

## Capítulo 1

---

# Introducción

## 1.1 El experimento de Stern-Gerlach

Un horno emite átomos de plata (Ag) neutros con un electrón  $e$  en la última órbita que le da el spín al átomo como un todo. Al salir del horno los átomos tienen su spín orientado en cualquier dirección. Ver figura. El momento magnético del átomo que sale del horno es

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_e c} \mathbf{S}$$

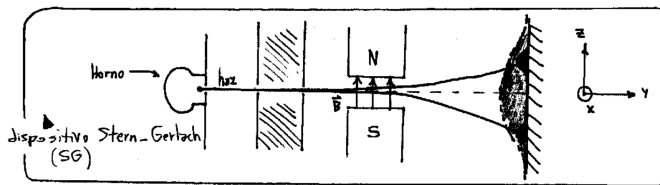


Figura 1.1

La fuerza  $f_z$  que le ejerce el campo  $\mathbf{B}$  a estos átomos es

$$f_z \propto -\mu_z$$

de modo que el dispositivo SG mide y filtra por  $S_z(\mu_z)$ . Si el spín es un ente clásico es de esperar un patrón como el sombreado en azul, pero se obtienen dos manchas; con la correspondencia mostrada bajo estas líneas

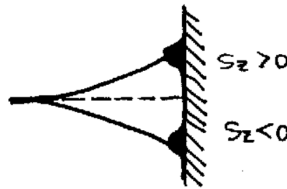


Figura 1.2

Entonces el espín no es un ente *continuo*: está cuantizado y sólo puede tomar dos valores. Llamamos a estos estados

$$(S_z, +) \quad (S_z, -)$$

Luego, un aparato de SG filtra o selecciona ciertos átomos. Podemos combinarlos.

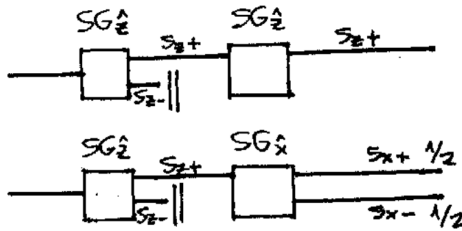


Figura 1.3

Con el dispositivo segundo orientado en  $\hat{x}$  obtenemos mitad de átomos en  $(S_z, +)$  y mitad en  $(S_z, -)$ . La única es que en realidad lo que sucede es que  $(S_z, +)$  se compone de  $(S_x, +)$  y  $(S_x, -)$ .

Acá abajo sale  $(S_z, -)$  pero para que ello sea posible  $(S_x, +)$  se debe componer de  $(S_z, +)$  y  $(S_z, -)$ . Pero esto no es posible porque al segundo aparato no entró jamás  $(S_z, -)$ . Se filtró antes.

Los spines en  $S_x, S_z$  son incompatibles. Al seleccionar  $(S_z, +)$  en el segundo SG se destruye la información previa sobre  $S_z$ . No podemos ya garantizar que  $S_z$  sea nula. El tercer experimento da al traste con la idea de que podamos pensar en espín como un ente vectorial en 3D. Mediante una analogía con polarización de luz vemos que es necesario meter al espín en un espacio vectorial de dimensión 2 pero con coeficientes complejos.

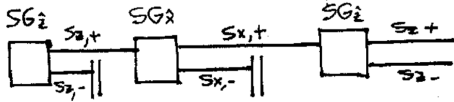


Figura 1.4

## 1.2 Álgebra?

El ket contiene toda la información cuántica del estado. Da el estado físico del sistema.

- $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$  la suma de kets es un ket
- $c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c$  con  $c \in \mathbb{C}$
- $c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle = |\gamma\rangle$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
- $c|\alpha\rangle, |\alpha\rangle$  representan el mismo estado cuántico

Se define un espacio de *Bra* dual al de "kets" al que se va mediante "dual conjugado"

$$|a\rangle, |a'\rangle \Leftrightarrow \langle a|, \langle a'|$$

$$|a\rangle + |b\rangle \Leftrightarrow \langle a| + \langle b| \quad c|a\rangle \Leftrightarrow c^* \langle a|$$

Se define también un producto interno según

$$(\langle\alpha|)(|\beta\rangle) \equiv \langle\alpha|\beta\rangle$$

que no es otra cosa que un número complejo. Se puede hacer entonces una equivalencia con los vectores estándar del álgebra del siguiente modo

$$\text{ket} \sim \text{vector columna} \quad |x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bra} \sim \text{vector fila} \quad \langle x| = (1 \ 0)$$

y habiendo definido esta base escribimos, por ejemplo

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |y\rangle$$

$$\langle a|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y del mismo modo

