

Capítulo 1

Conceptos de mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo constituye el corazón de la mecánica clásica.

El contenido de este capítulo forma un núcleo básico de los resultados de la mecánica newtoniana que necesitaremos tener a mano para lo subsiguiente (leyes de conservación del momento lineal, momento angular y energía) así como ciertos rudimentos mínimos de la matemática usual en la resolución de los problemas.

1.1 Leyes de conservación

Repasaremos a continuación las leyes de conservación fundamentales de la mecánica para sistemas de partículas.

1.1.1 Momento lineal

La segunda ley de Newton se podía escribir en función del momento lineal de una partícula de masa m como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

siendo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ el momento de la partícula y \mathbf{F} la fuerza total que actuaba sobre la misma. Si el resultado de las fuerzas sobre la partícula era nulo entonces se tiene que $\mathbf{p} = \text{cte.}$ (el momento lineal es una constante de movimiento).

En el caso de un sistema de N partículas como el mostrado en la Figura 1.1 el momento total del sistema es la suma de los momentos individuales, es decir

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$$

luego la segunda ley para el sistema serán las N ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza total sobre la partícula i -ésima que puede descomponerse según

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}$$

siendo $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ las fuerzas debidas a agentes externos y \mathbf{F}_{ij} la fuerza sobre la partícula i debido a la partícula j .

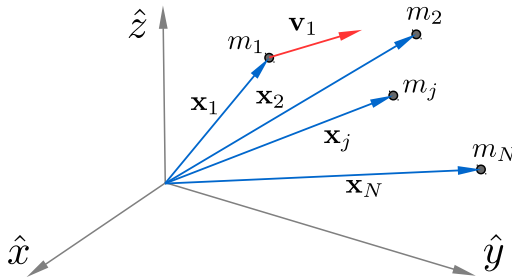


Figura 1.1 Sistema de partículas de masas m_i con sus correspondientes vectores de posición \mathbf{x}_i . La partícula m_1 tiene además indicado su vector velocidad \mathbf{v}_1 .

Entonces

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}$$

pero el último término del RHS es nulo puesto que por cada sumando \mathbf{F}_{ij} también aparece el sumando \mathbf{F}_{ji} y por acción y reacción estas fuerzas tienen la

misma dirección y sentido opuesto, i.e.

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

De esta forma la ley de conservación para el sistema es

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{total}}^{\text{ext}}$$

y el momento \mathbf{P} del sistema se conserva si la resultante de todas las fuerzas externas es nula.

Definiendo el vector de posición del centro de masa como

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{M}$$

donde M es la masa del sistema, se tiene el resultado clásico de que

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{x}_{\text{cm}}) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} = \mathbf{P},$$

el sistema como un todo tiene un momento total que puede asociársele al de una única partícula *centro de masa* de masa M y que se mueve con velocidad \mathbf{v}_{cm} .

Si \mathbf{P} se conserva, entonces \mathbf{v}_{cm} es una constante, el sistema posee un punto (el centro de masas) que se mueve con velocidad constante sin importar qué tan complejo sea el movimiento del conjunto total.

1.1.2 Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)$$

$$\mathbf{L}_O^T = \sum_i (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

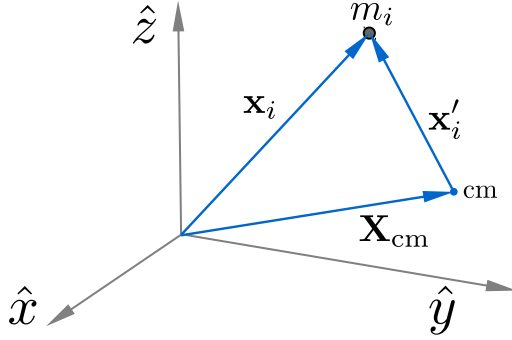


Figura 1.2

$$M\mathbf{R} = \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

$$M\mathbf{R} = M\mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \implies 0 = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservación del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel \mathbf{F}_{ij}.$$

1.1.3 Trabajo y energía

Consideremos una partícula de masa m que se mueve sobre una cierta trayectoria suave $\mathbf{x}(t)$, ver Figura 1.3, debido a la acción de una fuerza \mathbf{F} . Su velocidad \mathbf{v} es en todo momento tangente a la trayectoria y define de esta forma un versor $\hat{\mathbf{t}}$ colineal con la misma. Esto define un plano, mostrado en la parte derecha de la figura, para el cual todo vector perteneciente al mismo es normal a la trayectoria. Elegimos un versor $\hat{\mathbf{n}}$ que está en la dirección de la proyección de \mathbf{F} sobre dicho plano.

