

## Capítulo 1

---

# Gas de Fermi

DIBUJOS

$$\langle n_e \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta e} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\mu - e)} + 1}$$

Si  $\mu < 0$  como  $e > 0$  siempre, ni aún en el estado de más baja energía se llega a ocupar el nivel (restan muchos niveles vacíos).

Sea que  $T \rightarrow \infty$  entonces  $\beta \rightarrow 0$  y se sigue que

$$e^{\beta(e - \mu)} \rightarrow \infty e > \mu$$

$$e^{\beta(e - \mu)} \rightarrow 0 e < \mu$$

$$e^{\beta(e - \mu)} \rightarrow 1 e = \mu$$

Luego, con  $T = 0$  es Fermi un escalón. El valor de  $\mu$  que determina el último estado ocupado se llama  $e_F$

DIBUJO

$$f_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v} = \int_0^{\xi = \beta \mu} \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2) 3/2} dx = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi^{1/2}} (\beta \mu)^{3/2} = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi^{1/2}} (\beta e_F)^{3/2}$$

## 1.1 Análisis del gas ideal de Fermi

La primera aproximación consiste en

- Caso no degenerado :  $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$  que lleva a  $T$  alta y  $v$  alto por ende  $N/V$  chico.

$$z \ll 1 \quad f_\nu(z) \approx z \quad \frac{\lambda^3}{v} \approx z$$

Si vale la condición entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \ll 1 \quad z \ll 1$$

$$\beta p V \approx 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \quad U = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} \left( 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \right)$$

- $\frac{\lambda^3}{v} < 1$  entonces  $z < 1$  y hay que expandir el virial,

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1}$$

que igualando coeficientes se hace (¿?)

$\lambda^3/v$  a orden 1 hay efectos cuánticos

$$f_{5/2}(z) = f_{3/2}(z) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1}$$

- $\frac{\lambda^3}{v} \approx 1$  Cálculo numérico
- Caso altamente degenerado :  $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$  se tiene  $z \gg 1$  Se puede expandir  $f_{\nu}(z)$  en función de  $(\log z)^{-1}$  mediante lema de Sommerfeld  $z \gg 1$  entonces  $\log z \gg 1$   
 $(\log z)^{-1} \ll 1$   $\log z = \beta \mu$

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\pi^{1/2}} (\log z)^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right]$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right]$$

y entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \quad \text{a orden 0}$$

$$\frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{N}{V} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (k T)^{3/2} = \mu^{3/2}$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = \mu^{3/2} = e_F^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (k T)^{3/2} = \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right]$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = e_F^{3/2} \approx \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]$$

$$e_F \approx \mu \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{-2} \right]^{2/3} \approx \mu \left[ 1 + \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

**Anoté** investigar este pasaje.

$$e_F \approx \mu \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

y consideramos

$$\frac{1}{\mu^2} \approx \frac{1}{e_F^2}$$

pués  $\mu$  es muy grande.

$$\beta p v = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{2\beta\mu}{5} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Hasta orden dos en  $T$  resulta

$$p v \approx \frac{2\mu}{5} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] = \frac{2e_F}{5} \left[ 1 - \frac{\pi}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right] \left[ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$p v \approx \frac{2e_F}{5} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$U = \frac{3}{2} p v \approx \frac{3}{5} N e_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \approx \frac{N \pi^2 k^2 T}{2 e_F} \quad C_V \propto T$$

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{2} N k \left( \frac{T}{T_F} \right)$$

DIBUJO  $T_F$  siempre estará en general en la zona clásica donde no vale la aproximación degenerada.

Calor específico Fermi ( $\zeta$ ?)

