

Capítulo 1

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \quad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos (β_i, α_i) que son constantes. Entonces la acción es del tipo F_2 , i.e.

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \quad (1)$$

donde

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

y esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE). Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

y además que Hamilton-Jacobi tiene solución si el problema es totalmente separable. Si $H = H(q_i, \alpha_i)$ entonces $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$ y en ese caso es $H = cte.$ y podemos poner $H = \alpha_1$. Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \longrightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener S .

Podemos ver que si $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$, y me quedo con $H = \alpha_1 \equiv K$ entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \longrightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \longrightarrow P_i = \alpha_i(\text{ctes.}).$$

La α_1 no puede depender de q_i pues si se tuviera $\partial \alpha_1 / \partial q_i \neq 0$ no sería constante α_1 pues $\dot{q} \neq 0$.

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_i^N W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

1.0.1 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen \mathcal{V} en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

$$\int dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n dP_1 dP_2 \dots dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}$$

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) / \partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)|_{P_i=cte}}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) / \partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)|_{q_i=cte}}$$

que en notación de matriz es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \ddots & \ddots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right)$$

y

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que $J = 1$ y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma.

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dpdq \quad A_{P,Q} = \int dPdQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1$$

Notamos que le corchete de Poisson para una transformación canónica en un grado de libertad es el corchete que ya sabíamos de uno. El área se conserva.

Comentemos que un sistema disipativo achica el área de la transformación.

1.0.2 Variables ángulo-acción

Consideremos una transformación canónica

$$p, q \longrightarrow J, \theta$$

la cual requiere

- Conservativos $S = W - Et$
- Totalmente separables $W = \sum_i^N W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Problemas periódicos

El movimiento periódico es de rotación o libración,

La periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

$$S = \sum_i^N W_i(q_i, J_i) - Et$$

Libración y rotación son dos movimientos de naturaleza diferente. No se puede pasar de uno a otro mediante pequeñas perturbaciones.

La integral de acción es

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{ciclo} p_i(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_i$$

donde

$$J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

son constantes y a su vez los α_i son constantes de separación. Asimismo $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n)$. La transformación S es

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

siendo $p_i = p_i(q_1, J_1, \dots, J_n)$. El nuevo hamiltoniano es $E = E(J_1, \dots, J_n)$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -\dot{J}_i$$