

Capítulo 1

Teorema de Green

1.1 Imágenes y método de Green

El método de las imágenes es un procedimiento gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extras (cargas imagen) las condiciones de contorno.

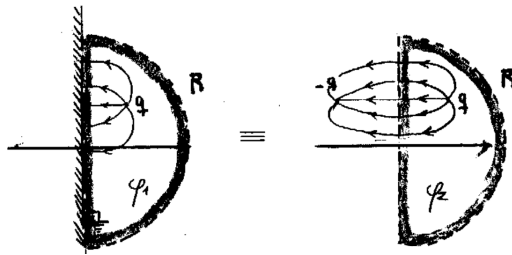


Figura 1.1

Los problemas que ilustra la figura satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado, entonces sus soluciones internas son la misma: $\phi_1 = \phi_2$ por unicidad.

1.1.1 El Método de Green

El concepto tras el método de Green es evaluar el ϕ de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación

elemental.

Restando entre sí

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

y

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$$

e integrando ambos miembros y utilizando el teorema de la divergencia, se llega a

$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \int_S [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] dS,$$

que es la segunda identidad de Green.

Consideremos lo que llamaremos caso A, según vemos en figura, caracterizado según

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \in R, \mathbf{x} \in R$$

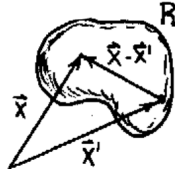


Figura 1.2

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \nabla^2 \psi = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$-\phi(\mathbf{x})4\pi + \int_V 4\pi \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \int_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

donde estamos usando la abreviatura $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$ que es la derivada normal en la superficie. Despejando

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \right) dS,$$

donde la primer integral es debido a las cargas internas y la segunda al efecto de las cargas fuera del recinto R .

Recordemos que las condiciones tipo Dirichlet corresponden a $\phi|_S$ y las tipo Neumann a $\partial \phi / \partial \hat{n}|_S$.

El caso B, según figura, corresponde a

$$\rho_{int} \quad \mathbf{x}' \notin R, \mathbf{x} \in R$$

y

$$\int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS,$$

la integral de superficie proviene de las cargas fuera de R que producen campo en el interior R .

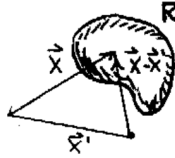


Figura 1.3

Hemos tomado $\psi = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ que verifica [1]; interpretándose ψ como el potencial de una carga puntual unitaria.

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

podemos tomar

$$G \equiv \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

donde G es la función de Green.

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \nabla^2 f$$

donde F satisface Laplace (si el recinto no incluye a \mathbf{x}'). Con $\nabla^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Entonces $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ representan la o las imágenes necesarias para que G cumpla el contorno necesario $G_D|_S = 0$.

1.2 Funciones de Green

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS', \quad (2.1)$$

Pero para poder utilizar (2.1) necesito tener un solo tipo de condiciones de contorno, de manera que según sean

$$\text{Dirichlet} \quad \begin{cases} G_D : \nabla^2 G_D = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ G_D|_{\text{contorno de } R} = 0 \\ \phi|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} G_D \rho dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial}{\partial n} G_D dS' \end{cases}$$

donde la condición de contorno de G equivale, en el contexto físico del electromagnetismo, a reemplazar el contorno por un conductor metálico puesto a tierra. Entonces G es el potencial de la configuración de conductores con el contorno puesto a tierra frente a una carga puntual con magnitud unitaria.

La función de Green da la geometría del problema.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi_2}{\partial n}|_S = -4\pi\sigma \quad \phi_2|_S = \phi_1|_S$$

$$\text{Neumann} \quad \begin{cases} G_N : \nabla^2 G_N = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ \nabla G_N \cdot \hat{n}|_S = -\frac{4\pi}{S} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S \\ \phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle|_S + \int_{V'} G_N \rho dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S G_N|_S \frac{\partial G_N}{\partial n} dS \end{cases}$$

1.2.1 Green para el problema externo de una esfera

En este problema las condiciones adecuadas son las de Dirichlet, ver Figura y podemos escribir la función de Green como

