Capítulo 1

Gas de Fermi

DIBUJOS

$$\langle n_e \rangle = \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e} + 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\mu - e)} + 1}$$

Si $\mu < 0$ como $e > 0$ siempre, ni aún en el estado de más baja energía se llega a ocupar el nivel (restan muchos niveles vacíos).

Sea que $T \to \infty$ entonces $\beta \to \infty$ y se sigue que

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to \infty e > \mu$$

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to 0 e < \mu$$

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to 1 e = \mu$$

Luego, con $T = 0$ es Fermi un escalón. El valor de μ que determina el último estado ocupado se llama e_F

DIBUJO

$$f_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v} = \int_0^{\xi=\beta\mu} \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)3/2} dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta\mu)^{3/2} = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta e_F)^{3/2}$$

1.1 Análisis del gas ideal de Fermi

La primera aproximación consiste en

- Caso no degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ que lleva a T alta y v alto por ende N/V chico.

$$z \ll 1 \qquad f_\nu(z) \approx z \qquad \frac{\lambda^3}{v} \approx z$$

Si vale la condición entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \ll 1 \qquad z \ll 1$$

$$\beta p V \approx 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \qquad U = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta}\left(1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}}\right)$$

- $\frac{\lambda^3}{v} < 1$ entonces $z < 1$ y hay que expandir el virial,

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

que igualando coeficientes se hace (¿?)

λ^3/v a orden 1 hay efectos cuánticos

$$f_{5/2}(z) = f_{3/2}(z) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

- $\frac{\lambda^3}{v} \approx 1$ Cálculo numérico
- Caso altamente degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$ se tiene $z \gg 1$ Se puede expandir $f_\nu(z)$ en función de $(\log)^{-1}$ mediante lema de Sommerfeld

$z \ggg 1$ **entonces** $\log z \gg 1$ $(\log z)^{-1} \ll 1$ $\log z = \beta\mu$

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\pi^{1/2}} (\log z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

y entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \qquad \text{a orden } 0$$

$$\frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{N}{V} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (kT)^{3/2} = \mu^{3/2}$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = \mu^{3/2} = e_F^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (kT)^{3/2} = \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = e_F^{3/2} \approx \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]$$

$$e_F \approx \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\frac{\mu}{kT})^{-2} \right]^{2/3} \approx \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Anoté *investigar este pasaje.*

$$e_F \approx \mu \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (\frac{kT}{e_F})^2 \right]$$

y consideramos

$$\frac{1}{\mu^2} \approx \frac{1}{e_F^2}$$

pués μ es muy grande.

$$\beta p v = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{2\beta\mu}{5} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Hasta orden dos en T resulta

$$pv \approx \frac{2\mu}{5} \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] = \frac{2e_F}{5} \left[1 - \frac{\pi}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$pv \approx \frac{2e_F}{5} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$U = \frac{3}{2} pv \approx \frac{3}{5} N e_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \approx \frac{N\pi^2 k^2 T}{2e_F} \qquad C_V \propto T$$

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{2} N k \left(\frac{T}{T_F} \right)$$

DIBUJO T_F siempre estará ene general en la zona clásica donde no vale la aproximación degenerada.

Calor específico Fermi (¿?)

- Caso totalmente degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \to \infty \qquad (T \to 0) \qquad z \to \infty$

  La distribución de estados es escalón,

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{1}{z^{-1}\, \mathrm{e}^{\beta p^2/2m} + 1} \right) dp$$

$z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$ **y**
$z(T \to 0) = \mathrm{e}^{\beta e_F} \to \infty$

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$$

Teniendo el límite sale la cuenta

Notemos que

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 kT \log(1 + \mathrm{e}^{-1/kT(p^2/2m - \mu_0)}) dp$$

tiene un comportamiento no trivial con $T \to 0$. Si $kT \to 0$ entonces si $e > \mu_0$ el log $\to 0$ y si $e < \mu_0$ el log $\to \infty$. Parecería que con $T \to 0$ es

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{p^2}{2m} - \mu_0 \right) dp$$

y haciendo el cambio de variables de acuerdo a $p^2/2m = e$, que lleva a $pdp = mde$, se tiene

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{e_F} \sqrt{2e} m^{3/2} (e - \mu_0) de$$

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} \left(\frac{e_F^{5/2}}{5/2} - \mu_0 \frac{e_F^{5/2}}{3/2} \right) = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{4}{15}$$

$$U = \frac{3}{2} pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{2}{5}$$

$$p = \frac{2}{5} e_F \frac{\langle N \rangle}{V} \qquad U = \frac{3}{5} e_F \langle N \rangle$$

A $T = 0$ tenemos presión y energía no nulas; las partículas no se acomodan todas en un único nivel energético (exclusión de Pauli). Para $T \approx 0$ (T bajas) el escalón en estados apenas se desdibuja

DIBUJO.