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle y| \right) (|x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

### 1.2.1 Propiedades

1.  $\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$  luego  $\langle \alpha | \alpha \rangle \in \mathbb{R}$
2.  $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0$  métrica definida positiva
3.  $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle \perp |\beta\rangle$
4.  $\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$  con  $|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}} |\alpha\rangle$  todo ket no nulo es normalizable

### 1.2.2 Operadores

A cada observable lo representaremos por un operador. hay operadores que no vienen de observables.

$$\hat{A}|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \quad \langle \alpha | \hat{A} = \langle \gamma |$$

un operador sobre un ket da otro ket y sobre un bra da otro bra. Notemos que en este último caso opera a izquierda. La transformación entre operadores se da con

$$\hat{X}|a\rangle \Leftrightarrow \langle a | \hat{X}^\dagger$$

donde  $\dagger$  (daga) significa el traspuesto conjugado; cambia el sentido hacia donde actúa el operador y conjuga. Se da que si

$$\hat{X} = \hat{X}^\dagger \Rightarrow \hat{X} \text{ es hermítico}$$

Se dan

- $\hat{X}\hat{Y} \neq \hat{Y}\hat{X}$  no conmutativo
- $\hat{X}(\hat{Y}\hat{Z}) = (\hat{X}\hat{Y})\hat{Z} = \hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$  asociativo
- $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$
- $\hat{0}|\alpha\rangle = 0 \quad \forall |\alpha\rangle ; \hat{0} \equiv \text{operador nulo}$
- $\hat{X}(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = c_1\hat{X}|\alpha\rangle + c_2\hat{X}|\beta\rangle$

de modo que en cuántica los observables se representan mediante operadores hermíticos.

### 1.2.3 sandwiches

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = (\langle \beta |)(X | \alpha \rangle) = \langle \beta | \gamma \rangle = \langle \gamma | \beta \rangle^* = (\langle \alpha | X | \beta \rangle)^*$$

donde usamos que  $|\gamma\rangle$  es un ket y por dual conjugado  $\langle \gamma | = \langle \alpha | \hat{X}^\dagger$  y extraemos como conclusión

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = (\langle \alpha | X | \beta \rangle)^*$$

y de manera equivalente

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = (\langle \beta | X^\dagger)(|\alpha\rangle) = \langle \Gamma | \alpha \rangle = \langle \alpha | \Gamma \rangle^* = (\langle \alpha | X^\dagger | \beta \rangle)^*$$

donde usamos que  $\langle \Gamma |$  es un bra y por dual conjugado  $|\Gamma\rangle = \hat{X} |\beta\rangle$ . El formalismo parece ser consistente. El operador opera sobre un ket/bra y multiplica al otro.

### 1.2.4 Producto externo

$$|\beta\rangle \langle \alpha| \equiv (|\beta\rangle)(\langle \alpha|)$$

$$(|\beta\rangle \langle \alpha|) |\gamma\rangle = |\beta\rangle \langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \alpha | \gamma \rangle |\beta\rangle,$$

de modo que es un operador pues al aplicar sobre un ket obtengo otro ket (notemos que  $\langle \alpha | \gamma \rangle$  es un escalar). Podemos pensar en que

$$\Lambda_\alpha \equiv |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

es el proyector, que actúa rotando un  $|\gamma\rangle$  en la dirección de  $|\beta\rangle$ . Notemos

$$\Lambda_\alpha^2 = |\alpha\rangle \langle \alpha| |\alpha\rangle \langle \alpha| = |\alpha\rangle \langle \alpha| = \Lambda_\alpha$$

puesto que  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ . El proyector  $\Lambda_\alpha$  sobre un ket  $|\beta\rangle$  selecciona la parte de  $|\beta\rangle$  en la dirección de  $|\alpha\rangle$ . Nos dice cuanto de  $|\beta\rangle$  está en la dirección de  $|\alpha\rangle$ . Luego,

$$\sum_i^N \Lambda_i = \sum_i^N |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}$$

la suma de todos los proyectores del espacio en el que estamos es la identidad de ese espacio. Decimos que  $|i\rangle$  es un conjunto completo. Se verifica además

$$(|\beta\rangle \langle \alpha|)^\dagger = |\alpha\rangle \langle \beta|$$

Algunas cuentitas de ejemplo en dos dimensiones,

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{Y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hat{X}^\dagger &= (1 \ 0) & \hat{Y}^\dagger &= (0 \ 1) \\ \hat{X}^\dagger \hat{X} &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 & \hat{X} \hat{X}^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde instamos al lector a que note la diferencia de dimensión en los resultados.

