

Introducción al momento angular (rotaciones)

El operador \hat{L} será el encargado de realizar las rotaciones. Por el álgebra visto en la mecánica clásica sabemos que, dado un vector \mathbf{v} y una matriz ortogonal R se tiene

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v} \quad \text{con} \quad |\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$$

y

$$|\mathbf{v}|^2 = V^t V = (V^t R^t)(RV) \quad \text{pues} \quad R^t R = R R^t = \mathbb{1}$$

puesto que es una matriz ortogonal. Luego se cumplen

$$\text{clausura} \quad (R_1 R_2)(R_1 R_2)^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = \mathbb{1}$$

el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal (aquella que cumple $R^t R = \mathbb{1}$)

$$\text{asociatividad} \quad R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2)R_3$$

$$\exists \text{ identidad} \quad R\mathbb{1} = \mathbb{1}R = R$$

$$\exists \text{ inversa} \quad RR^{-1} = R^{-1}R = \mathbb{1} \quad \text{con} \quad R^{-1} \equiv R^t$$

Esto define un grupo de matrices ortogonales que realiza rotaciones y se denomina $SO(3)$.

1.0.1 No conmutatividad de las rotaciones clásicas

Las rotaciones finitas no conmutan. Luego, el grupo de las rotaciones será un grupo abeliano

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

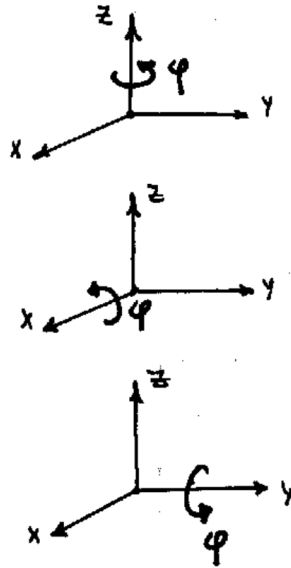


Figura 0.1

Si reemplazamos $\cos(\epsilon) \approx 1 - \epsilon^2/2$ y $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$ hasta orden dos. Se puede ver que las rotaciones, en torno a ejes diferentes, sólo conmutan a orden uno

(ϵ) de manera que una rotación infinitesimal $d\varphi$ conmuta pero una rotación finita φ no lo hace.

1.1 Rotaciones cuánticas

Para las rotaciones cuánticas se pedirá

$$D(\hat{n}, d\phi) = \mathbb{1} - i \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} d\phi,$$

rotación infinitesimal o bien

$$D(\hat{n}, \theta) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \hat{n} / \hbar \theta},$$

para rotación finita. Donde \hat{D} es el operador de las rotaciones y \hat{J} es un momento angular general. Se postula de esta forma para que \hat{D} cumpla las mismas propiedades que R y la relación de conmutación

$$R_x R_y - R_y R_x = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1}$$

$$D(\hat{x}, \epsilon) D(\hat{y}, \epsilon) - D(\hat{y}, \epsilon) D(\hat{x}, \epsilon) = D(\hat{z}, \epsilon^2) - D(\mathbb{1})$$

de modo que la cuenta lleva a

$$J_x J_y - J_y J_x = i\hbar J_z$$

la cual generalizando se llega a

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

que son las relaciones de conmutación generales para momento angular \hat{J} .

Para sistemas de espín 1/2 es

$$D(\hat{n}, \phi) \equiv e^{-i/\hbar \mathbf{S} \cdot \hat{n}}$$

Se puede ver que ante rotaciones cuánticas $D(\hat{n}, \phi)$ los valores de expectación transforman como vectores

$$\begin{pmatrix} \langle S'_x \rangle \\ \langle S'_y \rangle \\ \langle S'_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\hat{x}, \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

