

## Capítulo 1

---

### Gas de Bose

Para Bose debe cumplirse  $\mu < \text{todo } e$  y como  $e \geq 0$  eso dice que

$$\mu < 0$$

Pero si en un sistema tiene  $e_0$  como mínimo y  $e_0 > 0$  entonces, ¿puede ser  $\mu > 0$ ? Aparentemente sí (al menos recordando que la restricción sale de la serie).

**Ya lo entendí esto: pero no para partícula libre.**

Además  $\langle n_e \rangle \geq 0$ , el número de partículas debe ser positivo.

$$\beta p V = \log(\Xi) = \sum_e -\log(1 - e^{-\beta(e-\mu)})$$

$$\beta p = \sum_{e \neq 0} \frac{-\log(1 - e^{-\beta(e-\mu)})}{V} - \frac{\log(1 - z)}{V}$$

El último término será negligible para todo  $z$ , incluso con  $z \rightarrow 1$  pues en ese caso  $V \rightarrow \infty$  mucho más rápido

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1 - z}$$

y  $\langle n_0 \rangle / V$  es finito incluso con  $z \rightarrow 1$ , entonces

$$\langle n_0 \rangle - z \langle n_0 \rangle - z = 0 \quad z = \frac{\langle n_0 \rangle}{1 + \langle n_0 \rangle}$$

$$1 - z = \frac{1}{1 + \langle n_0 \rangle}$$

$$-\frac{\log(1-z)}{V} = \frac{\log(1+\langle n_0 \rangle)}{V}$$

y dado que  $\log(\langle n_0 \rangle) \ll \langle n_0 \rangle$  despreciamos  $\log(1-z)/V$ .

Como  $0 > \mu$  entonces  $e^{\beta\mu} \equiv z < 1$

En Bose la fugacidad está acotada

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \left( \frac{z}{1-z} \right)$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) + \frac{\lambda^3}{V} n_0$$

$$\underbrace{\frac{N}{V}}_{\text{densidad total}} = \underbrace{\frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)}_{\text{densidad en los excitados}} + \underbrace{\frac{1}{V} \left( \frac{z}{1-z} \right)}_{\text{densidad en el fundamental}}$$

Por otro lado como  $0 < z < 1$  entonces  $g_{3/2}(z)$  está acotada

$$g_{3/2}(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{3/2}} = 2.612$$

Con  $z \approx 1$  da

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) + \lambda^3 \frac{n_0}{V}$$

cuando se aumenta  $N$  necesariamente las partículas se apilan en el fundamental; es una fracción macroscópica pues  $V \rightarrow \infty$  y entonces  $n_0 \rightarrow \infty$ .

Se da con

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{\lambda^3}{V} N = \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{N}{V} > 2.612$$

**Destaco en esta expresión  $T$  baja dividiendo y  $n$  alta multiplicando.**

El condensado de Bose surge cuando se saturan los excitados; ello pasa con  $T$  baja,  $N/V$  alta y  $\mu \rightarrow 0$

GRAFIQUETE

El condensado de Bose podemos pensarlo como la coexistencia de dos fluidos ( $e = 0$  y  $e \neq 0$ ). Podemos definir un  $T_c, v_c$  desde

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(1) = 2.612 = \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{1}{v}$$

que lleva a que para un dado  $v$  tenemos una cierta  $T_c$  y para una cierta  $T$  tenemos un dado  $v_c$  dados ambos por

$$T_c^{3/2} = \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{1}{v} \frac{1}{g_{3/2}(1)} \quad v_c = \frac{\lambda^3(T)}{g_{3/2}(1)}$$

De esta forma si  $T < T_c$  y  $v < v_c$  se tiene la condensación de Bose

$$\lambda^3 \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) + \lambda^3 \frac{N_0}{V}$$

que es válida a partir de la condensación ( $T < T_c$ )

$$N = \frac{(2\pi mk)^{3/2}}{h^3} T^{3/2} g_{3/2}(1) V + N_0 = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} + N_0$$

$$N_e = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$N_o = N \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right),$$

que es válida por supuesto con  $T < T_c$ . A partir de haber alcanzado la condensación  $z = 1$ , añadir partículas ( $N \rightarrow ++$ ) o reducir el volumen ( $V \rightarrow --$ ) hace que  $N_e/V \rightarrow 0$  pues  $V \rightarrow \infty$

DIBUJO con observaciones

Cuando  $v/\lambda^3$  es chico se saturan los  $N_e$  y entonces  $z \rightarrow 1$ .

