

# Campos de cargas en movimiento

## 1.1 Potenciales retardados

Usando el gauge de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell se llega a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

con forma general

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

siendo  $f$  la que da la distribución de fuentes.

Resolveremos (1.1) con una función de Green. Hacemos Fourier respecto a la frecuencia, de manera que podamos remover el tiempo (además luego nos interesarán fuentes armónicas y por sobre todo cualquier perturbación puede descomponerse en Fourier).

Suponemos que podemos escribir

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

siendo sus inversas

$$\psi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

luego la ecuación resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

de manera que se satisface la ecuación de Helmholtz inhomogénea,

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{x}, \omega),$$

para cada valor de frecuencia  $\omega$ .

Una función de Green satisfecerá

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

donde  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{R}$  y la función de Green será simétricamente esférica pues pedimos la no existencia de contornos, entonces llamando a aquella  $G_k(R)$  se tiene

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{R})$$

donde hemos usado el laplaciano en esféricas. Debemos distinguir dos casos, si  $R = 0$  entonces la anterior resulta

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R}$$

mientras que de ser cierto  $R \neq 0$  en cambio

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 (RG_k) = 0$$

y entonces se propone como solución general

$$G_k(R) = \frac{A}{R} e^{ikR} + \frac{B}{R} e^{-ikR}$$

donde  $A, B$  dependerán de las condiciones de contorno y siendo que el primer término del RHS representa una onda divergente esférica y el segundo una onda convergente esférica.

Se puede interpretar  $G_k$  como el potencial de una carga unitaria que aparece en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  en el instante  $t = t'$  y luego desaparece (mmm, qué misterio!).

Ahora necesitamos meter la dependencia temporal,

$$\left( \nabla_x^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

$$-4\pi f(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') e^{i\omega t} dt$$

$$-4\pi f(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'}$$

de modo que tenemos

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'},$$

usando lo cual se llega a

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(R) e^{-\omega \tau} d\omega$$

donde  $\tau$  es el tiempo relativo entre los tiempos de observación y fuente ( $t'$ ) y  $R$  es la distancia relativa entre observación y fuente.

En un medio no dispersivo es

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta(\tau \mp \frac{R}{c})$$

y así llegamos a

$$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t - t' - \frac{1}{c}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t - (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green retardada

$$G^-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t - t' + \frac{1}{c}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = \frac{\delta(t' - [t + (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|])}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

la función de Green avanzada.

$G^+$  exhibe el comportamiento causal del efecto observado en  $\mathbf{x}$  a  $t$  causado por la acción de la fuente en el tiempo  $(t - R/c)$  donde  $R/c$  es la diferencia de tiempo de la señal en propagarse. Al valor

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

se lo llama el tiempo retardado. Es un poco más práctica la nomenclatura

$$G^+(R, t, t') = \frac{\delta(t' - [t - (R/c)])}{R} \quad G^-(R, t, t') = \frac{\delta(t' - [t + (R/c)])}{R},$$

Entonces una solución particular de (1) (¿uno qué?) es

$$\psi^\pm(\mathbf{x}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'$$

y dos soluciones son

$$\psi_{in}(\mathbf{x}, t) + \int \int G^+ f dv' dt \quad \psi_s(\mathbf{x}, t) + \int \int G^- f dv' dt$$

con  $f(\mathbf{x}', t')$  una fuente que es diferente de cero solo en un intervalo  $\sim t'$ . Entonces  $\psi_{in}$  satisface (1) homogénea en  $t \rightarrow -\infty$ .  $\psi_s$  es la onda en  $t \rightarrow +\infty$  solución homogénea. La situación más común es el caso de  $\psi_{in}$  con  $\psi_{in} = 0$  entonces

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_v' \frac{\delta(t' - [t - (R/c)])}{R} f(\mathbf{x}', t') dv' dt',$$

e integrando con la delta

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_v' \frac{f(\mathbf{x}', t - (R/c))}{R} dv',$$

que es una fuente en una cierta región que se enciende un instante e irradia.