En general $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ se transforma como vector y entonces \hat{J} es un operador vectorial. Para espín 1/2 es

$$|\alpha\rangle = \langle + | \alpha \rangle |+\rangle + \langle - | \alpha \rangle |-\rangle$$

$$D(\hat{z}, \phi) |\alpha\rangle = e^{-iS_z \phi/\hbar} \langle +|\alpha\rangle |+\rangle + e^{-iS_z \phi/\hbar} \langle -|\alpha\rangle |-\rangle$$

$$D(\hat{z}, \phi) |\alpha\rangle = \langle +|\alpha\rangle e^{-i\phi/2} |+\rangle + e^{i\phi/2} \langle -|\alpha\rangle |-\rangle$$

Si $\phi = 2\pi$ (cosa que debiera dejar al ket incólume) se tiene

$$D(\hat{z}, 2\pi) |\alpha\rangle = -\langle +|\alpha\rangle |+\rangle - \langle -|\alpha\rangle |-\rangle = -|\alpha\rangle$$

Luego, esto es una muestra del carácter no-clásico del spin; una vuelta completa le cambia el signo al ket pero notemos cuidadosamente que el valor de expectación – que es algo físico – no varía. Esto muestra que el ket no puede tener sentido físico.

1.1.1 Angulos de Euler

Se define una serie de rotaciones

$$1. R_z(\alpha) \quad 2. R_{y'}(\beta) \quad 3. R_{z'}(\gamma)$$

lo cual equivale a

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$$

$$e^{-iJ_{z'}\gamma/\hbar} e^{-iJ_{y'}\beta/\hbar} e^{-iJ_z\alpha/\hbar} |\psi\rangle$$

Pero desconozco cómo operar en los ejes móviles z', y'

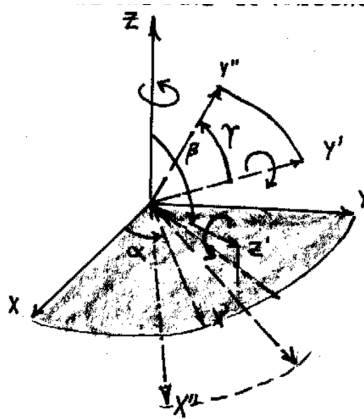


Figura 1.2 Los ángulos de Euler son una caracterización de una rotación general en 3D.

$$\begin{aligned}
R_{y'}(\beta) &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \\
R_{z'}(\gamma) &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta) \\
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)\underbrace{R_{y'}^{-1}(\beta)R_{y'}(\beta)}_{\mathbb{1}}R_z(\alpha) \\
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)
\end{aligned}$$

Rotación equivalente a [1] pero para ejes fijos, puesto que en mecánica cuántica sabemos rotar en torno a ejes fijos.

Los ángulos de Euler son la caracterización de una rotación general en 3D. Entonces nuestra rotación en 3D cuántica será:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma) = e^{-iJ_z\alpha/\hbar}e^{-iJ_y\beta/\hbar}e^{-iJ_z\gamma/\hbar}$$

1.1.2 Autoestados y autovalores de J

Partimos de

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijR}J_R$$

y

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad [J^2, J] = 0$$

siendo la última muy importante y probándose por evaluación directa. Lleva a

$$[J^2, J_i^n] = 0 \quad \text{con } i = x, y, z \quad n \in \mathbb{N}$$

Se eligen J^2, J_z como observables que conmutan

$$J^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle \quad J_z |a, b\rangle = b |a, b\rangle$$

siendo a autovalor de J^2 y b de J_z .

Definiremos los operadores de subida y de bajada

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm J_y$$

que verifican

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm} \quad [J_{\pm}, J^2] = 0$$

Entonces se tiene

$$J^2(J_{\pm} |a, b\rangle) = J_{\pm} J^2 |a, b\rangle = a J_{\pm} |a, b\rangle \longrightarrow J_{\pm} |a, b\rangle = \square |a, b\rangle$$

$$(J_z J_{\pm} - J_{\pm} J_z) |a, b\rangle = \pm \hbar J_{\pm} |a, b\rangle$$

$$J_z (J_{\pm} |a, b\rangle) = (b \pm \hbar) (J_{\pm} |a, b\rangle) \longrightarrow J_{\pm} |a, b\rangle = \square |a, b \pm \hbar\rangle$$

$$J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm} |a, b \pm \hbar\rangle$$

$$J_+ |a, b\rangle = c_+ |a, b + \hbar\rangle \quad J_- |a, b\rangle = c_- |a, b - \hbar\rangle$$

sube el J_z en una unidad de \hbar o bien baja el J_z en una unidad de \hbar .

