Capítulo 1

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \qquad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos (β_i, α_i) que son constantes. Entonces la acción es del tipo F_2, i.e.

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \tag{1}$$

donde

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

y esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE). Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

y además que Hamilton-Jacobi tiene solución si el problema es totalmente separable. Si $H = H(q_i, \alpha_i)$ entonces $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$ y en ese caso es $H = cte.$ y podemos poner $H = \alpha_1$. Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \longrightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener S.

Podemos ver que si $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$, y me quedo con $H = \alpha_1 \equiv K$ entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \longrightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \longrightarrow P_i = \alpha_i (ctes.).$$

La α_1 no puede depender de q_i pues si se tuviera $\partial\alpha_1/\partial q_i \neq 0$ no sería constante α_1 pues $\dot{q} \neq 0$.

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_i^N W(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

1.0.1 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen $\mathcal{V}$ en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 ... dq_n dp_1 dp_2 ... dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

$$\int dQ_1 dQ_2 ... dQ_n dP_1 dP_2 ... dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}$$

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)} = \frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)/\partial(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n)|_{P_i=cte}}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)/\partial(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n)|_{q_i=cte}}$$

que en notación de matriz es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & ... & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & .. & .. & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)$$

y

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que $J = 1$ y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma.

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dpdq \qquad A_{P,Q} = \int dPdQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1$$