### 1.1.1 Fuente armónica

Sea una fuente armónica en el tiempo

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t'}$$

entonces el potencial vector es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t'} \Big|_{t_{ret}} dv' = \frac{4\pi}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t} e^{i\omega R/c} \Big|_{t_{ret}} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} e^{-i\omega t} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{R} e^{i\omega R/c} dv$$

se puede ver como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = \frac{4\pi}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dv' e^{-i\omega t}$$

Si la fuente oscila armónicamente con frecuencia  $\omega$  entonces los campos tendrán la misma frecuencia  $\omega$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_v' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{i\omega/c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dv'$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \text{si} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t'}$$

La aproximación consiste en desarrollar

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

y ver condiciones asintóticas. Cuando  $\ell = 0$  (el primer término de la sumatoria en  $\ell$ ) y  $kx' \ll 1$  tenemos una antena ineficiente. La longitud de onda  $\lambda$  de la radiación es mucho mayor al tamaño del emisor,  $2\pi x' \ll \lambda$  (longitud de onda larga). En cambio tenemos  $2\pi x \gg \lambda$  que es la condición de campo lejano (siempre la usaremos).

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{(0)} = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikx}}{x}$$

es una onda esférica saliente. Es el potencial vector  $\mathbf{A}$  de un dipolo magnético oscilante armónicamente. Recordemos que falta siempre *pegarle* un factor  $\exp(i\omega t)$ . Usando  $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = k^2(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx}\right) \quad (1.2)$$

siendo  $\hat{\mathbf{r}}$  la dirección de propagación y  $x \equiv |\mathbf{x}|$  que puede ser  $|r\hat{\mathbf{r}}|$  en esféricas. El que contribuye a la radiación es el primer término de (1.2) (campo lejano) mientras que el segundo se va a cero rápidamente.

Cerca de la antena es

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})^{(0)} = ik(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2},$$

pues  $kx \ll 1$  y entonces  $\exp(ikx) \sim 1$  (campo cercano) de manera que si  $\lambda \rightarrow \infty$  entonces  $\mathbf{B}^{(0)} \sim 0$ . El campo  $\mathbf{E}$  cerca de la antena es

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}^{(0)} = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3}$$

que es el campo de un dipolo eléctrico.  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  son transversales a  $\hat{r}$  y tienen la misma longitud (en unidades CGS). La potencia media (en un número entero de períodos) será

$$\langle dP \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d\Omega$$

y entonces

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin(\theta)^2$$

y este cálculo podemos ver de dónde sale

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{24\pi} \Re\{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\} = \frac{c}{8\pi} \Re\{(\mathbf{B}^0 \times \hat{r}) \times k^2(\hat{r} \times \mathbf{p})/r\}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re\{(-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\theta}) \times (-pk^2/r \sin(\theta)\hat{\phi})\} = \frac{c}{8\pi} p^2 k^4 \sin(\theta)^2 \hat{r} \cdot \hat{r}$$

Tenemos un cálculo auxiliar de esta cuenta pero no sé si sumarlo acá.

Luego, la potencia irradiada es máxima en  $\theta = \pi/2$  (ver figura)

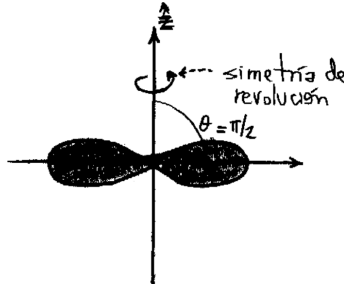


Figura 1.1

Entonces,

- Si  $\mathbf{B} = 0$  se da que  $\mathbf{S} = 0$ , es decir que no hay radiación.
- Un monopolo no produce campo de radiación por su simetría esférica. Una corriente  $J\hat{r}$  no produce  $\mathbf{B}$  y se tienen

$$\mathbf{B}_{rad}^0 = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \mathbf{p}) e^{ikr}$$

$$\mathbf{E}_{rad}^0 = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \mathbf{p}) e^{ikr} \times \hat{r}$$

