Capítulo 1

Método de separación de variables

1.1 Separación de variables

Separamos los problemas en regiones donde vale $\nabla^2\phi = 0$ entonces las fronteras tendrán la $\rho(\mathbf{x}')$ en general en forma de σ, λ.

Para coordenadas cartesianas intentaremos resolver $\nabla^2\phi = 0$, es decir

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

pidiendo

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

de manera que

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

cada término es una constante. La solución general es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \mathrm{e}^{\pm i\alpha_m x} \mathrm{e}^{\pm i\beta_n y} \mathrm{e}^{\pm i\sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2} z}$$

donde habrá que adaptar según las condiciones de contorno. Se da que $A_{m,n}$ es una constante general y hay condiciones periódicas en x, y

$$A\mathrm{e}^{\pm i\alpha x} = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \sin(\alpha x)$$

corresponde a condiciones de potencial periódicas, cuando necesito dos ceros por ejemplo (ver ilustración lateral –que falta–)

$$Ae^{\pm\gamma z} = A_\gamma \cosh(\gamma z) + B_\gamma \sinh(\gamma z)$$

corresponde a atravesar densidades de carga.

Para coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

proponiéndose la separación

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)Q(\varphi)$$

siendo

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)Q(\varphi)$$

un armónico esférico. Tenemos un oscilador armónico en φ,

$$Q = e^{\pm i\alpha\varphi}$$

si usamos $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ de modo que $\alpha \in \mathbb{Z}$ y entonces $\alpha = m$, con simetría azimutal es $m = 0$ (rotación en φ),

$$Q = G\varphi + H \qquad\qquad G, H \quad ctes.$$

Para las otras funciones será

$$R(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell R^{-\ell-1}$$

$$\Theta(\theta) = C_\ell P_\ell^m(\cos(\theta)) + D_\ell Q_\ell^m(\cos(\theta))$$

siendo P_ℓ^m polinomio de Legendre, que verifica la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}[x^2-1]^\ell$$

con $P_\ell(\cos(\theta))$ polinomio de Legendre de primera especie, y $Q_\ell(\cos(\theta))$ de segunda especie. Los $\{P_\ell\}$ son un conjunto completo y ortogonal en $-1 \leq x \leq 1$ o bien en $0 \leq \theta \leq \pi$.

Los $\{Q_\ell^m(\cos(\theta))\}$ tienen problemas en $\theta = 0, \theta = \pi$ (eje z) de manera que si está el eje z no podemos usar Q_ℓ^m; en estos problemas sólo podemos usar $P_\ell^m(\cos(\theta))$.

$$\phi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}\right]\left[C_\ell P_\ell^m + D_\ell Q_\ell^m\right]\left[E_m\cos(m\phi) + F_m\sin(m\phi)\right]$$

y en el caso particular $m = 0$

$$\phi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}\right]\left[C_\ell P_\ell^m + D_\ell Q_\ell^m\right]\left[G_0\phi + H_0\right]$$

Las constantes $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell, E_m, F_m$ se ajustan con el $\phi(r\to\infty)$, $\phi(r\to 0)$, $\phi(z=1)$ y $\phi(z=-1)$.

Lo que permite esquivar el problema del punto singular en $x \equiv \cos(\theta) = 1$ es

$$\beta^2 = \ell(\ell+1) \qquad -\ell < m < \ell \qquad \alpha^2 = m^2$$

Recordemos las sumas de series

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell z^\ell \qquad |z| < 1,$$

el polinomio asociado de Legendre

$$P_\ell^m(x) =)\frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}[1-x^2]^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}[x^2-1]^\ell$$

que cumple

$$P_\ell(1) = 1 \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \qquad \forall \ell$$

con

$$\int_{-1}^{1}[P_\ell(x)]^2\,dx = \frac{2}{2\ell+1}$$

siendo la ortogonalidad

$$\int_0^\pi P_{\ell'}^m(\cos(\theta))P_\ell^m(\cos(\theta))\sin(\theta)\,d\theta = \delta_{\ell\ell'}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^m(x)P_\ell^m(x)\,dx = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,\delta_{\ell\ell'}$$

En esféricas las constantes de separación están asociadas

$$R(r) \text{ con } \ell \qquad \Theta(\theta) \text{ con } \ell, m \qquad Q(\phi) \text{ con } m$$

1.2 Detalles sobre solución de problemas de potencial

1.3 Expansiones ortonormales

1.3.1 Armónicos esféricos

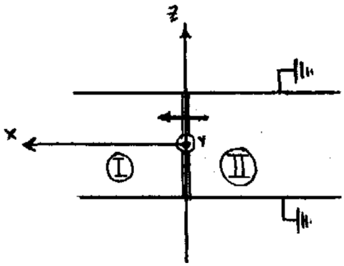

Figura 2.1

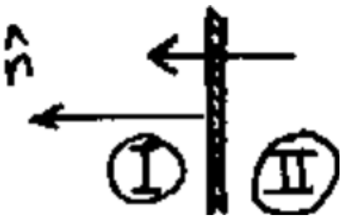

Figura 2.2

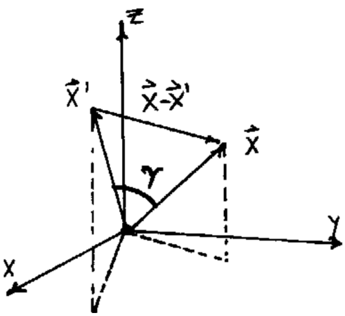

Figura 3.3

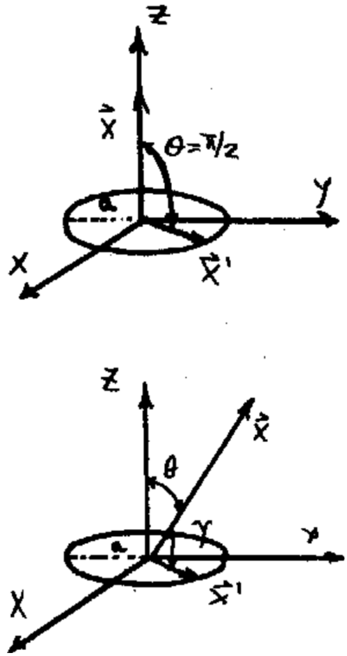

Figura 3.4

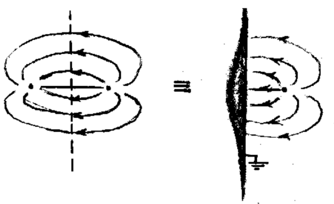

Figura 3.5

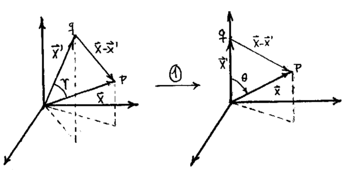

Figura 3.6

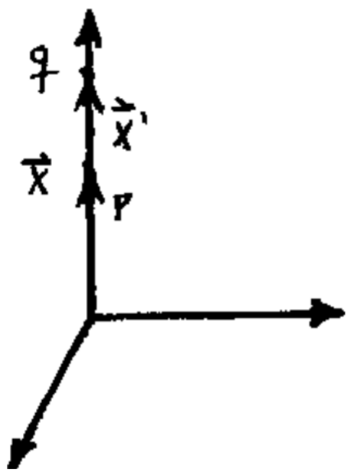

Figura 3.7