CURSO BÁSICO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 4: Física Teórica 3 [Mecánica Estadística]

E.F. Lavia

versión 0.1

21 de febrero de 2018

Contenidos

Capítulo 1

Básicos de termodinámica

1.1 Energía y entropía

Una de las formulaciones de la 2da ley es definir la entropía. Surge de:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2} \qquad \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{T_1}{T_2} = 0 \text{ reversible}$$

$$\int \frac{dQ}{T} \leq 0 \qquad \text{desigualdad de Clausius}$$

Proceso reversible en un sistema aislado

$$S_{A\to B} = \int_A^B dS = 0$$

pues

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{p}{V} dV + \frac{\mu}{T} dN = 0$$

La existencia de S es independiente de su cálculo

pero en procesos irreversibles la variación de S es cota superior:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} < \int_A^B dS = S_{A\to B}.$$

Luego, para un sistema aislado, en un proceso irreversible

$$dS_I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dQ_I}{T} = 0$$

y entonces

$$0 < \int_A^B dS = S_{A\to B}$$

La entropía solo aumenta. Podría calcular $S_{A\to B}$ con un proceso reversible de $A \to B$ pero ahí ya tengo que intervenir sobre el sistema (no hay procesos espontáneos –en un sistema aislado– reversibles).

En reversibles

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

mientras que en irreversibles

$$dU = ddQ_I - pdV + \mu dN, \quad \text{pero} \quad dQ_I < TdS$$

y entonces

$$dU < TdS - pdV + \mu dN$$

Si S es homogénea, se tiene

$$S = S(\lambda U, \lambda X, \{\lambda N_i\}) = \lambda S(U, X, \{N_i\})$$

En un sistema PVT $Y = -p$.

y además si

$$TdS = dU - YdX - \mu_i dN_i$$

$$\frac{dS}{d\lambda} = S = \frac{\partial S}{\partial \lambda U}\frac{d\lambda U}{d\lambda} + \frac{\partial S}{\partial \lambda X}\frac{d\lambda X}{d\lambda} + \frac{\partial S}{\partial \lambda N_i}\frac{d\lambda N_i}{d\lambda}$$

$$S = \frac{\partial S}{\partial \lambda U}U + \frac{\partial S}{\partial \lambda X}X + \frac{\partial S}{\partial \lambda N_i}N_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda U}\left[S(\lambda U)\right] = \frac{\partial}{\partial \lambda U}\left[\lambda S(U)\right] = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$$

y procediendo del mismo modo con Y, μ

$$S = \frac{1}{T}U + \frac{-Y}{T}X + \frac{-\mu_i}{T}N_i$$

y arribamos a la ecuación fundamental

$$TS = U - YX - \mu_i N_i$$

o bien

$$U = TS + YX + \sum_i \mu_i N_i$$

La primera ley (en sistemas reversibles) era

$$dU = TdS + YdX + \sum_i \mu_i dN_i$$

y a S, V, N constantes

$$dU^R = 0 \qquad dU^I \leq 0$$

la mínima U es equilibrio. Si existe trabajo que no es de volumen resulta

$$dU < -dW_{\text{libre}}$$

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN = \frac{dQ}{dT} \leq dS$$

Si el sistema está aislado será

$$0 \leq dS \quad \text{condición de equilibrio}$$

alcanzando el máximo ya no puede disminuir la entropía.

1.2 Transformadas de Legendre de las funciones termodinámicas

$$f(x, y, z) \qquad \text{con pendientes} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

entonces

$$\varphi(f_x, y, z) = f(x, y, z) - x \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\bigg|_{y,z}$$

es la transformada de Legendre respecto de x, mientras que

$$\varphi(f_x, f_y, z) = f(x, y, z) - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$$

es la transformada de Legendre respecto de y.

La transformada de Legendre transforma una función homogénea en otra función homogénea, mantiene el carácter de función de estado.

$$d\varphi(f_x, y, z) = df - dx\frac{\partial f}{\partial x} - xd\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Para el caso de la energía

$$U = U(S, V, N) \qquad\qquad dU = TdS - pdV + \mu dN$$

y entonces

$$A = U - S\frac{\partial U}{\partial S}\bigg|_{V,N} = U - ST \qquad \Rightarrow \qquad A = A(T, V, N)$$

$$H = U - V \frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_{S,N} = U + pV \qquad \Rightarrow \qquad H = H(S,p,N)$$

$$G = U - S\frac{\partial U}{\partial S}\bigg|_{V,N} - V\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_{S,N} = U - ST + pV \qquad \Rightarrow \qquad G = G(T,p,N)$$

$$dA = dU - SdT - TdS = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$dA \leq -SdT - pdV + \mu dN$$

entonces A mínimo es equilibrio a T, V, N constantes.

La idea de las transformadasd de Legendre es pasar la dependencia de cierto juego de variables a otro que podría ser más apropiado par el sistema en cuestión.

Sistema aislado en equilibrio, entonces se tendrá S máxima y como $S(U,V,N)$ y considero fluctuación energética

$$\frac{\partial S}{\partial U}\bigg|_{\text{eq}} = 0 \qquad \frac{\partial 2}{\partial S}U\bigg|_{\text{eq}} < 0$$

$$\delta S_{\text{orden2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial 2}{\partial S}U\bigg|_{\text{eq}} \delta U^2$$

1.3 Gas de Van der Waals

Esta subsección tiene cinco gráficos

Van der Waals incorpora la interacción molecular.

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde $a, b(T)$ caracterizan al gas en cuestión.

La función $p = p(V)$ tiene tres extremos para $T < T_c$,

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0$$

En $T = T_c$ es

$$\frac{\partial p}{\partial V}\bigg|_{T_c} = 0 \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\bigg|_{T_c} = 0$$

punto de inflexión

$$v_c = 3b \qquad p_c = \frac{a}{27b^2} \qquad T_c = \frac{8a}{27Rb}$$

y eso lleva a la ley de estados correspondientes

$$\left(\bar{p} + \frac{3}{\bar{v}^2}\right)(3\bar{v} - 1) = 8\bar{T}$$

De Van der Waals al virial

$$p = \frac{nRT}{(V - nb)} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2 = \frac{nRT}{V(1 - b/v)} - \frac{a}{v^2}$$

$$p = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{b}{v} - \frac{a}{vRT}\right] = p = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{1}{v}\left(b - \frac{a}{RT}\right)\right]$$

y el último paréntesis es el primer coeficiente del virial.

