

Capítulo 1

Mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo es el corazón de la mecánica clásica.

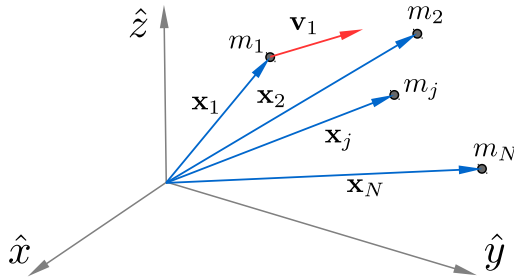


Figura 0.1 Sistema de partículas de masas m_i con sus correspondientes vectores de posición \mathbf{x}_i . La partícula m_1 tiene además indicado su vector velocidad \mathbf{v}_1 .

1.1 Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

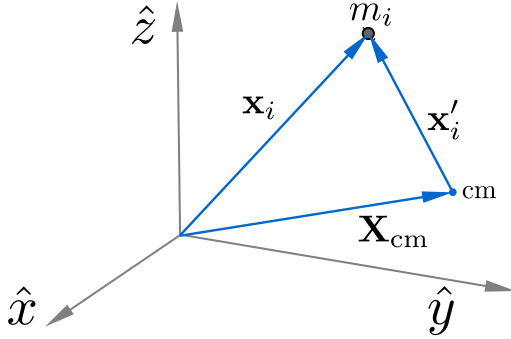


Figura 1.2

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i & \mathbf{v}_i &= \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i \\ \mathbf{L}_O^T &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ \mathbf{L}_O^T &= \sum_i (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \end{aligned}$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M} \\ M \mathbf{R} &= \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \\ M \mathbf{R} &= M \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \implies 0 = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O^T &= \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ \mathbf{L}_O^T &= \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ \mathbf{L}_O^T &= \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist} \end{aligned}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservación del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel \mathbf{F}_{ij}.$$

1.2 Trabajo y energía

Consideremos una partícula de masa m que se mueve sobre una cierta trayectoria suave $\mathbf{x}(t)$, ver Figura 2.3, debido a la acción de una fuerza \mathbf{F} . Su velocidad \mathbf{v} es en todo momento tangente a la trayectoria y define de esta forma un versor $\hat{\mathbf{t}}$ colineal con la misma. Esto define un plano, mostrado en la parte derecha de la figura, para el cual todo vector perteneciente al mismo es normal a la trayectoria. Elegimos un versor $\hat{\mathbf{n}}$ que está en la dirección de la proyección de \mathbf{F} sobre dicho plano.

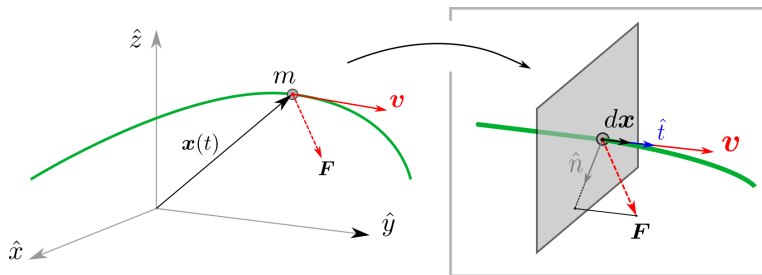


Figura 2.3 Partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria $\mathbf{x}(t)$ bajo la acción de una fuerza \mathbf{F} (izquierda). En el detalle de la derecha se muestra la descomposición del movimiento en direcciones tangencial $\hat{\mathbf{t}}$ y normal $\hat{\mathbf{n}}$.

Descomponiendo la fuerza y la velocidad en estas dos direcciones, se tiene

$$\mathbf{F} = F^t \hat{\mathbf{t}} + F^n \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{t}}$$

de manera que la segunda ley de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

para la componente \hat{t} resulta

$$m \frac{dv}{dt} = F^t$$

Involucrando al diferencial de arco $ds = |d\mathbf{x}|$ a lo largo de la trayectoria, la ecuación anterior se puede escribir como

$$m \, dv \, \frac{ds}{dt} = m \, v \, dv = F^t \, ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

donde la última igualdad es posible en virtud de que $F^n \perp d\mathbf{x}$ por construcción.

Podemos integrar ambos miembros de (2.1) entre $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$ y su correspondiente velocidad $v(t_0) \equiv v_0$ hasta \mathbf{x}_1, v_1 ,

$$m \int_{v_0}^{v_1} v \, dv = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

obteniendo

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_0}^{v_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}$$

que es el llamado *teorema de las fuerzas vivas* para una partícula de masa m y nos dice que la variación de energía cinética en la trayectoria es igual al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la misma, i.e.

$$T_1 - T_0 = \Delta T_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1} = W_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1}. \quad (2.2)$$

En el caso particular en que la fuerza sea normal a la trayectoria en todo el intervalo $[t_0, t_1]$ se tendrá $\Delta T = 0$, es decir que se conserva la energía cinética a lo largo de toda la trayectoria. Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo y esto es solamente debido a que este proviene de un producto escalar (una proyección); las componentes normales no hacen trabajo.

