Capítulo 1

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

$$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i \qquad p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i$$

Pasamos a unas nuevas coordenadas y momentos (β_i, α_i) que son constantes. Entonces la acción es del tipo F_2, i.e.

$$S = S(q_i, \alpha_i, t).$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = H - K \tag{1}$$

donde

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

y esto lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

que no es otra cosa que una ecuación en derivadas parciales (PDE). Notemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t) \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

y además que Hamilton-Jacobi tiene solución si el problema es totalmente separable. Si $H = H(q_i, \alpha_i)$ entonces $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$ y en ese caso es $H = cte.$ y podemos poner $H = \alpha_1$. Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \quad \longrightarrow \quad S = W(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) - \alpha_1 t.$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener S.

Podemos ver que si $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i)$, y me quedo con $H = \alpha_1 \equiv K$ entonces

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \longrightarrow Q_i = \beta = at + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \longrightarrow P_i = \alpha_i(ctes.).$$

La α_1 no puede depender de q_i pues si se tuviera $\partial\alpha_1/\partial q_i \neq 0$ no sería constante α_1 pues $\dot{q} \neq 0$.

Luego, invirtiendo las ecuaciones (1) determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Además, si el problema es totalmente separable, entonces

$$S = \sum_i^N W(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_n) - \alpha_1 t$$

y tendré tantas constantes de movimiento como grados de libertad. La solución se compone de problemas independientes en una variable.

1.1 Preservación del volumen en una transformación canónica

Definamos un hipervolumen $\mathcal{V}$ en el espacio de fases de acuerdo a

$$\int dq_1 dq_2 ... dq_n dp_1 dp_2 ... dp_n = \mathcal{V}_{p,q}$$

$$\int dQ_1 dQ_2 ... dQ_n dP_1 dP_2 ... dP_n = \mathcal{V}_{P,Q}$$

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)} = \frac{\partial(Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)/\partial(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n)|_{P_i=cte}}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)/\partial(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n)|_{q_i=cte}}$$

que en notación de matriz es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & .. & .. & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

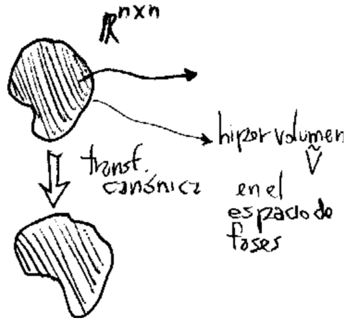

Figura 1.1

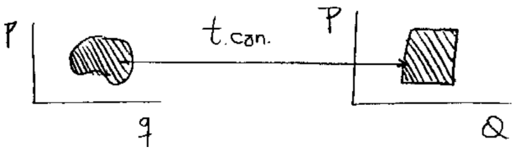

Figura 1.2

Entonces

$$J_{ij}^{num} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)$$

y

$$J_{ij}^{den} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)$$

pero como estas dos expresiones son iguales se tiene que $J = 1$ y entonces se conserva el volumen, aunque cambiando de forma.

En sistemas de un grado de libertad

$$A_{p,q} = \int dpdq \qquad A_{P,Q} = \int dPdQ$$

y el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = [Q, P] = 1$$

Notamos que le corchete de Poisson para una transformación canónica en un grado de libertad es el corchete que ya sabíamos da uno. El área se conserva.

Comentemos que un sistema disipativo achica el área de la transformación.

1.2 Variables ángulo-acción

Consideremos una transformación canónica

$$p, q \longrightarrow J, \theta$$

la cual requiere

- Conservativos $S = W - Et$
- Totalmente separables $W = \sum_i^N W_i(q_1, \alpha_1, ..., \alpha_n)$
- Problemas periódicos

El movimiento periódico es de rotación o libración,

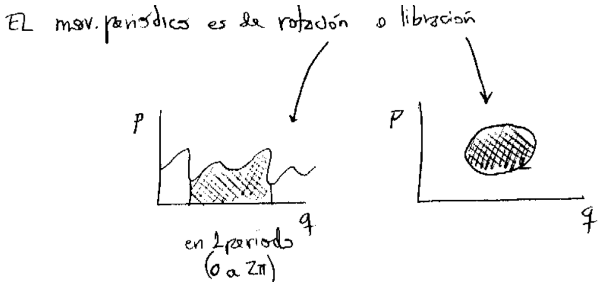

Figura 2.3

La periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

$$S = \sum_i^N W_i(q_i, J_i) - Et$$

Libración y rotación son dos movimientos de naturaleza diferente. No se puede pasar de uno a otro mediante pequeñas perturbaciones.

La integral de acción es

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{ciclo} p_i(q_1, \alpha_1, ..., \alpha_n) dq_i$$

donde

$$J_i = J_i(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

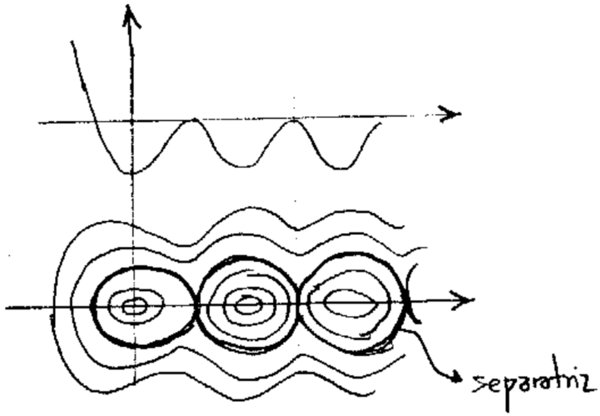

Figura 2.4

son constantes y a su vez los α_i son constantes de separación. Asimismo $\alpha_i = \alpha_i(J_1, ..., J_n)$. La transformación S es

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

siendo $p_i = p_i(q_1, J_1, ..., J_n)$. El nuevo hamiltoniano es $E = E(J_1, ..., J_n)$

$$\frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -\dot{J}_i$$

de manera que tenemos

$$\theta_i = \omega t + \theta_{0_i} \qquad \frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i = \theta_i(q_i, J_i)$$

y entonces despejamos las q_i desde

$$\theta_i(q_i, J_i) = \omega t + \theta_{0_i}.$$

Las condiciones iniciales (q_i, J_i) se introducen en

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, J_1, ..., J_n)$$

y obtengo las $J_1, ..., J_n$ constantes.