Un potencial intermolecular está compuesto de una zona repulsiva (carozo duro) y una atractiva (cola)

$$V_{eff} = V - b \qquad (menorvolumenporelcarozo)$$

$$p = \frac{RT}{V - b} - \left(\frac{a}{V}\right)^2 \qquad (menorpresinporlaatractividad)$$

y entonces, por mol de sustancia,

$$\left(p + \frac{a^2}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

b corrige el volumen que es ahora menor porque las partículas ocupan espacio. a corrige la presión dado que la atracción tiende a formar pares bajando la presión sobre las paredes.

Recordemos que

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \kappa_T > 0$$

Las funciones respuesta tienen signo errado dentro de la zona del rulo

$$\frac{\partial p}{\partial V} > 0 \to \frac{\partial v}{\partial p} > 0 \Rightarrow \kappa_T < 0 \qquad \text{(MAL)}$$

$$dT = -SdT + VdP + \mu dN$$

dada la isoterma y que N es constante

$$dG = Vdp \to dg = vdP \quad \text{(molar)}$$

G es cóncava en p entonces

$$v = \left.\frac{\partial g}{\partial p}\right|_{T,N}, \qquad \frac{\partial v}{\partial p} = \left.\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\right|_{T,N} < 0$$

y luego

$$\Delta g = \int_{p_c}^{p_G} v dp = 0$$

entonces

$$\int_C^D + \int_D^E + \int_E^F + \int_F^G = 0$$

y si se invierten puntos para tener un recorrido según las flechas se llega a

$$\int_C^D - \int_E^D = \int_F^E - \int_F^G$$

Áreas inguales determinan entonces los puntos C y G de forma que se corrige Van Der Waals para dar curvaturas correctas. En la región de coexistencia hemos trocado

$$\frac{\partial p}{\partial V} > 0 \quad \text{por} \quad \frac{\partial p}{\partial V} = 0$$

lo cual da $\kappa_T \to \infty$ en lugar del $\kappa_T < 0$ (que es incorrecto).

Capítulo 2

Conjuntos estadísticos

La cantidad

$$\rho(\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\}, t) d^{3N} q d^{3N} p$$

es el número de microestados en el elemento $d^{3N} q d^{3N} p$ al tiempo t centrado en q, p. Si los microestados son equiprobables $\rho \equiv cte.$. El conjunto $\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\}$ son $6N$ coordenadas.

$$\Omega = \int p d^{3N} q d^{3N} p$$

La integral Ω es imposible porque es difícil determinar el volumen de integración.

XXX Dibujos XXXX

el volumen en $\mathbb{\Gamma}$ es proporcional al número de microestados compatibles con E, N, el volumen $\mathbb{\Gamma}$ del macroestado es $\Omega\{n_i\}$

$n_i = f_i d^3 q d^3 p$ es el número de partículas en una celda i (con su $\vec{p}$ en $\vec{p} + d\vec{p}$ y con su $\vec{q}$ en $\vec{q} + d\vec{q}$)

Un microestados determina una distribución f que da un conjunto $\{n_i\}$. Pero una f determina muchos microestados porque la función de distribución no distingue entre partículas (importan los números de ocupación); entonces una f determina un volumen en $\mathbb{\Gamma}$.

Cada microestado tiene su f.

Suponemos que todos los microestados en $\mathbb{\Gamma}$ son igualmente probables. La f que determina el mayor volumen en $\mathbb{\Gamma}$ es la más probable. Suponemos que en el equilibrio el sistema toma la f más probable. Si f_i es el valor de f en cada celda i

$$f_i = \frac{n_i}{d^3 p d^3 q} \quad \text{promediada en el ensamble} \quad \bar{f}_i = \frac{< n_i >}{d^3 p d^3 q} \quad \text{en el equilibrio}$$

f_i es la distribución para un miembro en el ensamble.

Esta $\bar{f}_i$ es la de equilibrio, pero la cuenta no es fácil. Asumiremos que la f de equilibrio es la más probable (la de mayor volumen en $\mathbb{\Gamma}$); entonces maximizaremos dicho volumen para hallarla.

Un microestado determina una f; diferentes microestados pueden determinar otras f pero muchos coincidirán en una misma f.

La f en el equilibrio es la que tiene mayor cantidad de microestados (la más probable) pero

$$\bar{f}_i = \frac{< n_i >}{d^3 p d^3 q}$$

es el promedio en el ensamble y no será exactamente igual a la f_i del mayor volumen, salvo que el volumen de f sea mucho mayor al ocupado por f', f'', etc.

Dado el volumen $\Omega\{n_i\}$ extremaremos el mismo sujeto a las condiciones

$$E = \sum_i^K n_i e_i \qquad\qquad N = \sum_i^K n_i$$

Necesito $\Omega = \Omega\{n_i\}$ para obtener el $\{\tilde{n}_i\}$.

y llegamos a la f de equilibrio que es f_{MB}.

El volumen Ω se escribe en función de los números de ocupación

$$\Omega\left(\{n_i\}\right) = \frac{N!}{\prod_i^K n_i!} \prod_i^K g_i^{n_i} \qquad (i = 1, 2, ..., K \quad \text{identifica celdas en } \mu)$$

$$\Omega\left(\{n_i\}\right) = N! \prod_i^K \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

donde g_i son los subniveles en que podríamos dividir la celda K; es por matemática conveniencia y para abarcar más casos (luego será $g_i = 1 \forall i$).

