

Capítulo 1

Ondas planas

Lejos de las fuentes de campo las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Podemos derivar con respecto al tiempo en cada ecuación de rotor y reemplazar con la otra de manera que

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

y esto nos lleva a

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

dos sendas ecuaciones de onda para \mathbf{E} y \mathbf{B} . Pero es sabido que la solución de

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

es

$$\psi = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

de modo que podemos postular como soluciones para nuestras ecuaciones de onda a

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \mathbf{B} = \vec{\mathbb{B}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Se tiene además que $\mathbf{k} = k\hat{n}$ da a través de \hat{n} la dirección de propagación de la onda. El número de onda k podrá ser complejo lo cual refleja atenuación. Las características del medio entran a través de

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c}$$

Por su parte $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ son complejos uniformes y podrán dar desfases.

Al utilizar las ecuaciones de divergencia sobre las soluciones se obtiene que

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 = 0 \quad \hat{n} \cdot \vec{\mathbb{B}}_0 = 0$$

de manera que las ondas se propagan perpendicularmente a los campos, por ello las ondas electromagnéticas son transversales.

Utilizando las ecuaciones de rotor se llega a la importante relación

$$\vec{\mathbb{B}}_0 = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}_0$$

de modo que los vectores $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ también son perpendiculares. Si el vector $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ entonces $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ tienen la misma fase.

En el vacío o en un medio LIH los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} estarán en fase. Asimismo

$$\mathbf{S} \parallel \hat{n}$$

pues $\mathbf{S} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

En un medio anisótropo $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$ siendo ϵ un tensor. Allí $\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \hat{n} \neq 0$ salvo que ϵ este diagonalizado y $\mathbf{E} \parallel$ al eje principal.

Notemos que \mathbf{E} , \mathbf{B} y \hat{n} forman una terna derecha.

1.0.1 Sobre complejos

$$\mathcal{R}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{con } A \in \mathbb{C}$$

Sean

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

siempre trabajaremos en general con dependencias temporales armónicas y me-temos $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ en el módulo vbA_0 que pasa a depender de \mathbf{x} .

Los campos físicos son siempre la parte real de las expresiones complejas.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

Acá hay que hacer las cuentas para demostrar todo esto que acá se dice sin más.

con operaciones lineales es lo mismo tomar parte real antes o después.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

con operaciones no lineales no es lo mismo. Para hacer producto necesito tomar la parte real de cada factor y entonces

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} e^{-i2\omega t})$$

Pero como en las aplicaciones estaré interesado en el promedio sobre un número entero de períodos,

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{B} \rangle = \langle \mathcal{R}(\mathbf{A}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{B}) \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*)$$

1.0.2 Poynting promedio y energías promedio

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en ondas electromagnéticas toman la forma

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{H} = \vec{\mathbb{H}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

de manera que

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \mathcal{R}(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^* + \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}} e^{-i2\omega t})$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^*)$$

En un MLIH es

$$\vec{\mathbb{B}} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{n} \times \vec{\mathbb{E}} \quad \vec{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}$$

donde usamos que $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\vec{\mathbb{E}} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}})^*)$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} (\vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{E}}^*) - \vec{\mathbb{E}}^* (\vec{\mathbb{E}} \cdot \hat{n}))$$

y finalmente

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{\mathbb{E}}|^2 \hat{n}$$

que es el vector de Poynting para ondas en MLIH.

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \Re(\vec{\mathbb{H}} \cdot \vec{\mathbb{B}}^* + \vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{D}}^*)$$

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \Re\left(\frac{1}{\mu} |\vec{\mathbb{B}}|^2 + \epsilon |\vec{\mathbb{E}}|^2\right) = \frac{1}{8\pi} |\vec{\mathbb{E}}|^2$$

puesto que

$$|\vec{\mathbb{B}}|^2 = \mu \epsilon |\vec{\mathbb{E}}|^2,$$

y entonces la densidad de energía promedio es

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} |\vec{\mathbb{E}}|^2.$$

1.1 Polarización de ondas

Una onda plana bien general en \hat{n} es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{e}_1 \vec{\mathbb{E}}_1 + \hat{e}_2 \vec{\mathbb{E}}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

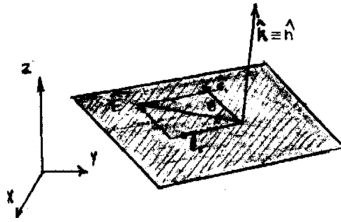


Figura 1.1

Si $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$ están en fase entonces $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ está linealmente polarizada con θ fijo. Es como que \mathbf{E} viaja siempre por el mismo andarivel, oscilando. Las amplitudes $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$ son complejas para permitir la diferencia de fase entre componentes.

