Capítulo 1

Gas de Fermi

DIBUJOS

$$\langle n_e \rangle = \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e}+1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\mu-e)}+1}$$

Si $\mu < 0$ como $e > 0$ siempre, ni aún en el estado de más baja energía se llega a ocupar el nivel (restan muchos niveles vacíos).

Sea que $T \to \infty$ entonces $\beta \to \infty$ y se sigue que

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to \infty e > \mu$$

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to 0 e < \mu$$

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to 1 e = \mu$$

Luego, con $T = 0$ es Fermi un escalón. El valor de μ que determina el último estado ocupado se llama e_F

DIBUJO

$$f_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v} = \int_0^{\xi=\beta\mu} \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)3/2} dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta\mu)^{3/2} = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta e_F)^{3/2}$$

1.1 Análisis del gas ideal de Fermi

La primera aproximación consiste en

- Caso no degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ que lleva a T alta y v alto por ende N/V chico.

$$z \ll 1 \qquad f_\nu(z) \approx z \qquad \frac{\lambda^3}{v} \approx z$$

Si vale la condición entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \ll 1 \qquad z \ll 1$$

$$\beta pV \approx 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \qquad\qquad U = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta}\left(1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}}\right)$$

- $\frac{\lambda^3}{v} < 1$ entonces $z < 1$ y hay que expandir el virial,

$$\beta pV = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

que igualando coeficientes se hace (¿?)

λ^3/v a orden 1 hay efectos cuánticos

$$f_{5/2}(z) = f_{3/2}(z) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

- $\frac{\lambda^3}{v} \approx 1$ Cálculo numérico
- Caso altamente degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$ se tiene $z \gg 1$ Se puede expandir $f_\nu(z)$ en función de $(\log)^{-1}$ mediante lema de Sommerfeld

$z \ggg 1$ **entonces** $\log z \gg 1$ $(\log z)^{-1} \ll 1$ $\log z = \beta\mu$

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\pi^{1/2}} (\log z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

y entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \qquad \text{a orden } 0$$

$$\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{N}{V} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (kT)^{3/2} = \mu^{3/2}$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = \mu^{3/2} = e_F^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (kT)^{3/2} = \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = e_F^{3/2} \approx \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]$$

$$e_F \approx \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8}(\frac{\mu}{kT})^{-2}\right]^{2/3} \approx \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$$

Anoté *investigar este pasaje.*

$$e_F \approx \mu \left[1 - \frac{\pi^2}{12}(\frac{kT}{e_F})^2\right]$$

y consideramos

$$\frac{1}{\mu^2} \approx \frac{1}{e_F^2}$$

pués μ es muy grande.

$$\beta pv = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{2\beta\mu}{5}\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]\left[1 - \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$$

Hasta orden dos en T resulta

$$pv \approx \frac{2\mu}{5}\left[1 + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] = \frac{2e_F}{5}\left[1 - \frac{\pi}{12}\left(\frac{kT}{e_F}\right)^2\right]\left[1 + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{kT}{e_F}\right)^2\right]$$

$$pv \approx \frac{2e_F}{5}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{e_F}\right)^2\right]$$

$$U = \frac{3}{2}pv \approx \frac{3}{5}Ne_F\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{e_F}\right)^2\right]$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \approx \frac{N\pi^2k^2T}{2e_F} \qquad C_V \propto T$$

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{2}Nk\left(\frac{T}{T_F}\right)$$

DIBUJO T_F siempre estará ene general en la zona clásica donde no vale la aproximación degenerada.

Calor específico Fermi (¿?)

- Caso totalmente degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \to \infty \qquad (T \to 0) \qquad z \to \infty$

  La distribución de estados es escalón,

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta p^2/2m} + 1}\right) dp$$

$z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$ **y**
$z(T \to 0) = \mathrm{e}^{\beta e_F} \to \infty$

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$$

Teniendo el límite sale la cuenta

Notemos que

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 kT \log(1 + \mathrm{e}^{-1/kT(p^2/2m - \mu_0)}) dp$$

tiene un comportamiento no trivial con $T \to 0$. Si $kT \to 0$ entonces si $e > \mu_0$ el log $\to 0$ y si $e < \mu_0$ el log $\to \infty$. Parecería que con $T \to 0$ es

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{p^2}{2m} - \mu_0 \right) dp$$

y haciendo el cambio de variables de acuerdo a $p^2/2m = e$, que lleva a $pdp = mde$, se tiene

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{e_F} \sqrt{2e} m^{3/2} (e - \mu_0) de$$

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} \left(\frac{e_F^{5/2}}{5/2} - \mu_0 \frac{e_F^{5/2}}{3/2} \right) = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{4}{15}$$

$$U = \frac{3}{2} pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{2}{5}$$

$$p = \frac{2}{5} e_F \frac{\langle N \rangle}{V} \qquad U = \frac{3}{5} e_F \langle N \rangle$$

A $T = 0$ tenemos presión y energía no nulas; las partículas no se acomodan todas en un único nivel energético (exclusión de Pauli). Para $T \approx 0$ (T bajas) el escalón en estados apenas se desdibuja

DIBUJO.

