Capítulo 1

Introducción al momento angular (rotaciones)

El operador $\hat{L}$ será el encargado de realizar las rotaciones. Por el álgebra visto en la mecánica clásica sabemos que, dado un vector $\mathbf{v}$ y una matriz ortogonal R se tiene

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v} \qquad \text{con} \quad |\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$$

y

$$|\mathbf{v}|^2 = V^t V = (V^t R^t)(RV) \qquad \text{pues} \quad R^t R = RR^t = \mathbb{1}$$

puesto que es una matriz ortogonal. Luego se cumplen

$$\text{clausura} \qquad (R_1 R_2)(R_1 R_2)^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = \mathbb{1}$$

el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal (aquella que cumple $R^r R = \mathbb{1}$)

$$\text{asociatividad} \qquad R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3$$

$$\exists \text{ identidad} \qquad R\mathbb{1} = \mathbb{1}R = R$$

$$\exists \text{ inversa} \qquad RR^{-1} = R^{-1}R = \mathbb{1} \qquad \text{con } R^{-1} \equiv R^t$$

Esto define un grupo de matrices ortogonales que realiza rotaciones y se denomina $SO(3)$.

1.0.1 No conmutatividad de las rotaciones clásicas

Las rotaciones finitas no conmutan. Luego, el grupo de las rotaciones será un grupo abeliano

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

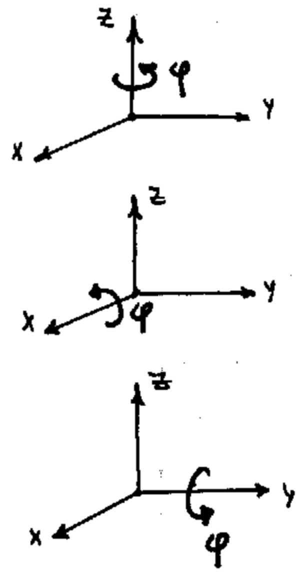

Figura 0.1

Si reemplazamos $\cos(\epsilon) \approx 1 - \epsilon^2/2$ y $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$ hasta orden dos. Se puede ver que las rotaciones, en torno a ejes diferentes, sólo conmutan a orden uno

(ϵ) de manera que una rotación infinitesimal $d\varphi$ conmuta pero una rotación finita φ no lo hace.

1.1 Rotaciones cuánticas

Para las rotaciones cuánticas se pedirá

$$D(\hat{n}, d\phi) = \mathbb{1} - i\frac{\mathbf{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi,$$

rotación infinitesimal o bien

$$D(\hat{n}, \theta) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{J}\cdot\hat{n}/\hbar\theta},$$

para rotación finita. Donde $\hat{D}$ es el operador de las rotaciones y $\hat{J}$ es un momento angular general. Se postula de esta forma para que $\hat{D}$ cumpla las mismas propiedades que R y la relación de conmutación

$$R_x R_y - R_y R_x = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1}$$

$$D(\hat{x}, \epsilon)D(\hat{y}, \epsilon) - D(\hat{y}, \epsilon)D(\hat{x}, \epsilon) = D(\hat{z}, \epsilon^2) - D(\mathbb{1})$$

de modo que la cuenta lleva a

$$J_x J_y - J_y J_x = i\hbar J_z$$

la cual generalizando se llega a

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

que son las relaciones de conmutación generales para momento angular $\hat{J}$.

Para sistemas de spín $1/2$ es

$$D(\hat{n}, \phi) \equiv \mathrm{e}^{-i/\hbar\mathbf{S}\cdot\hat{n}}$$

Se puede ver que ante rotaciones cuánticas $D(\hat{n}, \phi)$ los valores de expectación transforman como vectores

$$\begin{pmatrix} \langle S_x' \rangle \\ \langle S_y' \rangle \\ \langle S_z' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\hat{x}, \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