Los kets  $|\alpha\rangle$  *viven* en un espacio vectorial de Hilbert con dimensión  $N$ , donde  $N$  lo dicta el número de posibles estados de cada sistema físico. Una partícula de spin  $1/2$  sólo tiene dos estados: up y down. Hay otro producto más, que se llama producto tensorial y se representa como

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$$

que es un producto entre kets de espacios de Hilbert diferentes.

$$\langle\alpha|\beta\rangle^* \equiv DC\{|\beta\rangle\}DC\{\langle\alpha|\}$$

## 1.3 Bases

Dado un sistema físico representado por un espacio vectorial  $\mathcal{H}$  de dimensión  $N$  existirá una base (también de dimensión  $N$ ) que será un conjunto de estados tal que cualquier estado de ese sistema físico puede representarse como combinación lineal de ese conjunto,

$$\{|i\rangle\} \text{ base} \Rightarrow |\alpha\rangle = \sum_i^N c_i |i\rangle$$

siendo  $|\alpha\rangle$  un estado cualquiera. Es práctico utilizar bases ortonormales,

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

que es la delta de Kronecker.

Así, los kets se definen normalizados.

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle + d|4\rangle \quad |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$$

sea  $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$ ,  $\langle\phi| = a^*\langle 1| + b^*\langle 2|$  entonces

$$\langle\phi|\phi\rangle = (a^*\langle 1| + b^*\langle 2|)(a|1\rangle + b|2\rangle) = a^*a\langle 1|1\rangle + b^*a\langle 2|1\rangle + a^*b\langle 1|2\rangle + b^*b\langle 2|2\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

### 1.3.1 Autokets y autovalores

Si  $\hat{A}|a\rangle = c|a\rangle$  entonces  $|a\rangle$  es autoket de  $\hat{A}$  con autovalor  $c$ . Se suelen etiquetar los autoestados  $|a'\rangle, |a''\rangle$  de modo que

$$\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

lo cual lleva al problema espectral

$$(\hat{A} - a'\mathbb{1})|a'\rangle = 0$$

entonces los operadores tendrán representación matricial, que cambiará según la base utilizada. Vemos viendo que en general sólo se sabe cómo opera un operador sobre kets. La operación sobre los bras la obtenemos usando dual conjugado.

Deducimos entonces que

1. Los autovalores de un operador hermítico son reales y los autokets correspondientes a diferentes autovalores son ortogonales.
2. Los autokets de un operador son base completa del espacio de kets.

Como ejemplo de A citemos

$$a'|a'\rangle = A|a'\rangle \quad \text{DC} \quad \langle a'|A^\dagger = \langle a'|A = \langle a'|a'^*$$

de manera que

$$\begin{aligned} \langle a'|A|a'\rangle &= (\langle a'|)(A|a'\rangle) = a' \\ (\langle a'|A|a'\rangle)^* &= (\langle a'|)(A|a'\rangle)^* = (\langle a'|A^\dagger)(|a'\rangle) \\ &= \langle a'|A|a'\rangle = a' \quad \Rightarrow \quad a' = a'^*. \end{aligned}$$

Para el caso de B se postula así. Si esto vale entonces

$$|\alpha\rangle = \sum_i^N |a_i\rangle \langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i^N c_i |a_i\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle$$

pues

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = \sum_{i,j}^N \langle a_j|c_j^*c_i|a_i\rangle = \sum_i^N |c_i|^2 = 1$$

y además

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad A|a''\rangle = a''|a''\rangle \Rightarrow A(|a'\rangle - |a''\rangle) = a'|a'\rangle - a''|a''\rangle$$

$$\langle a'' | A | a' \rangle = a' \langle a'' | a' \rangle \quad \langle a' | A | a'' \rangle = a'' \langle a' | a'' \rangle$$

y ahora conjugando

$$\langle a'' | A | a' \rangle^* = a' \langle a'' | a' \rangle^* \quad \langle a'' | A | a' \rangle = a'' \langle a'' | a' \rangle$$

donde usamos que  $a''^* = a''$  y restando

$$(a' - a'') \langle a'' | a' \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle a'' | a' \rangle = 0 \quad \text{si} \quad a' \neq a''$$

Si la base es completa entonces es  $\sum \Lambda = 1$ .

