CBFT Mecánica clásica

Cuerpos rígidos

6 de diciembre 2015

Contenidos

§1. Cuerpos rígidos

Los vínculos constituyen la condición de rigidez,

$$|\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j| = d_{ij} \qquad i \neq j \tag{1.1}$$

Del discreto al continuo

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \longrightarrow \mathbf{R} = \frac{\int \rho \mathbf{r}_i dv}{\int \rho dv}$$

§1.1 Grados de libertad de un cuerpo rígido

Cada punto tiene como vínculos las ecuaciones (1.1)

El cuerpo rígido tiene seis grados de libertad. Si las condiciones de rigidez son lineales resultan cinco grados de libertad.

§1.2 Velocidad de un cuerpo rígido

Lo único que pueden hacer los puntos de un cuerpo rígido es rotar.

$$\delta r_{p_0} = r_{p_0} \sin(\beta)\delta\alpha$$
$$\frac{\delta r_{p_0}}{\delta t} = r_{p_0} \sin(\beta)\frac{\delta\alpha}{\delta t}$$
$$v_{p_0} = \dot{\alpha} r_{p_0} \sin(\beta)$$

pero $v_{p_0} \perp \hat{n}$ y $v_{p_0} \perp r_{p_0}$ de manera que

$$\mathbf{V}_{p_0} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}.$$

Luego, para ir a un sistema inercial le sumo la V de algún punto del rígido (el origen O) medido desde un sistema inercial. Entonces, el campo de velocidad del cuerpo rígido es

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}.$$

§1.3 Unicidad de la velocidad de rotación

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p_0'}$$

siendo $\mathbf{\Omega}$' la $\mathbf{\Omega}$ como se ve desde el sistema O'

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y donde $\mathbf{\Omega}$ es la vista desde el sistema O.

$$\mathbf{V}_0' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p_0'} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y descomponiendo de acuerdo con el dibujo resulta

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$
$$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_{00'} - \mathbf{r}_{0p}) + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = 0$$
$$(\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{r}_{0'p} = 0,$$

de la cual se deduce que $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$. Entonces, $\mathbf{\Omega}$ es la misma para cualquier punto del cuerpo rígido.

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{0p})$$
$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0$$

lo cual se cumple para todo punto p perteneciente al cuerpo rigido. Si es $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$ entonces serán $\mathbf{\Omega} \perp \mathbf{V}_0$ y $\mathbf{\Omega} \perp \mathbf{V}_p$.

Si en un instante dado $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{V}_p$ entonces $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{V}_{p'}$ para todo punto del cuerpo rígido.

§1.4 Eje instantáneo de rotación

Si p es tal que $\mathbf{V}_p = 0$ entonces

$$\mathbf{V}_0 = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p0}$$

donde $\mathbf{V}_0$ es una velocidad desde un sistema inercial. Desde el sistema inercial el cuerpo rígido realiza una rotación pura, puesto que veo al punto O rotar en torno a algún eje.

$$\mathbf{V}_0 = -\mathbf{\Omega} \times (r_\perp + r_\parallel) = -\mathbf{\Omega} \times r_\perp$$

y esto define un eje instantáneo de rotación.

§2. Ángulos de Euler

Se toma un sistema 123 inicialmente coincidente con uno XYZ paralelo al inercial, 123 tiene origen en el centro de masa del cuerpo.

$$A_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

y expresando $\hat{z}, \hat{n}$ en $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ resulta

$$\mathbf{\Omega} = [\dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi)]\hat{1} + [\dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{\theta}\sin(\psi)]\hat{2} + [\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi}]\hat{3}$$

Ahora estamos interesados en el momento angular.

$$\mathbf{L}_0^{sist} = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i')$$

que están en el sistema 123.

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{\Omega}) \,\right]$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\mathbf{\Omega} \sum_{j}^{3} (x_j^{2i}) - \mathbf{r}_i \sum_{\ell}^{3} x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

y la componente k-ésima será

$$L_k = \sum_{i}^{N} m_i \left[\Omega_k \sum_{j}^{3} (x_j^{2i}) - x_k^i \sum_{\ell}^{3} x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_{i}^{N} m_i \left[\sum_{j}^{3} \delta_{kj} \Omega_j r_i^2 - x_k^i \sum_{\ell}^{3} x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_{j}^{3} \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i \,\right] \Omega_j = \sum_{j}^{3} I_{kj} \Omega_j$$

o vectorialmente

$$\mathbf{L}_{spin} = I \mathbf{\Omega}$$

siendo I el tensor de inercia. Explícitamente:

$$I_{kj} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i \,\right]$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Sean 1,2,3 los ejes principales, entonces I es diagonal y

$$\mathbf{L}_{spin} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = I \mathbf{\Omega}$$

y se puede escribir

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{in} \square = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \square + \mathbf{\Omega} \times \square$$

que es válida pra sistemas rotantes (no aquellos que rotan y se trasladan). En este caso $\mathbf{\Omega}$ es la del sistema rotante (en un cuerpo rígido es la $\mathbf{\Omega}$ del cuerpo rígido).

