CBFT Mecánica clásica

Simetrías

13 de noviembre 2015

Contenidos

§1. Constantes de movimiento y simetrías

Sean
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$
si
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$
entonces
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$
y se ve que
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_i = cte.$$

Si δq_i es traslación rígida entonces $p_i = \mathbf{P}\cdot\hat{n}$ y $Q_j = \mathbf{F}\cdot\hat{n}$ en cambio si es rotación rígida se tiene $p_i = \mathbf{L}\cdot\hat{n}$ y $Q_j = \mathbf{T}\cdot\hat{n}$. De tal forma vale que

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

pués T es escalar y no cambia ante una rotación y $T = T(\dot{q})$ no depende explícitamente de las coordenadas (no depende del origen decía ¿?). Luego $T = T_2$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Como $V \neq V(\dot{q})$ entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_j\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

es la fuerza total proyectada en $\hat{n}$.

§2. El teorema de Noether

Si existe una transformación continua $q_i \longrightarrow q_i + \delta q_i$ que deje invariante el $\mathcal{L}$ entonces hay una constante de movimiento asociada a dicha transformación.

La transformación es

$$q_i \longrightarrow q_i' = q_i + \delta q_i$$

y cumple

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_i', \dot{q}_i', t) = \mathcal{L}(q_i[q_i', t], \dot{q}_i[\dot{q}_i', t], t)$$

y así si consideramos una variación a t fijo,

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = 0$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0$$

pero como el primer término del RHS es nulo por las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0,$$

lo que está dentro del paréntesis es la cantidad conservada. Recordemos que

$$\delta q_i = q_i' - q_i$$

y una traslación infinitesimal es

$$\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}.$$

La variable cíclica es un caso particular de teorema de Noether, pero hay constantes de movimiento que no provienen de ninguna simetría.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\delta\alpha \hat{n} \times \mathbf{r}_i)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\alpha \sum_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i\right) = \delta\alpha \frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i\right) = 0$$

siendo $\delta\alpha \equiv \epsilon$ un parámetro infinitesimal. Para k grados de libertad

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i + \underbrace{\epsilon_i g_i(q_1, ..., q_n, t)}_{\delta q} \\ &... \\ q_k' &= ... \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r} \quad \text{traslación rígida}$$

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \delta\alpha\, \hat{n} \times \mathbf{r}_i \quad \text{rotación rígida}$$

o también

$$\delta \mathbf{r} \times \mathbf{r}$$

T es invariante siempre frente a (por ser un escalar)

$$T = T'$$

entonces habrá que examinarlo. Constatemos que

$$V = V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

es invariancia ante una traslación rígida, y

$$V = V(x_1, x_2)$$

es una invariancia de traslación en x_3.

$\mathcal{L}$ tendrá como constante un momento lineal si V es invariante frente a traslación. $\mathcal{L}$ tendrá como constante un momento angular si V es invariante frente a rotación. $\mathcal{L}$ tendrá como constante una combinación si V es invariante frente a una roto-traslación.

Otra construcción posible es

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i', \dot{q}_i', t) = 0$$

pidiendo que $d\mathcal{L} = 0$ llego a

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q'}_i}\delta q' \right) \right\} = 0$$

Las primas están mal. Hay que pensar una construcción adecuada. Queda odd.

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q'}_i}\delta q \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q'}_i}\sum_\ell^s \epsilon_\ell g_i^\ell \right) \right\} = 0$$

y podemos usar que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q'}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

pues $g \neq g(t)$ y es todo a tiempo fijo. Se tiene

$$q' = q + \delta q$$

$$q_i' = q_i + \sum_\ell^s \epsilon_\ell g_i^\ell$$

siendo esta la transformación general

$$\delta q_i' = \delta q_i + \sum_\ell^s \epsilon_\ell g_i^\ell$$

Extraemos también que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q'}_i}\sum_\ell^s \epsilon_\ell g_i^\ell = C$$

Se puede pensar también como que $\mathcal{L}$ es invariante ante la transformación infinitesimal δq

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$$

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \sum_i^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i + \sum_i^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0$$

siendo el primer término nulo, y siendo lo que se conserva lo que aparece en el segundo término, donde

$$\delta q_i = \sum_\ell^s \epsilon_\ell g_i^\ell(q_1, q_2, ..., q_n)$$

Finalmente

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

Referencias