### 1.3.2 Operadores y matrices

Un operador se puede representar matricialmente como

$$X = \sum_{a'}^N \sum_{a''}^N |a''\rangle \langle a'' | X | a'\rangle \langle a' | = \sum_{a'}^N \sum_{a''}^N (\langle a'' | X | a'\rangle) |a''\rangle \langle a' |$$

donde hemos explotado el hecho de que en el medio aparece un escalar (?), siendo

$$X_{ij} = \langle a_i | X | a_j \rangle$$

un elemento de matriz. Y notemos que  $|a''\rangle \langle a' |$  es un ente de  $N \times N$ . Si la base es de dimensión 3 se tendrá por ejemplo,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

de manera que existe una identificación entre cosas del álgebra básica y este mundo de operadores y estados. Si  $X$  es hermítico por ejemplo, entonces su matriz es simétrica conjugada.

$$\langle a_i | X | a_j \rangle^* = (\langle a_j | X^\dagger | a_i \rangle) = \langle a_j | X | a_i \rangle$$

y entonces

$$\langle a_j | X | a_i \rangle^* = \langle a_i | X | a_j \rangle$$

de modo que

$$X_{ji}^* = X_{ij} \quad X_{ij}^{t*} = X_{ij} \quad X_{ij}^\dagger = X_{ij}$$

y vemos bien el significado de *daguear*. En este caso la matriz tiene traza real y seis elementos independientes

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^* & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^* & X_{21}^* & X_{31}^* \\ X_{12}^* & X_{22}^* & X_{32}^* \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{33}^* \end{pmatrix}$$



### 1.3.3 Combinación lineal de autoestados

Un estado  $|\alpha\rangle$  se puede escribir en función de la base  $|a_i\rangle$  de esta forma

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \sum_{i=1}^N (\langle a_i | \alpha \rangle) |a_i\rangle$$

y entonces

$$\langle a_i | \alpha \rangle = \sum_{j=1}^N c_j \underbrace{\langle a_i | a_j \rangle}_{\delta_{ij}} = c_i$$

### 1.3.4 Cambio de base

Para cambiar de base metemos un uno ( $\mathbb{1}$ ) escrito como suma de proyectores,

$$X |b_j\rangle = \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i | X |b_j\rangle = \sum_{i=1}^N C_{ij} |a_i\rangle$$

siendo  $C_{ij}$  la matriz del cambio de base. Se puede escribir

$$|b_j\rangle = \sum_{i=1}^N |a_i\rangle \langle a_i | b_j \rangle$$

y se ve que  $\langle a_i | b_j \rangle$  son los elementos de la matriz que cambia de base.

### 1.3.5 Representación diagonal

Un operador tiene representación diagonal cuando está representado en la base de sus autokets

$$A = \sum_i^N \sum_j^N |a_i\rangle \langle a_i | A | a_j \rangle \langle a_j | = \sum_i^N \sum_j^N a_j |a_i\rangle \langle a_i | a_j \rangle \langle a_j | = \sum_{i,j}^N \delta_{ij} a_j |a_i\rangle \langle a_j | = \sum_i^N a_i \mathbb{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son sus autovalores. Es destacable que es conveniente utilizar como bases los autoestados de ciertos operadores.

### 1.3.6 Representaciones canónicas

Podemos representar una base como vectores canónicos

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \quad |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \quad |a_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \langle a_1 | \alpha \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} + \langle a_2 | \alpha \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} + \dots + \langle a_n | \alpha \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | \alpha \rangle \\ \langle a_2 | \alpha \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n | \alpha \rangle \end{pmatrix}$$

y por DC se tiene

$$\langle \alpha | = (\langle \alpha | a_1 \rangle \langle \alpha | a_2 \rangle \dots \langle \alpha | a_n \rangle)$$

y

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = \left( \overbrace{1 \times N}^{1 \times N} \right) \left( \overbrace{N \times 1}^{N \times 1} \right) = \square$$

que es un escalar.

