## Capítulo 1

# Mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo es el corazón de la mecánica clásica.

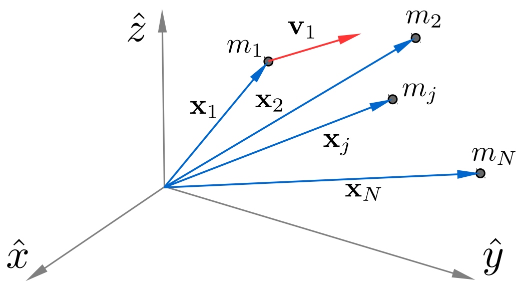


**Figura 0.1** Sistema de partículas de masas $m_i$ con sus correspondientes vectores de posición $\mathbf{x}_i$. La partícula $m_1$ tiene además indicado su vector velocidad $\mathbf{v}_1$.

## 1.1 Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

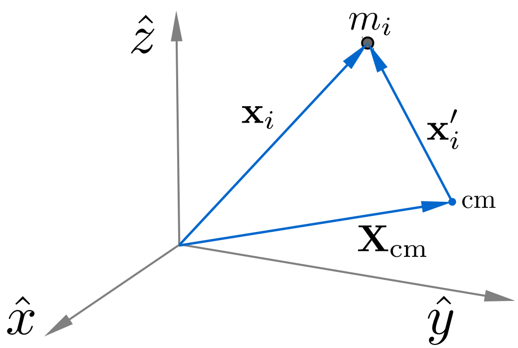


**Figura 1.2**

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i(\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)$$

$$\mathbf{L}_O^T = \sum_i (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$M\mathbf{R} = \sum_i m_i(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

$$M\mathbf{R} = M\mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \quad \Longrightarrow 0 = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}'_i) + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservacion del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum{}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel F_{ij}.$$

## 1.2 Trabajo y energía

Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo.

Consideremos una partícula de masa $m$ que se mueve sobre una cierta trayectoria suave, ver Figura 2.3, debido a la acción de una fuerza $\mathbf{F}$. Su velocidad $\boldsymbol{v}$ es en todo momento tangente a la trayectoria y define de esta forma un versor $\hat{t}$ colineal con la misma. Asimismo podemos definir un versor $\hat{n}$ normal a la trayectoria. Descomponiendo la fuerza y la velocidad en estas dos direcciones, se tiene

$$\mathbf{F} = F_{\hat{t}}\hat{t} + F_{\hat{n}}\hat{n} \qquad\qquad \boldsymbol{v} = v_{\hat{t}}\,\hat{t}$$

de manera que la segunda ley de Newton

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

en la componente $\hat{t}$ es

$$m\frac{dv}{dt} = F_{\hat{t}}$$

donde hemos despojado del subíndice a $v$. Involucrando al diferencial de arco $ds = |d\mathbf{x}|$ a lo largo de la trayectoria es

$$m\,dv\,\frac{ds}{dt} = m\,v\,dv = F_{\hat{t}}\,ds = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x},$$

donde la última igualdad se ha escrito en virtud de que $F_{\hat{n}} \perp d\mathbf{x}$ siempre.

Podemos integrar ambos miembros de la anterior ecuación entre $\boldsymbol{x}(t_0) \equiv \boldsymbol{x}_0$ y su correspondiente velocidad $v(t_0) \equiv v_0$ hasta $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$,

$$m\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

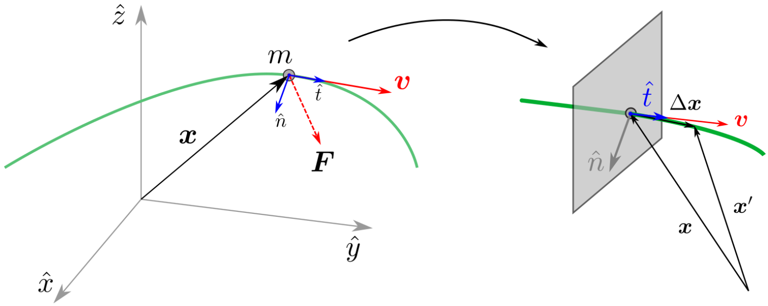


**Figura 2.3**

obteniendo

$$\frac{1}{2}mv^2\bigg|_{v_0}^{v} = W_{\boldsymbol{x}_0\to\boldsymbol{x}}$$

que es el llamado *teorema de las fuerzas vivas* para una partícula de masa $m$ y nos dice que la variación de energía cinética en la trayectoria es igual al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la misma,