- Caso totalmente degenerado :  $\frac{\lambda^3}{v} \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow 0) \quad z \rightarrow \infty$

La distribución de estados es escalón,

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left( \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + 1} \right) dp$$

$$z = e^{\beta\mu} \mathbf{y}$$

$$z(T \rightarrow 0) = e^{\beta e_F} \rightarrow \infty$$

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$$

Notemos que

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 kT \log(1 + e^{-1/kT(p^2/2m - \mu_0)}) dp$$

tiene un comportamiento no trivial con  $T \rightarrow 0$ . Si  $kT \rightarrow 0$  entonces si  $e > \mu_0$  el  $\log \rightarrow 0$  y si  $e < \mu_0$  el  $\log \rightarrow \infty$ . Parecería que con  $T \rightarrow 0$  es

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left( \frac{p^2}{2m} - \mu_0 \right) dp$$

y haciendo el cambio de variables de acuerdo a  $p^2/2m = e$ , que lleva a  $pdp = mde$ , se tiene

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{e_F} \sqrt{2em}^{3/2} (e - \mu_0) de$$

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} \left( \frac{e_F^{5/2}}{5/2} - \mu_0 \frac{e_F^{5/2}}{3/2} \right) = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{4}{15}$$

$$U = \frac{3}{2} pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{2}{5}$$

$$p = \frac{2}{5} e_F \frac{\langle N \rangle}{V} \quad U = \frac{3}{5} e_F \langle N \rangle$$

A  $T = 0$  tenemos presión y energía no nulas; las partículas no se acomodan todas en un único nivel energético (exclusión de Pauli). Para  $T \approx 0$  ( $T$  bajas) el escalón en estados apenas se desdibuja

DIBUJO.

## 1.2 Cuánticos III –reubicar–

### 1.2.1 Los números de ocupación

DIBUJO

Se ve que para Bose  $\mu < 0$  siempre pero  $\langle n \rangle \rightarrow \infty$  si  $\mu \rightarrow 0^+$ . El gráfico es para  $T$  alta. Con  $T$  bajas todo tiende a suceder más pegado al eje  $\beta(e - \mu) = 0$

**Teniendo el límite sale la cuenta**

### 1.2.2 Comportamiento de $f_{3/2}(z)$

$$f_{3/2}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j^{3/2}} \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \quad z \text{ chico}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{z^{-1} e^x + 1} dx \approx \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx$$

Notemos que con  $\beta\mu$  grande el integrando es 1 o 0 (DIBUJO); en realidad es un escalón en el límite en que  $\xi \equiv \beta\mu \rightarrow \infty$  **Definimos  $\log z \equiv \xi$  para no especular con temperaturas.**

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \quad z \text{ muy alto}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[ (\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + \dots \right]$$

El valor  $\lambda^3/v$  determina relación entre  $T, V, N$  que son los parámetros macroscópicos que uno fija.

### 1.2.3 Casos

- Comportamiento clásico:  $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$  Altas  $T$  y bajas  $n \equiv \frac{N}{V}$

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

y por inversión de la serie

$$z = \frac{\lambda^3}{v} + \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^2 2^{-3/2}$$

y entonces si  $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$  se tiene que  $z \ll 1$

**Sabemos que en Boltzmann es**

$$\frac{\lambda^3}{v} = z$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{v}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad \frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{z - z^2/2^{5/2}}{z - z^2/2^{3/2}} \approx 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)$$

siendo el último término una corrección cuántica.

- Comportamiento cuántico :  $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$  Bajas  $T$  y altas  $n \equiv \frac{N}{V}$

A  $T = 0$  determinamos la  $e_F$  como (con el límite de  $T \rightarrow 0$ )

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2}$$

$$\left( \frac{3\lambda^3 \sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} = \left( \frac{3h^3 \sqrt{\pi}}{4(2\pi mkT)^{3/2} v} \right)^{2/3} = \log z = \beta e_F$$

$$\frac{h^2}{2m} \left( \frac{3}{4\pi v} \right)^{2/3} = e_F = \frac{h}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3}$$