Cuando  $v/\lambda^3$  es grande no hay condensado y entonces  $\lambda^3/v \approx z$  o bien  $1/(v/\lambda^3) \approx z$ .

Para la presión tendremos

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$$

con  $z = 1 (T < T_c)$

$$\frac{p}{kT} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} g_{5/2}(1) = \frac{1}{v(T_c/T)^{3/2} g_{3/2}(1)} g_{5/2}(1)$$

$$p = 1.34 \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} \quad \frac{pV}{NkT} = 0.513 \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

con  $z = 1 (T = T_c)$

$$\beta p = \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)v} = \frac{0.513}{v}$$

$$p = 0.513 \frac{NkT}{V} \quad \text{es aprox. } 1/2p \text{ gas ideal clásico}$$

con  $z \lesssim 1 (T > T_c)$

$$\beta p = \frac{1}{v} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

pero no podemos expandir en el virial porque  $\lambda^3/v$  no es chico. Con  $z \approx 0$  ( $T \gg T_C$ )

$$\beta p v = \frac{pV}{NkT} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1}$$

usando toda la serie y procediendo en modo análogo a Fermi se obtienen

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -0.17678 \\ a_3 = -0.00330 \end{cases}$$

$$\frac{pV}{NkT} = 1 - 0.17678 \left( \frac{\lambda^3}{v} \right) - 0.00330 \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^2$$

DIBUJO

El virial vale en  $\lambda^3/v \ll 1$  (alta  $T$  y baja  $N/V$ )

A bajas  $T$  se comportan de modo muy diferente,  $p_{\text{Fermi}} > 0$  y  $p_{\text{Bose}} \approx 0$

## 1.1 Análisis del gas ideal de Bose

- $\lambda^3/v \ll 1$  y entonces  $z \ll 1$  [ $T \gg T_c$ ]

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1} = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

$$\beta p V \approx 1 - \frac{\lambda^3}{v} \frac{1}{2^{5/2}} \quad U = \frac{3}{2} p V = \frac{3}{2} N k T \left( 1 - \frac{\lambda^3}{v} \frac{1}{2^{5/2}} \right)$$

- $\lambda^3/v \approx 1$  y entonces  $z < 1$  [ $T > T_c$ ]

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

- $\lambda^3/v = 2.612$  y entonces  $z = 1$  [ $T = T_c$ ]

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \approx \frac{1.34}{2.612} \approx 0.513$$

- $\lambda^3/v \gg 1$  y entonces  $z = 1$  [ $T < T_c$ ] y hay que considerar el fundamental

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \quad \lambda^3 \left( \frac{N - N_0}{V} \right) = g_{3/2}(1)$$

que lleva a

$$\left(1 - \frac{N_0}{N}\right) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

puesto que  $T_c$  es tal que

$$\frac{h^3}{(2\pi mkT_c)^{3/2}} \frac{N}{V} = g_{3/2}(1) = \frac{\lambda^3}{v} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$\beta p V = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = 0.513 \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = g_{3/2}(1) \Rightarrow \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1}{v} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{1}{g_{3/2}(1)}$$

Desde la expresión de la energía  $U = 3/2 pV$  y  $C_V = \frac{\partial}{\partial T}(3/2 pV)$  y entonces

- $T < T_c$

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{3}{2} Nk \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} 0.513 \right) = \frac{15}{4} Nk \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} 0.513 \quad C_V \propto T^{3/2}$$

- $T = T_c$

$$C_V = Nk 0.513 \frac{15}{4} = Nk 1.92375$$

- $T > T_c$

$$C_V = \left( \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{\underbrace{g_{1/2}(z)}_{\rightarrow \infty \text{ en } z=1}} \right)$$

$C_V$  es continuo.