En general $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ se transforma como vector y entonces $\hat{J}$ es un operador vectorial. Para spín $1/2$ es

$$|\alpha\rangle = \langle + \,|\, \alpha\rangle\,|+\rangle + \langle - \,|\, \alpha\rangle\,|-\rangle$$

$$D(\hat{z},\phi)\,|\alpha\rangle = \;\mathrm{e}^{-iS_z\phi/\hbar}\,\langle + \,|\, \alpha\rangle\,|+\rangle + \;\mathrm{e}^{-iS_z\phi/\hbar}\,\langle - \,|\, \alpha\rangle\,|-\rangle$$
$$D(\hat{z},\phi)\,|\alpha\rangle = \langle + \,|\, \alpha\rangle\;\mathrm{e}^{-i\phi/2}\,|+\rangle + \;\mathrm{e}^{i\phi/2}\,\langle - \,|\, \alpha\rangle\,|-\rangle$$

Si $\phi = 2\pi$ (cosa que debiera dejar al ket incólume) se tiene

$$D(\hat{z},2\pi)\,|\alpha\rangle = -\,\langle + \,|\, \alpha\rangle\,|+\rangle - \langle - \,|\, \alpha\rangle\,|-\rangle = -\,|\alpha\rangle$$

Luego, esto es una muestra del carácter no-clásico del spin; una vuelta completa le cambia el signo al ket pero notemos cuidadosamente que el valor de expectación – que es algo físico – no varía. Esto muestra que el ket no puede tener sentido físico.

1.1.1 Angulos de Euler

Se define una serie de rotaciones

$$1.\; R_z(\alpha) \qquad 2.\; R_{y'}(\beta) \qquad 3.\; R_{z'}(\gamma)$$

lo cual equivale a

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$$

$$\mathrm{e}^{-iJ_{z'}\gamma/\hbar}\,\mathrm{e}^{-iJ_{y'}\beta/\hbar}\,\mathrm{e}^{-iJ_z\alpha/\hbar}\,|\psi\rangle$$

Pero desconozco cómo operar en los ejes móviles z', y'

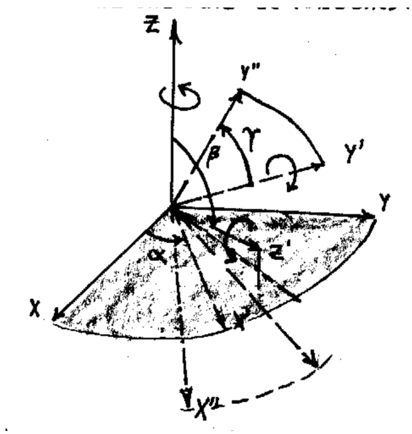

Figura 1.2 Los ángulos de Euler son una caracterización de una rotación general en 3D.

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha)$$

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta)$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) \underbrace{R_{y'}^{-1}(\beta) R_{y'}(\beta)}_{\mathbb{1}} R_z(\alpha)$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) R_z(\gamma) R_z(\alpha)$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$$

Rotación equivalente a [1] pero para ejes fijos, puesto que en mecánica cuántica sabemos rotar en torno a ejes fijos.

Los ángulos de Euler son la caracterización de una rotación general en 3D.

Entonces nuestra rotación en 3D cuántica será:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = D_z(\alpha) D_y(\beta) D_z(\gamma) = \mathrm{e}^{-iJ_z\alpha/\hbar}\, \mathrm{e}^{-iJ_y\beta/\hbar}\, \mathrm{e}^{-iJ_z\gamma/\hbar}$$

1.1.2 Autoestados y autovalores de J

Partimos de

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijR} J_R$$

y

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \qquad [J^2, J] = 0$$

siendo la última muy importante y probándose por evaluación directa. Lleva a

$$[J^2, J_i^n] = 0 \qquad \text{con } i = x,y,z \;\; n \in \mathbb{N}$$

Se eligen J^2, J_z como observables que conmutan

$$J^2 \left|a,b\right\rangle = a \left|a,b\right\rangle \qquad\qquad J_z \left|a,b\right\rangle = b \left|a,b\right\rangle$$

siendo a autovalor de J^2 y b de J_z.

