Capítulo 1

Relatividad especial

1.1 Transformación de vectores

Digamos que un vector transforma

$$X'_i = a_{ij} X_j$$

de manera que se verifique que las leyes físicas sean invariantes frente a rotaciones propias.

Einstein postula que:

- Todos los sistemas inerciales son equivalentes.
- La velocidad de la luz en un sistema inercial es constante. No depende del estado de movimiento del observador.

Sea un sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ de otro S en forma paralela a un eje (ver figura).

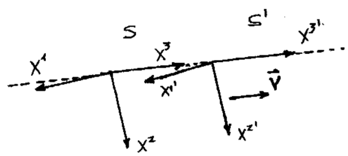

Figura 1.1

Se verifica entonces la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= \gamma \left[x^3 - \beta x^0 \right] \\ x^{0'} &= \gamma \left[x^0 - \beta x^3 \right] \end{aligned}$$

donde son

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad\qquad x^0 = ct$$

A la transformación [1] se le puede dar forma de rotación en funciones hiperbólicas como sigue

$$x^{0'} = x^0 \cosh(\eta) - x^3 \sinh(\eta)$$

$$x^{3'} = -x^0 \sinh(\eta) + x^3 \cosh(\eta)$$

donde seguimos viendo que las leyes son lineales en las coordenadas (el espacio es isótropo)

Debiéramos dar ideas de estas cosas importantes de relatividad especial

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

y no es otra cosa que una rotación en eje $\hat{0}, \hat{3}$ con el ángulo $\eta = atanh(\beta)$. Notemos que se verifica la invariancia del módulo de la transformación

$$(x^{0'})^2 - ((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2) = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$$

o en una notación más feliz

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Este espacio 4D es el de Minkowski y no es euclídeo.

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

La transformación inversa se obtiene tomando los reemplazos

$$x^{i'} \to x^i \quad , \quad x^i \to x^{i'} \quad , \quad \beta \to -\beta$$

El elemento invariante de línea es

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds^{'2}$$

o bien

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

que es el tensor de la métrica. Se verifica

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cuadrivectores en el espacio 4D

Un cuadrivector contravariante es

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

mientras que el covariante es

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$$

y vemos que las partes temporales son las mismas cambiando el signo de la espacial. Las reglas de transformación son

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \qquad\qquad A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta$$

luego el producto interno es

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \equiv A_\alpha B^\alpha$$

donde estamos usando convención de suma de Einstein, que significa que

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{B} = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

que es invariante por ser un escalar de Lorentz,

$$A_\alpha B^\alpha = A'_\alpha B'^\alpha$$

Intervalos entre eventos

Los intervalos deben ser invariantes relativistas y de Lorentz, si el intervalo es temporal se tiene

$$x^0 > x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 > 0$$

y los eventos pueden estar conectados causalmente

$$x^0 < x^i x_i \Rightarrow \delta s^2 < 0$$

y los eventos no pueden estar conectados causalmente. Se cumple

$$\delta s^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

Operadores diferenciales

Tenemos la derivada respecto a una coordenada contravariante

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada covariante, y también la derivada respecto de una coordenada covariante

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla} \right)$$

que es la derivada contravariante. Note la asimetría entre derivo respecto de arriba y es derivada abajo y viceversa. La notación abreviada puede inducir a confusiones.

La cuadridivergencia de un cuadrivector es un invariante,

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\mathbf{A})$$

y aquí vemos $\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha$. Esto nos lleva al D'Alembertiano

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \nabla^2$$

S es el intervalo entre los eventos 1 y 2, y es un invariante lorentziano

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2$$

El intervalo es temporal si $s^2 > 0$ en cuyo caso se tiene

$$c\delta t > |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

lo cual significa que existe frame inercial donde $x_1 = x_2$ los eventos ocurren en el mismo sitio de manera que pueden estar conectados causalmente; puesto que $c\delta t > 0$ y $t_2 > t_1$. Por el contrario si $c^2 < 0$ se tiene

$$c\delta t < |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

y existe entonces frame inercial donde los dos eventos son en el mismo sitio $x_1 = x_2$ y entonces $c\delta t < 0$ y $t_2 < t_1$ de manera que no pueden estar conectados causalmente.

Según se interpreta claramente del gráfico de la figura [ampliar].

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^3) \qquad x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

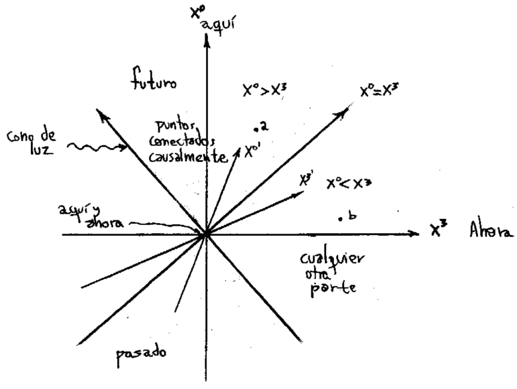

Figura 1.2

y si ahora es $x'^0 = 0$ entonces para un observador en S' se tiene

$$0 = \gamma(x^0 - \beta x^3)$$

o bien $x^0 = \beta x^3$ y aquí es $x'^3 = 0$ de modo que

$$\frac{x^3}{\beta} = x^0$$

y entonces a de la figura puede ser causado por un suceso en el origen pero b no tiene conexión causal con el origen.

