Capítulo 1

Ondas planas

Lejos de las fuentes de campo las ecuaciones de Maxwell son

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Podemos derivar con respecto al tiempo en cada ecuación de rotor y reemplazar con la otra de manera que

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

y esto nos lleva a

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

dos sendas ecuaciones de onda para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Pero es sabido que la solución de

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

es

$$\psi = A\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} + B\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

de modo que podemos postular como soluciones para nuestras ecuaciones de onda a

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}_0\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \qquad \mathbf{B} = \vec{\mathbb{B}}_0\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

Se tiene además que $\mathbf{k} = k\hat{n}$ da a través de $\hat{n}$ la dirección de propagación de la onda. El número de onda k podrá ser complejo lo cual refleja atenuación. Las características del medio entran a través de

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c}$$

Acá hay que hacer las cuentas para demostrar todo esto que acá se dice sin más.

Por su parte $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ son complejos uniformes y podrán dar desfasajes.

Al utilizar las ecuaciones de divergencia sobre las soluciones se obtiene que

$$\hat{n}\cdot\vec{\mathbb{E}}_0 = 0 \qquad \hat{n}\cdot\vec{\mathbb{B}}_0 = 0$$

de manera que las ondas se propagan perpendicularmente a los campos, por ello las ondas electromagnéticas son transversales.

Utilizando las ecuaciones de rotor se llega a la importante relación

$$\vec{\mathbb{B}}_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n}\times\vec{\mathbb{E}}_0$$

de modo que los vectores $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ también son perpendiculares. Si el vector $\mathbf{k}\in\mathbb{R}$ entonces $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ tienen la misma fase.

En el vacío o en un medio LIH los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ estarán en fase. Asimismo

$$\mathbf{S} \parallel \hat{n}$$

pues $\mathbf{S} \propto \mathbf{E}\times\mathbf{H}$.

En un medio anisótropo $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon\mathbf{E}) = 0$ siendo ϵ un tensor. Allí $\vec{\mathbb{E}}_0\cdot\hat{n}\neq 0$ salvo que ϵ estee diagonalizado y $\mathbf{E}\parallel$ al eje principal.

Notemos que $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ y $\hat{n}$ forman una terna derecha.

1.0.1 Sobre complejos

$$\mathcal{R}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad \text{con } A\in\mathbb{C}$$

Sean

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

siempre trabajaremos en general con dependencias temporales armónicas y metemos $\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ en el módulo vbA_0 que pasa a depender de $\mathbf{x}$.

Los campos físicos son siempre la parte real de las expresiones complejas.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

con operaciones lineales es lo mismo tomar parte real antes o después.

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) \neq \Re(\mathbf{A}) + \mathscr{R}(\mathbf{B})$$

con operaciones no lineales no es lo mismo. Para hacer producto necesito tomar la parte real de cada factor y entonces

$$\Re(\mathbf{A}).\Re(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{A}.\mathbf{B}^* + \mathbf{A}.\mathbf{B}\,\mathrm{e}^{-i2\omega t})$$

Pero como en las aplicaciones estaré interesado en el promedio sobre un número entero de períodos,

$$\langle \mathbf{AB} \rangle = \langle \Re(\mathbf{A}).\Re(\mathbf{B}) \rangle = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{A}.\mathbf{B}^*)$$

1.0.2 Poynting promedio y energías promedio

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en ondas electromagnéticas toman la forma

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \mathbf{H} = \vec{\mathbb{H}}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

de manera que

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{2}\Re(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^* + \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}\,\mathrm{e}^{-i2\omega t})$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\Re(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^*)$$

En un MLIH es

$$\vec{\mathbb{B}} = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}} \qquad \vec{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}$$

donde usamos que $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\Re(\vec{\mathbb{E}} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}})^*)$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\hat{n}(\vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{E}}^*) - \vec{\mathbb{E}}^*(\vec{\mathbb{E}} \cdot \hat{n}))$$

y finalmente

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x},t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\vec{\mathbb{E}}|^2\hat{n}$$

que es el vector de Poynting para ondas en MLIH.