Definiremos los operadores de subida y de bajada

$$J_\pm \equiv J_x \pm J_y$$

que verifican

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \qquad [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \qquad [J_\pm, J^2] = 0$$

Entonces se tiene

$$J^2 (J_\pm \left|a,b\right\rangle) = J_\pm J^2 \left|a,b\right\rangle = a J_\pm \left|a,b\right\rangle \longrightarrow J_\pm \left|a,b\right\rangle = \square \left|a,b\right\rangle$$

$$(J_z J_\pm - J_\pm J_z)\,|a,b\rangle = \pm\hbar J_\pm\,|a,b\rangle$$

$$J_z(J_\pm\,|a,b\rangle) = (b\pm\hbar)(J_\pm\,|a,b\rangle) \longrightarrow J_\pm\,|a,b\rangle = \boxdot\,|a,b\pm\hbar\rangle$$

$$J_\pm\,|a,b\rangle = c_\pm\,|a,b\pm\hbar\rangle$$

$$J_+\,|a,b\rangle = c_+\,|a,b+\hbar\rangle \qquad J_-\,|a,b\rangle = c_-\,|a,b-\hbar\rangle$$

sube el J_z en una unidad de $\hbar$ o bien baja el J_z en una unidad de $\hbar$.

$$J_+J_- = J_x^2 + iJ_yJ_x - iJ_xJ_y + J_y^2, \qquad J_-J_+ = J_x^2 - iJ_yJ_x + iJ_xJ_y + J_y^2$$

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+), \qquad J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

$$\langle a,b\,|\,J^2 - J_z^2\,|\,a,b\rangle = 1/2\left\langle a,b\,\middle|\,J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+\,\middle|\,a,b\right\rangle$$

$$(a-b^2)\,\langle a,b\,|\,a,b\rangle = 1/2\left[\left\langle a,b\,\middle|\,J_+J_+^\dagger\,\middle|\,a,b\right\rangle + \left\langle a,b|J_+^\dagger\middle|\,J_+\,|a,b\rangle\right]$$

$$(a-b^2)\,\langle a,b\,|\,a,b\rangle = |J_+^\dagger\,|a,b\rangle\,|^2 \geq 0, \qquad \Rightarrow a \geq b^2$$

hay cota para b.

$$J_+\,|a,b_M\rangle = 0$$

Como no puede seguir subiendo debe dar el ket nulo

$$J_-J_+\,|a,b_M\rangle = 0$$

pero

$$J_-J_+ = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x,J_y] = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)\,|a,b_M\rangle = 0$$

$$(a - b_M^2 - \hbar b_M)\,|a,b_M\rangle = 0$$

$$a = b_M(b_M - \hbar)$$

$$J_-\,|a,b_m\rangle = 0$$

y como no puede seguir bajando debe dar el ket nulo

$$J_+J_-\,|a,b_m\rangle = 0$$

$$J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z)\,|a,b_m\rangle = (a - b_m^2 + \hbar b_m)\,|a,b_m\rangle = 0$$

$$b_M(b_M + \hbar) = b_m(b_m - \hbar)$$

tiene solución $b_M - b_m = -\hbar$ si $b_M + b_m \neq 0$ pero esto es absurdo de manera que $b_M = b_m$. Entonces

$$-b_m = b_M \qquad \Rightarrow \qquad -b_M \leq b \leq b_M$$

Luego,

$$|a, b_m\rangle \longrightarrow |a, b_M\rangle$$

y como J_+ sube de a un $\hbar$ será

$$b_M = b_m + n\hbar$$

y entonces

$$b_M = \frac{n\hbar}{2} = \frac{n}{2}\hbar = j\hbar$$

y se da que j es entero o semientero.