A  $T = 0$  la ocupación por nivel es un escalón ( $e_F = \mu(T = 0)$ )

$$\langle n_e \rangle = \begin{cases} 1 & e < e_F \\ 0 & e > e_F \end{cases}$$

### 1.2.4 Funciones termodinámicas con $T$ baja y $n$ alta

Usamos Sommerfeld

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \quad \mu = e_F$$

orden 1

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]^{-1} \approx (\log z)^{3/2}$$

$$e_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \approx \mu(T) \text{ cumple } \mu(T = 0) = e_F$$

Puede verse que con  $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$  ( $T$  baja y  $n$  alta) es

$$C_V \approx \frac{N\pi^2 k^2 T}{2e_F}$$

DIBUJO

Aún a  $T = 0$  hay presión no nula pero  $S \rightarrow 0$  con  $T \rightarrow 0$  respetando la tercera ley. Existe una relación de recurrencia

$$z \frac{\partial}{\partial z} f_\nu(z) = z \frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{l z^{l-1} z}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^{\nu-1}} = f_{\nu-1}(z)$$

$$f_\nu(z) = \int \frac{1}{z} f_{\nu-1}(z) dz$$

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{5/2}$$

entonces

$$f_{5/2}(z) = \int dz \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(\log z)^{3/2}}{z} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int dz \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial z} (\log z)^{5/2} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\log z)^{5/2}$$

Usamos

$$d(\log z)^n = n(\log z)^{n-1} / z$$

### 1.2.5 Sobre la aproximación de gas de Fermi para el núcleo

En lo que sigue una deducción más detallada del cálculo. Considero una caja de lados  $L$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad \hbar \mathbf{k} = \mathbf{p} = \frac{h}{L} \mathbf{n}$$

Tomo en el origen de coordenadas  $n_i = \pm 1, \pm 2, \dots$  y así voy de  $-L/2$  a  $L/2 <$ .

$$E = \frac{(\hbar |\mathbf{k}|)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{2\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Quiero saber qué densidad de estados energéticos tengo. Para ello, en esféricas

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \frac{2\pi^2}{L^2} r^2$$

donde  $r$  vive en la esfera (no es necesario tomar el octante y dividir sobre 8)

$$g(E) dE = N(r) dr = 4\pi r^2 dr$$

siendo  $g(E) dE$  el número de puntos entre  $E$  y  $E + dE$ ,

$$dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{L^2 m} 4r dr$$

$$g(E) dE = \frac{L^3 m^{3/2} E^{1/2}}{\hbar^3 \pi^2 \sqrt{2}} dE$$

$$N = g \int_0^{e_F} g(E) dE = \sqrt{2} \frac{V m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \int_0^{e_F} e^{1/2} dE$$

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \frac{2^{3/2}}{3} e_F^{3/2}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \frac{2^{3/2}}{3} e_F^{3/2}$$

y entonces deducimos de aquí que

$$e_F = \frac{\hbar}{2m} \left( \frac{3\pi^2}{v} \right)^{2/3}$$

que coincide con la expresión para  $e_F$  con degeneración  $g = 2$

¿Y estas cuentas sueltas?

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{(\hbar\pi)^2}{2ma^2} r^2 \quad dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{ma^2} r dr$$

$$N(r)dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$$

será lo mismo que el incremento en niveles energéticos

$$N(e)de = \frac{m^2 a^3}{\pi^2 \hbar^3} \left( \frac{E}{2} \right)^{1/2} dE$$

Pensamos un conjunto de nucleones como un gas de Fermi. Claramente

**Recordemos que a  $T = 0$  era**  
 $pV = 2/5 N e_F$  y  $U = 3/5 N e_F$

$$N = 2 \int_0^{e_F} N(e) de$$

porque tenemos la ocupación en función de la energía

$$e_F \propto \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad \text{según la definición de } e_F$$

Al aplicar este modelo (del gas de Fermi) al núcleo hacemos algunas consideraciones

$$R = a_0 A^{1/3} \quad V \propto A$$

siendo  $A$  el número de nucleones.