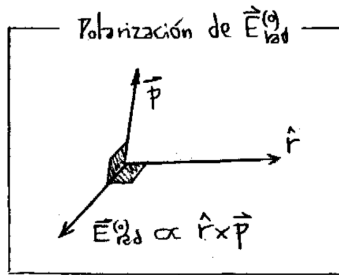


Figura 1.2

- Para que un campo sea de radiación debe tener flujo  $\mathbf{S}$  no nulo en el infinito. Si los campos van como  $1/r$  entonces el Poynting va como  $1/r^2$  y  $dS$  va como  $r^2$  de modo que  $\langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{S}$  tiene valor constante (un flujo que se va y no retorna a la fuente). Si el campo va como  $1/r^2$  y entonces no produce flujo lejos.
- Si hacemos la aproximación  $\ell = 1$  en  $\sum_{\ell}$  resulta que se obtiene un momento magnético oscilante más un cuadrupolo eléctrico.
- La radiación a orden  $\ell = 0$  es un dipolo eléctrico oscilante (ver figura)

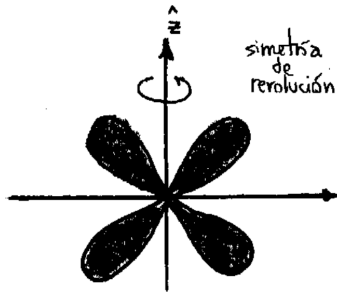


Figura 1.3

- La distribución angular de potencia para la parte cuadrupolar que surge con  $\ell = 1$  es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$$

que es para una fuente con simetría de revolución.

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^6}{128\pi} |\hat{r} \times \mathbf{Q}|^2,$$

donde  $\mathbf{Q}$  es un vector que vale  $\hat{n} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$ , o bien indicialmente  $n_i Q_{ij}$ .

### 1.1.2 Radiación a orden $\ell = 1$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{p}}(t') + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t')}{cR} \times \hat{n} + \frac{1}{6c^2 R} \overline{\mathbf{Q}}(t') \cdot \hat{n}$$

que es la radiación dipolar eléctrica, magnética y cuadrupolar eléctrica.

### 1.1.3 Ejemplo de antena

Sea una pequeña antena de longitud  $d$  (ver figura) tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I \sin(k[d/2 - |z|]) \delta(x') \delta(y') \hat{z}$$

que tiene nodos de la corriente en los extremos. Luego considerando fuente armónica ( $A = A(x) \exp(i\omega t)$ ) será

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dv'$$

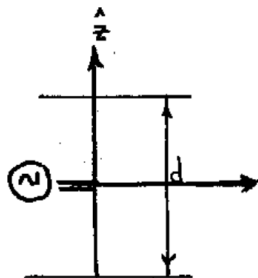


Figura 1.4

Hacemos algunas aproximaciones geométricas de distancia amparadas en la figura de más abajo.

Estas aproximaciones son clásicas de los problemas de difracción.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\theta)} = x(1 - 2x'/x \cos(\theta) + (x'/x)^2)^{1/2}$$



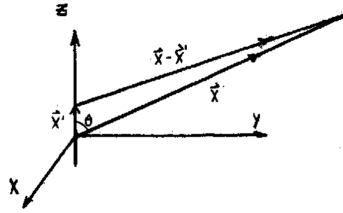


Figura 1.5

y quedándonos a primer orden,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx x(1 - x'/x \cos(\theta))$$

de manera que aceptamos una buena aproximación y una bruta,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx x - x' \cos(\theta) \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx x$$

para así escribir

$$\approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{ikx} e^{-ikx' \cos(\theta)}$$

donde notamos que hemos aproximado de una forma dentro del argumento de la exponencial compleja y de otra en el denominador de la fracción.