Definiremos

$$b_M \equiv j\hbar \qquad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \qquad -j\hbar \leq b \leq j\hbar$$

pero como $b/\hbar = m$

$$b_M \equiv j\hbar \qquad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \qquad -j \leq m \leq j$$

$$m = (-j, -j+1, -j+2, ..., j-1, j) \qquad 2j+1 \text{valores de } m$$

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \qquad J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

1.1.3 La normalización de $J_\pm$

$$J_+ |j, m\rangle = c_+ |j, m+1\rangle \qquad\qquad J_-^\dagger = J_+$$

$$\langle j, m \,|\, J_- J_+ \,|\, j, m\rangle = \left\langle j, m \,\middle|\, J_+^\dagger J_+ \,\middle|\, j, m\right\rangle = |c_+|^2$$

$$\left\langle j, m \,\middle|\, J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \,\middle|\, j, m\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - \hbar^2 m = |c_+|^2$$

$$c_+ = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\langle j, m \,|\, J_+ J_- \,|\, j, m\rangle = \left\langle j, m \,\middle|\, J_-^\dagger J_- \,\middle|\, j, m\right\rangle = |c_-|^2$$

$$= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 = |c_-|^2$$

$$c_- = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$J_+ |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, |j, m+1\rangle \qquad J_- |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, |j, m-1\rangle$$

1.1.4 Elementos de matriz de J^2, J_z, J_+

Asumiendo normalización de $|j,m\rangle$ se tiene

$$\langle j',m' \,|\, J^2 \,|\, j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{jj'}\delta_{m'm}$$

$$\langle j',m' \,|\, J_z \,|\, j,m\rangle = m\hbar \delta_{jj'}\delta_{m'm}$$

1.1.5 Elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$

Ahora queremos ver cual es la forma de los elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$

$$\mathcal{D}(R) = \mathrm{e}^{i\mathbf{J}\cdot\vec{n}\phi/\hbar}$$

siendo que $\mathcal{D}(R)$ tiene por efecto rotar el sistema físico. Lo primero que hay que notar es que

$$\langle j',m' \,|\, \mathcal{D}(R) \,|\, j,m\rangle \propto \delta_{jj'}$$

porque $[J^2, J_i] = 0$ y entonces $[J^2, J_i^n] = 0$ y

$$\mathcal{D}(R) = f(J_i) \longrightarrow [J^2, \mathcal{D}(R)] = 0$$

y

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm} = \langle j,m' \,|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{J}\cdot\vec{n}\phi/\hbar} \,|\, j,m\rangle$$

es una matriz para cada j fijo con $\{(2j+1)\times(2j+1) = \text{dimensión}\}$

$$\mathcal{D}(R)\,|j,m\rangle = \sum_{m'} |j,m'\rangle \langle j,m' \,|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{J}\cdot\vec{n}\phi/\hbar} \,|\, j,m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)\,|j,m'\rangle$$

pero las rotaciones no cambian el j, $\mathcal{D}(R)$ conecta estados con la misma j y $\mathcal{D}(R) \in (2j+1)\times(2j+1)$

$$\mathcal{D}(R)\,|j,m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)\,|j,m'\rangle$$

La matriz de $\mathcal{D}(R)$ (no caracterizada por un único j) puede ponerse en forma diagonal por bloques:

$$\mathcal{D}(R) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} j' & j'' & j''' \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc} \square & 0 & 0 & \\ 0 & \square & 0 & \\ 0 & 0 & \square & \\ & & & \vdots \end{array}\right) & \begin{array}{c} j' \\ j'' \\ j''' \\ \\ \end{array} \end{array}$$

con cada bloque de $(2j+1)\times(2j+1)$, pero siendo cada bloque irreducible. Las matrices de rotación con j fijo forman un grupo. $\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$ son los elementillos de la matriz.

$$|j,m\rangle \underset{\text{Rotación}}{\longrightarrow} \mathcal{D}(R)\,|j,m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)\,|j,m'\rangle$$

donde el $\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$ es la amplitud de hallar al $|j,m\rangle$ rotado en $|j,m'\rangle$

1.1.6 Forma explícita del operador $\mathcal{D}(R)$

Los ángulos de Euler permitieron caracterizar la rotación más general. Entonces

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm} = \langle j,m' \,|\, \mathrm{e}^{-iJ_z\alpha/\hbar}\,\mathrm{e}^{-iJ_y\beta/\hbar}\,\mathrm{e}^{-iJ_z\gamma/\hbar}\,|\, j,m\rangle$$

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm} = \mathrm{e}^{-i(-m'\alpha+m\gamma)}\underbrace{\langle j,m' \,|\, \mathrm{e}^{-iJ_y\beta/\hbar}\,|\, j,m\rangle}_{d^{(j)}_{m'm}}$$

siendo el primer factor una fase. En los $d^{(j)}_{m'm}$ está la dificultad de la cuenta.

