

CBFT Mecánica clásica

Fuerzas centrales

19 de noviembre de 2015

Contenidos

§1. Fuerzas centrales	1
§2. Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange	3
§3. Velocidad areolar	4
§4. Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler	4
§5. Vector de Runge-Lenz	6
§6. Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente	7
§7. Dispersión	8
§8. Dispersión por dos cuerpos	9

§1. Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que cumple

$$\mathbf{F}(r) = f(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

de tal suerte que la parte cinética del lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}^2)$$

El momento angular \mathbf{L} se conserva puesto que $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Como es $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \text{cte}$ entonces se sigue que \mathbf{r}, \mathbf{p} se hallan contenidos en el mismo plano.

Puedo pedir, sin pérdida de generalidad, que $\theta = \pi/2$ y entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Como ϕ es cíclica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L = mr^2 \dot{\phi}$$

que no es otra cosa que la conservación del momento angular, información que puede ser llevada al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]$$

donde el último corchete será lo que llamaremos un potencial efectivo V_{eff} ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta en

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

pero es más sencillo utilizar la conservación de la energía que explícitamente tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

desde la cual se puede integrar directamente la trayectoria $r = r(t)$ según

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)},$$

aunque suele ser más útil la trayectoria en el espacio físico $r = r(\phi)$ o bien $\phi = \phi(r)$.

$$mr^2 \frac{d\phi}{dt} = L \quad \rightarrow \quad mr^2 \frac{d\phi}{dr} \dot{r} = L$$

luego

$$\begin{aligned} \dot{r} d\phi &= \frac{L}{mr^2} dr \\ \int d\phi &= \int \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)}} dr \end{aligned}$$

En el gráfico bajo estas líneas ilustramos muchas de las características de la física del problema de fuerzas centrales.

§2. Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
 m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \\
 d\phi = \frac{L}{mr^2} dt &\quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{L}{mr^2} \\
 \frac{d}{dt}(\dot{r}) &= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi}(\dot{r}) \\
 m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\
 \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dr}{dt} \right) - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{dV}{dr} \\
 \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{dV}{dr}
 \end{aligned}$$

y acá probamos el conveniente cambio de variables

$$\begin{aligned}
 U = \frac{1}{r} \quad dU &= -\frac{1}{r^2} dr \quad \frac{dU}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -U^2 \frac{dr}{d\phi} \\
 U^2 L \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{L}{m} \frac{dU}{d\phi} \right\} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 &= F(1/U) \\
 -\frac{U^2 L^2}{m} \frac{d^2 U}{d\phi^2} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 &= F(1/U) \\
 -\frac{U^2 L^2}{m} \left[\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] &= F(1/U)
 \end{aligned}$$

o bien

$$\left[\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2}.$$

En el caso del potencial de Kepler será

$$\left[\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{Km}{L^2},$$

es decir que el miembro derecho es una constante. Sale fácil entonces.

§3. Velocidad areolar

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

De la figura puede verse que

$$A = \frac{1}{2}r^2 d\phi$$

y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = cte.$$

§4. Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler

Tenemos

$$\int d\phi = \int \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr \quad \frac{d^2U}{d\phi^2} + U = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2} \quad U = 1/r$$

que es simétrica respecto a ϕ y $-\phi$. Esto determina una simetría orbital si tomamos

$$U(\phi = 0) = U_0 \quad \left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0$$

lo cual significa que U_0 es un extremo (punto apsidal).

Calculemos ahora el ángulo que recorre una oscilación completa,

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

Si $\Delta\phi = 2q$ siendo $q = (m/n)\pi$ son $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\Delta\phi = 2\frac{m}{n}\pi$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$$

y esto significaría que la órbita se cierra.

La ecuación a resolver es

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + \left(U - \frac{km}{L^2} \right) = 0$$

o bien

$$\frac{d^2\beta}{d\phi^2} + \beta = 0$$

entonces

$$\beta = A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$U = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0)$$

y habría que usar r_m, r_M para evaluar A .

Con respecto a las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \sigma^2 = a^2 - b^2$$

$$b = a\sqrt{1 - (\sigma/a)^2}$$

Por otro lado,

$$s^2 = (2\sigma)^2 + r^2 - 4\sigma r \cos(\pi - \phi)$$

$$(2a - r)^2 = 4\sigma^2 + r^2 + 4\sigma r \cos(\phi)$$

y definiendo $\sigma/a \equiv \varepsilon$ resulta

$$a - r = \varepsilon(\sigma + r \cos(\phi))$$

y esto es una elipse.