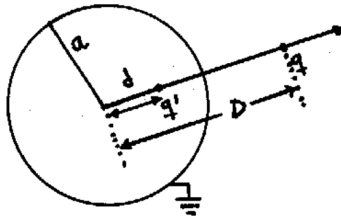


Figura 2.4

$$G = \frac{1}{|\mathbf{r} - D\hat{\mathbf{r}}'|} - \frac{a/D}{|\mathbf{r} - a^2/D\hat{\mathbf{r}}'|} \quad G|_{r=a}$$

sujeta a que

$$q' = -qa/D \quad d = a^2/D$$

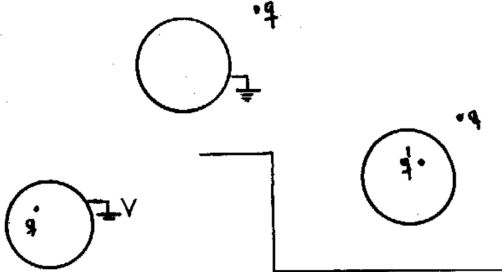


Figura 2.5 G_D es el potencial de la configuración (a) y se evalúa teniendo en cuenta la otra (b) que se resuelve casualmente por imágenes. La (c) se resuelve alterando las condiciones.

El caso (c) de la Figura se resuelve con

$$\begin{aligned} -\frac{V}{4\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial n} dS &= -\frac{V}{4\pi} \int_S \nabla G \cdot d\mathbf{S} = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G dV \\ &= -\frac{V}{4\pi} (-4\pi) \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = V \end{aligned}$$

1.3 Algunos campos

En distribuciones infinitas de carga la integral de Poisson diverge pero ello se debe a que en realidad no existen distribuciones infinitas de carga.

1.4 Notas método de Green

Función de Green libre (sin contornos) lleva directo a la integral de Poisson

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

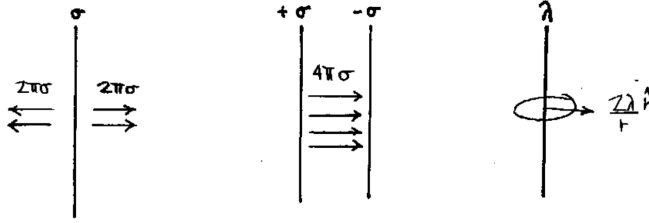


Figura 3.6

entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho G dV = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad \text{con} \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$

Para condiciones de Neumann se toma:

$$\nabla G_N|_S = -\frac{4\pi}{S} = \frac{\partial G}{\partial n}|_S$$

la integral

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n}|_S dS$$

no se puede anular con

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$

salvo que el volumen de integración no contenga a $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ en cuyo caso: se excluye $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ de la integración.

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n}|_S dS = \frac{1}{S} \int_S \phi|_S dS = \langle \phi \rangle|_S$$

que es el valor promedio de ϕ en la superficie S .

Se suele tomar la superficie $S \rightarrow \infty$ de modo que resulte nulo $\langle \phi \rangle|_S$. Se toma el volumen V rodeado por dos superficies una cerrada y finita y la otra en infinito entonces

$$\langle \phi \rangle|_S = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$

esto es el llamado *problema exterior*.

1.5 Condiciones de contorno

La ley de Gauss nos dice

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q_n$$

para el cilindrito de la figura

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} \Delta S = 4\pi\sigma \Delta S$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot \hat{n} \times \hat{\eta} d\ell$$

donde esto vale en electrostática (nula la integral de línea del campo \mathbf{E}) y además

$$\hat{n} \times \hat{\eta} = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{d\ell}$$

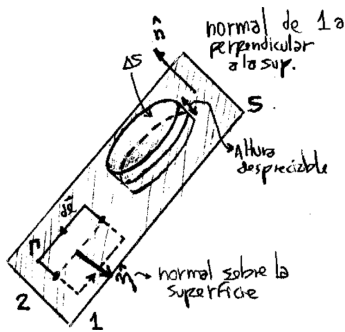


Figura 5.7

y puesto que vale la permutación

$$0 = (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{\eta}) \longrightarrow 0 = \hat{\eta} \cdot ((-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1) \times \hat{n})$$

de modo que la componente tangencial es continua y entonces

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 E_{2\hat{n}} - E_{1\hat{n}} &= 4\pi\sigma & E_{2\hat{t}} - E_{1\hat{t}} &= 0 \\
 -\nabla\phi_2 \cdot \hat{n} + \nabla\phi_1 \cdot \hat{n} &= 4\pi\sigma \\
 \frac{\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n}}{4\pi} &= \sigma \\
 \sigma &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial n}
 \end{aligned}$$

esta es la densidad de carga inducida sobre la frontera entre medios.

Para los medios magnéticos

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l$$

$$\int_S (\nabla \times H) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_l \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \hat{s} dl$$

donde hicimos la transformación

$$\int \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

y donde recordemos que la altura de Γ tiene a cero.

