# CBFT Mecánica clásica

Mecánica lagrangiana

4 de noviembre de 2015

## Contenidos



## §1. Principio de los trabajos virtuales

**Esto es sumamente sketchi, debemos leer la carpeta de la cursada y luego la teoría.**

Escribimos las ecuaciones de Newton para un sistema de partículas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

pero sabiendo que el momento viene de las fuerzas aplicadas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{P}}_i$$

de manera que

$$\dot{\mathbf{F}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, sumando en las $N$ partículas del sistema

$$\sum_i^N \left(\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde $\delta\mathbf{r}_i$ son desplazamientos virtuales. Si hacemos estos desplazamientos compatibles con los vínculos

$$\sum_i^N \left(\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

donde el último término es nulo debido a que la fuerza de vínculos son perpendiculares a los desplazamientos virtuales, es decir

$$\mathbf{F}_i^v \perp \delta\mathbf{r}_i$$

si es que, por supuesto, los $\delta\mathbf{r}_i$ son compatibles con los vínculos.

Esto nos deja entonces, el Principio de los Trabajos Virtuales,

$$\sum_i^N \left(\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

donde como son independientes entonces se sigue que

$$\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

**Relación vínculos y desplazamientos:** El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{r}_i) - K = 0$$

luego, derivando implícitamante cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$ como $N$ dimensionales.

**¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.**

## §2. Construcción del lagrangiano

Consideremos un sistema de $N$ partículas, $k$ ecuaciones de vínculo y por ende $3N - k$ grados de libertad (estamos en 3 dimensiones).

Tenemos $N$ relaciones

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t)$$

entonces una variación serán

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$$

donde el último $\delta t$ es nulo por ser un desplazamiento virtual de manera que

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j .$$

Por otro lado

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

y se puede reescribir el primer término como

$$\dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

**Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla**

Consideremos la derivada total de

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) .$$

Pero la diferencial del vector $\mathbf{r}_i$ es (notemos que no es una variación)

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} .$$

La derivada de la velocidad de la partícula $i$-ésima respecto a la coordenada $l$-ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t} .$$

Si derivamos nuevamente

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)=\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l}=\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_l\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_l\partial t}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_l}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_l\partial q_j}dq_j+\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_l\partial t}dt\right)$$

de tal manera que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_l}\right)=\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l}$$

Volvemos ahora a la eq III y

$$\sum_{i}^{N}\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)-m_i\mathbf{v}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j$$

y este corchete lo reescribimos como

$$\sum_{i}^{N}\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

$$\sum_{i}^{N}\sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right\}\delta q_j$$

Ahora introducimos la sumatoria en $i$ hacia adentro de ambos términos,

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_{i}^{N}\frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i}^{N}\frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right\}\delta q_j$$

de modo que dentro de los paréntesis resulta $T$, luego

$$\sum_{i}^{N}\dot{\mathbf{P}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=\sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(T)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}(T)\right\}\delta q_j$$

$$\sum_{i}^{N}\dot{\mathbf{P}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=\sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{i}^{N}\mathbf{F}_i^a\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{i}^{N}Q_j\delta q_j$$

siendo $Q_j$ la fuerza generalizada. Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(T)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}(T)-Q_j\right\}\delta q_j=0.$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas entonces

$$Q_j \delta q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j$$

y como $V = V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n)$ se tiene

$$V = \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial r_i} \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

pero

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Definimos como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

y entonces podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Si existieran fuerzas que no provienen de un potencial entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

y finalmente

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j^{NC} \delta q_j$$

Como esto vale para todo grado de libertad $l$ llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este es el resultado más importante del capítulo.

## §3. Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

Sea una función de las coordenadas y del tiempo $F = F(q_i, t)$ que sumamos al lagrangiano $\mathcal{L}$, de modo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este nuevo lagrangiano son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

Ahora es necesario escribir la derivada total de $F$,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j}^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{j}^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Luego, usando esta información, resulta que los términos que surgen de la adición de la derivada total de $F$ resultan ser

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

y si aceptamos que $F$ es de clase $\mathrm{C}^2$ se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

de modo que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos una derivada total respecto del tiempo de una función de $q_j, t$.

## §4. Momentos conjugados y coordenadas cíclicas

El momento canónicamente conjugado a $q_j$ se define como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \equiv Q_j$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad $j$. Sea un lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ entonces si no depende explícitamente de la coordenada $k$ será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad \to \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, ..., q_{k-1}, q_{k+1}, ..., q_n, \dot{q}_i, t)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$Q_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k = 0 \quad \to \dot{p}_k = 0 \quad \to \; p_k = cte.$$

no existe fuerza generalizada en el grado de libertad $k$, de forma que se conserva el momento $p_k$ canónicamente conjugado a $q_k$.

## §5. Energía cinética de un sistema

**Este chapter es básicamente un desarrollo formal, habría que bajar con alguna aplicación práctica.**

A continuación expresaremos la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\left(\sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right) \tag{5.1}$$

Usando $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_n, t)$ desarrollamos un desplazamiento real como

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y podemos incorporar esta información en (5.1) para obtener

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\sum_j^{3n-k}\sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\right)^2 + 2\left(\sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\sum_j^{3n-k}\sum_s^{3n-k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s\dot{q}_j\right)+\frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2+\sum_i^N m_i \left(\sum_j^{3n-k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)$$

Esto se puede reescribir más cómodamente definiendo

$$T_0 \equiv \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$a_{js}(q_1, ..., q_{3N-k}, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}$$

$$b_j(q_1, ..., q_{3N-k}, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

**Hay un factor de $1/2$ de diferencia. Revisar la carpeta.**

y entonces, juntando todo,

$$T = T_0+\frac{1}{2}\sum_j^{3n-k}\sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, ..., q_{3N-k}, t)\dot{q}_s\dot{q}_j+\sum_j^{3n-k} b_j(q_1, ..., q_{3N-k}, t)\dot{q}_j$$

Para una particula libre será

$$T = T_2$$

y para una partícula con vínculos en general tendrá las tres clases de cinética.

## §6. Energía cinética de un sistema de partículas

La energía de un sistema de partículas es

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_i'\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \mathbf{V}_i'^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N 2m_i \mathbf{V}_{cm}\cdot\mathbf{r}_i'$$

# Referencias

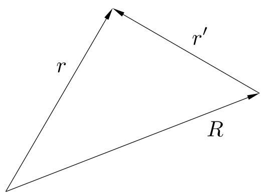


**Figura 6.1** Sistema de partículas