1.2 Cuánticos III –reubicar–

1.2.1 Los números de ocupación

DIBUJO

Se ve que para Bose $\mu < 0$ siempre pero $\langle n \rangle \to \infty$ si $\mu \to 0^+$. El gráfico es para T alta. Con T bajas todo tiende a suceder más pegado al eje $\beta(e - \mu) = 0$

1.2.2 Comportamiento de $f_{3/2}(z)$

$$f_{3/2}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j^{3/2}} \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \qquad z \text{ chico}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} dx \approx \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx$$

Notemos que con $\beta\mu$ grande el integrando es 1 o 0 (DIBUJO); en realidad es un escalón en el límite en que $\xi \equiv \beta\mu \to \infty$

Definimos $\log z \equiv \xi$ **para no especular con temperaturas.**

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \; z \text{ muy alto}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + ... \right]$$

El valor λ^3/v determina relación entre T, V, N que son los parámetros macroscópicos que uno fija.

1.2.3 Casos

- Comportamiento clásico: $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ Altas T y bajas $n \equiv \frac{N}{V}$

  $$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

  y por inversión de la serie

  $$z = \frac{\lambda^3}{v} + \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2 2^{-3/2}$$

  Sabemos que en Boltzmann es $\frac{\lambda^3}{v} = z$

  y entonces si $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ se tiene que $z \ll 1$

  $$\frac{pv}{kT} = \frac{v}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \qquad\qquad \frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z)$$

  $$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{z - z^2/2^{5/2}}{z - z^2/2^{3/2}} \approx 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)$$

  siendo el último término una corrección cuántica.

- Comportamiento cuántico : $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$ Bajas T y altas $n \equiv \frac{N}{V}$
  A $T = 0$ determinamos la e_F como (con el límite de $T \to 0$)

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2}$$

$$\left(\frac{3\lambda^3\sqrt{\pi}}{4v}\right)^{2/3} = \left(\frac{3h^3\sqrt{\pi}}{4(2\pi mkT)^{3/2}v}\right)^{2/3} = \log z = \beta e_F$$

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4\pi v}\right)^{2/3} = e_F = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{2/3}$$

  A $T = 0$ la ocupación por nivel es un escalón ($e_F = \mu(T = 0)$)

$$\langle n_e \rangle = \begin{cases} 1 & e < e_F \\ 0 & e > e_F \end{cases}$$

1.2.4 Funciones termodinámicas con T baja y n alta

Usamos Sommerfeld

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \qquad\qquad \mu = e_F$$

orden 1

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]^{-1} \approx (\log z)^{3/2}$$

$$e_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right) \approx \mu(T) \text{ cumple } \mu(T = 0) = e_F$$

Puede verse que con $\frac{\lambda^3}{v} \ggg 1$ (T baja y n alta) es

$$C_V \approx \frac{N\pi^2k^2T}{2e_F}$$

DIBUJO

Aún a $T = 0$ hay presión no nula pero $S \to 0$ con $T \to 0$ respetando la tercera ley. Existe una relación de recurrencia

$$z\frac{\partial}{\partial z} f_\nu(z) = z\frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{lz^{l-1}z}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^{\nu-1}} = f_{\nu-1}(z)$$

$$f_\nu(z) = \int \frac{1}{z} f_{\nu-1}(z)dz$$

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\log z)^{5/2}$$

entonces

$$f_{5/2}(z) = \int dz \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(\log z)^{3/2}}{z} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int dz \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial z}(\log z)^{5/2} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\log z)^{5/2}$$

Usamos $d(\log z)^n = n(\log z)^{n-1}/z$

1.2.5 Sobre la aproximación de gas de Fermi para el núcleo

En lo que sigue una deducción más detallada del cálculo. Considero una caja de lados L

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \qquad \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} = \frac{h}{L}\mathbf{n}$$

Tomo en el origen de coordenadas $n_i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ **y así voy de** $-L/2$ **a** $L/2 <$**.**

$$E = \frac{(\hbar|\mathbf{k}|)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{m}\frac{2\pi^2}{L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