Así, resulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \frac{e^{ikx}}{x} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ikx' \cos(\theta)} dv'$$

Existe condición de contorno que en los extremos la corriente debe ser nula, entonces debe haber nodos del seno (en  $\pm d/2$ ) y los  $d$  posibles son  $n\lambda/2$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \hat{z} \frac{2I e^{ikx}}{ckx} [\cos(kd/2 \cos(\theta)) - \cos(kd/2)] \frac{1}{\sin(\theta)^2}$$

entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_z \hat{z} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_z \cos(\theta) \hat{\theta} - A_z \sin(\theta)?$$

Falta un vektor

Entonces con  $kx' \ll 1$  (longitud de onda larga,  $\lambda \gg d$ ) tenemos

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \left( \frac{kd}{2} \right)^4 \sin(\theta)^2$$

identificando con  $|\mathbf{p}| = Id^2/(2c)$  y este es el primer término multipolar. El paréntesis es muy chico. Con media longitud de onda ( $kd = \pi$ ) ( $\lambda/2 = d$ ) es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \frac{\cos(\pi/2 \cos(\theta))^2}{\sin(\theta)^2}$$

y finalmente para una longitud de onda ( $\lambda = 2$  y  $kd = 2\pi$ ) se tiene

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{2c\pi} \left[ \frac{2 \cos(\pi/2 \cos(\theta))^2}{\sin(\theta)^2} \right]^2$$

Las ilustraciones sucesivas de la figura bajo estas líneas dan cuenta de estas diferentes longitudes.



Figura 1.6

Como referencia tengamos en cuenta que las expresiones salen de

$$\mathbf{B}_{rad} = -\frac{1}{c} \hat{n} \times \dot{\mathbf{A}} = ik\hat{n} \times \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{E}_{rad} = \mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$$

Estas equivalencias son para campos de radiación nomás,

$$\mathbf{B}_{rad} = ik\hat{n} \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E}_{rad} = \mathbf{B}_{rad} \times \hat{n}$$

## 1.2 Campos de una partícula cargada en movimiento

Escribimos la densidad de corriente y la densidad de carga según

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = q\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

$$\rho(\mathbf{x}', t') = q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

de manera que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_{t'} \int_{V'} \frac{q\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' dt'$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_{t'} \int_{V'} \frac{q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' dt'$$

donde hemos usado  $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  de modo que es  $R = R(t')$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_v' \frac{q\mathbf{v}\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} dt' \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v}(t')}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R(t')} \Big|_{t'=t-R/c}$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_v' \frac{q\delta[t' - t + R/c]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} dt' \Rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R(t')} \Big|_{t'=t-R/c}$$

cuyas expresiones son los potenciales de Liénard-Wiechert. Hemos usado en las cuentas que

$$\delta[t' - (t - R(t')/c)] = \frac{1}{\frac{d}{dt'}(t' + R(t')/c)} \delta(t - t')$$

(idea que viene de  $\delta f = (1/(df/dx_0))\delta(x - x_0)$ ) y que

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} \quad \frac{dR}{dt'} = \frac{\dot{\mathbf{x}}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{R} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} = -\hat{n} \cdot \mathbf{v}$$

$$1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} = 1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}$$

según la figura que ilustra bajo estas líneas  
y como los campos serán

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

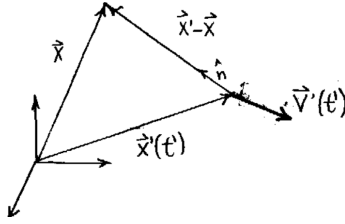


Figura 2.7

se tiene que

$$\mathbf{E} = q \frac{(\hat{n} - \beta)(1 - \beta^2)}{K^3 R^2} \Big|_{ret} + \frac{q}{c} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{K^3 R} \Big|_{ret}$$

donde se ve que vale  $\mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{E}$  que ya sabíamos para  $\mathbf{E}_{rad}$  y  $\mathbf{B}_{rad}$  y donde  $K \equiv 1 - \hat{n} \cdot \beta$

De acuerdo a la figura xxxx en  $t'$  se produce el campo. Cuando la radiación llega a  $\mathbf{x}$  en tiempo  $t$  la partícula se halla en  $\mathbf{x}'$  (tiempo  $t$ ), de manera que la moraleja es que  $t$  y  $t'$  son instantes de tiempo diferentes en un mismo sistema inercial.