El conjunto $\{\tilde{n}_i\}$ que extrema $\Omega\left(\{n_i\}\right)$ es el más probable y consideraremos

$$\{\tilde{n}_i\} =< n_i >$$

Estaremos pensando que cuando $N \to \infty$ la mayor parte de los microestados van a una distribución f_{MB}

2.1 Microcanónico

2.1.1 Solución de equilibrio

La solución de equilibrio satisfacía

$$f(p_1) f(p_2) = f(p_1') f(p_2')$$

$$\log f(p_1) + \log f(p_2) = \log f(p_1') + \log f(p_2')$$

que luce como una ley de conservación y admite como solución

$$\log f(p) = Am + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + C|\mathbf{p}|^2 \qquad (A, \mathbf{B}, C \text{ctes. adimensionales})$$

que lista los *invariantes colisionales*. Completando cuadrados

$$f \propto C_1 \, \mathrm{e}^{-C_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}$$

La expresión completa se ajusta con

$$n = \int f(\mathbf{p}, t) d^3p$$

donde el $\mathbf{p}$ de una partícula es

$$< \mathbf{p} >= \frac{\int f(\mathbf{p})\mathbf{p} \; d^3pd^3q}{\int f(\mathbf{p}) \; d^3pd^3q} = \frac{1}{n} \int f(\mathbf{p}) \; \mathbf{p} \; d^3p$$

El cociente es $\mathbf{P}/N$.

y la energía por partícula

$$< e >= \frac{\int f(\mathbf{p}) \; \mathbf{p}^2/(2m) \; d^3pd^3q}{\int f(\mathbf{p})d^3pd^3q} = \frac{1}{n} \int f(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \; d^3p$$

Finalmente se llega a

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \; \mathrm{e}^{-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}{2mkT}}$$

Solución de equilibrio de la ecuación de transporte

que es la función de distribución de momentos de Maxwell-Boltzmann.

$$\text{(presión ideal)} \qquad p = \frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{2}{3} n\epsilon = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} kT = nkT$$

2.1.2 Método de la distribución más probable

Con este método también llegamos a f_{MB} pero extremandolo el volumen $\Omega(\{n_i\})$ que ocupa en el espacio Γ sujeto a los vínculos $E = \sum_i n_i e_i$ y $N = \sum_i n_i$.

Luego podemos estimar qué tan probable es la distribución de MB (la más probable) considerando (ASUMIMOS)

los # de ocupación de MB $\quad \tilde{n}_i \cong < n_i > \quad$ el promedio en el ensamble

pero esto sólo valdrá si las desviaciones son pequeñas; es decir si f_{MB} es muy muy probable.

Calculamos la desviación cuadrática (varianza) se tiene

$$< n_i^2 > - < n_i >^2 = g_i \frac{\partial < n_i >}{\partial g_i}$$

donde se usó que

$$< n_i > = \frac{\sum_{\{n_j\}} n_i \Omega\{n_j\}}{\sum_{\{n_j\}} \Omega\{n_j\}}$$

Suponiendo que $< n_i > \approx \tilde{n}_i$ entonces $< n_i > \propto f_{MB}$ con lo cual se tiene también

$$< n_i^2 > - < n_i >^2 \cong \tilde{n}_i$$

como $g_i \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial g_i} = \tilde{n}_i$

y las fluctuaciones relativas

$$\sqrt{< \left(\frac{m_i}{N}\right)^2 > - < \left(\frac{m_i}{N}\right) >^2} \cong \sqrt{\frac{\tilde{n}_i/N}{N}} \to_{N\to\infty} 0$$

En el límite termodinámico MB es totalmente dominante.

2.1.3 Hipótesis ergódica

La trayectoria individual de casi cualquier punto en el Ω pasa, con el tiempo, a través de todos los puntos permitidos del espacio Γ. Si esperamos lo suficiente, todos los microestados posibles son visitados.

2.1.4 Observaciones sobre el microcanónico

$$\Gamma(E) = \int_{E<\mathcal{H}<E+\Delta E} \rho d^{3n} p d^{3n} q \qquad \Sigma(E) = \int_{\mathcal{H}<E} \rho d^{3n} p d^{3n} q$$

entonces

$$\Gamma(E) = \Sigma(E+\Delta E) - \Sigma(E) \cong \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E} \Delta E \qquad \text{si } \Delta E \ll E$$

ΔE es el *paso* entre medidas de energía

$$\Gamma(E) = \Gamma_1(E_1)\Gamma_2(E_2) \qquad \text{(1 y 2 son subsistemas)}$$

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow \Gamma(E) = \sum_i^{E/\Delta E} \Gamma_1(E_i)\Gamma_2(E-E_i)$$

siendo $E/\Delta E$ el número de términos tales que se cumple $E = E_1 + E_2$. Si se da $N_1 \to \infty$ y $N_2 \to \infty$ será

$$\log \Gamma_1 \propto N_1 \quad \log \Gamma_2 \propto N_2 \quad E \propto N_1 + N_2$$

luego $\log(E/\Delta E)$ es despreciable pues ΔE es constante y entonces

$\log(E/\Delta E) \propto \log(N)$ pues $E \propto N$ y ΔE cte.

$$S(E,V) = S(\tilde{E}_1, V_1) + S(\tilde{E}_2, V_2) + \mathcal{O}(\log[N])$$

con lo cual la mayoría de los microestados tienen los valores $\tilde{E}_1$ y $\tilde{E}_2$ de energía.

Asimismo

$$\delta(\Gamma_1(\bar{E}_1)\Gamma_2(\bar{E}_2)) = 0 \qquad \delta(\bar{E}_1 + \bar{E}_2) = 0$$

$$\delta\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\delta\Gamma_2 = 0 \quad \delta(\bar{E}_1) = -\delta(\bar{E}_2)$$

$$\frac{\delta\Gamma_1}{\bar{E}_1}\Gamma_2 = \Gamma_1\frac{\delta\Gamma_2}{\bar{E}_2} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\bar{E}_1} = \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\bar{E}_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{E}_1}\left(k\log\Gamma_1(\bar{E}_1)\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{E}_2}\left(k\log\Gamma_1(\bar{E}_2)\right)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial E_1}S(E_1)\right|_{\bar{E}_1} = \left.\frac{\partial}{\partial E_2}S(E_2)\right|_{\bar{E}_2} \equiv \frac{1}{T} \qquad \text{en equilibrio } T_1 = T_2$$

La T es el parámetro que gobierna el equilibrio entre partes del sistema.