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | a_i \rangle \langle a_i | \alpha \rangle = \sum_i^N \langle \beta | \underbrace{|a_i\rangle \langle a_i|}_{\Lambda_{a_i}} | \alpha \rangle = \square$$

otra vez un escalar.

$$\langle a_i | \gamma \rangle = \langle a_i | X | \alpha \rangle = \sum_{a_j} \langle a_i | X | a_j \rangle \langle a_j | \alpha \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \langle a_1 | \gamma \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1 | \alpha \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$X = \sum_i^N \sum_j^N |a_i\rangle \langle a_i| X |a_j\rangle \langle a_j| = \sum_i^N \sum_j^N \langle a_i| X |a_j\rangle |a_i\rangle \langle a_j|$$

y esto último es una matriz. Aquí el  $\hat{X}$  es una matriz y  $\langle a_i | \hat{X} | a_j \rangle \equiv X_{ij}$  son sus elementillos (escalares).

## 1.4 Sistemas de spin 1/2

Hay dos estados posibles de spin ( $|+\rangle, |-\rangle$ ) entonces dimensión del espacio vectorial es 2. De manera que

$$\mathbb{1} = |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|$$

$$|S_z; +\rangle = |S_z = \hbar/2\rangle \equiv |+\rangle$$

$$|S_z; -\rangle = |S_z = -\hbar/2\rangle \equiv |-\rangle$$

Acá hay que diseñar unos  $+$ ,  $-$  que habiten dentro de los brackets pues estos se ven feo.

Tenemos operadores de subida y de bajada,

$$S_+ = \hbar |+\rangle \langle -| \quad S_- = \hbar |-\rangle \langle +|$$

que actúan subiendo el spin o dando el ket nulo,

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien bajando el spin o dando el ket nulo,

$$S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.4.1 Cambio de base

Dados dos conjuntos base ortonormales y completos existe un  $\hat{U}$  unitario tal que

$$U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1} \quad |b_i\rangle = U |a_i\rangle$$

Este operador de cambio de base será

$$U = \sum_\ell |b_\ell\rangle \langle a_\ell|$$

$$U |a_i\rangle = \sum_\ell |b_\ell\rangle \langle a_\ell | a_i \rangle = |b_i\rangle$$

que tiene por función pasar

$$\underbrace{|a_\ell\rangle}_{\text{vieja base}} \longrightarrow \underbrace{|b_\ell\rangle}_{\text{nueva base}}$$

$$\langle b_k | \alpha \rangle = \sum_\ell \langle b_k | a_\ell \rangle \langle a_\ell | \alpha \rangle = \sum_\ell \langle a_k | U^\dagger | a_\ell \rangle \langle a_\ell | \alpha \rangle = \langle a_k | U^\dagger | \alpha \rangle$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\text{nueva base}\rangle &= U |\text{vieja base}\rangle \\ \langle b_i | x | b_j \rangle &= \sum_{\ell, m} \langle b_i | a_\ell \rangle \langle a_\ell | x | a_m \rangle \langle a_m | b_j \rangle \\ \langle b_i | x | b_j \rangle &= \sum_{\ell, m} \langle a_i | U^\dagger | a_\ell \rangle \langle a_\ell | x | a_m \rangle \langle a_m | U | a_j \rangle \\ X_{|b\rangle} &= U^\dagger X_{|a\rangle} U, \end{aligned}$$

que es una transformación de similaridad.

### 1.4.2 Mediciones y probabilidades

En mecánica cuántica medir es filtrar. La medición perturba al sistema. Se miden variables dinámicas asociadas a observables. Como los autoestados de un observable  $\hat{A}$  son una base completa  $\{|a_i\rangle\}$  entonces un sistema se hallará en una combinación lineal de autoestados de  $\hat{A}$ , o al menos eso puede pensarse.

antes de medir		luego de medir
sistema en CL de autestados de $\hat{A}$	Medición de $\hat{A}$	Salta a un autoestado de $\hat{A}$
sistema en autoestado de $\hat{A}$		Continúa en autoestado de $\hat{A}$

Puede verse pictóricamente la medición así:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |a'\rangle$$

el proceso de medición hace saltar hacia  $|a'\rangle$  siendo el resultado de la medida el autovalor  $a'$ . Luego,

$$\text{Prob}_{|a'\rangle} \equiv |\langle a' | \alpha \rangle|^2$$

Antes de medir no puedo saber a qué estado saltará y tampoco en qué estado se hallaba. Si  $P = 1$  se halla en  $|a'\rangle$  antes de saltar, si  $P = 0$  no se halla en  $|a'\rangle$  antes de saltar.

### 1.4.3 Valor de expectación

$$\langle \widehat{A} \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

c el valor de expectación siempre se refiere a un estado en particular.