Si la fuerza proviene de un potencial¹, se tiene

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (2.3)$$

y podemos expresar en coordenadas cartesianas esta equivalencia (2.3)

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)$$

y evaluar la integral del trabajo para obtener

$$W = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}[t]) \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] dt = V_0 - V_1$$

Notemos que el versor desplazamiento ds camina por la trayectoria.

Falta meter lo de

$$m \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

¹El menos delante del gradiente es una convención, como se verá a continuación

donde la última igualdad se obtiene por integración de un gradiente. Esto significa que la integral es independiente de la trayectoria $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$.

Entonces, volviendo a (2.2)

$$\overbrace{T_1 - T_0}^{\text{Vale siempre}} = \underbrace{W_{0 \rightarrow 1}}_{\text{Si } \mathbf{F} \text{ proviene de potencial}} = V_0 - V_1$$

y pasando de miembros se tiene

$$(T_1 + V_1) = (T_0 + V_0)$$

que viene a significar que la cantidad $E = T + V$ (la energía mecánica) se conserva si la fuerza \mathbf{F} proviene de un potencial V . Por dicha razón, las fuerzas para las cuales se verifica (2.3) se llaman *fuerzas conservativas*. En una dimensión, cualquier $F(x)$ se puede hacer provenir de un potencial si verifica ser integrable, es decir si podemos definir

$$V(x) = \int F(x) dx.$$

Para tres dimensiones no cualquier $F(\mathbf{x})$ es conservativa.

El signo negativo en (2.3) hace que la cantidad conservada sea $T + V$ en lugar de $T - V$. Tiene más sentido físico que se conserve una suma de energías antes que una resta de las mismas.

1.2.1 Trabajo y energía para un sistema de partículas

Para un sistema de N partículas la energía cinética simplemente es la suma de las energías cinéticas de cada partícula,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

La definición del trabajo, en cambio, es un poco más complicada. Entre dos instantes de tiempo t y $t + \Delta t$ el sistema está caracterizado por las N posiciones $\{\mathbf{x}_i\}$ de todos sus integrantes y cada partícula experimenta un desplazamiento $\Delta \mathbf{x}_i$ asociado con la fuerza que actúa sobre ella.

En principio la fuerza sobre cada partícula puede dividirse en interna (debida a las otras partículas del sistema) y externas (debida a agentes exteriores al sistema), lo cual permite escribir

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

y consecuentemente

$$W = W^{\text{int}} + W^{\text{ext}}$$

El W entre dos instantes de tiempo t_0 y t_1 corresponde ahora a la integral entre la configuración del sistema a t_0 dada por $\{\mathbf{x}_i(t_0)\}$ hasta la configuración $\{\mathbf{x}_i(t_1)\}$, las cuales etiquetaremos como 0 y 1 respectivamente.

Entonces el trabajo externo es

$$W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{x}_i$$

siendo $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ la fuerza externa sobre la partícula i . Para que valga la conservatividad es necesario que

- La fuerza sobre i depende solamente de las coordenadas \mathbf{x}_i de esa partícula. Es decir:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i)$$

- Se verifique para cada \mathbf{F}_i

$$\nabla \times \mathbf{F}_i = 0,$$

donde el operador ∇ se toma con respecto a las coordenadas de la partícula i en cuestión.

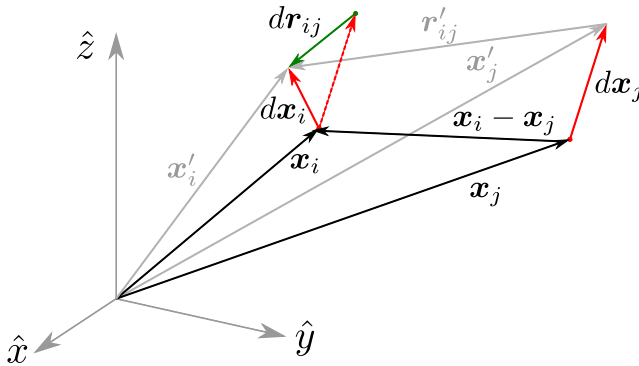


Figura 2.4 Elementos implicados en la evaluación del trabajo interno W^{int} para un sistema de partículas.

Estas condiciones permiten escribir la fuerza como el gradiente de un potencial y entonces el trabajo externo es la suma de las diferencias entre las energías

potenciales de las partículas entre las configuraciones 0 y 1, o bien

$$W^{\text{ext}} = - \sum_{i=1}^N \Delta V_i(\mathbf{x}_i)|_0^1$$

El trabajo interno corresponde a la suma sobre cada partícula i de la fuerza ejercida por todas las otras partículas $j \neq i$ del sistema, es decir

$$W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i \quad (2.4)$$

donde \mathbf{F}_{ij} es la fuerza sobre i ejercida por j . La restricción en la sumatoria sobre j descarta la suma de autofuerzas. Es claro que la expresión (2.4) se puede escribir equivalentemente como

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{x}_j)$$

¿nota final con la justificación de que se puede escribir así?

y si ahora aceptamos que vale el principio de acción y reacción

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^1 \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{x}_i - d\mathbf{x}_j).$$