La idea es que dado un sistema de $E = E_1 + E_2$, sistema compuesto de dos subsistemas, hay muchos valores 1,2 tales que $E = E_1 + E_2$ pero hay una combinación que maximiza $\Gamma(E)$ y es

$$\Gamma_{Max}(E) = \Gamma_1(\bar{E}_1)\Gamma_2(\bar{E}_2)$$

El sistema es E, N, V y yo lo pienso compuesto de dos partes E_1, N_1, V_1 y E_2, N_2, V_2.

Luego, con $N_1, N_2 \to \infty$ se da que la mayoría de los sistemas tendrán $E_1 = \bar{E}_1$ y $E_2 = \bar{E}_2$. Esa configuración, por supuesto, maximiza la entropía $S = k\log(\Gamma)$.

El hecho de que $\Delta S > 0$ para un sistema aislado lo vemos considerando que tal sistema sólo puede variar V (creciendo, como en la expansión libre de un gas), luego $V_F > V_I$ y entonces

$$\Sigma(E) = \int_{\mathcal{H}<E} \rho d^{3N}p d^{3N}q \underbrace{\longrightarrow}_{\text{Si aumento el volumen}} \Sigma(E)' = \int_{\mathcal{H}<E} \rho d^{3N}p d^{3N}q$$

Será un número mayor porque el dominio de integración en q es mayor.

$$\Sigma(E)' > \Sigma(E) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S > 0$$

Equipartición implica

$$\left\langle x_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} kT$$

y entonces

$$\left\langle p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right\rangle = \langle p_i \dot{q}_i \rangle = kT$$

y

$$\left\langle q_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right\rangle = \langle q_i \dot{p}_i \rangle = kT$$

$$\left\langle \sum_i^{3N} q_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right\rangle = \sum_i^{3N} \left\langle q_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right\rangle = \sum_i^{3N} kT = 3NkT$$

entonces llegamos al virial,

$$\sum_i^{3N} \langle q_i \dot{p}_i \rangle = 3NkT.$$

Considerando un hamiltoniano armónico,

$$\langle \mathcal{H} \rangle = E \qquad \text{con} \quad \mathcal{H} = \sum_i^{3N} a_i p_i^2 + b_i q_i^2$$

$$p_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 2a_k p_k^2 \qquad q_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = 2b_k q_k^2$$

de modo que

$$\mathcal{H} = \sum_i^{3N} \frac{1}{2} p_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} + \frac{1}{2} q_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}$$

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \sum_i^{3N} \frac{1}{2} \left\langle p_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle q_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right\rangle$$

y si f es el número de constantes a_k, b_k no nulos

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2} f kT$$

Si fuesen todas no nulas entonces

$$\langle \mathcal{H} \rangle = 3NkT.$$

2.1.5 Gas ideal (microcanónico)

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m}$$

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^{3N}} \int_{\mathcal{H}<E} d^3p_1...d^3p_N d^3q_1...d^3q_N = \left(\frac{V}{h^{3N}}\right)^N \int_{\mathcal{H}<E} d^3p_1...d^3p_N$$

donde la integral en $\{q_i\}$ es inmediata porque no están los mismos en los límites y donde el límite de integración $\mathcal{H} < E$ implica la condición

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_N^2 < (\sqrt{2mE})^2$$

Es una especie de radio $2mE$.

$$\Sigma(E) = C_{3N} \left[\frac{V}{h^3}(2mE)^{3/2}\right]^N$$

Luego,

$$S = k \log \left\{ C \left(\frac{V}{h^3}(2mE)^{3/2}\right)^N \right\}$$

$$S = k \log C + Nk \log \left[\frac{V}{h^3}(2mE)^{3/2}\right]$$

$k \log C \approx -3/2 Nk \log 3N/2$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial E}\right|_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{T} = Nk\frac{3}{2}\frac{1}{E}$$

y entonces

$$E = \frac{3}{2}NkT \qquad \text{gas ideal}$$

Vemos que la termodinámica es bastante insensible a las aproximaciones.

2.1.6 Paradoja de Gibbs

$$S \propto Nk \log(V) + Nk \log(E^{3/2})$$

Quitar la pared es una operación mental si los gases son idénticos (o al menos eso podemos pensar).

Supongamos dos gases idénticos con la misma ρ y T

$$\Delta S = Nk \log V + Nk \log(E^{3/2}) - N_1 k \log V_1 - N_2 k \log(E_1^{3/2}) - N_1 k \log V_2 - N_2 k \log(E_2^{3/2})$$

$$\Delta S = N_1 k \log\left(\frac{V}{V_1}\right) + N_2 k \log\left(\frac{V}{V_2}\right) + N_1 k \log\left(\frac{E}{E_1}\right)^{3/2} + N_2 k \log\left(\frac{E}{E_2}\right)^{3/2}$$

Si los gases son distintos está correcto $\Delta S > 0$ pero si son idénticos no porque un estado como F podría provenir de infinitas compartimentacionales las cuales darían todas difrentes ΔS y entonces la entropía S no sería función de estado.

$$\Delta S > 0 \quad \text{pues: } \frac{V}{V_1} = 1 + \frac{V_2}{V_1} > 1, \frac{V}{V_2} > 1, \frac{E}{E_1} > 1, \frac{E}{E_2} > 1$$

Podemos hacer algo menos cuentoso tomando

$$S \propto Nk \log \left(V \left[\frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right]^{3/2} \right)$$

donde la N viene de $k \log C_{3N}$ con $N \to \infty$. Vemos que E/N mantiene el cambio en S respecto de E igual, puesto que

$$\frac{E}{N} = \frac{E_1 + E_2}{N_1 + N_2} = \frac{E_1}{N_1} = \frac{E_2}{N_2} = \epsilon$$

pero V no balance. Luego la inclusión de $1/N!$ hará que

$$S = k \log(\frac{1}{N!} \Sigma(E, N, V)) = k \log(\Sigma) - k \log N!$$

de forma que resultará

$$S \propto Nk \log \left(\frac{V}{N} \left[\frac{4\pi m E}{3h^2 N} \right]^{3/2} \right)$$

y esta S sí está libre de paradoja de Gibbs.