$$J_+ J_- = J_x^2 + i J_y J_x - i J_x J_y + J_y^2, \quad J_- J_+ = J_x^2 - i J_y J_x + i J_x J_y + J_y^2$$

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+), \quad J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

$$\langle a, b | J^2 - J_z^2 | a, b \rangle = 1/2 \langle a, b | J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+ | a, b \rangle$$

$$(a - b^2) \langle a, b | a, b \rangle = 1/2 [\langle a, b | J_+ J_+^\dagger | a, b \rangle + \langle a, b | J_+^\dagger J_+ | a, b \rangle]$$

$$(a - b^2) \langle a, b | a, b \rangle = |J_+^\dagger | a, b \rangle|^2 \geq 0, \quad \Rightarrow a \geq b^2$$

hay cota para b .

$$J_+ |a, b_M\rangle = 0$$

Como no puede seguir subiendo debe dar el ket nulo

$$J_- J_+ |a, b_M\rangle = 0$$

pero

$$J_- J_+ = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y] = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |a, b_M\rangle = 0$$

$$(a - b_M^2 - \hbar b_M) |a, b_M\rangle = 0$$

$$a = b_M(b_M + \hbar)$$

$$J_- |a, b_m\rangle = 0$$

y como no puede seguir bajando debe dar el ket nulo

$$J_+ J_- |a, b_m\rangle = 0$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) |a, b_m\rangle = (a - b_m^2 + \hbar b_m) |a, b_m\rangle = 0$$

$$b_M(b_M + \hbar) = b_m(b_m - \hbar)$$

tiene solución $b_M - b_m = -\hbar$ si $b_M + b_m \neq 0$ pero esto es absurdo de manera que $b_M = b_m$. Entonces

$$-b_m = b_M \quad \Rightarrow \quad -b_M \leq b \leq b_M$$

Luego,

$$|a, b_m\rangle \longrightarrow |a, b_M\rangle$$

y como J_+ sube de a un \hbar será

$$b_M = b_m + n\hbar$$

y entonces

$$b_M = \frac{n\hbar}{2} = \frac{n}{2}\hbar = j\hbar$$

y se da que j es entero o semientero.

Definiremos

$$b_M \equiv j\hbar \quad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \quad -j\hbar \leq b \leq j\hbar$$

pero como $b/\hbar = m$

$$b_M \equiv j\hbar \quad a \equiv j(j+1)\hbar^2 \quad -j \leq m \leq j$$

$$m = (-j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j) \quad 2j+1 \text{ valores de } m$$

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \quad J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

1.1.3 La normalización de J_{\pm}

$$J_+ |j, m\rangle = c_+ |j, m+1\rangle \quad J_-^\dagger = J_+$$

$$\langle j, m | J_- J_+ |j, m\rangle = \langle j, m | J_+^\dagger J_+ |j, m\rangle = |c_+|^2$$

$$\langle j, m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - \hbar^2 m = |c_+|^2$$

$$c_+ = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\langle j, m | J_+ J_- |j, m\rangle = \langle j, m | J_-^\dagger J_- |j, m\rangle = |c_-|^2$$

$$= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 = |c_-|^2$$

$$c_- = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$J_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle \quad J_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle$$