Quiero saber qué densidad de estados energéticos tengo. Para ello, en esféricas

$$E = \frac{\hbar^2}{m}\frac{2\pi^2}{L^2}r^2$$

donde r vive en la esfera (no es necesario tomar el octante y dividir sobre 8)

$$g(E)dE = N(r)dr = 4\pi r^2 dr$$

siendo $g(E)dE$ el número de puntos entre E y $E + dE$,

$$dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{L^2 m}4rdr$$

$$g(E)dE = \frac{L^3 m^{3/2} E^{1/2}}{\hbar^{3/2}\pi^2\sqrt{2}}dE$$

$$N = g\int_0^{e_F} g(E)dE = \sqrt{2}\frac{Vm^{3/2}}{\hbar^3\pi^2}\int_0^{e_F} e^{1/2}dE$$

$$N = \frac{Vm^{3/2}}{\hbar^3\pi^2}\frac{2^{3/2}}{3}e_F^{3/2}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{m^{3/2}}{\hbar^3\pi^2}\frac{2^{3/2}}{3}e_F^{3/2}$$

y entonces deducimos de aquí que

$$e_F = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{v}\right)^{2/3}$$

que coincide con la expresión para e_F con degeneración $g = 2$

¿Y estas cuentas sueltas?

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{(\hbar\pi)^2}{2ma^2} r^2 \qquad\qquad dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{ma^2} r dr$$

$$N(r)dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$$

será lo mismo que el incremento en niveles energéticos

$$N(e)de = \frac{m^2 a^3}{\pi^2 \hbar^3}\left(\frac{E}{2}\right)^{1/2} dE$$

Recordemos que a $T = 0$ era $pV = 2/5 N e_F$ y $U = 3/5 N e_F$

Pensamos un conjunto de nucleones como un gas de Fermi. Claramente

$$N = 2\int_0^{e_F} N(e)\, de$$

porque tenemos la ocupación en función de la energía

$$e_F \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \text{ según la definición de } e_F$$

Al aplicar este modelo (del gas de Fermi) al núcleo hacemos algunas consideraciones

$$R = a_0 A^{1/3} \qquad V \propto A$$

siendo A el número de nucleones.

Para un núcleo se tienen N=A-Z neutrones, siendo Z protones y A nucleones.

$$E = \frac{3}{5} N_T e_F (\text{ a } T = 0)$$

y tenemos un e_F de protones y de neutrones, que son

$$e_{Fp} \propto \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \qquad\qquad e_{Fn} \propto \left(\frac{A-Z}{A}\right)^{2/3}$$

$$E = \frac{3}{5}\left[Z\left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3} + (A-Z)\left(\frac{A-Z}{V}\right)^{2/3}\right] = \frac{3}{5}\left(\frac{Z^{5/3} + (A-Z)^{5/3}}{A^{2/3}}\right)$$

donde hemos supuesto ambos pozos iguales. Si los pozos no fueran iguales cambia la e_F.

Se minimiza E con $Z = N = A/2$ (simetría)

$$f_4 \propto E - E_0 = \frac{3}{5A^{2/3}} \left[Z^{5/3} + (A-Z)^{5/3} - 2(A/2)^{5/3} \right]$$

que se puede reescribir en función de $D = (N-Z)/2 = (A-2Z)/2 = A/2 - Z$ (que será chico) y de esta manera

$$Z = \frac{A}{2} - D \qquad A - Z = \frac{A}{2} + D$$

$$f_4 \propto \frac{3}{5} \left(\frac{[A/2 - D]^{5/3} + [A/2 + D]^{5/3} - 2[A/2]^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$

y que con un Taylor en $D \approx 0$ resulta

$$f_4 \propto \frac{(A/2 - Z)^2}{A} \propto D^2 \text{ término de simetría}$$

1.2.6 Cuánticos 3 – más material para reubicar–

Un esquema de temas: comportamiento de los números de ocupación gas de Fermi : comportamiento de $f_\nu(z)$ con $\nu = 3/2$ gas de Fermi con condiciones extremas

$$\lambda^3/v \ggg 1 \qquad\qquad \lambda^3/v \lll 1$$

e_F con degeneración g funciones termodinámicas con $\lambda^3/v \ggg 1$ $S \to 0$ con $T \to 0$ Aproximación de gas de Fermi para núcleo densidad de estados $g(e)$

La expresión para $\mu(T)$ con $T \geq 0$ sale de

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]$$

$$(\log z)^{3/2} = \frac{3\sqrt{\pi} h^3}{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{3/2} 4v} \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]}$$

$$\mu = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m} \left(1 + \frac{\pi^2}{8 \log^2 z} \right)^{-2/3}$$

$$\mu = e_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

Hay un yeite en la deducción que refiere a que abajo es lo mismo usar orden 1 que orden dos y reemplazo $(\beta\mu)^{-2}$ por $(\beta e_F)^{-2}$

y con T baja podemos escribir todo en función de la e_F.

$$E = \frac{3}{5} N e_F \qquad \text{con } T = 0$$

Lo importante de tener $f_{3/2}(z)$ en función de λ^3/v, desde

$$\lambda^3/v = f_{3/2}(z)$$

DIBUJO

es que vemos que z chico lleva a λ^3/v grande y consecuentemente z grande lleva a λ^3/v grande.