1.2 Cuánticos III –reubicar–

1.2.1 Los números de ocupación

DIBUJO

Se ve que para Bose $\mu < 0$ siempre pero $\langle n \rangle \to \infty$ si $\mu \to 0^+$. El gráfico es para T alta. Con T bajas todo tiende a suceder más pegado al eje $\beta(e - \mu) = 0$

1.2.2 Comportamiento de $f_{3/2}(z)$

$$f_{3/2}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j^{3/2}} \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \qquad z \text{ chico}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} dx \approx \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx$$

Notemos que con $\beta\mu$ grande el integrando es 1 o 0 (DIBUJO); en realidad es un escalón en el límite en que $\xi \equiv \beta\mu \to \infty$

Definimos $\log z \equiv \xi$ **para no especular con temperaturas.**

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \; z \text{ muy alto}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + ... \right]$$

El valor λ^3/v determina relación entre T, V, N que son los parámetros macroscópicos que uno fija.

1.2.3 Casos

- Comportamiento clásico: $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ Altas T y bajas $n \equiv \frac{N}{V}$

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

y por inversión de la serie

$$z = \frac{\lambda^3}{v} + \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 2^{-3/2}$$

Sabemos que en Boltzmann es $\frac{\lambda^3}{v} = z$

y entonces si $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ se tiene que $z \ll 1$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{v}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \qquad\qquad \frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{z - z^2/2^{5/2}}{z - z^2/2^{3/2}} \approx 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)$$

siendo el último término una corrección cuántica.

- Comportamiento cuántico : $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$ Bajas T y altas $n \equiv \frac{N}{V}$

  A $T=0$ determinamos la e_F como (con el límite de $T \to 0$)

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2}$$

$$\left(\frac{3\lambda^3\sqrt{\pi}}{4v}\right)^{2/3} = \left(\frac{3h^3\sqrt{\pi}}{4(2\pi mkT)^{3/2} v}\right)^{2/3} = \log z = \beta e_F$$

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4\pi v}\right)^{2/3} = e_F = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{2/3}$$

  A $T=0$ la ocupación por nivel es un escalón ($e_F = \mu(T=0)$)

$$\langle n_e \rangle = \begin{cases} 1 & e < e_F \\ 0 & e > e_F \end{cases}$$

1.2.4 Funciones termodinámicas con T baja y n alta

Usamos Sommerfeld

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \qquad\qquad \mu = e_F$$

orden 1

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]^{-1} \approx (\log z)^{3/2}$$

$$e_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right) \approx \mu(T) \text{ cumple } \mu(T=0) = e_F$$

Puede verse que con $\frac{\lambda^3}{v} \ggg 1$ (T baja y n alta) es

$$C_V \approx \frac{N\pi^2 k^2 T}{2e_F}$$

DIBUJO

Aún a $T=0$ hay presión no nula pero $S \to 0$ con $T \to 0$ respetando la tercera ley. Existe una relación de recurrencia

$$z\frac{\partial}{\partial z} f_\nu(z) = z\frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{l z^{l-1} z}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^{\nu-1}} = f_{\nu-1}(z)$$

$$f_\nu(z) = \int \frac{1}{z} f_{\nu-1}(z) dz$$

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{5/2}$$

entonces

$$f_{5/2}(z) = \int dz \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(\log z)^{3/2}}{z} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int dz \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial z} (\log z)^{5/2} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\log z)^{5/2}$$

Usamos $d(\log z)^n = n(\log z)^{n-1}/z$

¿Y estas cuentas sueltas?

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{(\hbar\pi)^2}{2ma^2} r^2 \qquad dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{ma^2} r dr$$

$$N(r)dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$$

será lo mismo que el incremento en niveles energéticos

$$N(e)de = \frac{m^2 a^3}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{E}{2}\right)^{1/2} dE$$

Pensamos un conjunto de nucleones como un gas de Fermi. Claramente

Recordemos que a $T = 0$ era $pV = 2/5 N e_F$ **y** $U = 3/5 N e_F$

$$N = 2 \int_0^{e_F} N(e)\, de$$

porque tenemos la ocupación en función de la energía

$$e_F \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \text{ según la definición de } e_F$$

Para un núcleo se tienen N=A-Z nucleones, siendo Z protones y A nucleones.

$$E = \frac{3}{5} N_T e_F (\text{ a } T = 0)$$

$$E = \frac{3}{5} \left[Z \left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3} + (A - Z) \left(\frac{A - Z}{V}\right)^{2/3} \right] = \frac{3}{5} \left(\frac{Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$

$V \propto A$

donde hemos supuesto ambos pozos iguales. Si los pozos no fueran iguales cambia la e_F.

Se minimiza E con $Z = A/2$ (simetría)

$$f_4 \propto E - E_0 = \frac{3}{5A^{2/3}} \left[Z^{5/3} + (A-Z)^{5/3} - 2(A/2)^{5/3} \right]$$

que se puede reescribir como

$$f_4 \propto \frac{(A/2 - Z)^2}{A} \text{ término de simetría}$$