Entonces en resumen, las leyes de Kepler son

1. Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Esto es común de los potenciales del tipo

$$V \propto 1/r$$

2. El radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$A = \frac{1}{2}r^2 d\phi \quad \longrightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{L}{2m} (cte.)$$

- 3.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Acá hay que hacer un laburo muy importante.

$$\pi ab = \int dA = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L}{2m} \tau \quad a = \frac{L\tau}{2\pi mb}$$

pero como $km/L^2 = a/b^2$ es

$$B = L\sqrt{\frac{a}{km}}$$

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} \tau^2$$

y esto es independiente de la masa del planeta.

Trabajamos más con la elipse,

$$r_M + r_m = 2a$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad E - \frac{L^2}{2m} U^2 - kU = 0$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{\frac{2mkE}{L^2} \mp \sqrt{\left(\frac{2mkE}{L^2}\right)^2 + \frac{8mE}{L^2}}}{2}$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{mEk}{L^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2}{mEk^2}} \right)$$

y acá constatamos que representa una elipse; es decir que las órbitas son elípticas.

§5. Vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \times \mathbf{L} - k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - k \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} r - \frac{dr}{dt} \mathbf{r}}{r^2}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)$$

pero como $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = 0$ resulta lo que resulta.

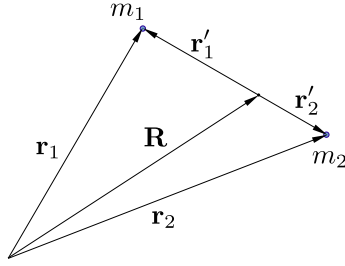


Figura 6.1 Sistema coordinado para la reducción del problema de dos cuerpos al de uno equivalente.

§6. Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente

Consideramos el siguiente sistema de coordenadas,

$$r \equiv |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad \dot{r} \equiv |\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1|$$

donde el sistema centro de masas es

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad M \mathbf{V}_{cm} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$0 = m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2$$

que provocan

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 \quad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}'_1$$

dando unas r relativas

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}'_1.$$

Luego, como la energía se conserva (el $V_{cm} = cte.$) podemos escribir

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\dot{\mathbf{r}}_2'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)$$

y el

$$e = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)$$

donde este último \mathbf{r} es un vector distancia relativa. Es un problema equivalente para la partícula centro de masas.

$$e = \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r)$$

Diremos que la *distancia relativa* describe una elipse. Las trayectorias reales en el espacio físico son dos elipses confocales. Por supuesto dejan de cumplirse las leyes de Kepler en este caso.

§7. Dispersión

Consideramos la dispersión de un haz de partículas de cierta energía cinética por un centro dispersor, ver ilustración.

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

donde dN es el número de partículas dispersadas entre χ y $\chi + d\chi$ y n es el número de partículas emitidas por tiempo y por área. De esta forma $d\sigma$ tiene unidades de área.

Consideramos d centro dispersor con simetría esférica (cilíndrica basta). Usamos como suposiciones que todo lo que emerge entre $\rho + d\rho - \rho$ es dispersado entre $\chi + d\chi - \chi$, y que se conservan tanto E como \mathbf{L} .

El anillo se dispersa en un sector esférico. Entonces podemos establecer las siguientes conclusiones para el anillo entre $\rho + d\rho - \rho$, a saber

$$A = \pi((\rho + d\rho)^2 - \rho^2) \quad \longrightarrow \quad A \approx 2\pi\rho d\rho,$$

entonces

$$d\sigma = \frac{2\pi\rho d\rho I}{I}$$

donde ρ es el parámetro de impacto y I el número de partículas por unidad de tiempo y área. Finalmente

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

Como se conservan la energía y el momento angular

$$E = \frac{1}{2}mV_{\infty}^2 \quad L = m\rho V_{\infty}^2$$

En general se desconoce $V(r)$.

Se puede calcular el ángulo φ_0 de acuerdo a

$$\chi = \pi - 2\varphi_0,$$

donde

$$\varphi_0 = \int_{r_m}^{\infty} \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0(\rho)$$

e invertimos desde la última ecuación.

Veamos el caso de una esfera maciza. En general los cuerpos duros equivalen a un potencial del tipo

$$V = \begin{cases} \infty & \text{cuerpo} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0$$

$$\sin(\varphi_0) = \frac{\rho}{a} \quad d\rho = -a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)$$

y entonces

$$d\sigma = 2\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) d\chi$$

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\pi - \chi) d\chi = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi$$

y como hay que integrar χ de 0 a π

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi = \pi a^2$$

$$\sigma = \pi a^2$$

En el caso de los cuerpos duros la sección eficaz es la sombra de los mismos.

§8. Dispersión por dos cuerpos

Referencias

Sobre el ángulo sólido

$$\Omega = \text{Area}/r^2$$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

$$\Omega = 4\pi$$

para la esfera.