2.2 Canónico

Consideramos un microcanónico con

$$E = E_1 + E_2, \qquad N = N_1 + N_2, \qquad V = V_1 + V_2$$

Imagen del microcanónico...

donde N_i, V_i están fijos y E_i varían de acuerdo a

$$E = E_1 + E_2$$

Consideramos un microcanónico

$$\Gamma(E) = \Sigma_{E_1} \Gamma_1(E_1) \Gamma_2(E - E_1) \leq C \Gamma_1(\bar{E}_1) \Gamma_2(E - \bar{E}_1) \approx C \Gamma_2(\bar{E}_1)$$

$$S(E - \bar{E}_1) \approx k \log \Gamma_2(E - \bar{E}_1)$$

$$S(E) + \left. \frac{\partial S(E)}{\partial E} \right|_E (-\bar{E}_1) \approx k \log \Gamma_2(E - \bar{E}_1)$$

$$\mathrm{e}^{\frac{S(E)}{k}}\,\mathrm{e}^{-\frac{E_1}{kT}} \approx \Gamma_2(E-\bar{E}_1)$$

Claramente como '1' siempre está metido dentro de '2' entre mayor sea el Γ_2 mayor también el tamaño de '1' en $\mathbb{\Gamma}$, luego:

#de config en $\mathbb{\Gamma}$ del sistema '1+2' = #de config de '1' en '2'×#de config de '2' en$\mathbb{\Gamma}$

$$\#\text{ config '1' } = \frac{\#\text{ config '1+2'}}{\#\text{ config '2'}} \approx \mathrm{e}^{-\frac{E_1}{kT}} = C\int \mathrm{e}^{-\mathcal{H}/kT} d^3p d^3q$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{h^{3N}N!}\int \mathrm{e}^{-\mathcal{H}/kT} d^3p d^3q$$

$1/N!$ es el factor de buen conteo.

La función de partición es el volumen ocupado en $\mathbb{\Gamma}$. El vínculo con la termodinámica viene de

$$Q_N(V,T) = \mathrm{e}^{-\beta A}$$

$$A = -kT\log[Q_N(V,T)]$$

donde $A = A(T,V,N)$ es la energía libre de Helmholtz. Podemos ver que se deduce esto de

$$<\mathcal{H}>= E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log[Q_N(V,T)] = A + TS = A - T\left.\frac{\partial A}{\partial T}\right|_{N,V}$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial\beta} = -kT^2\frac{\partial}{\partial T}, \qquad \text{pues } \frac{\partial\beta}{\partial T} = -\frac{1}{kT^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right) = -\frac{A}{T^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial A}{\partial T}$$

de modo que

$$-T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right) = A - T\frac{\partial A}{\partial T}$$

$S = -\partial A/\partial T|_{N,V}$

y entonces

$$E = -kT^2\frac{\partial}{\partial T}\log Q_N = -T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right)$$

de lo que se desprende

$$\log Q_N = -\frac{A}{kT}$$

Podemos usar $E = A + TS$ y llegar a $Q_n = \exp(-\beta A)$ o bien $Q_N = exp(-\beta A)$ y llegar a $E = A + TS$.

2.2.1 Equivalencia canónico y microcanónico

Vemos cómo son las fluctuaciones de energía en el canónico. Desde

$$U = <\mathcal{H}> = \frac{\int \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}\mathcal{H} d^3p d^3q}{\int \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} d^3p d^3q}$$

$$\int \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} U d^3p d^3q = \int \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}\mathcal{H} d^3p d^3q$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\int \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}(U-\mathcal{H}) d^3p d^3q\right] = \frac{\partial}{\partial\beta}[0] = 0$$

$$<\mathcal{H}^2> - <\mathcal{H}>^2 = kT^2 C_V$$

Las fluctuaciones van como el C_V, luego

$$<\mathcal{H}^2/N^2> - <\mathcal{H}/N>^2 = kT^2 c_V/N \qquad \text{donde } c_V = C_V/N$$

$<\mathcal{H}>\propto N$ **y** $C_V \propto N$

de modo que las fluctuaciones relativas van a 0 con $N \to \infty$.

Otro modo de verlo es considerando

$$\frac{1}{h^{3N}N!}\int \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} d^3p d^3q = \int_0^\infty dE \frac{\partial\Sigma(E)}{\partial E}\mathrm{e}^{-\beta E} = \int_0^\infty dE \mathrm{e}^{-\beta E + \log(\partial\Sigma(E)/\partial E)}$$

donde

$$\frac{\partial\Sigma(E)}{\partial E} dE = \frac{d^3p d^3q}{h^{3N}N!}$$

y como $S/k = \beta T S$

$$Q_N = \int_0^\infty dE\, \mathrm{e}^{-\beta E + \beta T S}$$

Si suponemos que es S máxima en $E = \bar{E}$ entonces $S_{MAX} = S(\bar{E})$ y será

$$\left.\frac{\partial S}{\partial E}\right|_{\bar{E}} = 0$$

con lo cual

$$E + TS \cong \bar{E} + TS(\bar{E}) + \frac{1}{2}(E-\bar{E})^2 T \left.\frac{\partial^2 S}{\partial E^2}\right|_{\bar{E}}$$

$$E + TS \cong \bar{E} + TS(\bar{E}) - (E-\bar{E})^2\frac{1}{2kTC_V}$$

de modo que

$$Q_N = \int_0^\infty dE\, \mathrm{e}^{-\beta[\bar{E}+TS(\bar{E})] - \beta\frac{(E-\bar{E})^2}{2kTC_V}}$$

$$Q_N = \mathrm{e}^{-\beta[\bar{E}+TS(\bar{E})]} \int_0^\infty dE \, \mathrm{e}^{-\beta \frac{(E-\bar{E})^2}{2kTC_V}}$$

y vemos que la integral se va a una delta con $N \to \infty$ (pués $C_V \propto N$) en cuyo caso

$$Q_N = \mathrm{e}^{-\beta[\bar{E}+TS(\bar{E})]}$$

y la mayor parte de los estados tienen energía $\bar{E}$, que es la de un sistema aislado a temperatura T.

