Capítulo 1

Mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo es el corazón de la mecánica clásica.

1.1 Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

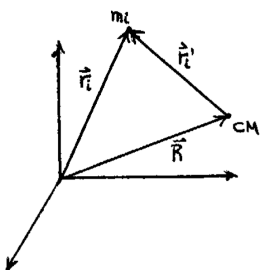

Figura 1.1

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i(\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)$$

$$\mathbf{L}_O^T = \sum_i (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$M\mathbf{R} = \sum_i m_i(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

$$M\mathbf{R} = M\mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \quad \Longrightarrow 0 = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}'_i) + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

$$\mathbf{L}_O^T = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservacion del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel F_{ij}.$$

1.2 Trabajo y energía

$$T_2 - T_1 = W_{1\to 2} = U_1 - U_2$$

donde la primera igualdad vale siempre y la segunda se da si se puede escribir la fuerza como el gradiente de un potencial, i.e.

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

y entonces se conserva la energía

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo.

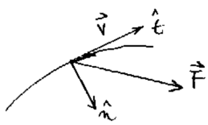

Figura 2.2

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

entonces

$$m\frac{dv}{dt} = F_t \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_n$$

y haciendo un cambio de variable a desplazamiento s

$$mdv\frac{ds}{dt} = F_t ds$$

$$m\int vdv = \int F_t ds = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

$$\frac{1}{2}mv^2\Big|_i^f = W_{i\to f}$$

siendo este resultado el llamado *teorema de las fuerzas vivas*. Notemos que el versor desplazamiento $d\mathbf{s}$ *camina* por la trayectoria.

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

y entonces como el trabajo externo viene de

$$\sum_i^N \int \mathbf{F}_i^{ext} \cdot d\mathbf{s}_i$$

necesito $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i)$ y $\nabla \times \mathbf{F}_i = 0$. Para el trabajo interno

$$W_i^{int} = \int \sum_j^N \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$W^{int} = \sum_i \int \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int \mathbf{F}_{ij} \cdot \left(d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j \right)$$

1.3 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo F^v se *acomodan* en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las $\mathbf{F}^v$ son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

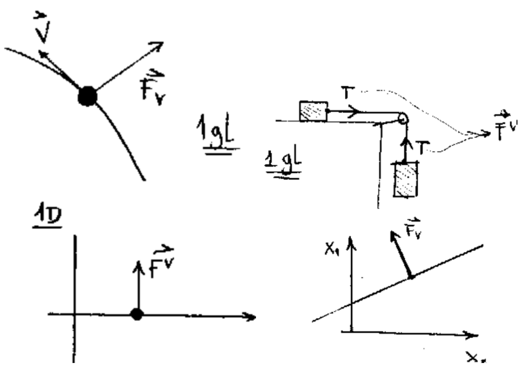

Figura 3.3

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos} \left\{ \begin{array}{cc} f(r_i, t) = 0 & \text{reónomos} \\ f(r_i) = 0 & \text{esclerónomos} \end{array} \right\}$$

los cuales cumplen que $W_{virtual}^{F^v} = 0$, y

$$\text{no holónomos} \left\{ \begin{array}{c} f(r_i, t) \geq 0 \\ f(r_i) \geq cte. \quad f(\dot{r}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que $\mathbf{F}^v$ perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a t_0 fijo compati-

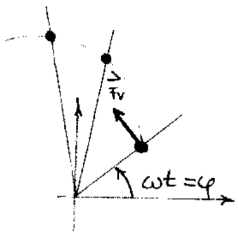

Figura 3.4

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en δt durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en $\hat{r} \perp \mathbf{F}^v$.

$$f(x_i, t) = cte. \Longrightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{r} = 0$$