Capítulo 1

Expansión en un campo multipolar

1.1 Desarrollo dipolar del campo magnético

El potencial vector de un dipolo es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nabla} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \mathcal{M}(\mathbf{x}') \times \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV'$$

Es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

y se pueden pensar como corrientes $\mathbf{J}_M$ y $\mathbf{g}_M$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\mathbf{g}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS'$$

1.2 Medios materiales

- Dieléctricos
- Medios magnéticos $\begin{cases} \text{imán inducido} \begin{cases} \text{paramagnético} \\ \text{diamagnético} \end{cases} \\ \text{imán permanente} \quad \text{ferromagnético} \end{cases}$

- Conductor $\begin{cases} \text{perfecto} \\ \text{buen conductor} \\ \text{mal conductor} \end{cases}$

Podemos hacer una suerte de tabla comparativa entre eléctrico y magnético (pero lo armaremos después con minipage)

Polarización

$$\mathbf{P} = \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V}$$

que es el Momento dipolar eléctrico por unidad de volumen. Luego el potencial es

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \int_V \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dV'$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\rho_0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times E = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\phi(\rho_L + \rho_P) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - 4\phi\rho_P = 4\phi\rho_L$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + 4\pi \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})$$

de modo que

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L$$

y por la linealidad

$$\mathbf{P} = \xi_e \mathbf{E} \qquad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\xi_e)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

donde ξ_e es la susceptibilidad eléctrica y ϵ es la permitividad eléctrica. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \qquad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_L \qquad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{n} = -\sigma_L$$

Para la Magnetización,

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \mathbf{m}}{\delta V}$$

que es el Momento dipolar magnético por unidad de volumen. Luego el potencial es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{S}' - \frac{1}{c} \int_V \frac{c(\boldsymbol{\nabla} \times M)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dV'$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times M = \frac{1}{c}\mathbf{J}_M \qquad\qquad \mathbf{M} \times \hat{n} = \frac{1}{c}\mathbf{g}_m$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times B = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times B - 4\pi\boldsymbol{\nabla} \times M = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_L$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_L$$

de modo que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \qquad\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M} = \frac{1}{c}\mathbf{J}_M$$

y por la linealidad

$$\mathbf{M} = \xi_M\mathbf{H} \qquad \text{MLIH}$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\xi_M)\mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \epsilon\mathbf{H}$$

donde ξ_M es la susceptibilidad magnética y μ es la permeabilidad magnética. Los contornos entre medios se resuelven según

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{g}_L \qquad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

Imán permanente

Hay magnetización $\mathbf{M}$ aún en ausencia de campo. No es un medio lineal de modo que

$$\mathbf{M} \neq \xi_M\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} \neq \mu\mathbf{H}$$

La relación entre $\mathbf{B}$,$\mathbf{H}$ depende de la historia del medio.

$$\frac{1}{c}\mathbf{J}_M = \boldsymbol{\nabla} \times M$$

si $\mathbf{J}_L = 0$ entonces

$$\boldsymbol{\nabla} \times H = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{H} = -\boldsymbol{\nabla}\phi_m$$

que es un potencial escalar magnético.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = -4\pi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M}$$

$$-\nabla^2\phi_m = -4\pi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M}$$

$$\nabla^2\phi_m = -4\pi\rho_m$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M} \equiv -\rho_m \qquad\qquad \mathbf{M}\cdot\hat{n} \equiv \sigma_m$$

$$\phi_m = \frac{1}{c}\int_{S'}\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{c}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_{S}\frac{\mathbf{M}\times\hat{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{S}' - \frac{1}{c}\int_{V}\frac{c(\boldsymbol{\nabla}\times M)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV'$$

Estas dos soluciones son equivalentes.

$$\phi_m = \frac{1}{c}\int_{V'}\frac{\rho_L}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV' + \frac{1}{c}\int_{V'}\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}dV'$$

pero el integrando del segundo término se puede reescribir como

$$-\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

de manera que

$$\phi_m = \frac{1}{c}\int_{V'}\frac{\rho_L}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV' - \frac{1}{c}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dV'$$

$$\phi_m = \frac{1}{c}\int_{V'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}(\rho - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P})dV'$$

se puede asociar

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = \rho_P.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_{V}\left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{c\mathbf{M}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right]dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_{V}\left[\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{c\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right]dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_{V}\frac{\mathbf{J}_L(\mathbf{x}')+\mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

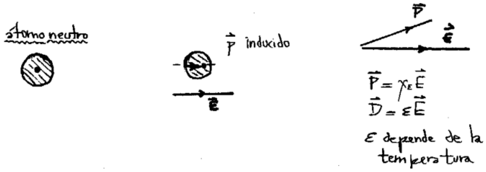

Figura 2.1

1.3 Polarización y magnetización

Suelen $\mathbf{P}$,$\mathbf{M}$ depender de los campos externos, es decir $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$.