Si $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$ tienen fase arbitraria entonces $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ está elípticamente polarizada.

Si $|\vec{\mathbb{E}}_1| = |\vec{\mathbb{E}}_2|$ y la fase es $\pi/2$ entonces $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ está circularmente polarizada.

$$\vec{\mathbb{E}}_2 = \vec{\mathbb{E}}_1 e^{i\pi/2} = \vec{\mathbb{E}}_1 i$$

entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_1 (\hat{\epsilon}_1 \pm \hat{\epsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

donde el $+$ corresponde a \mathcal{C}^+ antihoraria y el $-$ a horaria. Nos definimos por comodidad,

$$\hat{\epsilon}_+ \equiv \frac{\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2}{\sqrt{2}} \quad \hat{\epsilon}_- = \frac{\hat{\epsilon}_1 - i\hat{\epsilon}_2}{\sqrt{2}}$$

una base de polarizaciones. Se cumplen

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_\pm \cdot \hat{\epsilon}_\mp^* &= 0 & \hat{\epsilon}_\pm \cdot \hat{\epsilon}_\pm^* &= 1 \\ \hat{\epsilon}_1 &= \sqrt{2}(\hat{\epsilon}_+ + i\hat{\epsilon}_-) & \hat{\epsilon}_2 &= \sqrt{2}(\hat{\epsilon}_+ - i\hat{\epsilon}_-) \end{aligned}$$

luego cualquier polarización se puede escribir como combinación lineal de \mathcal{C}^+ y \mathcal{C}^- . Entonces una onda plana general es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\epsilon}_+ \vec{\mathbb{E}}_+ + \hat{\epsilon}_- \vec{\mathbb{E}}_-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Una onda que rebota en un espejo transfiere impulso lineal. Una onda \mathcal{C} lleva \mathbf{L} pero no lo transfiere en un rebote perfecto. Por ser \mathbf{L} un vectorial axial (pseudovector) el reflejo es equivalente a una simetría del sistema.

Tenemos dos base entonces $\{\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2\}$ y $\{\hat{\epsilon}_+, \hat{\epsilon}_-\}$. Además,

$$\frac{\vec{\mathbb{E}}_-}{\vec{\mathbb{E}}_+} = r e^{i\alpha}$$

si $r = \pm 1, \alpha = 0$ entonces estamos frente a linealmente polarizada.

1.2 Reflexión y refracción de ondas en medios

Partimos de una onda

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

donde

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$$

siendo v la velocidad en el medio. Los índices de refracción serán

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \quad n' = \sqrt{\mu'\epsilon'}$$

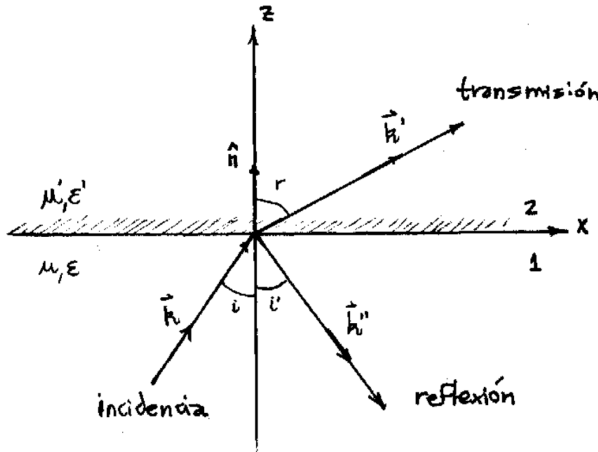


Figura 2.2

de tal suerte que los campos son

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

y tenemos

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| \quad \text{pues} \quad \mu'' = \mu, \epsilon'' = \epsilon$$

Utilizando las condiciones de contorno llegamos a

$$\omega t = \omega' t = \omega'' t$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \big|_{z=0} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} \big|_{z=0} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} \big|_{z=0}$$

La existencia de condiciones de contorno en $z = 0$ que deben ser satisfechas en todo t en todo punto (x, y) lleva a todos los factores de fase iguales en $z = 0$. Se debe tener \mathbf{B} normal continuo y \mathbf{D} normal continuo también, lo cual viene de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$.

