

## Capítulo 1

---

# Gas de Fermi

DIBUJOS

$$\langle n_e \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta e} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\mu - e)} + 1}$$

Si  $\mu < 0$  como  $e > 0$  siempre, ni aún en el estado de más baja energía se llega a ocupar el nivel (restan muchos niveles vacíos).

Sea que  $T \rightarrow \infty$  entonces  $\beta \rightarrow 0$  y se sigue que

$$e^{\beta(e - \mu)} \rightarrow \infty e > \mu$$

$$e^{\beta(e - \mu)} \rightarrow 0 e < \mu$$

$$e^{\beta(e - \mu)} \rightarrow 1 e = \mu$$

Luego, con  $T = 0$  es Fermi un escalón. El valor de  $\mu$  que determina el último estado ocupado se llama  $e_F$

DIBUJO

$$f_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v} = \int_0^{\xi = \beta \mu} \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2) 3/2} dx = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi^{1/2}} (\beta \mu)^{3/2} = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi^{1/2}} (\beta e_F)^{3/2}$$

## 1.1 Análisis del gas ideal de Fermi

La primera aproximación consiste en

- Caso no degenerado :  $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$  que lleva a  $T$  alta y  $v$  alto por ende  $N/V$  chico.

$$z \ll 1 \quad f_\nu(z) \approx z \quad \frac{\lambda^3}{v} \approx z$$

Si vale la condición entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \ll 1 \quad z \ll 1$$

$$\beta p V \approx 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \quad U = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} \left( 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \right)$$

- $\frac{\lambda^3}{v} < 1$  entonces  $z < 1$  y hay que expandir el virial,

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1}$$

que igualando coeficientes se hace (¿?)

$\lambda^3/v$  a orden 1 hay efectos cuánticos

$$f_{5/2}(z) = f_{3/2}(z) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left( \frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1}$$

- $\frac{\lambda^3}{v} \approx 1$  Cálculo numérico
- Caso altamente degenerado :  $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$  se tiene  $z \gg 1$  Se puede expandir  $f_{\nu}(z)$  en función de  $(\log z)^{-1}$  mediante lema de Sommerfeld  $z \gg 1$  entonces  $\log z \gg 1$   
 $(\log z)^{-1} \ll 1$   $\log z = \beta \mu$

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\pi^{1/2}} (\log z)^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right]$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right]$$

y entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \quad \text{a orden 0}$$

$$\frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{N}{V} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (k T)^{3/2} = \mu^{3/2}$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/24}} = \mu^{3/2} = e_F^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (k T)^{3/2} = \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right]$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/24}} = e_F^{3/2} \approx \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]$$

$$e_F \approx \mu \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{-2} \right]^{2/3} \approx \mu \left[ 1 + \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

**Anoté** investigar este pasaje.

$$e_F \approx \mu \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

y consideramos

$$\frac{1}{\mu^2} \approx \frac{1}{e_F^2}$$

pués  $\mu$  es muy grande.

$$\beta p v = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{2\beta\mu}{5} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Hasta orden dos en  $T$  resulta

$$p v \approx \frac{2\mu}{5} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] = \frac{2e_F}{5} \left[ 1 - \frac{\pi}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right] \left[ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$p v \approx \frac{2e_F}{5} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$U = \frac{3}{2} p v \approx \frac{3}{5} N e_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \approx \frac{N \pi^2 k^2 T}{2 e_F} \quad C_V \propto T$$

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{2} N k \left( \frac{T}{T_F} \right)$$

DIBUJO  $T_F$  siempre estará ene general en la zona clásica donde no vale la aproximación degenerada.

Calor específico Fermi (¿?)