Capítulo 1

Relatividad especial

1.1 Transformación de vectores

Digamos que un vector transforma

$$X_i' = a_{ij} X_j$$

de manera que se verifique que las leyes físicas sean invariantes frente a rotaciones propias.

Einstein postula que:

- Todos los sistemas inerciales son equivalentes.
- La velocidad de la luz en un sistema inercial es constante. No depende del estado de movimiento del observador.

Sea un sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ de otro S en forma paralela a un eje (ver figura).

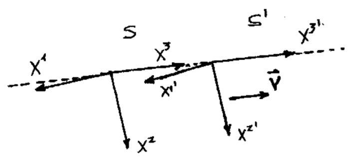

Figura 1.1

Se verifica entonces la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= \gamma\left[x^3 - \beta x^0\right] \\ x^{0'} &= \gamma\left[x^0 - \beta x^3\right] \end{aligned}$$

donde son

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad\qquad x^0 = ct$$

A la transformación [1] se le puede dar forma de rotación en funciones hiperbólicas como sigue

$$x^{0'} = x^0 \cosh(\eta) - x^3 \sinh(\eta)$$

$$x^{3'} = -x^0 \sinh(\eta) + x^3 \cosh(\eta)$$

donde seguimos viendo que las leyes son lineales en las coordenadas (el espacio es isótropo)

Debiéramos dar ideas de estas cosas importantes de relatividad especial

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y no es otra cosa que una rotación en eje $\hat{0}, \hat{3}$ con el ángulo $\eta = atanh(\beta)$. Notemos que se verifica la invariancia del módulo de la transformación

$$(x^{0'})^2 - ((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2) = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$$

o en una notación más feliz

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Este espacio 4D es el de Minkowski y no es euclídeo.

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

La transformación inversa se obtiene tomando los reemplazos

$$x^{i'} \to x^i \quad , \quad x^i \to x^{i'} \quad , \quad \beta \to -\beta$$

El elemento invariante de línea es

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds^{'2}$$

o bien

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

que es el tensor de la métrica. Se verifica

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cuadrivectores en el espacio 4D

Un cuadrivector contravariante es

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

mientras que el covariante es

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$$

y vemos que las partes temporales son las mismas cambiando el signo de la espacial. Las reglas de transformación son

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \qquad\qquad A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta$$

luego el producto interno es

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \equiv A_\alpha B^\alpha$$

donde estamos usando convención de suma de Einstein, que significa que

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

que es invariante por ser un escalar de Lorentz,

$$A_\alpha B^\alpha = A'_\alpha B'^\alpha$$

Intervalos entre eventos

Los intervalos deben ser invariantes relativistas y de Lorentz, si el intervalo es temporal se tiene

$$x^0 > x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 > 0$$

y los eventos pueden estar conectados causalmente

$$x^0 < x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 < 0$$

y los eventos no pueden estar conectados causalmente. Se cumple

$$\delta s^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

Operadores diferenciales

Tenemos la derivada respecto a una coordenada contravariante

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada covariante, y también la derivada respecto de una coordenada covariante

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada contravariante. Note la asimetría entre derivo respecto de arriba y es derivada abajo y viceversa. La notación abreviada puede inducir a confusiones.

La cuadridivergencia de un cuadrivector es un invariante,

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\mathbf{A})$$

y aquí vemos $\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha$. Esto nos lleva al D'Alembertiano

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \nabla^2$$

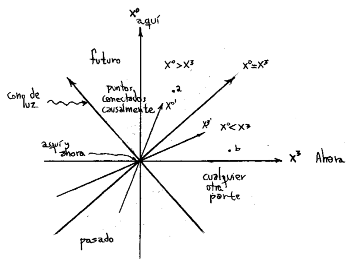

Figura 1.2

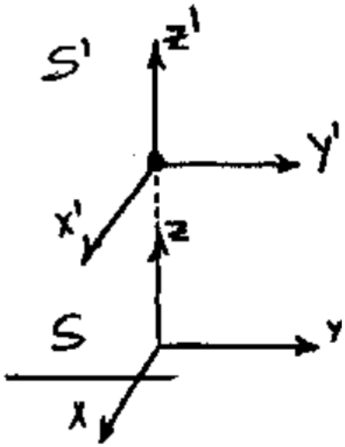

Figura 1.3

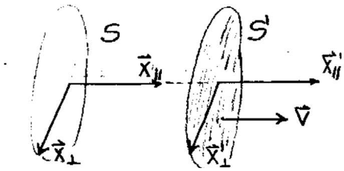

Figura 2.4

1.1.1 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

1.2 Transformación de los campos

1.3 Especie de tiro oblicuo

1.4 cuadrivelocidad

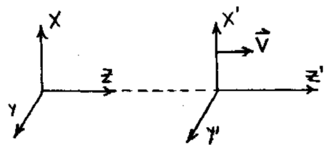

Figura 2.5

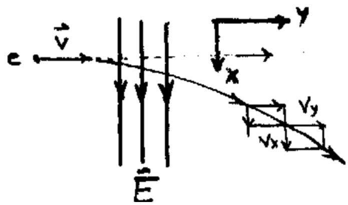

Figura 3.6

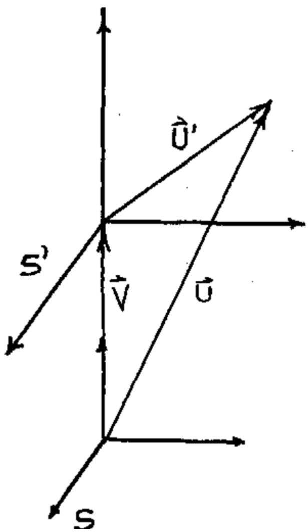

Figura 4.7