1.2 Formalismo de spinores de Pauli

Apropiado para trabajar con sistemas de spín $1/2$. Estos sistemas son casos particulares de momento angular,

$$j = 1/2 \qquad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

y se definen los spinores $\chi_\pm$ como

$$|+\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \equiv \chi_+ \qquad\qquad |-\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \equiv \chi_-$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix}\langle + \,|\, \alpha\rangle\\ \langle - \,|\, \alpha\rangle\end{pmatrix}$$

$$\langle\alpha| = (\ \langle + \,|\, \alpha\rangle \quad \langle - \,|\, \alpha\rangle\ )$$

Para spín $1/2$ podemos tomar $\mathbf{J} = \mathbf{S}$ por la analogía de las relaciones de conmutación. A su vez

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad \text{con} \qquad \vec{\sigma} \equiv (\ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\ )$$

que es una especie de vector

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Luego esta equivalencia provee expresión de los operadores S_i en términos de matrices de 2×2, así:

$$\frac{i}{2}[J_- - J_+] = J_y = S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

siendo que los J_y y S_y actúan sobre kets y el σ sobre spinores.

Las matrices de Pauli cumplen las propiedades básicas siguientes

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \qquad \sigma_i^\dagger = \sigma_i$$

$$[\sigma_, \sigma_j] = i2\varepsilon_{ijR}\sigma_R \qquad \{\sigma_, \sigma_j\} = \delta_{ij}$$

$$\sigma_i^n = \begin{cases} \mathbb{1} & n \text{ par} \\ \sigma_i & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$|+\rangle \equiv |j = 1/2, m = 1/2\rangle \qquad |-\rangle \equiv |j = 1/2, m = -1/2\rangle$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

1.2.1 Aplicación a las rotaciones

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{J}\cdot\hat{n}\phi/\hbar} = \mathrm{e}^{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi/2}$$

pero

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^n = \begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} & n \text{ impar} \\ \mathbb{1} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi/2} = 1 - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\,\frac{\phi}{2} - \frac{1}{2!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^3 \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 - \dots$$

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = \mathrm{e}^{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi/2} = \mathbb{1}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

es el operador de rotación para sistemas de spin $1/2$ (donde $\mathbb{1} \in 2 \times 2$). Con esta expresión podemos evaluar $d_{m'm}^{j=1/2}(\beta)$

$$d^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

donde hemos usado los resultados

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

En el caso general el operador de rotación para sistemas de spin $1/2$ lucirá:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} |+\rangle & \qquad\qquad\qquad |-\rangle \end{array} \\ \mathcal{D}^{j=1/2}(\alpha,\beta,\gamma) = & \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right) \\ e^{-\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)} \sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{array}{c} |+\rangle \\ |-\rangle \end{array} \end{array}$$

1.2.2 Ejemplo

$$d^{1/2}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_+ + \chi_-) = \frac{1}{2}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = |S_x; +\rangle$$

Este resultado es intuitivamente lógico.

1.2.3 Rotaciones en sistemas con $j = 1$

Ahora tenemos

$$j = 1 \qquad m = -1, 0, 1$$

recordando J_y en términos de escaleras

$$J_y = \frac{J_+ - J_i}{2i}$$

de modo que

$$|1\ 1\rangle \quad |1\ 0\rangle \quad |1\ -1\rangle$$

$$J_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{array} \end{array}$$

$$\mathrm{e}^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 + -\frac{J_y}{\hbar}\beta + (-i)^2\left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2\frac{1}{2!} + (-i)^3\left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3\frac{1}{3!} + \ldots$$

$$\mathrm{e}^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar}\beta - \frac{1}{2!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2 - \frac{i}{3!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3 + \ldots$$

