CBFT Mecánica clásica

Cuerpos rígidos

6 de diciembre 2015

Contenidos

§1. Cuerpos rígidos

Los vínculos constituyen la condición de rigidez,

$$|\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j| = d_{ij} \qquad i \neq j \tag{1.1}$$

Del discreto al continuo

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \longrightarrow \mathbf{R} = \frac{\int \rho \mathbf{r}_i dv}{\int \rho dv}$$

§1.1 Grados de libertad de un cuerpo rígido

Cada punto tiene como vínculos las ecuaciones (1.1)

El cuerpo rígido tiene seis grados de libertad. Si las condiciones de rigidez son lineales resultan cinco grados de libertad.

§1.2 Velocidad de un cuerpo rígido

Lo único que pueden hacer los puntos de un cuerpo rígido es rotar.

$$\delta r_{p_0} = r_{p_0} \sin(\beta) \delta\alpha$$
$$\frac{\delta r_{p_0}}{\delta t} = r_{p_0} \sin(\beta) \frac{\delta\alpha}{\delta t}$$
$$v_{p_0} = \dot{\alpha} r_{p_0} \sin(\beta)$$

pero $v_{p_0} \perp \hat{n}$ y $v_{p_0} \perp r_{p_0}$ de manera que

$$\mathbf{V}_{p_0} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}.$$

Luego, para ir a un sistema inercial le sumo la V de algún punto del rígido (el origen O) medido desde un sistema inercial. Entonces, el campo de velocidad del cuerpo rígido es

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}.$$

§1.3 Unicidad de la velocidad de rotación

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p_0'}$$

siendo $\mathbf{\Omega}$’ la $\mathbf{\Omega}$ como se ve desde el sistema O’

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y donde $\mathbf{\Omega}$ es la vista desde el sistema O.

$$\mathbf{V}_0' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p_0'} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y descomponiendo de acuerdo con el dibujo resulta

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$
$$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_{00'} - \mathbf{r}_{0p}) + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}_{0'p} = 0$$
$$(\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{r}_{0'p} = 0,$$

de la cual se deduce que $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$. Entonces, $\mathbf{\Omega}$ es la misma para cualquier punto del cuerpo rígido.

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{0p})$$
$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0$$

lo cual se cumple para todo punto p perteneciente al cuerpo rigido. Si es $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$ entonces serán $\mathbf{\Omega} \perp \mathbf{V}_0$ y $\mathbf{\Omega} \perp \mathbf{V}_p$.

Si en un instante dado $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{V}_p$ entonces $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular a $\mathbf{V}_{p'}$ para todo punto del cuerpo rígido.

§1.4 Eje instantáneo de rotación

Si p es tal que $\mathbf{V}_p = 0$ entonces

$$\mathbf{V}_0 = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{p0}$$

donde $\mathbf{V}_0$ es una velocidad desde un sistema inercial. Desde el sistema inercial el cuerpo rígido realiza una rotación pura, puesto que veo al punto O rotar en torno a algún eje.

$$\mathbf{V}_0 = -\mathbf{\Omega} \times (r_\perp + r_\parallel) = -\mathbf{\Omega} \times r_\perp$$

y esto define un eje instantáneo de rotación.

§2. Ángulos de Euler

Se toma un sistema 123 inicialmente coincidente con uno XYZ paralelo al inercial, 123 tiene origen en el centro de masa del cuerpo.

$$A_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

y expresando $\hat{z}, \hat{n}$ en $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ resulta

$$\mathbf{\Omega} = [\dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi)]\hat{1} + [\dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{\theta}\sin(\psi)]\hat{2} + [\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi}]\hat{3}$$

Ahora estamos interesados en el momento angular.

$$\mathbf{L}_0^{sist} = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i')$$

que están en el sistema 123.

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}) \,\right]$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \boldsymbol{\Omega} \sum_{j}^{3} (x_j^{2i}) - \mathbf{r}_i \sum_{\ell}^{3} x_\ell^i \Omega_\ell \,\right]$$

y la componente k-ésima será

$$L_k = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \Omega_k \sum_{j}^{3} (x_j^{2i}) - x_k^i \sum_{\ell}^{3} x_\ell^i \Omega_\ell \,\right]$$

$$L_k = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \sum_{j}^{3} \delta_{kj} \Omega_j r_i^2 - x_k^i \sum_{\ell}^{3} x_\ell^i \Omega_\ell \,\right]$$

$$L_k = \sum_{j}^{3} \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i \,\right] \Omega_j = \sum_{j}^{3} I_{kj} \Omega_j$$

o vectorialmente

$$\mathbf{L}_{spin} = I\boldsymbol{\Omega}$$

siendo I el tensor de inercia. Explícitamente:

$$I_{kj} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\, \delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i \,\right]$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Referencias