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{s} = (-\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{s}) dl$$

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{s} dl = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \times \hat{n}) \cdot \hat{s} dl$$

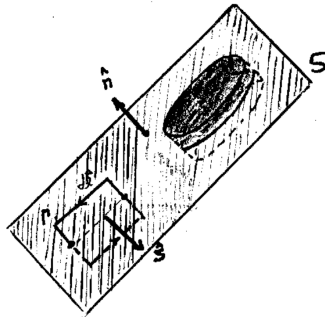


Figura 5.8

de manera que

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_l = \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$$

$$\hat{n} \times \hat{s} = \frac{d\ell}{d\ell}$$

$$B_{2\hat{n}} - B_{1\hat{n}} = 0 \quad H_{2\hat{t}} - H_{1\hat{t}} = \frac{4\pi}{c} g_l$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

1.6 Desarrollo multipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Cuando la expresión es muy complicada podemos desarrollarla en una serie de potencias

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{x}|^3} + \sum_{i,j} \frac{1}{2|\mathbf{x}|^5} x_i Q_{ij} x_j$$

donde está centrado en el origen de coordenadas. El último término, matricialmente sería

$$\frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}^t Q \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5}$$

y es el término cuadrupolar.

Los momentos son el momento dipolar,

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) dV$$

el momento monopolar

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV$$

que es la carga total, y el momento cuadrupolar

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2] dV$$

El momento cuadrupolar refleja apartamiento de la esfera perfecta, los momentos dipolar y cuadrupolar indican desbalance de carga. Asimismo

$Q_{ij} = Q_{ji}$ es simétrico por ser producto de vectores polares. Es siempre diagonalizable. Tiene traza nula,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

se da también que $Q_{ij}(i \neq j)$ mide desbalance lejos de los ejes. Una esfera con ρ uniforme tiene todos los momentos multipolares nulos salvo el monopolo.



Figura 6.9

Una simetría de reflexión implica que el $\mathbf{p}_\perp = 0$ donde la notación significa perpendicular al plano. Esto es así porque no hay desbalance. Para una simetría de revolución $Q_{xx} = Q_{yy}$ entonces el Q_{ij} puede darse con un sólo número.

Si en una distribución dada, los momentos multipolares hasta el orden $\ell - 1$ son nulos entonces el momento multipolar de orden ℓ no depende del origen de coordenadas.

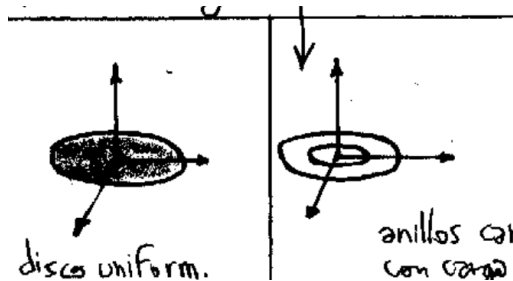


Figura 6.10

En la figura vemos que no ambos no tienen desbalance de carga respecto del origen; el disco uniformemente cargado tendrá monopolo no nulo y dipolo nulo (siempre respecto del origen), los anillos cargados con carga

opuesta tendrán monopolo y dipolo nulos (respecto del origen y de cualquier otro punto). Pero si muevo las distribuciones se tendrá desbalance el disco pero no los anillos.

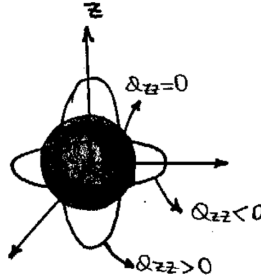


Figura 6.11

Para átomos en general son monopolo, dipolo neutros; el cuadrupolo se da con un solo número. En la Figura tenemos un elipsoide con densidad de carga ρ uniforme. Tiene simetría de revolución de modo que el momento cuadrupolar es un número. $Q_{zz} = 0$ puesto que una esfera no tiene desbalance, entonces $\vec{Q} = 0$

1.7 Dipolo eléctrico

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

si está en el origen, y

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

si está en un punto \mathbf{x}_0

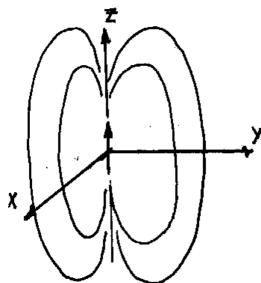
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{p} \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \hat{n} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

donde debemos notar que \mathbf{p} no depende de \mathbf{x} .

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{p\hat{z} \cdot r\hat{r}}{r^3} = \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$

siendo

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$$

**Figura 7.12** Dipolo centrado en el origen.

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta}$$

tiene simetría de revolución, puesto que no depende de $\hat{\phi}$.