1.3 Transformación canónica infinitesimal

$$F_2 = F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i P_i$$

es la indentidad

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \equiv P_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \equiv q_i$$

y donde considero

$$F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_1, ..., q_n, P_1, ..., P_n) \qquad \text{con } \epsilon \sim 0$$

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \longrightarrow P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \longrightarrow Q_i = q_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

donde $\partial G/\partial P_i \approx \partial G/\partial p_i$ diferirán en un orden ϵ^2 el cual descarto. Entonces

$$\delta p_\ell = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_\ell} \qquad \delta q_\ell = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_\ell}.$$

Si considero H en lugar de G y $\epsilon = \delta t$ entonces

$$\frac{\delta p_\ell}{\delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \qquad \frac{\delta q_\ell}{\delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

de tal manera que

$$\dot{p}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \qquad \dot{q}_\ell = -\frac{\partial H}{\partial p_\ell}$$

y donde se ve que el H genera la transformación evolución temporal.

$$\delta A = A(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - A(q_i, p_i)$$

y

$$\delta A = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

$$\delta A = \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \epsilon [A, H] \longrightarrow \frac{\delta A}{\delta t} = [A, H]$$

entonces las constantes de movimiento generan transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante al hamiltoniano H. Si

$$\frac{dA}{dt} = 0 \Longrightarrow [A.H] = 0$$

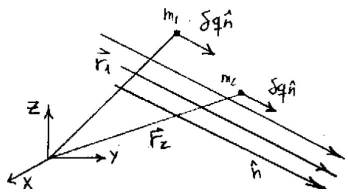

Figura 4.5

1.4 Potencial electromagnético

Arranquemos por los momentos canónicamente conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{pero } si V \neq V(q) \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

entonces

$$U(q, \dot{q}) = e\phi - e/c\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \longrightarrow \mathcal{L} = T - e\phi + e/c\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = mV_x - (e/c)A_x.$$

Hacemos un cambio de gauge, en un potencial generalizado

$$U = e\Phi(\mathbf{x}, t) - (q/c)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(t)$$

y el cambio de gauge es

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

que no altera las ecuaciones de movimiento.

Veamos una traslación rígida ahora. Sea coordenada que representa traslación rígida

$$q \longrightarrow q + \delta q \qquad \mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r}_i + \delta q\hat{n}$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial q} \right)^2 = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \hat{n} = \mathbf{p}\hat{n}$$

usándose que $dv_i^2 = 2v_i dv_i$ y

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q} = \frac{\mathbf{r}_i + \delta q\hat{n} - \mathbf{r}_i}{\delta q} = \hat{n}.$$

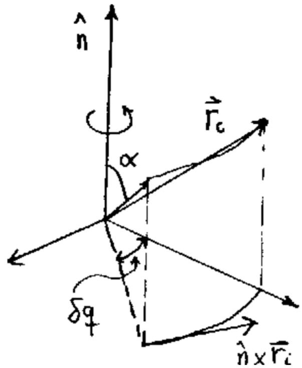

Figura 4.6

Si la coordenada q es la asociada a la traslación rígida entonces el momento canónicamente conjugado es el momento proyectado en esa dirección. Para fuerzas

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \left(\sum_i^N \mathbf{F}_i^a\right) \cdot \hat{n} = \mathbf{F} \cdot \hat{n}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

pero el segundo término del lado izquierdo $\partial T/\partial q_j = 0$ puesto que la T no se ve afectada por cambiar trasladando rígidamente el sistema.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \hat{n}) = \mathbf{F} \cdot \hat{n},$$

y esto significa que el p_j se conserva si no hay fuerza en $\hat{j}$.

Ahora es el turno de la rotación rígida. Sea coordenada que representa rotación rígida,

$$\mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r}_i + \delta q(\hat{n} \times \mathbf{r}_i)$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N \frac{m_i}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q} = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{n} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N \hat{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \hat{n} \cdot \mathbf{L}$$

$$|\delta q(\hat{n} \times \mathbf{r}_i)| = \delta q r_i \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \frac{\mathbf{r}_i + \delta q(\hat{n} \times \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i}{\delta q} = \hat{n} \times \mathbf{r}_i$$

El momento canónicamente conjugado en la dirección $\hat{n}$ es el $\mathbf{L}$ proyectado en esa dirección.

$$\frac{d}{dt}(\hat{n} \cdot \mathbf{L}) = \hat{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

y el p_j se conserva si no hay torque. Las fuerzas generalizadas serán

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q} = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot (\hat{n} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N \hat{n} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^a) = \hat{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_j$$

donde el segundo término otra vez es nulo por idénticas razones y entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{n} \cdot \mathbf{L}\right) = \hat{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Observemos que la T es un escalar y entonces no le importan las rotaciones puesto que en una rotación los módulos no varían, sólo cambia la dirección.