Capítulo 1

Método de separación de variables

1.1 Separación de variables

Separamos los problemas en regiones donde vale $\nabla^2\phi = 0$ entonces las fronteras tendrán la $\rho(\mathbf{x}')$ en general en forma de σ, λ.

Para coordenadas cartesianas intentaremos resolver $\nabla^2\phi = 0$, es decir

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

pidiendo

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

de manera que

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

cada término es una constante. La solución general es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}\mathrm{e}^{\pm i\alpha_m x}\mathrm{e}^{\pm i\beta_n y}\mathrm{e}^{\pm i\sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2}z}$$

donde habrá que adaptar según las condiciones de contorno. Se da que $A_{m,n}$ es una constante general y hay condiciones periódicas en x, y

$$A\mathrm{e}^{\pm i\alpha x} = A_\alpha\cos(\alpha x) + B_\alpha\sin(\alpha x)$$

corresponde a condiciones de potencial periódicas, cuando necesito dos ceros por ejemplo (ver ilustración lateral –que falta–)

$$Ae^{\pm\gamma z} = A_\gamma \cosh(\gamma z) + B_\gamma \sinh(\gamma z)$$

corresponde a atravesar densidades de carga.

Para coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

proponiéndose la separación

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)Q(\varphi)$$

siendo

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)Q(\varphi)$$

un armónico esférico. Tenemos un oscilador armónico en φ,

$$Q = e^{\pm i\alpha\varphi}$$

si usamos $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ de modo que $\alpha \in \mathbb{Z}$ y entonces $\alpha = m$, con simetría azimutal es $m = 0$ (rotación en φ),

$$Q = G\varphi + H \qquad\qquad G, H \quad ctes.$$

Para las otras funciones será

$$R(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell R^{-\ell-1}$$

$$\Theta(\theta) = C_\ell P_\ell^m(\cos(\theta)) + D_\ell Q_\ell^m(\cos(\theta))$$

siendo P_ℓ^m polinomio de Legendre, que verifica la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}[x^2-1]^\ell$$

con $P_\ell(\cos(\theta))$ polinomio de Legendre de primera especie, y $Q_\ell(\cos(\theta))$ de segunda especie. Los $\{P_e ll\}$ son un conjunto completo y ortogonal en $-1 \leq x \leq 1$ o bien en $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.1.1 Armónicos esféricos

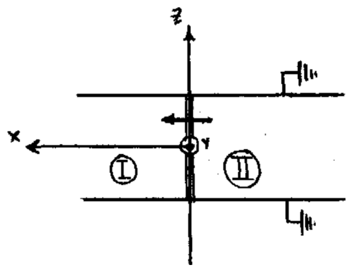

Figura 1.1

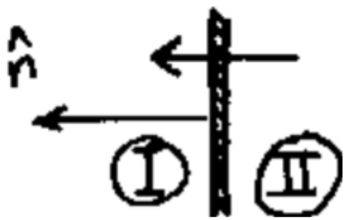

Figura 1.2

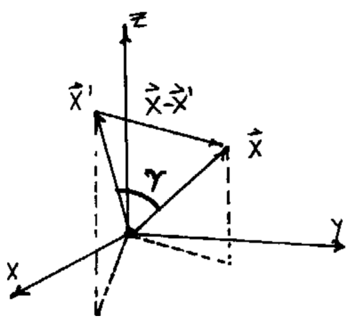

Figura 1.3

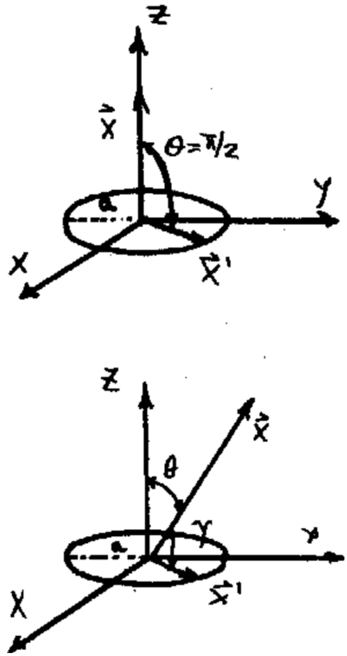

Figura 1.4

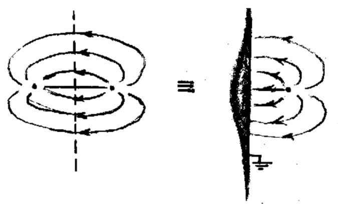

Figura 1.5

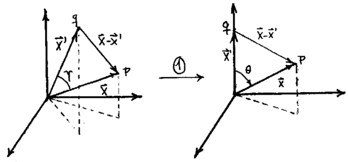

Figura 1.6

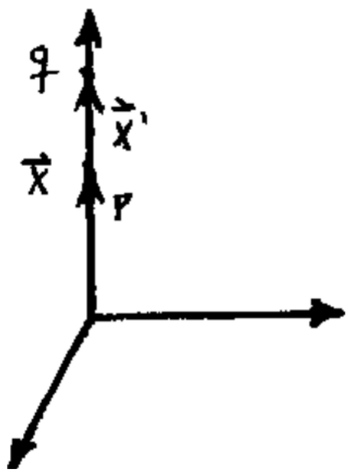

Figura 1.7