1.1.4 Elementos de matriz de J^2, J_z, J_+

Asumiendo normalización de $|j, m\rangle$ se tiene

$$\langle j', m' | J^2 | j, m \rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{m'm}$$

$$\langle j', m' | J_z | j, m \rangle = m\hbar \delta_{jj'} \delta_{m'm}$$

1.1.5 Elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$

Ahora queremos ver cual es la forma de los elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$

$$\mathcal{D}(R) = e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n} \phi / \hbar}$$

siendo que $\mathcal{D}(R)$ tiene por efecto rotar el sistema físico. Lo primero que hay que notar es que

$$\langle j', m' | \mathcal{D}(R) | j, m \rangle \propto \delta_{jj'}$$

porque $[J^2, J_i] = 0$ y entonces $[J^2, J_i^n] = 0$ y

$$\mathcal{D}(R) = f(J_i) \longrightarrow [J^2, \mathcal{D}(R)] = 0$$

y

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)} = \langle j, m' | e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n} \phi / \hbar} | j, m \rangle$$

es una matriz para cada j fijo con $\{(2j+1) \times (2j+1) = \text{dimensión}\}$

$$\mathcal{D}(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} | j, m' \rangle \langle j, m' | e^{i\mathbf{J} \cdot \vec{n} \phi / \hbar} | j, m \rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) | j, m' \rangle$$

pero las rotaciones no cambian el j , $\mathcal{D}(R)$ conecta estados con la misma j y $\mathcal{D}(R) \in (2j+1) \times (2j+1)$

$$\mathcal{D}(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) | j, m' \rangle$$

La matriz de $\mathcal{D}(R)$ (no caracterizada por un único j) puede ponerse en forma diagonal por bloques:

$$\mathcal{D}(R) = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} j' \\ j'' \\ j''' \end{matrix}$$

con cada bloque de $(2j+1) \times (2j+1)$, pero siendo cada bloque irreducible. Las matrices de rotación con j fijo forman un grupo. $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$ son los elementillos de la matriz.

$$|j, m\rangle \xrightarrow[\text{Rotación}]{} \mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle$$

donde el $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R)$ es la amplitud de hallar al $|j, m\rangle$ rotado en $|j, m'\rangle$

1.1.6 Forma explícita del operador $\mathcal{D}(R)$

Los ángulos de Euler permitieron caracterizar la rotación más general. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)} &= \langle j, m' | e^{-iJ_z\alpha/\hbar} e^{-iJ_y\beta/\hbar} e^{-iJ_z\gamma/\hbar} | j, m \rangle \\ \mathcal{D}_{m'm}^{(j)} &= e^{-i(-m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle j, m' | e^{-iJ_y\beta/\hbar} | j, m \rangle}_{d_{m'm}^{(j)}} \end{aligned}$$

siendo el primer factor una fase. En los $d_{m'm}^{(j)}$ está la dificultad de la cuenta.

1.2 Formalismo de spinores de Pauli

Apropiado para trabajar con sistemas de espín 1/2. Estos sistemas son casos particulares de momento angular,

$$j = 1/2 \quad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

y se definen los spinores χ_{\pm} como

$$|+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ \quad |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \langle + | \alpha \rangle \\ \langle - | \alpha \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \alpha | = (\langle + | \alpha \rangle \quad \langle - | \alpha \rangle)$$

Para espín 1/2 podemos tomar $\mathbf{J} = \mathbf{S}$ por la analogía de las relaciones de conmutación. A su vez

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad \text{con} \quad \vec{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

que es una especie de vector

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Luego esta equivalencia provee expresión de los operadores S_i en términos de matrices de 2×2 , así:

$$\frac{i}{2}[J_- - J_+] = J_y = S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

siendo que los J_y y S_y actúan sobre kets y el σ sobre spinores.