Las líneas de campo cumplen que $d\ell$ a través de una línea de campo es tal que

$$d\ell \parallel \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} \times d\ell = 0$$

la línea de campo sigue la dirección del campo. En el caso del dipolo no tendrán componente en $\hat{\phi}$ (como es de esperar).

1.7.1 Interacción de un campo externo con una distribución de carga

Si tenemos un campo \mathbf{E} con sus fuentes lejos,

**Figura 7.13**

y que cumple $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (irrotacionalidad), se da la siguiente fuerza sobre la distribución

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV,$$

y si \mathbf{E} no varía demasiado en V , entonces podemos representar bien por una serie

$$E^\ell(\mathbf{x}) = E^\ell + x_j \partial_j E^\ell + \frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E^\ell$$

entonces

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i \int_V \rho dV + \int_V \rho x_j \partial_j E_i dV + \frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV$$

o bien

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \approx E_i q + (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_i + \mathbf{x} \cdot [(\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla E_i]$$

de lo cual extraemos que el campo interactúa con la carga, el gradiente del campo interactúa con el dipolo y la divergencia del campo interactúa con el cuadrupolo. Un campo uniforme entonces no hace fuerza sobre un dipolo. Para un campo inhomogéneo, el torque $\mathbf{T} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$ se puede escribir como

$$\mathbf{T} = q\mathbf{x} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

donde $\mathbf{p} \equiv q\mathbf{x}$ es el momento dipolar y vemos que el torque tiende a centrar el dipolo según la dirección del campo \mathbf{E} aunque no lo logra por la agitación térmica.

La energía de un dipolo será

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

entonces

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{p} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p})$$

siendo los últimos tres términos nulos según lo que consideramos previamente de manera que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}.$$

1.7.2 Capa dipolar

El potencial de un dipolo es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

y el potencial de una capa dipolar

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'$$

siendo \mathbf{D} el momento dipolar por área que viene de acuerdo a la definición

$$D = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sigma \epsilon$$

refiérase a la ilustración bajo esta línea

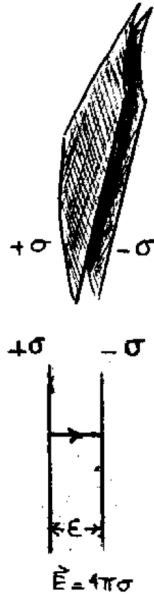


Figura 7.14

Veamos algún detalle más sobre la capa dipolar, que está ilustrado en la Figura siguiente.

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = \frac{D \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS = -\frac{D \cos(\theta)}{r^2} dS$$

$$\frac{\mathbf{D} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS = -D d\Omega$$

puesto que

$$\phi(\mathbf{x}) = -D \int_S d\Omega \quad \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS \equiv d\Omega$$

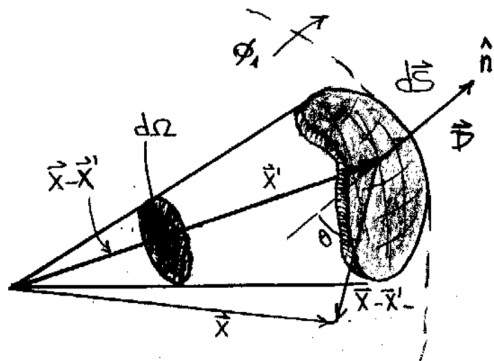


Figura 7.15

Para las condiciones de contorno se da lo siguiente

$$E_2^{\hat{n}} - E_1^{\hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$-\nabla(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 4\pi\sigma\epsilon$$

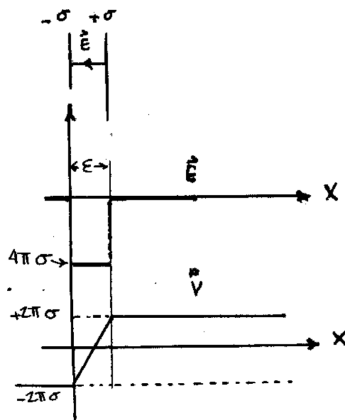


Figura 7.16

desde donde deducimos que el potencial tiene un salto al surcar la capa dado por

$$\phi_2 - \phi_1 = 4\pi D$$

1.7.3 Momento dipolar por unidad de volumen

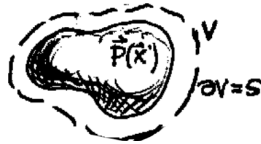


Figura 7.17