Capítulo 1

Campos de cargas en movimiento

1.1 Potenciales retardados

Usando el gauge de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\phi$$

con forma general

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t) \tag{1.1}$$

siendo f la que da la distribución de fuentes.

Resolveremos (1.1) con una función de Green. Hacemos Fourier respecto a la frecuencia, de manera que podamos remover el tiempo (además luego nos interesarán fuentes armónicas y por sobre todo cualquier perturbación puede descomponerse en Fourier).

Suponemos que podemos escribir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}, \omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega$$

siendo sus inversas

$$\psi(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x},t)\, \mathrm{e}^{i\omega t} dt$$

$$f(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},t)\, \mathrm{e}^{i\omega t} dt$$

luego la ecuación resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 \psi(\mathbf{x},\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\mathbf{x},\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t} d\omega$$

de manera que se satisface la ecuación de Helmholtz inhomogénea,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{x},\omega) = -4\pi f(\mathbf{x},\omega),$$

para cada valor de frecuencia ω.

Una función de Green satisfacerá

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

donde $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{R}$ y la función de Green será simétricamente esférica pues pedimos la no existencia de contornos, entonces llamando a aquella $G_k(R)$ se tiene

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\mathbf{R})$$

donde hemos usado el laplaciano en esféricas. Debemos distinguir dos casos, si $R = 0$ entonces la anterior resulta

$$\lim_{kR\to 0} G_k(R) = \frac{1}{R}$$

mientras que de ser cierto $R \neq 0$ en cambio

$$\frac{d^2}{dR^2}(RG_k) + k^2(RG_k) = 0$$

y entonces se propone como solución general

$$G_k(R) = \frac{A}{R}\,\mathrm{e}^{ikR} + \frac{B}{R}\,\mathrm{e}^{-ikR}$$

donde A, B dependerán de las condiciones de contorno y siendo que el primer término del RHS representa una onda divergente esférica y el segundo una onda convergente esférica.

Se puede interpretar G_k como el potencial de una carga unitaria que aparece en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ en el instante $t = t'$ y luego desaparece (mmm, qué misterio!).

Ahora necesitamos meter la dependencia temporal,

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$$

$$-4\pi f(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) \mathrm{e}^{i\omega t} dt = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t') \mathrm{e}^{i\omega t} dt$$

$$-4\pi f(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \mathrm{e}^{i\omega t'}$$

de modo que tenemos

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \mathrm{e}^{i\omega t'},$$

usando lo cual se llega a

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(R)\, \mathrm{e}^{-\omega t} d\omega$$

donde τ es el tiempo relativo entre los tiempos de observación y fuente (t') y R es la distancia relativa entre observación y fuente.

En un medio no dispersivo es

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{R}\delta(\tau \mp \frac{R}{c})$$

y así llegamos a

$$G^{+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(t-t'-\frac{1}{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t - (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green retardada

$$G^{-}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(t-t'+\frac{1}{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t + (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green avanzada.

G^{+} exhibe el comportamiento causal del efecto observado en $\mathbf{x}$ a t causado por la acción de la fuente en el tiempo $(t - R/c)$ donde R/c es la diferencia de tiempo de la señal en propagarse. Al valor

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

se lo llama el tiempo retardado. Es un poco más práctica la nomenclatura

$$G^{+}(R,t,t') = \frac{\delta(t' - [t - (R/c)])}{R} \qquad G^{-}(R,t,t') = \frac{\delta(t' - [t + (R/c)])}{R},$$

Entonces una solución particular de (1) (¿uno qué?) es

$$\psi^{\pm}(\mathbf{x},t) = \int\int G^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t') f(\mathbf{x}',t') d^3x' dt'$$

y dos soluciones son

$$\psi_{in}(\mathbf{x},t) + \int\int G^{+} f dv' dt \qquad \psi_{s}(\mathbf{x},t) + \int\int G^{-} f dv' dt$$

con $f(\mathbf{x}',t')$ una fuente que es diferente de cero solo en un intervalo $\sim t'$. Entonces ψ_{in} satisface (1) homogénea en $t \to -\infty$. ψ_s es la onda en $t \to +\infty$ solución homogénea. La situación más común es el caso de ψ_{in} con $\psi_{in} = 0$ entonces

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{v}' \frac{\delta(t' - [t - (R/c)])}{R} f(\mathbf{x}',t') dv' dt',$$

e integrando con la delta

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{v}' \frac{f(\mathbf{x}', t - (R/c))}{R} dv',$$

que es una fuente en una cierta región que se enciende un instante e irradia.

