

Introducción a la mecánica cuántica relativista

Consideremos una partícula libre por el momento

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla$$

en relatividad la primera expresión no sirve pero la segunda y la tercera sí.

$$P_\mu = i\hbar \partial_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad p_\mu = (E/c, -\mathbf{p}) \quad x^\mu = (ct, \mathbf{x})$$
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \equiv \partial_\mu \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \equiv \partial^\mu$$

y Schrödinger para la partícula libre es

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (1)$$

y entonces podemos hacer la cuenta

$$\psi^* \times (1) \rightarrow i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi$$

y conjugando la ecuación,

$$\psi \times (1)^* \rightarrow -i\hbar \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^*$$

y restando ambas expresiones se obtiene

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi)$$

$$i\hbar \frac{\partial(\psi^* \psi)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{\partial(\psi^* \psi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \right) = 0$$

que es una analogía de la conservación de la carga en electrodinámica. Recordemos que la conservación de la carga era $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Tenemos entonces una especie de conservación de la probabilidad. Note que $\psi^* \psi = |\psi|^2 \geq 0$

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} = H \quad \text{con } H\psi = E\psi$$

Pero esto se pone muy complicado debido a la raíz

1.0.1 La ecuación de Klein-Gordon

Conserva el cuadrado para no complicar demasiado los reemplazos. Entonces

$$H^2 = E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi \quad (2)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad -\partial_\mu \partial^\mu \psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

siendo el operador $\square^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ el dalembertiano.

$$\left(\square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

y procediendo de modo ídem al caso anterior,

$$\psi^* \cdot (2) = -\hbar^2 \psi^* \partial_t^2 \psi = -\hbar^2 c^2 \psi^* \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi^* \psi$$

$$\psi \cdot (2)^* = -\hbar^2 \psi \partial_t^2 \psi^* = -\hbar^2 c^2 \psi \nabla^2 \psi^* + m^2 c^4 \psi \psi^*$$

y restando ambas ecuaciones tenemos

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = \hbar^2 c^2 \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i}{c^2} [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*] \right) + i \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = 0$$

El problema es que no puede asegurarse que esta $\rho \equiv i/c^2 [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*]$ sea definida positiva, lo cual sería necesario para seguir una coherencia.

$$\psi = N e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$$

$$\partial_t \psi = -N \frac{iE}{\hbar} e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$$

$$\rho = \frac{i}{c^2} \left(N^* e^{-i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} (-N) \frac{iE}{\hbar} e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} - N e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} N^* \frac{E}{\hbar} e^{i/h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} e^{i\pi/2} \right)$$

$$\rho = -\frac{i}{c^2} \left(2|N|^2 \frac{iE}{\hbar} \right) < 0 \quad \text{si } E > 0$$

para una onda plana. Necesito considerar $E < 0$ pues $E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ y la base debe ser completa.

La densidad ρ es positiva si tuviese $E < 0$ pero esto causa el problema de tener materia inestable, pues nunca se alcanza el fundamental. Acá muere en este atolladero la ecuación de Klein-Gordon.

1.0.2 La ecuación de Dirac

Dirac parte de pedir una ecuación lineal en el impulso \mathbf{p}

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$$

usando $H\psi = E\psi$ y $H^2 = E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ y con $\beta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}$ operadores.

$$H^2 = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)$$

$$H^2 = c^2 \alpha_i p_i \alpha_\ell p_\ell + c^3 \alpha_i p_i \beta m + \beta mc^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m^2 c^4$$

$$H^2 = c^2 \alpha_i \alpha_\ell p_i p_\ell + c^3 m p_i \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_{=0} + \beta^2 m^2 c^4$$

$$H^2 = c^2 \underbrace{\left(\frac{\alpha_i \alpha_\ell + \alpha_\ell \alpha_i}{2} \right)}_{\delta_{i\ell}} p_i p_\ell + m^2 c^4 \underbrace{\beta^2}_{=1}$$

$$\alpha_i \alpha_\ell + \alpha_\ell \alpha_i = 2\delta_{i\ell} \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \beta^2 = 1$$