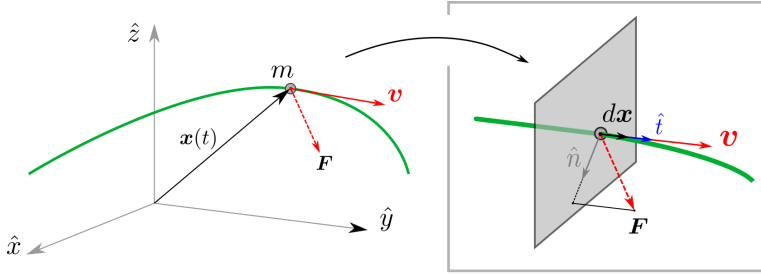


Figura 1.3 Partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria $\mathbf{x}(t)$ bajo la acción de una fuerza \mathbf{F} (izquierda). En el detalle de la derecha se muestra la descomposición del movimiento en direcciones tangencial $\hat{\mathbf{t}}$ y normal $\hat{\mathbf{n}}$.

Descomponiendo la fuerza y la velocidad en estas dos direcciones, se tiene

$$\mathbf{F} = F^t \hat{\mathbf{t}} + F^n \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{t}}$$

de manera que la segunda ley de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

para la componente $\hat{\mathbf{t}}$ resulta

$$m \frac{dv}{dt} = F^t$$

Involucrando al diferencial de arco $ds = |d\mathbf{x}|$ a lo largo de la trayectoria, la ecuación anterior se puede escribir como

$$m v \frac{ds}{dt} = m v dv = F^t ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

donde la última igualdad es posible en virtud de que $F^n \perp d\mathbf{x}$ por construcción.

Notemos que el versor desplazamiento ds camina por la trayectoria.

Podemos integrar ambos miembros de (1.1) entre $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$ y su correspondiente velocidad $v(t_0) \equiv v_0$ hasta $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1$,

$$m \int_{v_0}^{v_1} v dv = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

obteniendo

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_0}^{v_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}$$

que es el llamado *teorema de las fuerzas vivas* para una partícula de masa m y nos dice que la variación de energía cinética en la trayectoria es igual al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la misma, i.e.

$$T_1 - T_0 = \Delta T_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}. \quad (1.2)$$

En el caso particular en que la fuerza sea normal a la trayectoria en todo el intervalo $[t_0, t_1]$ se tendrá $\Delta T = 0$, es decir que se conserva la energía cinética a lo largo de toda la trayectoria. Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo y esto es solamente debido a que este proviene de un producto escalar (una proyección); las componentes normales no hacen trabajo.

Falta meter lo de

$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

Si la fuerza proviene de un potencial¹, se tiene

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.3)$$

y podemos expresar en coordenadas cartesianas esta equivalencia (1.3)

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)$$

y evaluar la integral del trabajo para obtener

$$W = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}[t]) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] dt = V_0 - V_1$$

donde la última igualdad se obtiene por integración de un gradiente. Esto significa que la integral es independiente de la trayectoria $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$.

Entonces, volviendo a (1.2)

$$\overbrace{T_1 - T_0}^{\text{Vale siempre}} = \underbrace{W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}}_{\text{Si } \mathbf{F} \text{ proviene de potencial}} = V_0 - V_1$$

¹El menos delante del gradiente es una convención, como se verá a continuación

y pasando de miembros se tiene

$$(T_1 + V_1) = (T_0 + V_0)$$

que viene a significar que la cantidad $E = T + V$ (la energía mecánica) se conserva si la fuerza \mathbf{F} proviene de un potencial V . Por dicha razón, las fuerzas para las cuales se verifica (1.3) se llaman *fuerzas conservativas*. En una dimensión, cualquier $F(x)$ se puede hacer provenir de un potencial si verifica ser integrable, es decir si podemos definir

$$V(x) = \int F(x) dx.$$

Para tres dimensiones no cualquier $F(\mathbf{x})$ es conservativa.

El signo negativo en (1.3) hace que la cantidad conservada sea $T + V$ en lugar de $T - V$. Tiene más sentido físico que se conserve una suma de energías antes que una resta de las mismas.

