de libertad del sistema llamados las variables canónicas. Si $V \neq V(\dot{q})$ y los vínculos no dependen del tiempo entonces $T = T_2$ (la energía cinética es cuadrática en las velocidades) y $H = E$.

1.1 Transformación canónica del hamiltoniano

Es una transformación que verifica

$$H \longrightarrow K$$

donde $K = K(Q_i, P_i, t)$ es un nuevo hamiltoniano proveniente de

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \longrightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \longrightarrow \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

y ahora usamos el Principio Variacional de Hamilton,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right\} dt$$

$$\delta S = \sum p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t$$

pero el último término es nulo porque la variación es a tiempo fijo. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange en el primer término resulta que

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \frac{d}{dt} \left(p_i \delta q_i \right) \right\} dt$$

y llego pidiendo que sea extremo S a las ecuaciones de Hamilton (dos primeros paréntesis) mientras que el último término resulta

$$\int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt} \left(p_i \delta q_i \right) \right\} dt = \left. p_i \delta q_i \right|_{t_i}^{t_f} .$$

Entonces, usando la misma idea que el $\mathcal{L}$ se tiene

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

siendo F una función generatriz. Luego,

$$\sum p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{dF}{dt}$$

1.1.1 Generatrices

Consideraremos ahora varios casos diferentes de dependencia en la función generatriz,

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t)$$

$$\sum p_i\dot{q}_i - H + K - \sum P_i\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$$

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \sum \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} - H + K = 0$$

y la transformación canónica queda definida por

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \qquad \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H$$

Todas las combinaciones posibles son

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t) \qquad F_2 = F_2(q_i, P_i, t) \qquad F_3 = F_3(p_i, Q_i, t) \qquad F_4 = F_4(p_i, P_i, t)$$

y para F_2, por ejemplo, se tiene

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_i^N q_i P_i$$

la cual es una identidad (transformación). Y

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i = p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = q_i = Q_i$$

1.2 Corchetes de Poisson

Sea $A = A(q_i, p_i, t)$ entonces

$$\frac{d}{dt}A = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}A = \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}}_{\equiv[A,H]} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}A = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Las constantes de movimiento en un sistema cumplen que su corchete de Poisson con el hamiltoniano es nulo.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = [q_i, H] \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = [p_i, H]$$

Una transformación canónica cumple

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [q_i, q_j] = 0$$

de modo que el corchete entre los momentos es nulo así también como el corchete entre las coordenadas.