Luego,

clásico $z \ll 1$

$$\frac{\lambda^3}{v} \ll 1 \text{ independientemente}$$

cuántico $z \gg 1$

$$\frac{\lambda^3}{v} \gg 1 \text{ independientemente}$$

Con $T = 0$ es $\mu(T = 0) = e_F$ DIBUJO escalón

Cuántico (límite máximo) entonces

$$z \to \infty \Rightarrow \frac{\lambda^3}{v} = \frac{4(\log z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{2\sqrt{\pi}} (\beta e_F)^{3/2} \text{ con } z = \mathrm{e}^{\beta e_F}$$

Entonces e_F es el nivel tal que debajo de él hay N estados. En el espacio de momentos las partículas ocupan una esfera de radio p_F.

1.2.7 Estadísticas –otra cosa para reubicar–

Esta sección es un sketchi

$$\langle n \rangle_i = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(e_i - \mu)} + a} \qquad \begin{cases} a = 0 & \text{MB} \\ a = -1 & \text{BE} \\ a = 1 & \text{FD} \end{cases}$$

DIBUJO

Graficamos $1/\,\mathrm{e}^{x}+a$ En la zona clásica coinciden las tres y es

$$\mathrm{e}^{\beta(e_i-\mu)} \gg 1 \forall e_i \text{ de interés}$$

$$z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i} \gg 1 \qquad \beta(e_i-\mu) \gg 0$$

$$\mathrm{e}^{\beta e_i} \gg z \qquad e_i \gg \mu$$

de (2) se deduce que como e_i pueden ser ≈ 0 entonces $0 \gg \mu$ y por lo tanto $\mathrm{e}^{\beta\mu} \equiv z \ll 1$ de (1)

$$1 \gg \mathrm{e}^{\beta\mu} \qquad 0 \gg \beta\mu$$

Clásicamente $\mathrm{e}^{\beta\mu}$ domina sobre z

$$\mu < 0 \text{ y } |\mu| \gg 1$$

$$\text{Bose } \mu < \text{ todo } e$$

$$\text{Fermi } \mu \text{ sin restricción}$$

Para $z \ggg 1$ conviene definir $\xi = \log z$ y entonces

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{\mathrm{e}^{x-\xi}+1} dx$$

Siendo ξ grande se tendrá que

$$F = \frac{1}{\mathrm{e}^{x-\xi}+1} = \begin{cases} 1 & x < \xi \\ 1/2 & x = \xi \\ 0 & z > \xi \end{cases}$$

En este supuesto $\xi \ggg 1$ podemos integrar

$$f_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} dx$$

donde suponemos $T \gtrsim 0$ con lo cual $\beta\mu \to \infty, \xi \to \infty$ y $z^{-1} \to 0$, $\mathrm{e}^{-\xi} \to 0$

$$f_\nu(z) \approx \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu)\nu}$$

Con $\nu = 3/2$ resulta

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{(\log z)^{3/2}}{\Gamma(3/2)3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta\mu)^{3/2} \to \left(f_{3/2}(z)\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{\beta} = e_F$$

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4v\pi}\right)^{2/3} = \mu = e_F(\mu \text{ a } T = 0)$$

La $e_F(\mu \text{ a } T = 0)$ es la energía hasta la cual se hallan ocupados los niveles energéticos. Con $T \gtrsim 0$ la ocupación es un escalón

DIBUJO

La e_F es el valor de $\mu(T = 0)$

La energía U es

$$U = \frac{3}{2}pV = \frac{3V}{2\beta\lambda^3}f_{3/2}(z) = \frac{3N}{2\beta}\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}$$

Tenemos una aproximación de Sommerfeld para z grande

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\log z)^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}(\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\log z)^{5/2}\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}(\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$U = \frac{3N}{5\beta}(\log z)\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}(\log z)^{-2} + ...\right]\left[1 + \frac{\pi^2}{8}(\log z)^{-2} + ...\right]^{-1}$$

$$U = \frac{3\mu}{5}\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}(\log z)^{-2} + ...\right] = \frac{3\mu}{5} + \frac{15\pi^2\mu}{60}\left(\frac{1}{\beta\mu}\right)^2 + ...$$

$$C_v \equiv \frac{\partial}{\partial T}U/N \cong \frac{\pi^2}{2}\frac{k^2T}{\mu}$$

entonces con $T \gtrsim 0$ es $C_v \propto T$ y con $T = 0$ es

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{5}e_F$$

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{5}e_F\left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\underbrace{e_F/k}_{\equiv T_F}}\right)^2 + ...\right)$$