1.1.4 Trabajo y energía para un sistema de partículas

Para un sistema de N partículas la energía cinética simplemente es la suma de las energías cinéticas de cada partícula,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

La definición del trabajo, en cambio, es un poco más complicada. Entre dos instantes de tiempo t y $t + \Delta t$ el sistema está caracterizado por las N posiciones $\{\mathbf{x}_i\}$ de todos sus integrantes y cada partícula experimenta un desplazamiento $\Delta \mathbf{x}_i$ asociado con la fuerza que actúa sobre ella.

En principio la fuerza sobre cada partícula puede dividirse en interna (debida a las otras partículas del sistema) y externas (debida a agentes exteriores al sistema), lo cual permite escribir

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

y consecuentemente

$$W = W^{\text{int}} + W^{\text{ext}}$$

El W entre dos instantes de tiempo t_0 y t_1 corresponde ahora a la integral entre la configuración del sistema a t_0 dada por $\{\mathbf{x}_i(t_0)\}$ hasta la configuración $\{\mathbf{x}_i(t_1)\}$, las cuales etiquetaremos como 0 y 1 respectivamente.

Entonces el trabajo externo es

$$W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{x}_i$$

siendo $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ la fuerza externa sobre la partícula i . Para que valga la conservatividad es necesario que

- La fuerza sobre i depende solamente de las coordenadas \mathbf{x}_i de esa partícula. Es decir:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$$

- Se verifique para cada \mathbf{F}_i

$$\nabla \times \mathbf{F}_i = 0,$$

donde el operador ∇ se toma con respecto a las coordenadas de la partícula i en cuestión.

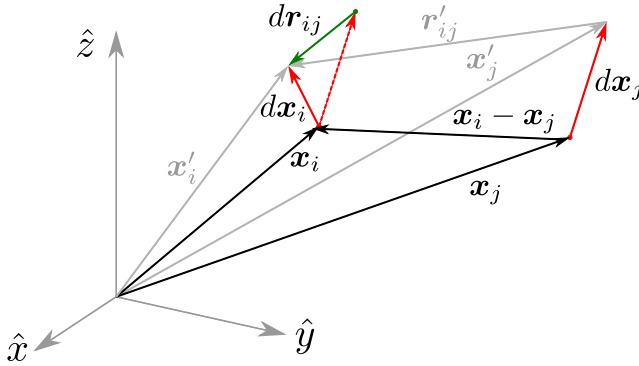


Figura 1.4 Elementos implicados en la evaluación del trabajo interno W^{int} para un sistema de partículas.

Estas condiciones permiten escribir la fuerza como el gradiente de un potencial y entonces el trabajo externo es la suma de las diferencias entre las energías potenciales de las partículas entre las configuraciones 0 y 1, o bien

$$W^{\text{ext}} = - \sum_{i=1}^N \Delta V_i(\mathbf{x}_i)|_0^1$$

El trabajo interno corresponde a la suma sobre cada partícula i de la fuerza ejercida por todas las otras partículas $j \neq i$ del sistema, es decir

$$W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i \quad (1.4)$$

donde \mathbf{F}_{ij} es la fuerza sobre i ejercida por j . La restricción en la sumatoria sobre j descarta la suma de autofuerzas. Es claro que la expresión (1.4) se puede escribir equivalentemente como

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{x}_j)$$

¿nota final con la justificación de que se puede escribir así?

y si ahora aceptamos que vale el principio de acción y reacción

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{x}_i - d\mathbf{x}_j).$$

Definiendo luego un vector de separación relativa $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ se tiene que las integrales son de la forma

$$\int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

y sabemos, por analogía con lo anterior, que si \mathbf{F}_{ij} depende del vector de separación \mathbf{r}_{ij} y es de rotor nulo entonces las fuerzas internas son conservativas. En estos casos

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N (\Delta T_i - \Delta V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta V_{ij}$$

1.2 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo F^v se acomodan en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las \mathbf{F}^v son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

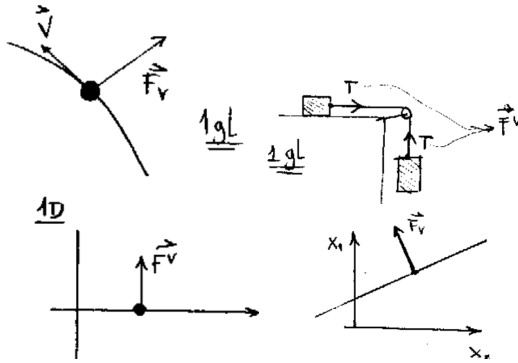


Figura 2.5

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que $W_{virtual}^{F^v} = 0$, y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq \text{cte.} & f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que F^v perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a t_0 fijo compati-