Las matrices de Pauli cumplen las propiedades básicas siguientes

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad \sigma_i^\dagger = \sigma_i$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i2\varepsilon_{ijR}\sigma_R \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij}$$

$$\sigma_i^n = \begin{cases} \mathbb{1} & n \text{ par} \\ \sigma_i & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$|+\rangle \equiv |j=1/2, m=1/2\rangle \quad |-\rangle \equiv |j=1/2, m=-1/2\rangle$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

1.2.1 Aplicación a las rotaciones

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \hat{n} \phi / \hbar} = e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \phi / 2}$$

pero

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^n = \begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} & n \text{ impar} \\ \mathbb{1} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \phi / 2} = 1 - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^3 \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 - \dots$$

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = e^{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \phi / 2} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

es el operador de rotación para sistemas de spin 1/2 (donde $\mathbb{1} \in 2 \times 2$). Con esta expresión podemos evaluar $d_{m'm}^{j=1/2}(\beta)$

$$d^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

donde hemos usado los resultados

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

En el caso general el operador de rotación para sistemas de spin 1/2 lucirá:

$$\begin{array}{cc} |+\rangle & |-\rangle \\ \mathcal{D}^{j=1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{-\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} \end{array}$$

1.2.2 Ejemplo

$$d^{1/2}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\chi_+ + \chi_-) = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$d^{1/2}(\pi/2)\chi_+ = |S_x; +\rangle$$

Este resultado es intuitivamente lógico.

1.2.3 Rotaciones en sistemas con $j = 1$

Ahora tenemos

$$j = 1 \quad m = -1, 0, 1$$

recordando J_y en términos de escaleras

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

de modo que

$$|1 \ 1\rangle \quad |1 \ 0\rangle \quad |1 \ -1\rangle$$

$$J_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{pmatrix}$$

$$e^{-i \frac{J_y}{\hbar} \beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar} \beta + (-i)^2 \left(\frac{J_y}{\hbar} \beta \right)^2 \frac{1}{2!} + (-i)^3 \left(\frac{J_y}{\hbar} \beta \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e^{-i \frac{J_y}{\hbar} \beta} = 1 - \frac{J_y}{\hbar} \beta - \frac{1}{2!} \left(\frac{J_y}{\hbar} \beta \right)^2 - \frac{i}{3!} \left(\frac{J_y}{\hbar} \beta \right)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{J_y}{\hbar} \right)^n = \begin{cases} \left(\frac{J_y}{\hbar} \right) & n \text{ impar} \\ \left(\frac{J_y}{\hbar} \right)^2 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$e^{-i \frac{J_y}{\hbar} \beta} = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar} \right)^2 (1 - \cos(\beta)) - i \left(\frac{J_y}{\hbar} \right) \sin(\beta) = d^{j=1}(\beta)$$

acá lo vemos como operador (es notación), $d_{m'm}^{j=1}(\beta)$ simboliza la matriz

$$d^{j=1}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos(\beta)) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\beta) & \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\beta) & \cos(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\beta) \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta)) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\beta) & \frac{1}{2}(1 + \cos(\beta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{pmatrix}$$

1.3 Momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

verifica el álgebra de \mathbf{J} ,

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

Consideremos ahora una rotación en torno a z , en un $\delta\phi$,

$$\left(1 - \frac{iL_z \delta\phi}{\hbar} \right) |x', y', z'\rangle = 1 - \frac{iP_y}{\hbar} (x\delta\phi) + \frac{iP_x}{\hbar} (y\delta\phi) |x', y', z'\rangle$$

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar} (P_y x \delta\phi - P_x y \delta\phi) \right] |x', y', z'\rangle$$

esto es una traslación en \hat{x}, \hat{y} ,

$$(1 - i \frac{L_z}{\hbar} \delta\phi) |x', y', z'\rangle = |x' - y' \delta\phi, y' + x' \delta\phi, z'\rangle$$

Esta traslación es debida a una rotación infinitesimal en $\delta\phi$ torno a z entonces genera las rotaciones clásicas en torno a z .

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle x', y', z' | \alpha \rangle \xrightarrow[\text{Rotamos en } z]{} \left\langle x', y', z' \left| 1 - \frac{iL_z \delta\phi}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle = \langle x' + y' \delta\phi, y' - x' \delta\phi, z' | \alpha \rangle$$

y en coordenadas esféricas,

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}') = \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \xrightarrow[\text{Rotamos en } z]{} \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle$$

Podemos hallar una expresión para L_z en esféricas:

$$\left\langle r, \theta, \phi \left| 1 - \frac{L_z \delta\phi}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle \approx \langle \phi | \alpha \rangle - \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle \delta\phi$$

identificamos

$$\left\langle \mathbf{r} \left| -\frac{iL_z}{\hbar} \right| \alpha \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \phi} \langle \mathbf{r} | \alpha \rangle$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

operador L_z en esféricas.