La frecuencia ω es la misma para el medio 1 y el medio 2 pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Los tres vectores $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$ están en un mismo plano, entonces

$$k \sin(i) = k' \sin(r) = k'' \sin(i'),$$

y se deducen las consecuencias

$$n \sin(i) = n' \sin(i') \quad \text{Ley de Snell,}$$

$$i = i' \quad \text{Ley de reflexión}$$

Luego se plantean los contornos

$$D_{\hat{n}} : \quad [\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] \cdot \hat{n} = 0 \quad \rightarrow \quad [\epsilon' \mathbf{E}'_0 - \epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0)] \cdot \hat{n} = 0$$

$$E_{\hat{t}} : \quad \hat{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{n} \times [\mathbf{E}'_0 - (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0)] = 0$$

$$B_{\hat{n}} : \quad [\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 - (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0)] \cdot \hat{n}$$

Igual a cero esto?

$$H_{\hat{t}} : \quad \hat{n} \times \left[\frac{1}{\mu'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 - \frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0) \right] = 0$$

de manera que

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

donde c/ω es el mismo para ambos medios.

Aplicando diligentemente los contornos se llega a las *relaciones de Fresnel* que son los cocientes de las amplitudes relativas.

Usando $\mu \sim 1$ (válido para medios transparentes) tenemos

TE	TM
$\frac{E''_0}{E_0} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$	$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$
$\frac{E''_0}{E_0} = 1 + \frac{\sin(r-i)}{\sin(i+r)}$	$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{2 \sin(r) \cos(i)}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$



Figura 2.3

frecuencias ópticas $\mu'/\mu = 1$

Si $i \sim 0$ entonces TE y TM son similares a menos de un signo.

Polarization (Brewster angle)

Es un i_B tal que no hay onda **E** reflejada (en TM),

$$E_0'' = 0,$$

pues $\tan(i + r) \rightarrow \infty$

$$i_b = \text{atan}\left(\frac{n'}{n}\right),$$

pues $i_B + r = \pi/2$ entonces

$$\frac{n}{n'} \sin(i_B) = \cos(i_B) \rightarrow i_b = \text{atan}\left(\frac{n'}{n}\right),$$

Sirve para producir luz polarizada linealmente.

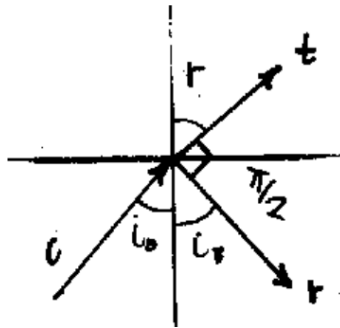


Figura 2.4

Atención, pero

$$\mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_t,$$

pues **S** no está relacionado linealmente con **E**, **B**, y lo que sí vale es

$$\mathbf{S}_i \cdot \hat{n} = \mathbf{S}_r \cdot \hat{n} + \mathbf{S}_t \cdot \hat{n}$$

Reflexión interna total

Sea $n_{inc} > n_{trans}$. Entonces se da que

$$n \sin(i) = n' \sin(r),$$

$$\frac{n}{n'} \sin(i) = \sin(r),$$

y el LHS es mayor igual a 1 para algunos i . Existe un ángulo límite

$$\sin(r) = 1 = \frac{n}{n'} \sin(i)$$

$$i_0 = a \sin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

de manera que si $i \geq i_0$ entonces $\sin(r) > 1$ y se debe tener un $r \in \mathbb{C}$.

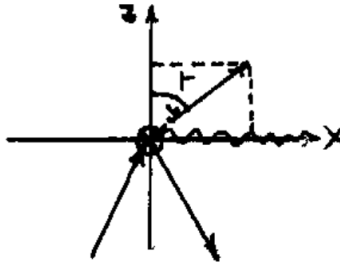


Figura 2.5

Si $\sin(r) > 1$ se tiene $\sin(r)^2 > 1$ y como por teorema de Pitágoras es

$$\cos(r)^2 = 1 - \sin(r)^2 \rightarrow \cos(r) = i\sqrt{\sin(r)^2 - 1}$$

donde notemos espialmente que hemos sacado fuera un $\sqrt{-1} = i$ para que el argumento de la raíz sea positivo en este caso especial. Luego

$$\cos(r) = i\sqrt{\frac{n}{n'} \sin(i)^2 - 1} = ia$$

y si $\sin(r) = 1$ entonces $r = \pi/2$. Entonces

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = e^{i(k \cos(r)z + k \sin(r)x)} = \underbrace{e^{-k a z}}_{\text{atenuación}} \underbrace{e^{i k \sin(r)x}}_{\text{propagación}}$$

1.3 Corrientes en conductores

La continuidad de la carga y la divergencia de \mathbf{D} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

nos llevan a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

y esto lo puedo pensar como una densidad de corriente estacionaria,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad (3.1)$$

siendo \mathbf{J}_e proveniente de un \mathbf{E}' tal que $\nabla \times \mathbf{E}' \neq 0$.