Se puede escribir también

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{in} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm}$$

siendo la derivada de uns sitema XYZ, y $\mathbf{T}$ el torque del cuerpo rígido referido al centro de masa y medido dese el sistema XYZ (inercial). Entonces

$$\mathbf{T}_{cm} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \mathbf{L}_{spin} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{L}_{spin})$$

y

$$\mathbf{T}_{cm} = I \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega} \times (I\,\mathbf{\Omega}).$$

I visto desde XYZ es $I = I(t)$ e I desde 123 es constante.

$$\mathbf{T}_{cm} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\mathbf{\Omega}}_1 \\ I_2 \dot{\mathbf{\Omega}}_2 \\ I_3 \dot{\mathbf{\Omega}}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ I_1\Omega_1 & I_2\Omega_2 & I_3\Omega_3 \end{vmatrix}$$

De este sistema resultan,

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\,\Omega_3 \\ \mathrm{T}_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\,\Omega_1 \\ \mathrm{T}_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\,\Omega_2 \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Euler. Las mismas requieren I en ejes principales, $\mathbf{\Omega}$ en 1,2,3 (en función de ϕ, θ, ψ). Es $\mathbf{\Omega}$ la velocidad de rotación del sistema cuerpo rígido (rotante) respecto a un sistema XYZ fijo en el centro de masa y coincidente con X'Y'Z' (inercial) a todo tiempo. Salvo la traslación del centro de masa, este sistema XYZ será inercial.

Todo este tratamiento de ecuaciones de Euler es para el caso $\mathbf{L}_{spin} \equiv \mathbf{L}_{cm}^{sist}$, de manera que no me importan las traslaciones del centro de masa.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{XYZ} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{123} \mathbf{L}_{spin} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}_{spin}$$

§3. Energía cinética del cuerpo rígido

Queremos escribir la energía cinética de un cuerpo rígido explícitamente en términos del momento de inercia I.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

donde la última $\mathbf{r}_i$ está referida al centro de masa (posiciones de los puntos del cuerpo rígido referidas al centro de masa).

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i(\mathbf{v}_{cm}^2 + (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i)^2 + 2\mathbf{v}_{cm}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i))$$

pero es fácil ver que el término de cruza es cero dado que

$$\sum_i^N m_i\mathbf{v}_{cm}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i) = \sum_i^N m_i\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{v}_{cm}\times\mathbf{\Omega}) = M\mathbf{R}_{cm}\cdot(\mathbf{v}_{cm}\times\mathbf{\Omega}) = 0$$

puesto que $M\mathbf{R}_{cm}$ es nulo para un sistema no inercial. Luego

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_i)^2$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i(\Omega^2 r_i^2 - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_i)^2)$$

pero veamos el último paréntesis en detalle,

$$\left(\sum_j\sum_k \Omega_j\Omega_j x_k^i x_k^i - \sum_\ell\sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i\right)$$

$$\left(\sum_j\sum_k \Omega_j\delta_{jk}\Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_\ell\sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i\right)$$

y reetiquetando

$$\left(\sum_j\sum_k \Omega_j\delta_{jk}\Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_j\sum_k \Omega_j x_j^i \Omega_p x_k^i\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_i^N m_i\sum_{j,k}\Omega_j\Omega_k\left[\delta_{jk}(r^i)^2 - x_j^i x_k^i\right]$$

y entonces

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\Omega_j\Omega_k I_{jk}$$

y como lo último es una forma cuadrática podemos escribir de manera más elegante

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^t I\mathbf{\Omega}.$$

Recordemos que el tensor de inercia tiene en su diagonal los momentos de inercia mientras que los términos fuera de la misma son los productos de inercia.

$$I_{ik} = \sum_q m_q \left(\delta_{ik} (r_q)^2 - x_i^q x_k^q \right)$$

y el paso al continuo nos deja los momentos de inercia,

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{ik} r^2 - x_i x_k \right] dV$$

donde por supuesto es $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Referencias