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle$$

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} \langle \alpha | a' \rangle a'' \delta_{a' a''} \langle a'' | \alpha \rangle = \sum_{a''} a'' |\langle \alpha | a'' \rangle|^2$$

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} = a'' \text{Prob}_{|\alpha\rangle}$$

Esto último tiene el sentido de una especie de promedio ponderado.

### 1.4.4 Conmutadores

Se definen, el conmutador

$$[A, B] \equiv AB - BA,$$

y el anticonmutador

$$\{A, B\} \equiv AB + BA,$$

y se dice que dos observables conmutan si  $[A, B] = 0$ . Se dice que son compatibles si  $[A, B] = 0$  y anticompatibles si se da la contrario,  $[A, B] \neq 0$ .

TEOREMA:

Sean dos observables compatibles y no degenerados, entonces los autoestados  $\{|a'\rangle\}$  de  $A$  lo son también de  $B$ . Es decir que  $A$  y  $B$  tienen base de autoestados en común.

demostración:

$$\langle a' | AB - BA | a'' \rangle = 0$$

$$a' \langle a' | B | a'' \rangle - \langle a' | B | a'' \rangle a'' = (a' - a'') \langle a' | B | a'' \rangle = 0$$

entonces

$$\langle a' | B | a'' \rangle = 0$$

y  $B$  es diagonal en  $\{|a'\rangle\}$ .

Los autoestados son iguales pero no los autovalores; con lo cual se utilizará la notación  $|a', b'\rangle$  donde

$$A |a', b'\rangle = a' |a', b'\rangle \quad B |a', b'\rangle = b' |a', b'\rangle$$

### 1.4.5 Degeneración

Puede darse que haya varios  $g$  autoestados correspondientes a un mismo autovalor  $a'$ ; entonces se dice que hay degeneración de orden  $g$  para el autoestado  $|a'\rangle$

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad ; i = 1, 2, \dots, g$$

y  $A$  tendrá una matriz de  $m \times n$  bloques. En este caso no se puede decir que la base de  $A$  diagonalice a  $B$ .

**Mejorar la matriz que está un asco**

$$A = \begin{pmatrix} a' \mathbb{1} & 0 & & \\ 0 & a'' \mathbb{1} & & \\ & & a''' & \\ & & & a^IV \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Los  $|a'_i\rangle$  no dan información sobre los bloques correspondientes en la matriz de  $B$ . Necesito un conjunto de operadores que haga romper la degeneración para expresar unívocamente el estado del sistema. Se llama CCOC. Necesito que conmuten entre sí para que las mediciones tengan sentido.

Si no conmutan entonces son incompatibles; la medición de uno hace saltar al sistema a un autoestado del otro y como no son comunes pierde sentido el concepto de medir. No tiene sentido la medición de algo si por el hecho de medir cambiamos lo que queremos medir. Al ser incompatibles sus mediciones de afectan mutuamente.

Los autovalores de algunos operadores podrán tener degeneración pero una combinación de los autovalores del CCOC,  $|a'b'c' \dots\rangle$ , determina el estado de forma única.

Dado un set CCOC,  $\{A, B, C, D\}$ , se etiquetarán  $|K'\rangle \equiv |a'b'c'd'\rangle$  los autoestados. Las únicas cosas que tiene sentido medir en MC son las variables asociadas a operadores en un CCOC.

Sean  $A, B$  compatibles sin degeneración

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido A}} |a'b'\rangle \xrightarrow[b']{\text{Mido B}} |a'b'\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido A}} |a'b'\rangle$$

En cambio si  $A, B$  son compatibles pero con degeneración

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido A}} \sum_{i=1}^g C_{a'}^{(i)} |a'b'(i)\rangle \xrightarrow[b'(j)]{\text{Mido B}} C_{a'}^{(j)} |a'b'(j)\rangle \xrightarrow[a'(j)]{\text{Mido A}} C_{a'}^{(j)} |a'b'(j)\rangle$$

Al medir  $A$  y obtener  $a'$  no tengo determinado el estado del sistema. Me hallaré en una CL de autoestados correspondientes al autovalor degenerado  $a'$ .

Al medir luego B selecciono uno de los  $|a'b'\rangle$  degenerados, el correspondiente a  $b'(j)$  pues B no está degenerado. Puedo volver a medir A pues el autoestado en que ha caído el sistema permanece incólume.