Recordando la ley de Ohm microscópica, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \mathbf{J}$$

y esto nos conduce a una ecuación diferencial para \mathbf{J} ,

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J} + \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \left(1 + \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

y entonces

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_0 e^{-4\pi\sigma/\epsilon t}$$

siendo el segundo término del RHS la parte no estacionaria de la corriente.

Evidentemente, si $t \rightarrow \infty$ esta tiende a cero.

Dado que se verifica (3.1) se tiene

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_0 e^{-4\pi\sigma/\epsilon t}$$

y definimos un tiempo de relajación

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$$

que es un tiempo característico en el cual se alcanzarían condiciones estacionarias.

Podemos distinguir dos comportamientos entonces en términos de este tiempo de relajación τ , si $t < \tau$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_0 e^{-t/\tau}$$

y en cambio cuando $t \gg \tau$ se tendrá $\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_e$ de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_e.$$

Por otra parte con respecto a los conductores, si se da que ($\sigma \ll 1$) estamos en presencia de un conductor malo y no se alcanza *nunca* la condición de $\mathbf{E} = 0$ en el interior. Tienen un τ grande. Si estamos ante un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow$

Un campo irrotacional no puede mantener una corriente estacionaria, necesito una FEM para ella. La FEM es una fuente de E no conservativo.

∞) la corriente es estacionaria y se tiene un $\mathbf{E} = 0$ en el interior, el tiempo τ es pequeño, tendiendo a cero.

Podemos desarrollar un enfoque similar en términos de la densidad de carga ρ .

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{J} &= \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho\end{aligned}$$

Entonces

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad \tau \equiv \frac{\epsilon}{4\pi\sigma},$$

y una vez que $t \gg \tau$ y se estabiliza el sistema es $\rho = \rho_0$ entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

1.4 Campo electromagnético en un medio conductor

Tenemos un campo EM de fuentes lejanas y queremos ver qué sucede en un medio conductor. Se verifican

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

siendo $\rho_L = 0$ y μ, ϵ homogéneos. Modelando de acuerdo

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

y siendo la ley de Ohm microscópica

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

y reemplazando en la ecuación del rotor para \mathbf{H} se tiene

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right),$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

y ahora podemos introducir la expresión que tenemos para el rotor de \mathbf{H} y usar que la divergencia de \mathbf{E} es nula de manera que

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

y entonces

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

que no es otra cosa que una ecuación de ondas general. Un par de casos particulares interesantes son el caso $\sigma = 0$ que corresponde a un dieléctrico, para el que se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

una ecuación de ondas usual. Para el caso general $\sigma > 0$ (conductor) podemos pensar en una solución general del tipo onda plana armónica,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

cuyas derivadas temporales son fáciles de hallar y resultan proporcionales a \mathbf{E} de manera que reemplazando este *ansatz* en la ecuación arribamos a

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2} i\mu\sigma\omega \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \mu\varepsilon\omega^2 \mathbf{E} = 0,$$

que se puede agrupar de manera más inteligente como

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \left(1 + i4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right) \mathbf{E} = 0$$

Podemos definir una especie de número de onda efectivo

$$K^2 \equiv k^2 \left(1 + i4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)$$

y considerar la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2 \mathbf{E} + K^2 \mathbf{E} = 0,$$

con los diferentes casos particulares ocurriendo dentro de K^2 . Así para el caso de un excelente conductor,

$$4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$$

se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} + i \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

que es una ecuación de difusión para la corriente de conducción (?). Por el contrario en el caso de un conductor pobre

$$4\pi \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$$

resulta en

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

que es una ecuación de ondas usual dando como resultado una propagación. Tiende a la ecuación de ondas con $\sigma = 0$.

En general podemos escribir

$$K^2 = k^2 \left(1 + \frac{i}{\tau\omega} \right)$$

donde τ es la relajación del medio y ω es la vibración del campo. Se puede poner en términos del período,

$$K^2 = k^2 \left(1 + \frac{iT}{2\pi\tau} \right)$$

y si $\tau \gg T$ se tiene propagación.

Para metales $\tau \approx 10^{-14}$ segundos y entonces es válida la ecuación de difusión hasta la región de radiofrecuencias. Por ejemplo, si

$$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau\omega} \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} \gg \omega$$

y para metales se cumple que $1 \cdot 10^{14} \gg 6 \cdot 10^6$ siendo este último un valor razonable para ondas de radio.