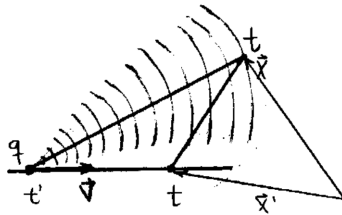


Figura 2.8

Podemos sacar un par de frases importantes ya que

- Si una partícula se mueve con  $\mathbf{v}$  constante puedo pasar a un frame inercial  $S'$  donde es  $\mathbf{v} = 0$  y entonces  $\mathbf{B}' = 0$  de manera que como  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' = 0$  se tiene  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$  en todo frame inercial.
- El  $\mathbf{E}_{rad}$  estará dado por el  $\mathbf{E}_a$ .
- Toda partícula que está acelerada en un frame inercial debe irradiar ondas EM, entonces una partícula recorre una circunferencia (en un campo  $\mathbf{B}$ ) si aceptamos que lo que irradia es despreciable.

Sea ahora una partícula  $e$  con  $|\mathbf{v}|$  constante, entonces

$$\mathbf{B}_{bs} = e \frac{\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}}}{\gamma^2 k^3 R^2} \quad (\text{Lienard-Wiechert}) \qquad \mathbf{B}_{bs} = e \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}}}{c R^2} \quad (\text{Biot-Savart})$$

y

$$\mathbf{E}_v = e \frac{\hat{\mathbf{n}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\gamma^2 k^3 R^2}$$

donde vemos que difieren en

$$\frac{1 - \beta^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})}$$

### 1.3 Campo de una carga en movimiento

El campo de velocidad es

$$\mathbf{E}_v = e \frac{(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\gamma^2 (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} = e \left[ \frac{\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} \right]$$

referidas las magnitudes a la figura XXXX.

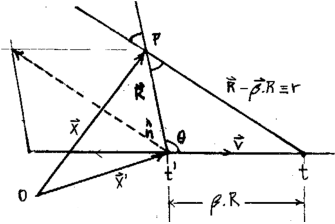


Figura 3.9

$$|\mathbf{E}_v| = e \frac{\sqrt{R^2 + \beta^2 R^2 - 2R^2 \beta \cos(\theta)}}{\gamma^2 (1 - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta} / R)^3 R^3} = e \frac{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \cos(\theta)}}{\gamma^2 (1 - \beta \cos(\theta))^3 R^2}$$

entonces como  $\cos(\theta) = \beta$

$$\frac{d|\mathbf{E}_v|}{d\theta} = 0$$

siendo los extremos  $\theta = 0, \pi$  que representan un movimiento hacia adelante o hacia atrás.

$$|\mathbf{E}_v(\cos(\theta) = \beta)| = \frac{e\gamma}{r^2}$$

$$|\mathbf{E}_v(\cos(\theta) = 1)| = \frac{e(1 + \beta^2 - 2\beta)^2}{R^2(1 - \beta^2)^{-1}(1 - \beta)^3}$$

$$|\mathbf{E}_v^{(\theta=1)}| = \frac{e}{R^2(1 - \beta^2)^2\gamma^2} = \frac{e}{r^2\gamma^2}$$

puesto que es  $r = R(1 - \beta)$ . Vemos que es similar al campo estático pero con un factor corrector.

Campo de aceleración, es

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{K^3 R} \approx \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{K^3 R} = \frac{e}{c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{K^3 R}$$

donde usamos que  $v/c \ll 1$  y por ende  $1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \approx 1$  entonces es

$$\hat{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}} \approx \hat{n}$$

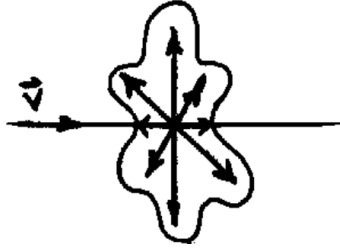


Figura 3.10

## 1.4 Cálculo de potencia irradiada

Se realiza calculando el vector de Poynting,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \hat{n} = \frac{e^2}{4\pi c} \hat{n} \left| \frac{\hat{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{R} \right|^2$$

si es

$$dP = \mathbf{S} \cdot \hat{n} R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \hat{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2 d\Omega$$

y entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{v}^2}{c^2} \sin^2(\theta) = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2(\theta).$$