La densidad de estados va entonces de acuerdo al producto de dos efectos contrarios:

$$g(E) = \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E} \, \mathrm{e}^{-\beta E}$$

2.2.2 Ejemplos sencillos

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_i^2 q_i^2 \qquad \text{oscilador clásico 1D}$$

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \qquad \text{oscilador Schrödinger 1D}$$

$$\mathcal{H} = \sum_i^N n_i \hbar\omega \qquad \text{oscilador Planck 1D}$$

$$U = NkT \to C_V = Nk \qquad \text{Clásico}$$

$$U \approx \frac{N\hbar\omega}{2} \quad U \approx 0 (T \ll 1) \qquad \to C_V = 0 \quad \text{Schrödinger-Planck}$$

$$U \approx NkT \; (T \gg 1) \qquad \to C_V = Nk \quad \text{Schrödinger-Planck}$$

Los casos Schrödinger y Planck aproximan al C_V clásico con T altas.

2.2.3 Una derivación más del canónico

El tamaño del sistema '1' en $\mathbb{\Gamma}$ (su volumen $\Gamma_1(E_1)$) será proporcional al tamaño del sistema '2' en $\mathbb{\Gamma}$ (su volumen $\Gamma_2(E - E_1)$) de manera que

$$\Gamma_1(E_1) \propto \Gamma_2(E - E_1)$$

$$k \log \Gamma_1(E_1) \approx S(E) + \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_E (-E_1) = S(E) - \frac{E_1}{T} \text{ (del sistema '2')}$$

$$\Gamma_1(E_1) \approx \mathrm{e}^{S(E)/k} \, \mathrm{e}^{-E_1/kT}$$

$$\# \text{ conf '1'} \;=\; \# \text{ conf '2'} \;\times\; \text{densidad del '1' en el '2'}$$

y finalmente

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{h^{3N}N!}\int d^{3N}pd^{3N}q\,\mathrm{e}^{-\mathcal{H}(\{p_i,q_i\})/kT}$$

2.3 El gran canónico

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{h^{3N}N!}\int d^{3N_1}p_1 d^{3N_2}p_2 \sum_{N_1=0}^{N}\frac{N!}{N_1!\,N_2!}\int d^{3N_1}q_1 d^{3N_2}q_2 \mathrm{e}^{-\beta[\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2]}$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{h^{3N_1}h^{3N_2}}\sum_{N_1=0}^{N}\frac{1}{N_1!\,N_2!}\int d^{3N_1}p_1 d^{3N_1}p_1 \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_1}\int d^{3N_2}q_2 d^{3N_2}q_2 \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_2}$$

$$Q_N(V,T) = \sum_{N_1=0}^{N}\int\frac{1}{h^{3N_1}N_1!}d^{3N_1}p_1 d^{3N_1}p_1 \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_1}\int\frac{1}{h^{3N_2}N_2!}d^{3N_2}q_2 d^{3N_2}q_2 \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_2}$$

$$1 = \sum_{N_1=0}^{N}\frac{1}{h^{3N_1}N_1!}\int d^{3N_1}q_1 d^{3N_1}p_1\;\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_1}\frac{Q_{N_2}(V_2,T)}{Q_N(V,T)}$$

$$1 = \sum_{N_1=0}^{N}\int d^{3N_1}q_1 d^{3N_1}p_1\;\frac{\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_1}}{h^{3N_1}N_1!}\frac{Q_{N_2}(V_2,T)}{Q_N(V,T)}$$

siendo el último factor un $\rho(\{p_1,q_1\},N_1)$

$$\frac{Q_{N_2}(V_2,T)}{Q_N(V,T)} \;=\; \mathrm{e}^{-\beta A(V-V_1,N-N_1,T)}\,\mathrm{e}^{-\beta A(V,N,T)} \;=\; \mathrm{e}^{-\beta[\frac{\delta A}{\delta V}\delta V+\frac{\delta A}{\delta N}\delta N]}$$

donde las diferencias δ se toman discretas:

$$\frac{\delta A}{\delta V}\delta V + \frac{\delta A}{\delta N}\delta N = (-p)(-V_1) + \mu(-N)_1 = pV_1 - \mu N_1$$

$$A = U - TS \qquad dA = dU - TdS - SdT = -pdV + \mu dN - SdT$$

$$\frac{Q_{N_2}(V_2,T)}{Q_N(V,T)} \;=\; \mathrm{e}^{-\beta PV_1+\beta\mu N_1},$$

De forma que la densidad del sistema '1' es

$$\frac{1}{h^{3N_1}N_1!}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_1}\,\mathrm{e}^{-\beta PV_1}\,\mathrm{e}^{\beta\mu N},$$

y definiendo $z \equiv \mathrm{e}^{\beta\mu}$

$$\rho(\{p,q\},N) = \frac{z^N}{h^{3N}N!}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}\,\mathrm{e}^{-\beta PV}$$

Nótese que μ, P, V, T son los valores fijos del sistema mayor y hemos sacado subíndices.

$$1 = \sum_{N=0}^{\infty}\int d^{3N}q d^{3N}p \frac{z^N}{h^{3N}N!}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}\,\mathrm{e}^{-\beta PV}$$

$$\mathrm{e}^{\beta PV} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{z^N}{h^{3N}N!}\int d^{3N}q d^{3N}p\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V,T)$$

$$\beta PV = \log\left(\sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V,T)\right) \tag{3.1}$$

y tenemos

$$\Xi(z,V,T) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V,T)$$

que es la gran función de partición. La termodinámica puede extraerse desde

$$< N >= z\frac{\partial}{\partial z}\log[\,\Xi(z,V,T)\,] \qquad < E >= -\frac{\partial}{\partial\beta}\log[\,\Xi(z,V,T)\,]$$