- $T \gg T_c$

$$C_V = Nk \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left( T \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} \right)$$

$$C_V = Nk \frac{3}{2} \left( 1 + 0.0884 \left(\frac{\lambda^3}{v}\right) + \dots \right)$$

DIBUJO

**Con  $z = 1$  y  $T < T_c$   
expresamos todo en términos  
de  $(T/T_c)$ .**

## 1.2 Cuánticos IV –reubicar–

algunos temitas sueltos:

números de ocupación

gas de Fermi  $p$  y  $c_v$

gas de Fermi  $p$  y  $c_v$

Condensado de Bose

El coeficiente lineal del virial  $1/2^{5/2} = 0.1767767$  sale considerando las  $f_\nu(z)$  hasta orden uno y tirando términos más allá.

El requerimiento  $\mu < 0$  viene de que el fundamental  $n_0$  no puede tener población negativa

$$n_0 = \frac{1}{e^{\beta(e_0 - \mu)} - 1} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \geq 0$$

$$e^{-\beta\mu} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu < 0$$

Con  $\mu \rightarrow 0^-$  tenemos  $n \rightarrow \infty$

En el caso del condensado establecemos desde

$$\frac{\lambda^3(T)}{v} = g_{3/2}(1)$$

que lleva para  $T_c$  (para  $v$  fijo) o  $v_c$  (para  $T$  fija) versiones evaluadas de la anterior ecuación.

Para la población de los estados excitados

$$p_x = \frac{h}{V^{1/3}} n_x \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{h}{V^{1/3}} \mathbf{n}$$

$$\frac{n_{e_i}}{V} = \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta e_i} - 1} \leq \frac{1}{V(e^{\beta e_i} - 1)} = \frac{1}{V(\sum_{l=1}^{\infty} (\beta e_i)^l / l!)}$$

pués  $z^{-1} = 1/z \leq 1$

$$\beta e = \frac{\beta p^2}{2m} = \frac{\beta}{2m} \frac{h^2}{V^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$\frac{2m}{V^{1/3} \beta h^2 (\sum_{l=1}^{\infty} \dots)} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad V \rightarrow \infty$$

y entonces

$$\frac{n_e}{V} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad V \rightarrow \infty$$

Esto significa que si  $V$  es muy grande, en el condensado se tenderá a que todas las partículas se hallen en  $e = 0$  pues

$$\frac{N_e}{N} \rightarrow 0 \quad \frac{N_0}{N} \rightarrow 1$$

¿El condensado BE requiere población de los niveles o  $V$  total de algún tipo?  
Tenia unas consultas agarradas con clip: ¿porqué hay una cúspide en  $C_v$ ? ¿transiciones?

Véamoslo en la ecuación de  $N$ ,

$$\frac{\lambda^3 N}{V} = g_{3/2}(1) + \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1-z}$$

y si  $z \rightarrow 1$  de forma que  $z/(1-z) \gg 1$  entonces  $g_{3/2}(1)$  es despreciable de modo que

$$\frac{\lambda^3 N}{V} \approx \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1-z} = \frac{\lambda^3 N_0}{V}$$

y se da que  $N \sim N_0$ .

En Bose se da  $0 < z < 1$

DIBUJITOS

Con  $z \ll 1$  es  $\lambda^3/v \approx z$  y entonces  $z \approx 1/(v/\lambda^3)$ . Con  $z = 1$  es  $\lambda^3/v = 2.612$  pero si  $\lambda^3/v > 2.612$  entonces  $z$  no se mueve y sigue en su valor 1.

### 1.2.1 Cuánticos 5 - Cuánticos 5b –reubicar–

presión gas de Bose

$C_V$  gas de Bose

Condensado de Bose  $\rightarrow$  transición de fase de primer orden

límite clásico función de partición

cálculo de  $Tr(e^{-\beta A}) = Q_N(V, T)$

diferencia con el caso clásico

potencial efectivo

**Ver la transición de fase con el tema del calor latente. ¿Cómo era lo de Clayperon?**