1.1.1 Fuente armónica

Sea una fuente armónica en el tiempo

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}',t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}$$

entonces el potencial vector es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{4\pi}{c} \int_{v}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}\Big|_{t_{ret}} dv' = \frac{4\pi}{c} \int_{v}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{e}^{i\omega R/c}\Big|_{t_{ret}} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \int_{v} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{R}\,\mathrm{e}^{i\omega R/c} dv$$

se puede ver como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{4\pi}{c}\int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dv'\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Si la fuente oscila armónicamente con frecuencia ω entonces los campos tendrán la misma frecuencia ω.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathrm{e}^{i\omega/c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}dv'$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \quad \text{si} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}',t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}')\,\mathrm{e}^{-i\omega t'}$$

La aproximación consiste en desarrollar

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

y ver condiciones asintóticas. Cuando $\ell = 0$ (el primer término de la sumatoria en ℓ) y $kx' \ll 1$ tenemos una antena ineficiente. La longitud de onda λ de la radiación es mucho mayor al tamaño del emisor, $2\pi x' \ll \lambda$ (longitud de onda larga). En cambio tenemos $2\pi x \gg \lambda$ que es la condición de campo lejano (siempre la usaremos).

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{(0)} = -ik\mathbf{p}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x}$$

es una onda esférica saliente. Es el potencial vector $\mathbf{A}$ de un dipolo magnético oscilante armónicamente. Recordemos que falta siempre *pegarle* un factor $\exp(i\omega t)$. Usando $\mathbf{E}0i/k\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}, \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = k^2(\hat{r}\times\mathbf{p})\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x}\left(1-\frac{1}{ikx}\right) \tag{1.2}$$

siendo $\hat{r}$ la dirección de propagación y $x \equiv |\mathbf{x}|$ que puede ser $|r\hat{r}|$ en esféricas. El que contribuye a la radiación es el primer término de (1.2) (campo lejano) mientras que el segundo se va a cero rápidamente.

Cerca de la antena es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = ik(\hat{r}\times\mathbf{p})\frac{1}{r^2},$$

pues $kx \ll 1$ y entonces $\exp(ikx) \sim 1$ (campo cercano) de manera que si $\lambda \to \infty$ entonces $\mathbf{B}^{(0)} \sim 0$. El campo $\mathbf{E}$ cerca de la antena es

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} \qquad \to \qquad \mathbf{E}^{(0)} = \frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}}{r^3}$$

que es el campo de un dipolo eléctrico. $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ son transversales a $\hat{r}$ y tienen la misma longitud (en unidades CGS). La potencia media (en un número entero de períodos) será

$$\langle dP \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d\Omega$$

y entonces

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2$$

$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin(\theta)^2$$

y este cálculo podemos ver de dónde sale

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{24\pi} \Re\{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\} = \frac{c}{8\pi} \Re\{(\mathbf{B}^0 \times \hat{r}) \times k^2 (\hat{r} \times \mathbf{p})/r\}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re\{(-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\theta}) \times (-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\phi}\} = \frac{c}{8\pi} p^2 k^4 \sin(\theta)^2 \hat{r} \cdot \hat{r}$$

Tenemos un cálculo auxiliar de esta cuenta pero no sé si suma meterlo acá.

Luego, la potencia irradiada es máxima en $\theta = \pi/2$ (ver figura)