La ecuación de estado se obtiene reemplazando z en la expresión de (3.1) y en $< N >$

2.3.1 Fluctuaciones de densidad

$$< N^2 > - < N >^2 = z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\log\Xi\right) = kTV\frac{\partial^2 P}{\partial\mu^2}$$

$$< N^2 > - < N >^2 = kTV\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{1}{v} = kTV\frac{1}{v^2}\kappa_T = kT\frac{N^2}{V}\kappa_T = NkT\frac{\kappa_T}{v}$$

Viene de $\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{1}{v} = -\frac{1}{v^2}\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial P} = \frac{1}{v^2}\kappa_T$

Si $A = Na$ entonces $a = u - Ts$ y entonces

$$\frac{\partial a}{\partial v} = -p$$

$$U = TS - pV + \mu N \quad\Rightarrow\quad u = Ts - pv$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = -P - v\frac{\partial^2 a}{\partial v^2} + p = v\frac{\partial p}{\partial v} \qquad \frac{\partial p}{\partial\mu} \qquad = \frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\frac{\partial\mu}{\partial v}} = \frac{1}{v}$$

pues

$$u - Ts = a = -pV + \mu \qquad \mu = a + pv$$

Las fluctuaciones relativas tiende a cero cuando $N \to \infty$ provistos de que $\kappa_T < \infty$. Esto no vale en la transición de fase de primer oden pues

$$\left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_{\text{punto crítico}} = 0 \qquad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} \to \infty$$

Se calculan como

$$\sqrt{\frac{< N^2 > - < N >^2}{N^2}} = \sqrt{kT\frac{\partial \kappa_T}{\partial v}\frac{1}{N}} \to 0 \text{ si } N \to \infty$$

2.3.2 Fluctuaciones de energía

$$< \mathcal{H}^2 > - < \mathcal{H} >^2 = kT^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{z,V}$$

y como

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{z,V} = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{N,V} + \left.\frac{\partial U}{\partial N}\right|_{T,V} \left.\frac{\partial N}{\partial T}\right|_{z,V}$$

$$< \mathcal{H}^2 > - < \mathcal{H} >^2 = kT^2 C_V + \left[\left.\frac{\partial U}{\partial N}\right|_{T,V}\right]^2 < (\Delta N)^2 >$$

siendo $kT^2 C_V$ fluctuación del canónico y $(\Delta N)^2 =< N^2 > - < N >^2$

2.3.3 Gas ideal

$$Q_N = \frac{(Vf(T))^N}{N!} \Rightarrow \Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(zVf(t))^N}{N!} = \mathrm{e}^{zVf(T)}$$

$$\beta pV = \log(\Xi) = zVf(T) \qquad < N > = z\frac{\partial}{\partial z}\log(\Xi) = zVf(T)$$

y luego

$$\beta pV =< N > \qquad \to \qquad pV =< N > kT$$

y recuperamos la ecuación de estado del gas ideal.

2.3.4 Equivalencia canónico-gran canónico

Para ver que con $N \to \infty$ son equivalentes consideramos

$$\kappa_T = \frac{1}{v}\left(-\frac{\partial v}{\partial p}\right) < \infty \qquad \frac{\partial p}{\partial v} < 0$$

Pero en la coexistencia de una transición de fase de 1er orden se da

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \to \kappa_T \to \infty \text{ (sistema homogéneo)}$$

La idea es ver que

- Dado z existe N tal que $\Xi = \sum_N z^N Q_N(V,T)$
- Dado N existe z tal que $\Xi = \sum_N z^N Q_N(V,T)$

Esto se comprueba. Además, si:

$$W(N) = z^N Q_N(V,T) \propto \text{ Prob. de que el sistema tenga } N \text{ partículas}$$

XXX dibujos XXXX

En la transición de fase, donde $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ todos los N son igual de probables porque fluctúa la densidad. La p se mantiene constante pero se varían los N_i de cada fase 'i'.

2.3.5 Otra derivación del gran canónico

Podemos derivar el gran canónico desde

Es la probabilidad de hallar al sistema '1' en un estado con E_1, N_1.

$$\text{Prob } \propto \Gamma_2(E - E_1, N - N_1)$$

$$\log \Gamma_2(E-E_1, N-N_1) \cong \log \Gamma_2(E,N) + \frac{1}{k} \left.\frac{\partial S(E,N)}{\partial E}\right|_E (-E_1) + \frac{1}{k} \left.\frac{\partial S(E,N)}{\partial N}\right|_N (-N_1)$$

$$\cong \log \Gamma_2(E,N) - \frac{E_1}{kT} + \frac{N_1 \mu}{kT}$$

$$\text{Prob } \propto \mathrm{e}^{-\beta E}\,\mathrm{e}^{\beta\mu N} = \mathrm{e}^{-\beta E} z^N$$

$\partial S/\partial E = 1/T$ **y** $\partial S/\partial N = -\mu/T$.

donde T y μ son las asociadas al baño.

Pensamos en η copias del sistema; $n_{E_1 N_1} = \#$ de sistemas con energía E_1 y N_1 partículas, luego

$$\sum_{\{E_1,N_1\}} n_{E_1 N_1} = \eta \qquad \sum_{\{E_1,N_1\}} n_{E_1 N_1} E_1 = n\bar{E}_1 \cong \text{ Energía Total}$$

$$\sum_{\{E_1,N_1\}} n_{E_1N_1}N_1 = \eta\bar{N}_1 \cong \text{ \# Total de partículas (no físico)}$$

donde $\bar{N}_1$ es el número de medio.

$$\Omega\{n_{E_1N_1}\} = \frac{\eta!}{\prod(n_{E_1N_1})!} \qquad \text{combinatorio}$$

La conbinación de mayor volumen será

$$\log\Omega - \alpha\sum nE_1 - \beta_L\sum nN_1 = 0$$

$$-\sum\left[n\log n - n - \alpha nE_1 - \beta_L nN_1\right] = 0$$

$$-\sum n\left[\log n - 1 - \alpha E_1 - \beta_L N_1\right] = 0 \to \log(\tilde{n}) = 1 + \alpha E_1 + \beta_L N_1$$

$$\tilde{n} \propto \ \mathrm{e}^{\alpha E_1+\beta_L N_1}$$

que es el conjunto $n_{E_1N_1}$ de mayor volumen en Ω.

