

## Mecánica newtoniana

### 1.1 Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

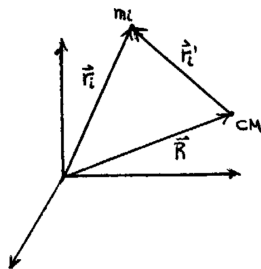


Figura 1.1

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i & \mathbf{v}_i &= \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i \\ \mathbf{L}_O^T &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ \mathbf{L}_O^T &= \sum_i (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)\end{aligned}$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M} \\ M\mathbf{R} &= \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \\ M\mathbf{R} &= M\mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \implies 0 = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i\end{aligned}$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_O^T &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ \mathbf{L}_O^T &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ \mathbf{L}_O^T &= \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}\end{aligned}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservación del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel \mathbf{F}_{ij}.$$

## 1.2 Trabajo y energía

$$T_2 - T_1 = W_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2$$

donde la primera igualdad vale siempre y la segunda se da si se puede escribir la fuerza como el gradiente de un potencial, i.e.

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

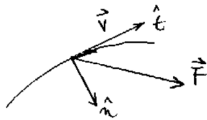


Figura 2.2

y entonces se conserva la energía

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

entonces

$$m \frac{dv}{dt} = F_t \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

y haciendo un cambio de variable a desplazamiento  $s$

$$m dv \frac{ds}{dt} = F_t ds$$

$$m \int v dv = \int F_t ds = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_i^f = W_{i \rightarrow f}$$

siendo este resultado el llamado *teorema de las fuerzas vivas*. Notemos que el versor desplazamiento  $d\mathbf{s}$  camina por la trayectoria.

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

y entonces como el trabajo externo viene de

$$\sum_i^N \int \mathbf{F}_i^{ext} \cdot d\mathbf{s}_i$$

necesito  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i)$  y  $\nabla \times \mathbf{F}_i = 0$ . Para el trabajo interno

$$W_i^{int} = \int \sum_j^N \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$W^{int} = \sum_i \int \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j)$$

### 1.3 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo  $F^v$  se *acomodan* en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las  $\mathbf{F}^v$  son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

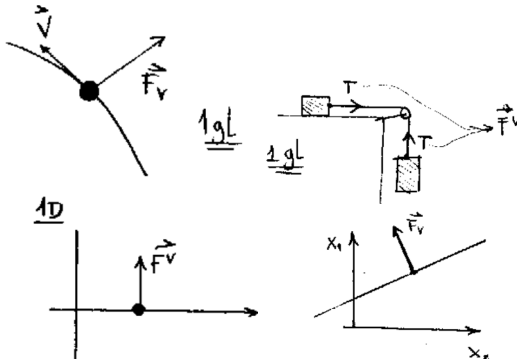


Figura 3.3

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que  $W_{virtual}^{F^v} = 0$ , y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq cte. & f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que  $\mathbf{F}^v$  perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a  $t_0$  fijo compati-

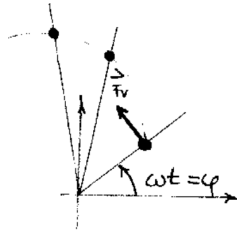


Figura 3.4

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en  $\delta t$  durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en  $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$ .

$$f(x_i, t) = cte. \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$