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{D})$$

$$\langle U(\mathbf{x},t)\rangle = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2}\Re(\vec{\mathbb{H}}\cdot\vec{\mathbb{B}}^* + \vec{\mathbb{E}}\cdot\vec{\mathbb{D}}^*)$$

$$\langle U(\mathbf{x},t)\rangle = \frac{1}{16\pi}\Re(\frac{1}{\mu}|\vec{\mathbb{B}}|^2 + \epsilon|\vec{\mathbb{E}}|^2) = \frac{1}{8\pi}|\vec{\mathbb{E}}|^2$$

puesto que

$$|\vec{\mathbb{B}}|^2 = \mu\epsilon|\vec{\mathbb{E}}|^2,$$

y entonces la densidad de energía promedio es

$$\langle U(\mathbf{x},t)\rangle = \frac{1}{8\pi}|\vec{\mathbb{E}}|^2.$$

1.1 Polarización de ondas

Una onda plana bien general en $\hat{n}$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = (\hat{\epsilon}_1\vec{\mathbb{E}}_1 + \hat{\epsilon}_2\vec{\mathbb{E}}_2)\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

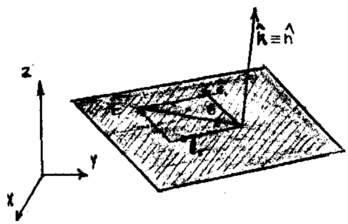

Figura 1.1

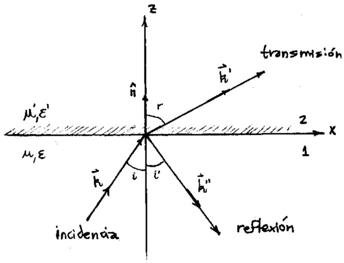

Figura 2.2

Figura 2.3

1.2 Reflexión y refracción de ondas en medios

1.3 Campo electromagnético en un medio conductor

1.4 Transformación de vectores

1.4.1 Intervalos

1.4.2 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

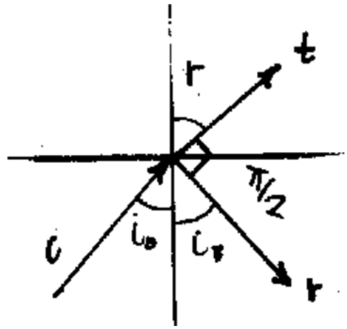

Figura 2.4

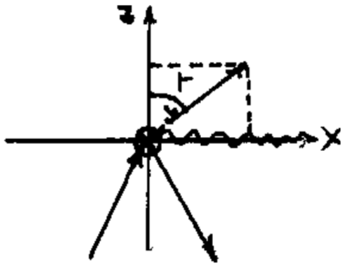

Figura 2.5

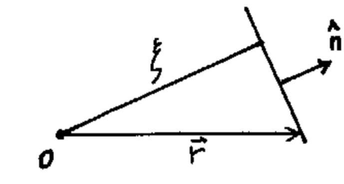

Figura 3.6

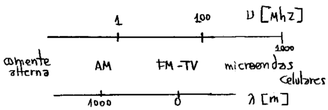

Figura 3.7

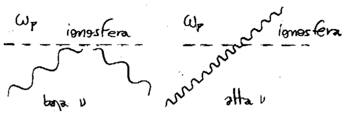

Figura 3.8

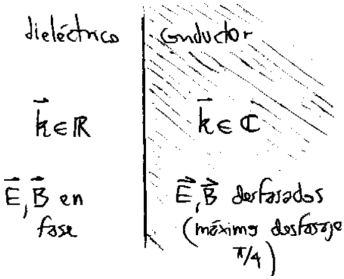

Figura 3.9

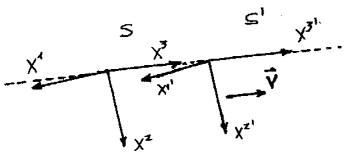

Figura 4.10

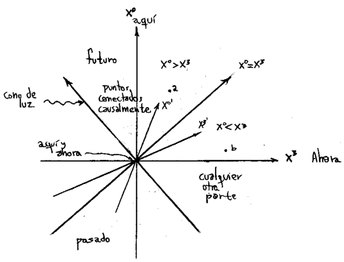

Figura 4.11

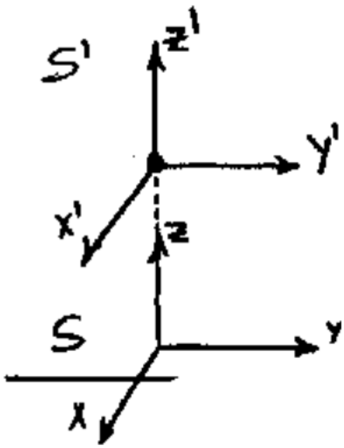

Figura 4.12