### 1.4.6 Postulados de la mecánica cuántica

1. El estado de un sistema lo definimos con un ket  $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$  y con  $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$
2. Asociamos a propiedades físicas (observables) operadores hermíticos  $\hat{A}$  que operan sobre los kets. Los autokets  $|a\rangle$  verifican :

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

y  $\{|a\rangle\}$  es base del espacio de kets.

3. Al medir una cantidad física representada por el observable  $\hat{A}$  obtenemos un autovalor  $a'$ . Luego de medir, el estado del sistema es  $|a'\rangle$ .

$$|\Psi\rangle \xrightarrow[\alpha']{\text{Mido A}} |\Psi'\rangle = |a\rangle \langle a|\Psi\rangle = (\langle a|\Psi\rangle) |a\rangle$$

hecho al sistema a un autoestado de  $\hat{A}$ . Quizás deba ahora normalizar.  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$  El esquema de arriba representa la frase “proyectar sobre la base de autoestados”.

4. Las transformaciones espaciales se generan por  $\mathbf{p}$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

5. La evolución temporal la realiza  $H$  (el hamiltoniano).

**Extrañamente el punto 4 estaba vacío. Raro.**

### 1.4.7 Operador de dispersión

$$\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle A \rangle \mathbb{1}$$

la dispersión será nula en un autoestados del operador  $\hat{A}$ . Luego la dispersión cualitativamente nos dice “qué tan lejos” del autoestado nos hallamos.

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle(\hat{A} - \langle A \rangle \mathbb{1})^2\rangle = \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2\rangle = \langle A^2 \rangle - 2A\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

y la relación de dispersión generalizada

$$\langle(\Delta A)^2\rangle \langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2$$

### 1.4.8 Espectro continuo

Hay observables con espectro de autovalores continuo. Nos podemos construir la siguiente tabla para comparar ambos escenarios.

Espectro discreto	Espectro continuo
$A a'\rangle = a' a'\rangle$	$Y y'\rangle = y' y'\rangle$
$\mathbb{1} = \sum_{a'}^N  a'\rangle \langle a' $	$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty}  y'\rangle \langle y'  dy'$
$\langle a'   a'' \rangle = \delta_{a' a''}$	$\langle y'   y'' \rangle = \delta(y' - y'')$
$\sum_{a'}^N \langle a'   a'' \rangle \langle a''   = \langle a'  $	$\int_{-\infty}^{\infty} dy'' \langle y'   y'' \rangle \langle y''   = \langle y'  $
$\sum_{a'}^N  a'\rangle \langle a'   \alpha \rangle =  \alpha\rangle$	$\int_{-\infty}^{\infty} dy'  y'\rangle \langle y'   \alpha \rangle =  \alpha\rangle$
$\sum_{a'}^N  \langle a'   \alpha \rangle ^2 = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} dy'  \langle y'   \alpha \rangle ^2 = 1$
$\langle \beta   \alpha \rangle = \sum_{a'}^N \langle \beta   a' \rangle \langle a'   \alpha \rangle$	$\langle \beta   \alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy' \langle \beta   y' \rangle \langle y'   \alpha \rangle$

### 1.4.9 La función de onda

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle$$

donde

$$\langle x' | \alpha \rangle dx'$$

es la densidad de probabilidad y

$$|\langle x' | \alpha \rangle|^2$$

es la amplitud de probabilidad. La densidad de probabilidad, en el formalismo de Schrödinger, es la función de onda

$$\Psi_{\alpha}(x) = \langle x | \alpha \rangle$$

siendo este el vínculo entre la representación de Dirac y la función de onda,

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \int dx' \langle \beta | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle = \int dx' \Psi_{\beta}^*(x) \Psi_{\alpha}(x)$$



$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int \int dx' dx'' \langle \beta | x'' \rangle \langle x'' | A | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle$$

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int \int dx' dx'' \Psi_{\beta}^*(x'') \langle x'' | A | x' \rangle \Psi_{\alpha}(x')$$

y si  $A = f(\hat{x})$  entonces  $f(\hat{x}) | x' \rangle = f(x') | x' \rangle$  y

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int \int dx' dx'' \Psi_{\beta}^*(x'') f(x') \delta(x'' - x') \Psi_{\alpha}(x')$$

y entonces

$$\langle \beta | A | \alpha \rangle = \int dx' \Psi_{\beta}^*(x') f(x') \Psi_{\alpha}(x').$$

En forma análoga tenemos la representación de momento;

$$\hat{p} | p' \rangle = p' | p' \rangle \quad \langle p' | p'' \rangle = \delta(p' - p'') \quad | \alpha \rangle = \int dp' | p' \rangle \langle p' | \alpha \rangle$$

$$\Phi_{\alpha}(p') = \langle p' | \alpha \rangle.$$

### 1.4.10 Operador de traslación

Se le pedirá

$$T_{(dx')} | x' \rangle = | x' + dx' \rangle$$

siendo este requerimiento intuitivamente adecuado para una traslación. Nótese que  $dx'$  no es un operador, es el parámetro de la traslación.