$$\Delta T = W.$$

En el caso particular en que la fuerza sea normal en toda la trayectoria integrada se tendrá $\Delta T = 0$, es decir se conserva la energía cinética a lo largo de toda la trayectoria. El trabajo de una fuerza está asociado a las componentes tangenciales de la fuerza; las componentes normales no hacen trabajo.

**Falta meter lo de**

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n$$

Si la fuerza proviene de un potencial[1], se tiene

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V \tag{2.1}$$

y podemos expresar en coordenadas cartesianas esta equivalencia (2.1)

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right)$$

y evaluar la integral del trabajo para obtener

$$W = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\boldsymbol{x}[t])\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}\right]dt = \Phi_0 - \Phi_1$$

lo cual significa que la integral es independiente de la trayectoria $\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_1$.

[1] El menos delante del gradiente es una convención, como se verá a continuación

Entonces, juntando

$$\overbrace{T_1 - T_0 = W_{0\to 1}}^{\text{Vale siempre}} \underbrace{\phantom{W_{0\to 1}} = \Phi_0 - \Phi_1}_{\text{Si } \boldsymbol{F} \text{ proviene de potencial}}$$

y pasando de miembros

$$(T_1 + \Phi_1) = (T_0 + \Phi_0)$$

se tiene que la cantidad $E = T + V$ (la energía mecánica) se conserva si la fuerza $\boldsymbol{F}$ proviene de un potencial $V$.

Notemos que el versor desplazamiento $d\mathbf{s}$ *camina* por la trayectoria.

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

y entonces como el trabajo externo viene de

$$\sum_i^N \int \mathbf{F}_i^{ext} \cdot d\mathbf{s}_i$$

necesito $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i)$ y $\nabla \times \mathbf{F}_i = 0$. Para el trabajo interno

$$W_i^{int} = \int \sum_j^N \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$W^{int} = \sum_i \int \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot \left(d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j\right)$$

## 1.3 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo $F^v$ se *acomodan* en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las $\mathbf{F}^v$ son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

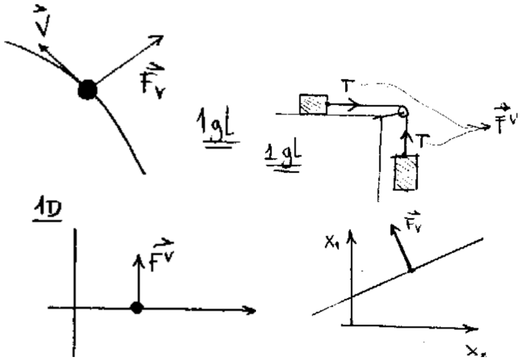


**Figura 3.4**

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos}\left\{\begin{array}{cc} f(r_i,t)=0 & \text{reónomos} \\ f(r_i)=0 & \text{esclerónomos} \end{array}\right\}$$

los cuales cumplen que $W^{F^v}_{virtual}=0$, y

$$\text{no holónomos}\left\{\begin{array}{c} f(r_i,t)\geq 0 \\ f(r_i)\geq cte. \quad f(\dot{r}_i)=0 \end{array}\right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que $\mathbf{F}^v$ perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a $t_0$ fijo compati-

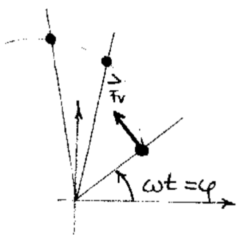


**Figura 3.5**

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en $\delta t$ durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$.

$$f(x_i, t) = cte. \Longrightarrow \sum_{i}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \mathbf{r} = 0$$