

Capítulo 1

Mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo es el corazón de la mecánica clásica.

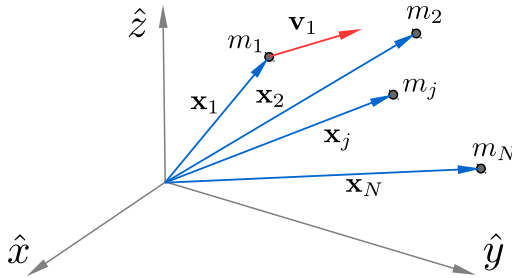


Figura 0.1 Sistema de partículas de masas m_i con sus correspondientes vectores de posición \mathbf{x}_i . La partícula m_1 tiene además indicado su vector velocidad \mathbf{v}_1 .

1.1 Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

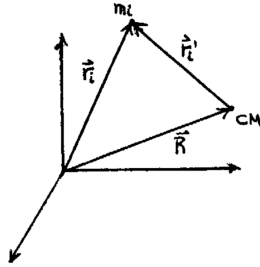


Figura 1.2

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i & \mathbf{v}_i &= \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i \\ L_O^T &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ L_O^T &= \sum_i (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \end{aligned}$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M} \\ M\mathbf{R} &= \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \\ M\mathbf{R} &= M\mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \implies 0 = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\begin{aligned} L_O^T &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ L_O^T &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ L_O^T &= L^{cm} + L_{cm}^{sist} \end{aligned}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservación del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel \mathbf{F}_{ij}.$$

1.2 Trabajo y energía

$$T_2 - T_1 = W_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2$$

donde la primera igualdad vale siempre y la segunda se da si se puede escribir la fuerza como el gradiente de un potencial, i.e.

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

y entonces se conserva la energía

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo.

Consideremos una partícula de masa m que se mueve sobre una cierta trayectoria suave, ver Figura 2.3, debido a la acción de una fuerza \mathbf{F} . Su velocidad \mathbf{v} es en todo momento tangente a la trayectoria y define de esta forma un versor \hat{t} colineal con la misma. Asimismo podemos definir un versor \hat{n} normal a la trayectoria. Descomponiendo la fuerza y la velocidad en estas dos direcciones, se tiene

$$\mathbf{F} = F_{\hat{t}}\hat{t} + F_{\hat{n}}\hat{n} \quad \mathbf{v} = v_{\hat{t}}\hat{t}$$

de manera que la segunda ley de Newton puede escribirse

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\hat{t}}$$

donde hemos despojado del subíndice a v . Involucrando al diferencial de arco $ds = |d\mathbf{x}|$ a lo largo de la trayectoria es

$$m v \frac{ds}{dt} = m v dv = F_{\hat{t}} ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

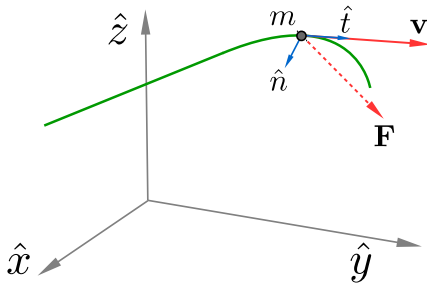


Figura 2.3

donde la última igualdad se ha escrito en virtud de que $F_{\hat{n}} \perp d\mathbf{x}$ siempre.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

entonces

$$m \frac{dv}{dt} = F_t \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

y haciendo un cambio de variable a desplazamiento s

$$\begin{aligned} m dv \frac{ds}{dt} &= F_t ds \\ m \int v dv &= \int F_t ds = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ \frac{1}{2} m v^2 \Big|_i^f &= W_{i \rightarrow f} \end{aligned}$$

siendo este resultado el llamado *teorema de las fuerzas vivas*. Notemos que el versor desplazamiento $d\mathbf{s}$ camina por la trayectoria.

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

y entonces como el trabajo externo viene de

$$\sum_i^N \int \mathbf{F}_i^{ext} \cdot d\mathbf{s}_i$$

necesito $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i)$ y $\nabla \times \mathbf{F}_i = 0$. Para el trabajo interno

$$W_i^{int} = \int \sum_j^N \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$W^{int} = \sum_i \int \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j)$$

1.3 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo F^v se acomodan en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las F^v son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

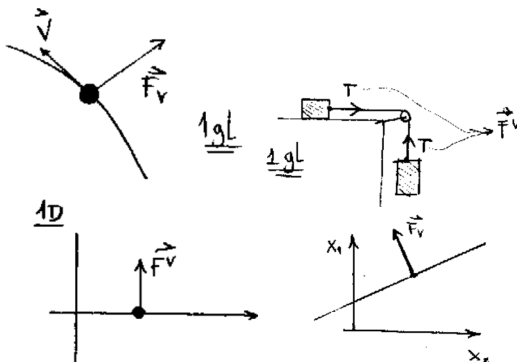


Figura 3.4

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que $W_{virtual}^{F^v} = 0$, y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq cte. & f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que F^v perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a t_0 fijo compati-

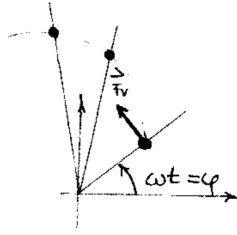


Figura 3.5

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en δt durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$.

$$f(x_i, t) = cte. \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$