Cumplirá las propiedades

- Unitariedad:

$$T^{\dagger} T = T T^{\dagger} = \mathbb{1}$$

para que no varíe la probabilidad ante un cambio de coordenadas.

- Aditividad:

$$T_{(dx')} T_{(dx'')} = T_{(dx' + dx'')}$$

porque vale en mecánica clásica.

- Existencia de inverso:

$$T_{(dx')}^{-1} = T_{(-dx')}$$

- Límite a  $\mathbb{1}$

$$T_{(dx')} \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{si} \quad dx' \rightarrow 0$$

Se propone un

$$T_{(dx')} = \mathbb{1} - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}'$$

con  $\mathbf{K}$  hermítico (notemos que  $\tau$  no es hermítico). Comparando con mecánica clásica vemos que  $\mathbf{p}$  origina las traslaciones, entonces identificamos  $K$  con  $p$ .

**Hay que ver el carácter vectorial de estas cosas.**

Entonces pedimos que  $\mathbf{p}$  cuántico origine las traslaciones

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \quad T_{(dx')} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}'$$

y así

$$T_{(dx')} |p'\rangle = \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}' \right) |p'\rangle = \left( 1 - \frac{i}{\hbar} p' dx \right) |p'\rangle$$

el autovalor no es real, pues  $T$  no es hermítico.

Partiendo del conmutador

$$xT_{(dx')} - T_{(dx')}x = dxT_{(dx')}$$

entonces

$$[x, T_{(dx')}] = dxT$$

y con  $dx \sim 0$  a orden uno (esto significa que tiramos los términos cuadráticos en  $dx$ )

$$[x, p_x] = i\hbar$$

se llega a la incompatibilidad de posición y momento, generalizando

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Pero las traslaciones en diferentes direcciones conmutan

$$[T_{(d\mathbf{x}'), T_{(d\mathbf{x}'')}] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0$$

Sumando infinitas traslaciones infinitesimales tenemos una traslación finita,

$$T_{(\Delta x')} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} p \frac{\Delta x'}{N} \right)^N = e^{-i/\hbar p \Delta x'}$$

y entonces

$$T_{(\Delta x')} = e^{-i/\hbar \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}'}$$

### 1.4.11 $p$ en la representación $x$

$$T_{(\Delta x)} |\alpha\rangle = \int dt' T |x'\rangle \langle x' | \alpha\rangle = \int dt' |x' + \Delta x\rangle \langle x' | \alpha\rangle = \int dt' |x'\rangle \langle x' - \Delta x | \alpha\rangle$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \approx \frac{-\langle x' - \Delta x | \alpha\rangle + \langle x' | \alpha\rangle}{\Delta x}$$

y entonces

$$-\frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x + \langle x' | \alpha\rangle = \langle x' - \Delta x | \alpha\rangle$$

$$T |\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \left( \langle x' | \alpha\rangle - \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x \right) = \int dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha\rangle - \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x$$

$$\left( 1 - \frac{i}{\hbar} p \Delta x \right) |\alpha\rangle = |\alpha\rangle - \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x$$

$$\frac{i}{\hbar} p \Delta x |\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle \Delta x$$

y así

$$p |\alpha\rangle = -i\hbar \int dx' |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle$$

de modo que usádo este resultado se tienen

$$\langle x'' | p | \alpha\rangle = -i\hbar \int dx' \langle x'' | x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle$$

$$\langle x'' | p | \alpha\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'' | \alpha\rangle$$

$$\langle \beta | p | \alpha\rangle = \int dx' \langle \beta | x'\rangle (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha\rangle$$

$$\langle \beta | p | \alpha\rangle = \int dx' \Psi_{\beta}^*(x') (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} \Psi_{\alpha}(x')$$

de lo que se deduce

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

que es el resultado más importante de la sección.