Definiendo luego un vector de separación relativa $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ se tiene que las integrales son de la forma

$$\int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

y sabemos, por analogía con lo anterior, que si \mathbf{F}_{ij} depende del vector de separación \mathbf{r}_{ij} y es de rotor nulo entonces las fuerzas internas son conservativas. En estos casos

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N (\Delta T_i - \Delta V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta V_{ij}$$

1.3 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo F^v se *acomodan* en todo

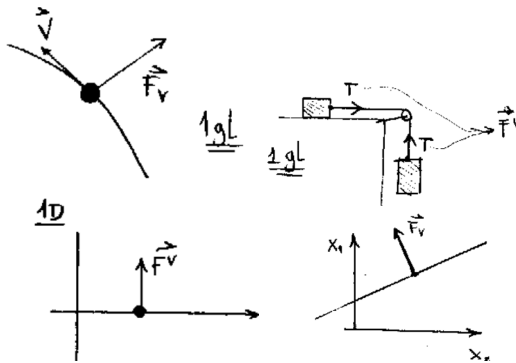


Figura 3.5

momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las \mathbf{F}^v son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que $W_{virtual}^{F^v} = 0$, y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{ll} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq cte. & f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que \mathbf{F}^v perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a t_0 fijo compatible con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en δt durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$.

$$f(x_i, t) = cte. \Rightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

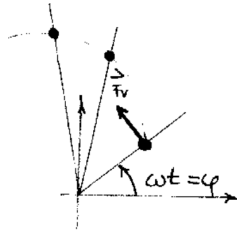


Figura 3.6

1.4 Sistemas de coordenadas

1.4.1 Coordenadas polares

La gran ventaja de las coordenadas cartesianas es que los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ no varían con el tiempo, entonces

$$\mathbf{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j}$$

lleva a que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

$$\mathbf{r} = r\hat{r}$$

y la derivada temporal se hace con la regla de Leibniz

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

y para evaluar la evolución temporal pasamos la expresión a cartesianas según

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r(-\sin \varphi \dot{\varphi} \hat{x} + \cos \varphi \dot{\varphi} \hat{y})$$

que se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} = \dot{\mathbf{r}}$$

y extraemos de conclusión que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

Luego, para la aceleración hay que derivar la velocidad con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\left(\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\hat{\varphi} + \dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt}\right) \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}\end{aligned}$$

1.4.2 Coordenadas esféricas

$$\hat{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

$$\mathbf{r} = r \hat{r}$$

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\theta} \hat{\theta} + r\dot{\varphi} \sin \theta \hat{\varphi}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + \\ &\quad (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\varphi}\end{aligned}$$

1.4.3 Rotación del sistema de coordenadas

Un vector de acuerdo a dos sistemas de coordenadas en el plano,

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} \quad \mathbf{A}' = A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}'$$

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + A'_x \dot{\hat{x}}' + A'_y \dot{\hat{y}}'$$

pero como la situación geométrica es la misma que la cuenta de polares, se tiene

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \dot{\theta} \hat{y}' \quad \frac{d\hat{y}'}{dt} = -\dot{\theta} \hat{x}'$$

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}'$$

donde

$$\left. \frac{d\mathbf{A}'}{dt} \right|_{\text{móvil}} \equiv \sum_i \frac{dA'_i}{dt} \hat{e}_i'$$

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}'$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{z}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}' = \dot{\theta} \times (A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}') = A'_x \dot{\theta} \hat{y}' - A'_y \dot{\theta} \hat{x}'$$

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}'$$

$$\mathbf{v}|_{\text{fijo}} = \mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v}|_{\text{móvil}} = \dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}'$$

$$\mathbf{a} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{fijo}} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right] + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}|_{\text{móvil}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$

$$\left. \frac{d}{dt} (\dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}') \right|_{\text{móvil}} = \ddot{x}' \hat{x}' + \ddot{y}' \hat{y}' \equiv \mathbf{a}|_{\text{móvil}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|_{\text{móvil}} = \omega y' \hat{x}' - \omega x' \hat{y}'$$

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|_{\text{móvil}} = (\dot{\omega} y' + \omega \dot{y}') \hat{x}' + (\dot{\omega} x' + \omega \dot{x}') \hat{y}'$$

$$\mathbf{a}|_{\text{fijo}} = \mathbf{a}|_{\text{móvil}} + \dot{\omega} y' \hat{x}' - \dot{\omega} x' \hat{y}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

donde el segundo término del RHS es $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$, el tercero la aceleración de Coriolis y el cuarto la aceleración centrípeta. Llamando $\alpha = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ resulta

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \mathbf{a}|_{\text{móvil}} + m\alpha \times \mathbf{r} + 4m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

que reacomodado de otra manera es

$$\mathbf{F} - m\alpha \times \mathbf{r} - 4m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = m \mathbf{a}|_{\text{fijo}}$$

y ahora en el LHS tenemos la fuerza \mathbf{F} que es la única que produce par de acción y reacción, y los términos de fuerza lineal, de Coriolis y centrífuga. Si $\omega = cte.$ entonces la fuerza lineal es nula.