Si consideramos los campos funciones de la distancia ξ de una plano al origen O, tendremos

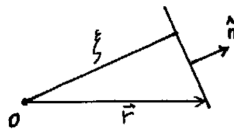


Figura 4.6

Estos ejemplitos hay que
revisarlos y reescribirlos.

los campos son constantes en los planos de normal \hat{n} (ver ilustración).

$$\nabla = \hat{n} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

y de acuerdo a Maxwell,

$$\hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi} = 0 \quad \hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = 0$$

$$\hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

y si tomamos producto escalar de la última ecuación con la normal resulta

$$\hat{n} \cdot \left(\hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \right) = \frac{4\pi}{c} \sigma E_n + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_n}{\partial t} = 0$$

de manera que

$$E_n = E_n^0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}.$$

El $E_{\hat{n}}$ (electrostático) se apaga exponencialmente con el tiempo de relajación del conductor.

$$\hat{n} \cdot \left(\hat{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \right) = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

H_n solo es constante en el tiempo y uniforme en el espacio.

No se ve influenciado por el conductor. Asimismo la energía está metida casi por completo en el campo magnético cuando es un muy buen conductor.

$$K^2 = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right]$$

de manera que podemos escribir

$$K = \beta + i \frac{\alpha}{2}$$

siendo β el término responsable de la propagación, α el término que se atenúa. Esta escritura es sólo conveniente puesto que resulta que

$$\beta = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c} \left[\frac{1 + \sqrt{1 + (\omega\tau)^{-2}}}{2} \right]^{1/2} = k$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c} \left[\frac{1 + \sqrt{-1 + (\omega\tau)^{-2}}}{2} \right]^{1/2} = k$$

y ahí vemos la simetría.

Entonces resulta que para el caso de un mal conductor $\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ o bien $\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \ll \omega$ o bien $1/\tau \ll \omega$ se tiene

$$K = \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c} + i\frac{2\pi\sqrt{\mu}\sigma}{c\sqrt{\epsilon}}$$

y en cambio por el mismo razonamiento pero para un excelente conductor, $1/\tau \gg \omega$

$$K = \frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c}(1+i)$$

y aquí la parte de atenuación $\alpha/2 = \alpha(\omega)/2$ de modo que hay distorsión. En general tendremos

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha/2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} e^{i[\beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}$$

que nos muestra una primera exponencial real que es el factor de atenuación. Entre más conductor un medio más rápida es la atenuación.

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \left[\beta + i\frac{\alpha}{2} \right] \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

de modo que si $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ entonces $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ tienen la misma fase. Si en cambio \mathbf{k} pertenece a \mathbb{C}^3 hay crecimiento o decaimiento exponencial en algunas direcciones. Vemos en una onda plana el caso de la atenuación se vería así

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i(k \hat{\mathbf{n}}_R \cdot \mathbf{x} + k \hat{\mathbf{n}}_I \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i(k \hat{\mathbf{n}}_R \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + e^{k \hat{\mathbf{n}}_I \cdot \mathbf{x}}$$

1.4.1 Algunos ejemplos y casos

Recordemos

$$\omega = 2\pi\nu \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v}$$

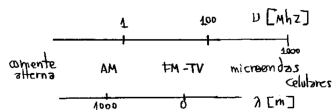


Figura 4.7

Noción de algunos numeritos a partir de la tabla

	ν	λ
celular	1.10^9 Hz	0.3 m
radio AM	1.10^6 Hz	300 m
radio FM	1.10^8 Hz	3 m

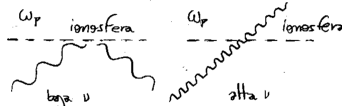


Figura 4.8

Para una malla metálica de interespaciado ℓ tenemos los casos $\lambda \gg \ell$ significa que es macizo para la onda. La penetración no dependerá de la $\sigma(\omega)$, es un conductor macizo.

$\lambda \ll \ell$ es transparente para la onda. No ve el conductor.

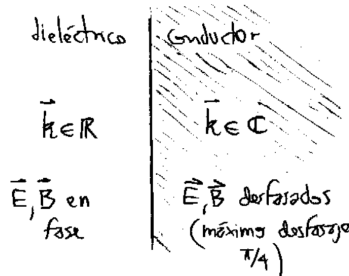


Figura 4.9

En un buen conductor $\mu_M > \mu_E$ el material se comporta inductivamente. En un mal conductor $\mu_E > \mu_M$ el material se comporta capacitivamente.