1.1.1 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

Sea v/c no despreciable

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta z) \qquad\qquad \gamma > 1$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left(1 - \beta \frac{\Delta z}{c\Delta t}\right)$$

pero si en S' la partícula está en reposo es $v = dz/dt$ de manera que

$$\Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \beta^2)$$

$$\Delta t' = \Delta t (1 - \beta^2)^{1/2}$$

de modo que $\Delta t' < \Delta t$, en S' el tiempo transcurre más lentamente.

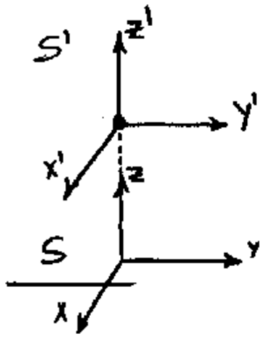

Figura 1.3

Número de onda y conteo

Un proceso de conteo (discreto) es invariante lorentziano

$$x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

siendo **v** entre sistemas SS'. El número de crestas es

$$\#_s = \frac{z_1 - z}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}(z_1 - z) = \frac{k}{2\pi}(ct - z) = \frac{1}{2\pi}(\omega t - kz)$$

$$\#'_s = \frac{1}{2\pi}(\omega' t' - k' z')$$

y se puede generalizar

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$$

$$-\left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \frac{\omega' x'^0}{c}\right) = -\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \frac{\omega x^0}{c}\right)$$

es un invariante lorentziano como

$$k_\alpha x^\alpha = k^\alpha x_\alpha$$

donde el cuadrivector de onda se define

$$k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right).$$

1.2 Forma covariante del electromagnetismo

Partimos de la ecuación de continuidad para la carga,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0$$

la cual con la definición del cuadrivector corriente

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$$

se puede escribir como

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial c\rho}{\partial ct} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0.$$

La formulación covariante empleaba el gauge de Lorentz (así las ecuaciones son validas en cualquier sistema inercial), el gauge de Lorentz era

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$$

siendo el cuadripotencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

y entonces

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial ct} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0.$$

Se podía ver que resultan ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

que viene a ser

$$\partial_\mu \partial^\mu = \Box \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

y para el potencial ϕ

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\phi$$

que desemboca en

$$\partial_\mu \partial^\mu = \Box \phi = \frac{4\pi}{c}(c\rho)$$

Al aplicar el D'Alembertiano a un cuadrivector obtenemos otro cuadrivector

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu.$$

Los campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ forman parte de un tensor de segundo rango antisimétrico llamado tensor de intesidad de campo

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

que matricialmente se puede ver como

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

También se suele definir un tensor de intensidad de campo dual

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$$

que no es otra cosa que

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

y donde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Levi-Civita de cuatro dimensiones, que es nulo cuando se repite un índice. Entonces las ecuaciones de Maxwell en forma covariante explícita resultan

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\alpha.$$

1.2.1 Transformación de los campos

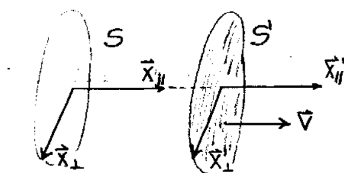

Figura 2.4

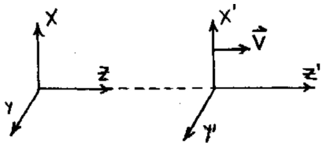

Figura 2.5

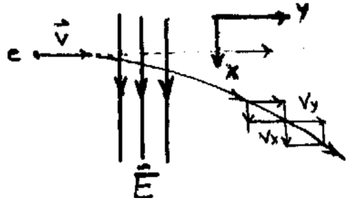

Figura 3.6

1.3 Especie de tiro oblicuo

1.4 cuadrivelocidad

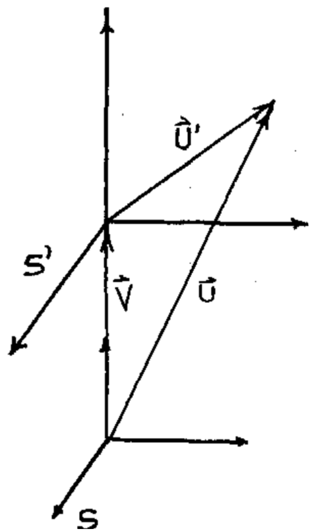

Figura 4.7