Esta construcción usa que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle \approx \frac{\langle \phi + \delta\phi | \alpha \rangle - \langle \phi | \alpha \rangle}{\delta\phi} = \frac{\langle \phi | \alpha \rangle - \langle \phi - \delta\phi | \alpha \rangle}{\delta\phi}$$

y luego se despeja de la última $\langle \phi - \delta\phi | \alpha \rangle$.

Usando

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+)$$

se llega a

$$\langle r, \theta, \phi | L^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}] \right] \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle$$

$$L^2 = -\hbar^2 r^2 \nabla_{\theta, \phi}^2$$

donde $\nabla_{\theta, \varphi}^2$ es la parte angular del laplaciano en coordenadas esféricas. Esto puede obtenerse también partiendo de

$$L^2 = \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$$

Sea un H de partícula, sin spín, sujeta a potencial simétricamente esférico. Sabemos que la función de onda $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}')$ es separable en coordenadas esféricas, entonces:

$$\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\langle \mathbf{r} | n, l, m \rangle = (\langle r | \otimes \langle \theta, \phi |) (|n, l, m \rangle) = \langle r | n, l, m \rangle \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

Cuando el H es esféricamente simétrico (como en un potencial central) se tiene

$$[H, L_z] = [H, L^2] = 0$$

Trabajaremos solamente en la parte angular $|\theta, \varphi\rangle \equiv |\hat{n}\rangle$

$$\langle \hat{n} | \ell, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\hat{n})$$

que es la amplitud de hallar $|\ell, m\rangle$ en la dirección \hat{n} .

Podemos vincular ahora los armónicos esféricos con los autoestados de L_z, L^2

$$L_z |\ell, m\rangle = m\hbar |\ell, m\rangle$$

de manera que

$$\langle \hat{n} | L_z | \ell, m \rangle = m\hbar \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \hat{n} | \ell, m \rangle$$

y entonces

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto e^{im\phi}.$$

$$L^2 |\ell, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$$

y de modo ídem

$$\langle \hat{n} | L^2 | \ell, m \rangle = l(l+1)\hbar^2 \langle \hat{n} | \ell, m \rangle$$

$$(-\hbar^2 r^2 \nabla_{\theta, \phi}^2 + l(l+1)\hbar) \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = 0$$

Entonces, con la ortogonalidad

$$\longrightarrow \langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

y con la completitud

$$\longrightarrow \int d\Omega |\hat{n}\rangle \langle \hat{n}| = 1$$

de manera que llegamos a

$$\int d\Omega \langle l', m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad \int d\Omega Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

Podemos hallar una expresión para

$$\langle \hat{n} | L_+ | l, l \rangle = 0$$

$$-i\hbar e^{i\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle \hat{n} | l, l \rangle = 0 \Rightarrow Y_l^m(\theta, \phi) = c_l e^{il\phi} \sin^l \theta$$

Luego usamos L_- para hallar sucesivamente los demás Y_ℓ^m

$$\frac{\langle \hat{n} | L_- | l, m \rangle}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \langle \hat{n} | l, m-1 \rangle$$

y por este camino se llega a

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{im\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos^{l-m} \theta)} (\sin \theta)^{2l}$$

con

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)(Y_l^m(\theta, \phi))^* \quad Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

En el caso de momento angular orbital ℓ no puede ser semientero porque entonces m sería semientero y en una vuelta de 2π

$$e^{im2\pi} = -1$$

entonces ψ no será univaluada

Además,

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iL_z 2\pi/\hbar} | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle \quad (\text{no hay signo menos})$$