$$\mathbf{M} \approx M_{0i} + \left.\frac{\partial M_i}{\partial H_j}\right|_{H=0} H_j$$

$$\mathbf{P} \approx P_{0i} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial E_j}\right|_{E=0} E_j$$

y como en general vale que $\mathbf{M}_0 = 0, \mathbf{P}_0 = 0$ se da que

$$\mathbf{M} = \sum_i \sum_j \left(\left.\frac{\partial M_i}{\partial H_j}\right|_{H=0} H_j \right)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

y ahí vemos que es un tensor,

$$\mathbf{M} = \overleftrightarrow{\xi}_M \mathbf{H} \qquad\qquad \mathbf{P} = \overleftrightarrow{\xi}_e \mathbf{E}.$$

Algún detalle de contornos magnéticos

Sea

$$\mathbf{g}_L = 0$$

entonces

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$$

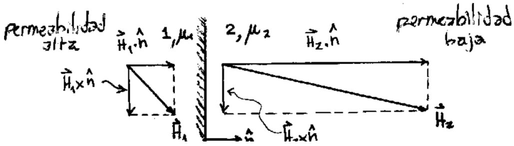

Figura 3.2

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{n} \qquad \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \hat{n}$$

$$H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1 \quad \text{si } \mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow H_2 \gg H_1$$

En el límite $\mathbf{H}_2 \perp$ superficie del medio y es similar al $\mathbf{E}$ a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son aproximadamente *equipotenciales*.

Para medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \qquad \text{es decir} \quad \mathbf{D} = \overleftrightarrow{\epsilon}\mathbf{E}$$

Consideraciones en medios magnéticos

Fuera de un imán permanente

$$\boldsymbol{\nabla} \times B = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_T$$

y entonces parecería que podemos definir un

$$\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla} \phi_m^B,$$

pero fallará en la superficie de separación donde hay $\mathbf{J}_m$ y por ende $\mathbf{J}_T$. Lo que sí funciona es

$$\boldsymbol{\nabla} \times H = 0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L$$

que vale dentro y fuera del imán.

Entonces

$$\mathbf{H} = -\boldsymbol{\nabla} \phi_m^H,$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{H} = -\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \phi_m^H) = -4\pi \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{M} = 4\pi \rho_M$$

$$-\nabla^2 \phi_m^H = 4\pi \rho_M$$

una ecuación de Poisson para el potencial ϕ_m^H.

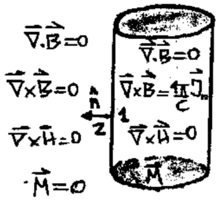

Figura 3.3

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$
$$(-\boldsymbol{\nabla}\phi_H^2 + \boldsymbol{\nabla}\phi_H^1 - 4\pi\mathbf{M}) \cdot \hat{n} = 0$$
$$(-\boldsymbol{\nabla}\phi_H^2 + \boldsymbol{\nabla}\phi_H^1) \cdot \hat{n} = 4\pi\mathbf{M} \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_M$$

1.4 Consideraciones energéticas

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(-\boldsymbol{\nabla}\phi) = -\boldsymbol{\nabla}U$$
$$\Delta U = W = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\ell \rightarrow \Delta U = -\int_\Gamma \boldsymbol{\nabla}(q\phi) \cdot d\ell = -q\Delta\phi$$
$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{x} \qquad \frac{\delta U}{\delta x} = F_t$$

donde el subíndice es por tangencial.

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2}\left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}}\right)$$
$$W_3 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}}$$
$$W_3 = \frac{1}{2}\left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}}\right)$$
$$W_N = \sum_{i \neq j}^{N} \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{i,j}^{N} \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]$$

siendo ϕ_{ij} el potencial sobre q_i debido a q_j.

$$W_N = \sum_{i}^{N} \frac{1}{2} q_i \phi_i$$

es el potencial de todas las cargas producido en la posición de q_i.

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material

$$\delta W = \frac{1}{2}\rho\delta V\phi$$

$$\delta W = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\delta\mathbf{D})}{4\pi}\delta V\phi$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\delta\mathbf{D}\phi) = \delta\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi + \phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\mathbf{D}$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\delta V[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\delta\mathbf{D}\phi) - \delta\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi]$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\left(\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{D}\phi)dV + \int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV\right)$$

pero la primera integral se pasa a una de superficie según

$$\int_S \mathbf{D}\phi dS$$

y si la misma es muy grande tiende a cero. Entonces quedamos en que

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV$$

que es el trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales. Vale para medios lineales, sin imponer isotroía u homogeneidad.

Este cálculo es a temperatura constante, el medio material no altera su ϵ. Es un proceso isotérmico. Uno asume que $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$ y no varía con el tiempo. En la práctica ϵ varía con la temperatura.

1.5 Interpretación termodinámica de U