CBFT Electromagnetismo

Ondas planas

13 de noviembre de 2015

Contenidos

§1. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas en una interfaz

§2. Coeficientes de Fresnel

§3. Ondas en medios dieléctricos

Para el campo eléctrico como onda plana,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E_0}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \tag{3.1}$$

podemos obtener el campo magnético $\mathbf{H}$ a través de la ecuación de Maxwell del rotor de $\mathbf{E}$. Para una expresión como (3.1) se ve que:

Esto es un bosquejo de lo que usamos en la sección siguiente. Esta deducción debe estar entonces.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

y es fácil de integrar esta ecuación para obtener

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

§4. Ondas electromagnéticas en conductores

Habría que hacer un buen gráfico con la onda entrando en el conductor, y la geometría simplificada.

En el seno de un conductor el campo eléctrico dará origen a corrientes de modo que ahora las ecuaciones de Maxwell resultan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = 0 \qquad & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

de manera que aparece un término más como fuente de campo magnético, que son las corrientes $\mathbf{J}$. Estaremos suponiendo que las otras fuentes están lejanas pero hacen campo en el recinto de interés.

Resolveremos este conjunto de ecuaciones para un caso con muchas simplificaciones. Asumiremos medios lineales, isótropos y homogéneos (MLIH), de manera que tendremos

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad ,$$

donde en esta última ecuación σ es la conductividad y es una constante, al igual que también son constantes μ y ε.

Tomaremos primeramente la ecuación del rotor de $\mathbf{E}$, y le aplicamos el rotor nuevamente obteniendo

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times E) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right),$$

la cual se puede trabajar con una identidad del miembro izquierdo y conmutando la operación rotor con la derivada parcial,

$$\nabla(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\right]$$

y ahora podemos introducir la expresión que tenemos para el rotor de $\mathbf{H}$ y usar que la divergencia de $\mathbf{E}$ es nula de manera que

$$-\nabla^2\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]$$

y entonces

$$-\nabla^2\mathbf{E} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.1}$$

Este proceso podría hacerse también para el campo $\mathbf{B}$ y llegaríamos a una ecuación equivalente. El campo eléctrico verifica una ecuación de onda tridimensional con un término disipativo (es el de la derivada ∂_t).

Plantearemos como solución de esta ecuación una onda plana general,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E_0}\ \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

notando que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{E} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\mathbf{E}$$

la ecuación (4.6) se reduce a:

$$\nabla^2\mathbf{E} + i\mu\sigma\omega\mathbf{E} + \mu\varepsilon\omega^2\mathbf{E} = 0.$$

o bien, agrupando de manera conveniente

$$\nabla^2\mathbf{E} + \mu\varepsilon\omega^2\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\mathbf{E} = 0.$$

La conveniencia de esta forma de agrupar reside en que así es posible examinar varios casos límites interesantes.

Podemos tomar ahora el laplaciano a la onda $\mathbf{E}$, el cual se puede ver que resulta k^2, donde k es el módulo de $\mathbf{k}$.

Laplaciano en notación indicial: Podemos hacer la cuenta $\nabla^2\mathbf{E}$ de manera rápida usando la notación indicial, para el caso de una onda plana. Así escribiríamos

$$\nabla^2\mathbf{E} = \nabla^2(\mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}),$$

que en indicial pasa a ser

$$\partial_j\partial_j(E_l^0\, e^{i(k_m x_m-\omega t)}),$$

donde estamos usando convención de suma de Einstein y hemos pasado el subíndice cero a supraíndice por razones de claridad. El carácter vectorial reside en el coeficiente $\mathbf{E}_0$ que es constante. El laplaciano de un vector es un vector y estamos viendo el componente l-ésimo. Introduciéndo la primer derivada en el argumento,

$$E_l^0\partial_j(e^{i(k_m x_m-\omega t)}\, ik_m\partial_j x_m)$$

y usando que $\partial_j x_m = \delta_{jm}$

$$E_l^0\partial_j(e^{i(k_m x_m-\omega t)}\, ik_j) = iE_l^0 k_j\partial_j(e^{i(k_m x_m-\omega t)}) = i^2 E_l^0 k_j^2 e^{i(k_m x_m-\omega t)}$$

de manera que volviendo a la notación vectorial tenemos

$$\nabla^2\mathbf{E} = -\mathbf{E}_0|\mathbf{k}|^2\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}) = -k^2\mathbf{E}.$$

Es decir que tenemos

$$-k^2\mathbf{E} + \mu\varepsilon\omega^2\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\mathbf{E} = \left[-k^2 + \mu\varepsilon\omega^2\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\right]\mathbf{E} = 0$$

lo que significa finalmente que

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2}\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en donde se ha indicado expresamente el módulo de $\mathbf{k}$ encerrando el vector entre las barras. Hay varias observaciones importantes para hacer: el módulo de $\mathbf{k}$ es un complejo. El módulo, que refiere al tamaño de la *flecha* que representa al vector resulta ser un número complejo. ¿Qué representa esto?

Referencias