Para un núcleo se tienen  $N=A-Z$  neutrones, siendo  $Z$  protones y  $A$  nucleones.

$$E = \frac{3}{5} N_T e_F \quad (\text{a } T = 0)$$

y tenemos un  $e_F$  de protones y de neutrones, que son

$$e_{Fp} \propto \left( \frac{Z}{A} \right)^{2/3} \quad e_{Fn} \propto \left( \frac{A-Z}{A} \right)^{2/3}$$

$$E = \frac{3}{5} \left[ Z \left( \frac{Z}{V} \right)^{2/3} + (A-Z) \left( \frac{A-Z}{V} \right)^{2/3} \right] = \frac{3}{5} \left( \frac{Z^{5/3} + (A-Z)^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$



donde hemos supuesto ambos pozos iguales. Si los pozos no fueran iguales cambia la  $e_F$ .

Se minimiza  $E$  con  $Z = N = A/2$  (simetría)

$$f_4 \propto E - E_0 = \frac{3}{5A^{2/3}} [Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3} - 2(A/2)^{5/3}]$$

que se puede reescribir en función de  $D = (N - Z)/2 = (A - 2Z)/2 = A/2 - Z$  (que será chico) y de esta manera

$$Z = \frac{A}{2} - D \quad A - Z = \frac{A}{2} + D$$

$$f_4 \propto \frac{3}{5} \left( \frac{[A/2 - D]^{5/3} + [A/2 + D]^{5/3} - 2[A/2]^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$

y que con un Taylor en  $D \approx 0$  resulta

$$f_4 \propto \frac{(A/2 - Z)^2}{A} \propto D^2 \text{ término de simetría}$$

### 1.2.6 Cuánticos 3 – más material para reubicar–

Un esquema de temas: comportamiento de los números de ocupación gas de Fermi : comportamiento de  $f_\nu(z)$  con  $\nu = 3/2$  gas de Fermi con condiciones extremas

$$\lambda^3/v \ggg 1 \quad \lambda^3/v \lll 1$$

$e_F$  con degeneración  $g$  funciones termodinámicas con  $\lambda^3/v \ggg 1$   $S \rightarrow 0$  con  $T \rightarrow 0$  Aproximación de gas de Fermi para núcleo densidad de estados  $g(e)$

La expresión para  $\mu(T)$  con  $T \geq 0$  sale de

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^3}{v} &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right] \\ (\log z)^{3/2} &= \frac{3\sqrt{\pi}h^3}{(2\pi m)^{3/2}(kT)^{3/2}4v} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]} \\ \mu &= \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8 \log^2 z} \right)^{-2/3} \\ \mu &= e_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

y con  $T$  baja podemos escribir todo en función de la  $e_F$ .

$$E = \frac{3}{5} N e_F \quad \text{con } T = 0$$

Lo importante de tener  $f_{3/2}(z)$  en función de  $\lambda^3/v$ , desde

$$\lambda^3/v = f_{3/2}(z)$$

DIBUJO

es que vemos que  $z$  chico lleva a  $\lambda^3/v$  grande y consecuentemente  $z$  grande lleva a  $\lambda^3/v$  grande.

Luego,

clásico  $z \ll 1$

$$\frac{\lambda^3}{v} \ll 1 \text{ independientemente}$$

cuántico  $z \gg 1$

$$\frac{\lambda^3}{v} \gg 1 \text{ independientemente}$$

Con  $T = 0$  es  $\mu(T = 0) = e_F$  DIBUJO escalón

Cuántico (límite máximo) entonces

$$z \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\lambda^3}{v} = \frac{4(\log z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{2\sqrt{\pi}} (\beta e_F)^{3/2} \text{ con } z = e^{\beta e_F}$$

Entonces  $e_F$  es el nivel tal que debajo de él hay  $N$  estados. En el espacio de momentos las partículas ocupan una esfera de radio  $p_F$ .

**Hay un yeite en la deducción que refiere a que abajo es lo mismo usar orden 1 que orden dos y reemplazo  $(\beta\mu)^{-2}$  por  $(\beta e_F)^{-2}$**