Capítulo 1

Introducción

1.1 El experimento de Stern-Gerlach

Un horno emite átomos de plata (Ag) neutros con un electrón e en la última órbita que le da el spín al átomo como un todo. Al salir del horno los átomos tienen su spín orientado en cualquier dirección. Ver figura. El momento magnético del átomo que sale del horno es

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_e c}\mathbf{S}$$

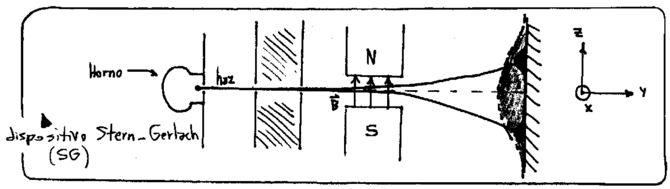

Figura 1.1

La fuerza f_z que le ejerce el campo $\mathbf{B}$ a estos átomos es

$$f_z \propto -\mu_z$$

de modo que el dispositivo SG mide y filtra por $S_z(\mu_z)$. Si el spín es un ente clásico es de esperar un patrón como el sombreado en azul, pero se obtienen dos manchas; con la correspondencia mostrada bajo estas líneas

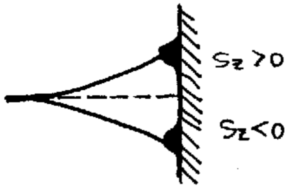

Figura 1.2

Entonces el spín no es un ente *continuo*: está cuantizado y sólo puede tomar dos valores. Llamamos a estos estados

$$(S_z,+) \qquad\qquad (S_z,-)$$

Luego, un aparato de SG filtra o selecciona ciertos átomos. Podemos combinarlos.

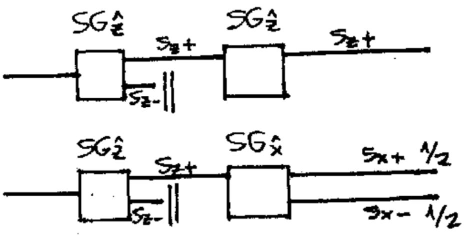

Figura 1.3

Con el dispositivo segundo orientado en $\hat{x}$ obtenemos mitad de átomos en $(S_z,+)$ y mitad en $(S_z,-)$. La única es que en realidad lo que sucede es que $(S_z,+)$ se compone de $(S_x,+)$ y $(S_x,-)$.

Acá abajo sale $(S_z,-)$ pero para que ello sea posible $(S_x,+)$ se debe componer de $(S_z,+)$ y $(S_z,-)$. Pero esto no es posible porque al segundo aparato no entró jamás $(S_z,-)$. Se filtró antes.

Los spines en S_x, S_z son incompatibles. Al seleccionar $(S_z,+)$ en el segundo SG se destruye la información previa sobre S_z. No podemos ya garantizar que S_z sea nula. El tercer experimento da al traste con la idea de que podamos pensar en spín como un ente vectorial en 3D. Mediante una analogía con polarización de luz vemos que es necesario meter al spín es un espacio vectorial de dimensión 2 pero con coeficientes complejos.

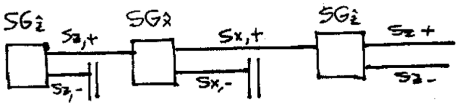

Figura 1.4

1.2 Algebra?

El ket contiene toda la información cuántica del estado. Da el estado físico del sistema.

- $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$ la suma de kets es un ket
- $c\,|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\, c$ con $c \in \mathbb{C}$
- $c_1\,|\alpha\rangle + c_2\,|\beta\rangle = |\gamma\rangle$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
- $c\,|\alpha\rangle\,, |\alpha\rangle$ representan el mismo estado cuántico

Se define un espacio de *Bra* dual al de ”kets” al que se va mediante “dual conjugado”

$$|a\rangle\,, |a'\rangle \Leftrightarrow \langle a|\,, \langle a'|$$

$$|a\rangle + |b\rangle \leftrightarrow \langle a| + \langle b| \qquad c\,|a\rangle \leftrightarrow c^*\,\langle a|$$

Se define también un producto interno según

$$(\langle\alpha|)(|\beta\rangle) \equiv \langle\alpha\,|\,\beta\rangle$$

que no es otra cosa que un número complejo. Se puede hacer entonces una equivalencia con los vectores estándard del álgebra del siguiente modo

$$\text{ket} \sim \text{vector columna} \qquad |x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bra} \sim \text{vector fila} \qquad \langle x| = (1\ 0)$$

y habiendo definido esta base escribimos, por ejemplo

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|y\rangle$$

$$\langle a\,|\,x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y del mismo modo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle x| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle y|\right)(|x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.2.1 Propiedades

1. $\langle\beta\,|\,\alpha\rangle = \langle\beta\,|\,\alpha\rangle^*$ luego $\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle \ \in \mathbb{R}$
2. $\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle \geq 0$ métrica definida positiva
3. $\langle\alpha\,|\,\beta\rangle = \langle\beta\,|\,\alpha\rangle = 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle \perp |\beta\rangle$
4. $\langle\tilde{\alpha}\,|\,\tilde{\alpha}\rangle = 1$ con $|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle}}\,|\alpha\rangle$ todo ket no nulo es normalizable

1.2.2 Operadores

A cada observable lo representaremos por un operador. hay opereraradores que no vienen de observables.

$$\hat{A}\,|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \qquad\qquad \langle\alpha|\,\hat{A} = \langle\gamma|$$

un operador sobre un ket da otro ket y sobre un bra da otro bra. Notemos que en este último caso opera a izquierda. La transformación entre operadores se da con

$$\hat{X}\,|a\rangle \Leftrightarrow \langle a|\,\hat{X}^\dagger$$

donde † (daga) significa el traspuesto conjugado; cambia el sentido hacia donde actúa el operador y conjuga. Se da que si

$$\hat{X} = \hat{X}^\dagger \quad \Rightarrow \qquad \hat{X} \text{ es hermítico}$$

Se dan

- $\hat{X}\hat{Y} \neq \hat{Y}\hat{X}$ no conmutativo
- $\hat{X}(\hat{Y}\hat{Z}) = (\hat{X}\hat{Y})\hat{Z} = \hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ asociativo
- $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$
- $\hat{0}\,|\alpha\rangle = 0 \qquad \forall\,|\alpha\rangle$; $\hat{0} \equiv$ operador nulo
- $\hat{X}(c_1\,|\alpha\rangle + c_2\,|\beta\rangle) = c_1 hatX\,|\alpha\rangle + c_2 hatX\,|\beta\rangle$

de modo que en cuántica los observables se representan mediante operadores hermíticos.

1.2.3 sandwichs

$$\langle\beta\,|\,X\,|\,\alpha\rangle = (\langle\beta|)(X\,|\alpha\rangle) = \langle\beta\,|\,\gamma\rangle = \langle\gamma\,|\,\beta\rangle^* = (\langle\alpha\,|\,X\,|\,\beta\rangle)^*$$

de manera que extraemos como conclusión

$$\langle\beta\,|\,X\,|\,\alpha\rangle = (\langle\alpha\,|\,X\,|\,\beta\rangle)^*$$