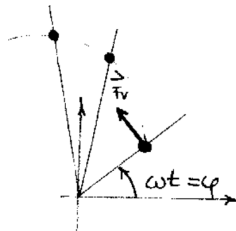


Figura 2.6

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en δt durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en $\hat{r} \perp F^v$.

$$f(x_i, t) = \text{cte.} \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

1.3 Sistemas de coordenadas

1.3.1 Coordenadas polares

La gran ventaja de las coordenadas cartesianas es que los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ no varían con el tiempo, entonces

$$\mathbf{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j}$$

lleva a que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

$$\mathbf{r} = r \hat{r}$$

y la derivada temporal se hace con la regla de Leibniz

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt}$$

y para evaluar la evolución temporal pasamos la expresión a cartesianas según

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r(-\sin \varphi \dot{\varphi} \hat{x} + \cos \varphi \dot{\varphi} \hat{y})$$

que se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} = \dot{\mathbf{r}}$$

y extraemos de conclusión que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

Luego, para la aceleración hay que derivar la velocidad con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\left(\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\hat{\varphi} + \dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt}\right) \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}\end{aligned}$$

1.3.2 Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos\varphi\sin\theta\hat{x} + \sin\varphi\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y} \\ \hat{\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r\hat{r} \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \\ &\quad (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\varphi}\end{aligned}$$

1.3.3 Rotación del sistema de coordenadas

Un vector de acuerdo a dos sistemas de coordenadas en el plano,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \quad \mathbf{A}' = A'_x\hat{x}' + A'_y\hat{y}'$$

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_{\text{inercial}} = \dot{A}'_x\hat{x}' + \dot{A}'_y\hat{y}' + A'_x\dot{\hat{x}}' + A'_y\dot{\hat{y}}'$$

pero como la situación geométrica es la misma que la cuenta de polares, se tiene

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \dot{\theta}\hat{y}' \quad \frac{d\hat{y}'}{dt} = -\dot{\theta}\hat{x}'$$

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_{\text{fijo}} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_{\text{móvil}} + A'_x\dot{\theta}\hat{y}' - A'_y\dot{\theta}\hat{x}'$$

donde

$$\left.\frac{d\mathbf{A}'}{dt}\right|_{\text{móvil}} \equiv \sum_i \frac{dA'_i}{dt} \hat{e}_i'$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} &= \dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}' \\
\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta} \hat{z} \\
\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' &= \dot{\theta} \times (A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}') = A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}' \\
\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{fijo}} &= \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' \\
\mathbf{v}|_{\text{fijo}} &= \mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \\
\mathbf{v}|_{\text{móvil}} &= \dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}' \\
\mathbf{a} &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right] + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \\
\left. \frac{d}{dt} (\dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}') \right|_{\text{móvil}} &= \ddot{x}' \hat{x}' + \ddot{y}' \hat{y}' \equiv \mathbf{a}|_{\text{móvil}} \\
\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|_{\text{móvil}} &= \omega y' \hat{x}' - \omega x' \hat{y}' \\
\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|_{\text{móvil}} &= (\dot{\omega} y' + \omega \dot{y}') \hat{x}' + (\dot{\omega} x' + \omega \dot{x}') \hat{y}' \\
\mathbf{a}|_{\text{fijo}} &= \mathbf{a}|_{\text{móvil}} + \dot{\omega} y' \hat{x}' - \dot{\omega} x' \hat{y}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})
\end{aligned}$$

donde el segundo término del RHS es $\dot{\omega} \times \mathbf{r}$, el tercero la aceleración de Coriolis y el cuarto la aceleración centrípeta. Llamando $\alpha = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ resulta

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}|_{\text{móvil}} + m\alpha \times \mathbf{r} + 4m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

que reacomodado de otra manera es

$$\mathbf{F} - m\alpha \times \mathbf{r} - 4m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = m\mathbf{a}|_{\text{fijo}}$$

y ahora en el LHS tenemos la fuerza \mathbf{F} que es la única que produce par de acción y reacción, y los términos de fuerza lineal, de Coriolis y centrífuga. Si $\omega = cte.$ entonces la fuerza lineal es nula.