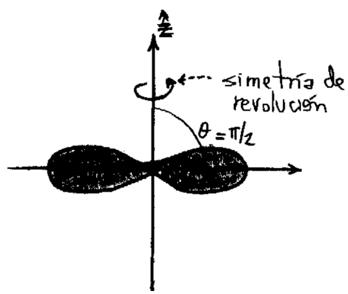

Figura 1.1

Entonces,

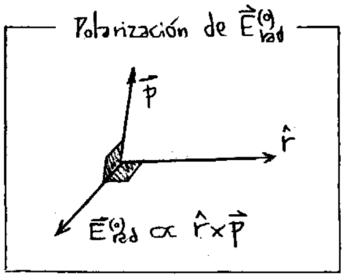

Figura 1.2

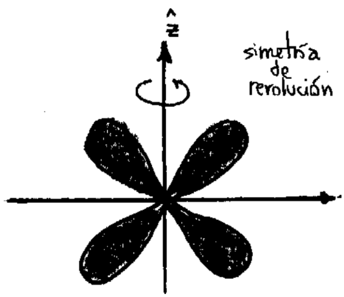

Figura 1.3

1.2 Ejemplo de antena

1.3 Campos de una partícula cargada en movimiento

1.4 Campo de una carga en movimiento

1.5 Cálculo de potencia irradiada

1.6 Frenado magnético

1.6.1 Esponja electromagnética

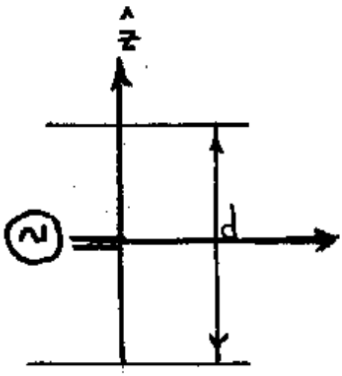

Figura 2.4

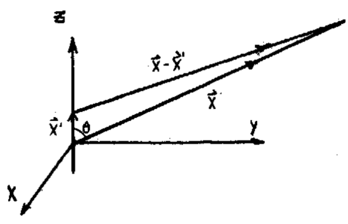

Figura 2.5

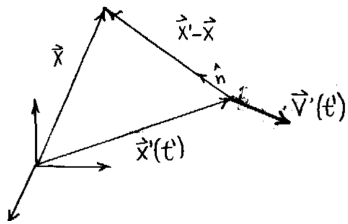

Figura 3.7

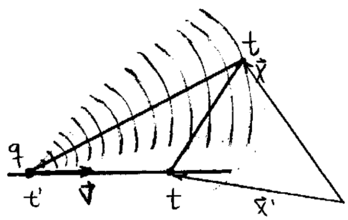

Figura 3.8

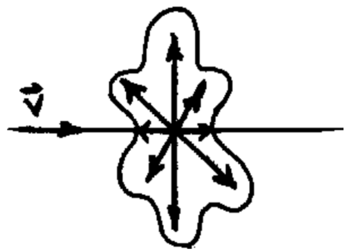

Figura 4.9

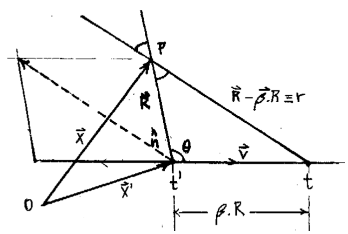

Figura 4.10

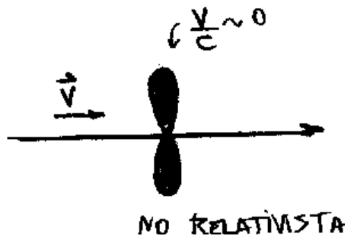

Figura 5.11

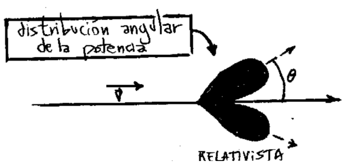

Figura 5.12

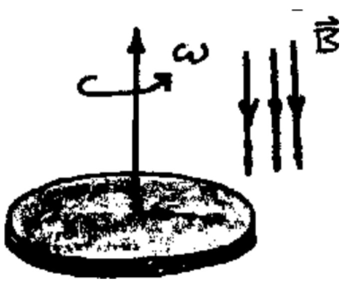

Figura 6.13

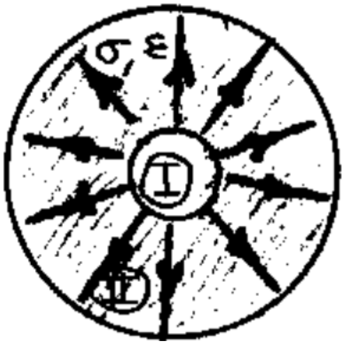

Figura 6.14