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) & n \text{ impar} \\ \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos(\beta)) - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin(\beta) = d^{j=1}(\beta)$$

acá lo vemos como operador (es notación), $d^{j=1}_{m'm}(\beta)$ simboliza la matriz

$$d^{j=1}(\beta) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} |1\ 1\rangle & |1\ 0\rangle & |1\ -1\rangle \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos(\beta)) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \frac{1}{2}(1-\cos(\beta)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \cos(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) \\ \frac{1}{2}(1-\cos(\beta)) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\beta) & \frac{1}{2}(1+\cos(\beta)) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{array} \end{array}$$

1.3 Momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

verifica el álgebra de $\mathbf{J}$,

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijR}L_R \qquad L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Consideremos ahora una rotación en torno a z, en un $\delta\phi$,

$$\left(1 - \frac{iL_z\delta\phi}{\hbar}\right)|x', y', z'\rangle = 1 - \frac{iP_y}{\hbar}(x\delta\phi) + \frac{iP_x}{\hbar}(y\delta\phi)\,|x', y', z'\rangle$$

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\left(P_y x\delta\phi - P_x y\delta\phi\right)\right]\left|x', y', z'\right\rangle$$

esto es una traslación en $\hat{x}, \hat{y}$,

$$(1 - i\frac{L_z}{\hbar}\delta\phi)\left|x', y', z'\right\rangle = \left|x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\right\rangle$$

Esta traslación es debida a una rotación infinitesimal en $\delta\phi$ torno a z entonces genera las rotaciones clásicas en torno a z.

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle x', y', z' \,|\, \alpha\rangle \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Rotamos en z}} \left\langle x', y', z' \middle| 1 - \frac{iL_z\delta\phi}{\hbar} \middle| \alpha \right\rangle = \langle x' + y'\delta\phi, y' - x'\delta\phi, z' \,|\, \alpha\rangle$$

y en coordenadas esféricas,

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle r, \theta, \phi \,|\, \alpha\rangle \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Rotamos en z}} \langle r, \theta, \phi - \delta\phi \,|\, \alpha\rangle$$

Podemos hallar una expresión para L_z en esféricas:

$$\langle r, \theta, \varphi \,\|\, \alpha\rangle$$

identificamos

$$=$$

operador L_z en esféricas

Usando

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2}\left(L_+L_- + L_-L_+\right)$$

se llega a

$$\langle r, \theta, \phi \,|\, L^2 \,|\, \alpha\rangle = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}]\right]\langle r, \theta, \varphi \,|\, \alpha\rangle$$

$$L^2 = -\hbar^2 r^2 \nabla^2_{\theta,\varphi}$$

donde $\nabla^2_{\theta,\varphi}$ es la parte angular del laplaciano en coordenadas esféricas. Esto puede obtenerse también partiendo de

$$L^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{p}^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})^2 + i\hbar\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}$$

Sea un H de partícula, sin spín, sujeta a potencial simétricamente esférico. Sabemos que la función de onda $\Psi_\alpha(\mathbf{r}')$ es separable en coordenadas esféricas, entonces:

$$\langle \,|\, \rangle =$$

$$\langle\,|\,\rangle =$$

Cuando el H es esféricamente simétrico (como en un potencial central) se tiene

$$[] = [] = 0$$

Trabajaremos solamente en la parte angular $|\theta,\varphi\rangle \equiv |\hat{n}\rangle$

$$\langle \hat{n}\,|\,\ell, m\rangle =$$

que es la amplitud de hallar $|\ell, m\rangle$ en la dirección $\hat{n}$.

Podemos vincular ahora los armónicos esféricos con los autoestados de L_z, L^2

$$L_z$$

$$L^2$$

$$=$$

Entonces, con la ortogonalidad

$$\longrightarrow$$

y con la completitud

$$\longrightarrow$$

de manera que llegamos a

$$\int\int$$

Podemos hallar una expresión para

$$= 0$$

$$\Rightarrow$$

Luego usamos L_- para hallar sucesivamente los demás Y_ℓ^m

$$=$$

y por este camino se llega a

$$Y$$

con

En el caso de momento angular orbital ℓ no puede ser semientero porque entonces m sería semientero y en una vuelta de 2π

$$\mathrm{e}^{im2\pi} = -1$$

Además,

(no hay signo menos)