Como se ve, estos no pueden ser simples escalares. Dirac pide

- α, β hermíticos
- $\beta^2 = 1$ $\alpha^2 = 1$ autovalores ± 1
- traza nula

$$\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad \rightarrow \quad \beta \alpha_i \beta = -\beta^2 \alpha_i = -\alpha_i$$

$$\text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\beta \beta \alpha_i)$$

- dimensión par

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz es de 2×2 .

Entonces

$$H\vec{\psi} = i\hbar \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}, \quad H \in 4 \times 4, \vec{\psi} \in 4 \times 1, \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_k \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + mc^2 \beta \psi \quad (3)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = i\hbar c \sum_k \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \alpha_k + mc^2 \psi \alpha_k \beta$$

$$\psi^\dagger \cdot (3) - (3)^\dagger \cdot \psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) = -i\hbar c \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi^\dagger \alpha_k \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) + c \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi^\dagger \alpha_k \psi) = 0$$

Y si $\rho \equiv \psi^\dagger \psi$ ahora tenemos una densidad de probabilidad como requiere la naturaleza.

1.0.3 Ejemplo: partícula libre quieta

Sea una partícula libre en reposo,

$$\mathbf{p} = 0 \quad H = \beta mc^2$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones, dos con energía positiva y dos con energía negativa

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = mc^2 \psi_i \quad i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -mc^2 \psi_i$$

$$\psi_1 = e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_3 = e^{imc^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como aún tenemos degeneración de orden dos, necesitaremos un operador que conmute con el H

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad [H, \vec{\Sigma}] = 0$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \psi_1, E = mc^2, \Sigma_3 = 1 & \quad \psi_2, E = mc^2, \Sigma_3 = -1 \\ \psi_3, -E = mc^2, \Sigma_3 = 1 & \quad \psi_4, -E = mc^2, \Sigma_3 = -1 \end{aligned}$$

Podemos identificar

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}$$

$$\text{si } p \neq 0 \Rightarrow [H, \vec{\Sigma}] = 2ic\vec{\alpha} \times \mathbf{p}$$

1.0.4 Energías negativas

Como $E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ hay $E < 0$ y además un *gap* de ancho $2mc^2$ entre ellas. Las $E < 0$ harían que la materia jamás alcance un estado fundamental y por ende jamás se estabilice. Dirac piensa que los estados de $E < 0$ están todos llenos. No decaen más electrones allí dentro. Es el mar de Dirac. Iluminando ese vacío se lo puede excitar.

Podemos hacer saltar a la zona positiva una carga ($-e$) dejando un hueco positivo (equivalente a una carga $+e$). Es una creación de pares $\gamma \rightarrow e^- e^+$, sin embargo el proceso inverso $e^- e^+ \rightarrow \gamma$ de aniquilación de pares ocurre prontamente. Se observó experimentalmente.

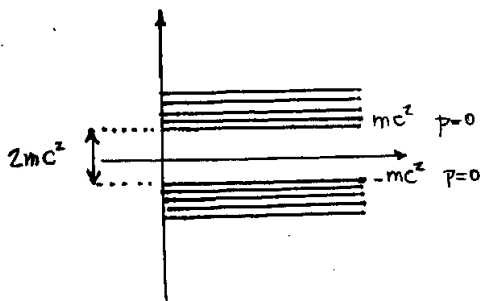


Figura 0.1

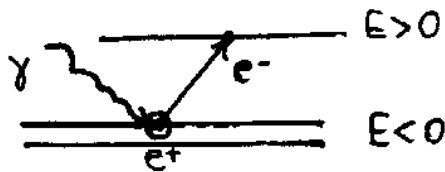


Figura 0.2