Luego, si integramos,

$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \int \int \sin(\theta)^3 d\theta d\phi$$

y se llega a que

$$P = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3}$$

que es la fórmula de Larmor con  $v/c \ll 1$ . Ahora podemos prescindir de la restricción no relativista usando que la  $P$  es invariante lorentziano.

$$P = \frac{2e^2}{3c^3 m^2} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

y como  $p_\mu(E/c, -\mathbf{p})$  y  $p^\mu(E/c, \mathbf{p})$ .

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} (E^2/c^2)$$

$$\tau = \gamma(t - \beta x_{\parallel}) \quad \frac{d\tau}{dt} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

y luego para una trayectoria rectilínea

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{a^2 \sin(\theta)^2}{(1 - \beta \cos(\theta))^5}$$

$$P = \frac{2e^2 a^2 \gamma^6}{3c^3} \quad a = Z_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

Según vemos en la figura la distribución angular de potencia es una especie de *as de pique* en el cual a mayor velocidad los lóbulos se pegan al eje de simetría. Compárese con el caso no relativista.

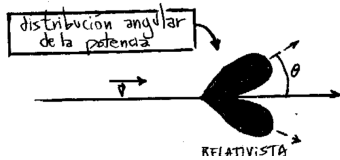


Figura 4.11

Se tiene además

$$\theta_{max} \approx \frac{1}{2\gamma}$$

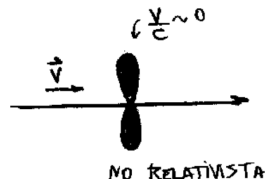


Figura 4.12

## 1.5 Frenado magnético

Sea la Figura. Hacemos

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega \frac{r}{c} \hat{\phi} \times (-B \hat{z}) = -\frac{\omega r B}{c} \hat{r}$$

y la densidad de potencia disipada por corrientes de Foucault será

$$\mathfrak{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}' = \sigma E'^2 = \frac{\sigma \omega^2 r^2 B^2}{c^2}$$

donde

$$P = \int \int \frac{\sigma \omega^2 r^2 B^2}{c^2} r d\theta dr = \frac{\sigma \omega^2 a^4 B^2 2\pi}{4c^2}.$$

Son corrientes de *Foucault* las que frenan el disco.

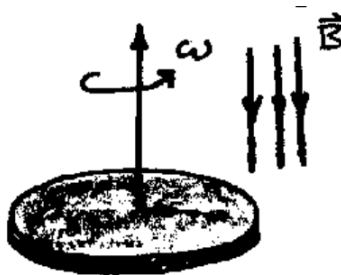


Figura 5.13

En un disco fijo con  $\mathbf{B} = B_0 e^{i\omega t}$  habrá  $\mathbf{E} = E(r) \hat{\phi}$  de manera que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E(r)^2$  entonces se disipará energía por efecto Joule. Se calientan los transformadores en un ejemplo usual de la vida real.



### 1.5.1 Esponja electromagnética

En  $t = 0$  se distribuye una  $\sigma$  en la cara interna. Se genera una  $\mathbf{J}$  y un campo  $\mathbf{E}$  radial que no produce  $\mathbf{B}$  entonces  $\mathbf{S} = 0$  no hay radiación. La carga se mueve

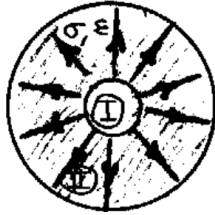


Figura 5.14

por el interior hasta llegar a la superficie y alcanzar situación estática  $\mathbf{E}_{II} = 0$ . La energía disipada lo hace en forma de calor pero no se radia.