Esperaremos qeu con $\eta\to\infty$ sea $< n_{E_1N_1} > \cong \tilde{n}_{E_1N_1}$. Para determinar α,β usaremos

$$\tilde{N} \cong < N > = \frac{\partial}{\partial\beta_L}\left(\log\sum_{\{E_1,N_1\}}\mathrm{e}^{\alpha E_1+\beta_L N_1}\right)$$

$$\tilde{E} \cong < \mathcal{H} > = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\log\sum_{\{E_1,N_1\}}\mathrm{e}^{\alpha E_1+\beta_L N_1}\right)$$

2.4 Entropía de Gibbs

Sea X extensiva mecánica,

$$S = k\log\Gamma(E,X) \qquad dU = TdS + YdX,\ \frac{dS}{k} = \beta dU + \xi dX$$

Donde $\beta Y = \xi$

Refiriéndo al estado ν

$$P_\nu = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_\nu-\xi X_\nu}}{\sum_\nu \mathrm{e}^{-\beta E_\nu-\xi X_\nu}} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_\nu-\xi X_\nu}}{\Theta}$$

$$< E > = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\Theta \qquad < X > = -\frac{\partial}{\partial\xi}\log\Theta$$

Caso $X = N\ z\frac{\partial}{\partial z} \cong \frac{\partial}{\partial\beta\mu}$

$$d(\log\Theta) = - < E > d\beta - < X > d\xi$$

Sea

$$\mathcal{L} \equiv -k \sum_\nu P_\nu \log P_\nu = -k \sum_\nu P_\nu \log \left[\, \mathrm{e}^{-\beta E_\nu - \xi X_\nu} \Theta^{-1} \right]$$

$$\mathcal{L} = \sum_\nu P_\nu k \log \Theta + k P_\nu \beta E_\nu + k P_\nu \xi X_\nu$$

$$\mathcal{L} = k \log \Theta + k\beta < E > + k\xi < X >$$

$$d\mathcal{L} = k\beta d < E > + k\xi d < X >$$

Es una transformada de Legendre que toma $\log \Theta$ y la lleva a una función de $< E >, < X >$

$$d\mathcal{L} = k\beta dE + k\beta Y dX = dS = \frac{1}{T} dE + \frac{Y}{T} dX$$

entonces $\mathcal{L}$ es la entropía S.

$$\mathcal{L} = -k \sum_\nu P_\nu \log P_\nu$$

y ν son equiprobables

$$\mathcal{L} = -k \sum_\nu \frac{1}{\Gamma} \log\left(\frac{1}{\Gamma}\right) = \sum_\nu \frac{k}{\Gamma} \log(\Gamma)$$

y entonces

$$\mathcal{L} = k \log(\Gamma) \equiv S.$$

2.4.1 Observación promedios

$$< G >= \frac{\sum_N z^N G Q_N(V,T)}{\Xi} = \frac{\sum_N z^N \sum_\nu G(E_\nu, N, T) Q_N(V,T)}{\Xi}$$

donde el último factor en la sumatoria es $< G >_{\text{CAN}} Q_N(V,T)$.

La parte crítica está en el pasaje de

$$\sum_\nu \mathrm{e}^{-\beta E_\nu}$$

a algún índice útil que permite realizar la sumatoria. En el caso de cuasipartículas, como osciladores, tenemos

$$\hat{H} = \sum_i^N \left(n_i + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_i$$

donde n_i es el número de fotones del oscilador i-ésimo. Los fonones cumplen el rol de partículas [1] Un oscilador ddado puede tener en principio cualquier valor de energía (cualquier valor de n_i) y esto independientemente de los otros $N-1$ osciladores. El número total de fonones del sistema

$$\sum_{i}^{N} n_i$$

no es una constante del mismo con lo cual no hay vínculo. Entonces

$$\sum_{\nu} \qquad \rightarrow \qquad \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} ... \sum_{n_\nu=0}^{\infty}$$

2.5 SUELTO: reubicar

$$Z_N = \int d^{3N}q \prod_{i<j}^{N} (1 + f_{ij}) \qquad \text{integral configuracional}$$

En realidad esta integral serán $N(N-1)/2$ integrales (N-grafos). Podemos factorizar los $N(N-1)/2$ grafos en l-racimos teniendo en cuenta que se cumple

$$N = \sum_{l=1}^{N} l n_l,$$

de forma que cada N-grafo dtermina un conjunto $\{m_l\} = (m_1, m_2, ..., m_N)$ de 'm_1' 1-racimos, 'm_2' 2-racimos y 'm_N' N-racimos. Por supuesto, un mismo conjunto $\{m_l\}$ determina muchos (en principio) N-grafos en función de la permutación de etiquetas.

$$\frac{N(N-1)}{2} \text{ N-grafos } \rightarrow M \text{ conjuntos } \{m_l\}$$

y la

$$Z_N = \sum_{1}^{N(N-1)/2} \text{ N-grafos } \quad \equiv \quad \sum_{\{m_l\}}' S(\{m_l\})$$

donde

$$S(\{m_l\}) = \prod_{l=1}^{N} \Big(\sum \text{ l-racimos de l partículas } \Big)^{m_l} \frac{N!}{1!^{m_1}\, 2!^{m_2} \,..,\, N!^{m_N}\, m_1!\, m_2! \,...m_N!}$$

[1]Porque podemos considerar que la $\sum$ se hace en niveles energéticos en lugar de entre osciladores y tenemos un # indeterminado de "particulas" (fonones) distribuidas en 'N' niveles energéticos.

siendo la productoria entre todos los l-racimos posibles de l partículas y donde el combinatorio tiene en cuenta que habría que permutar entre las etiquetas de las N partículas (pués la sumatoria contempla l-racimos de l partículas).

$$S(\{m_l\}) = \frac{N!}{1!^{m_1}\, 2!^{m_2}\, ..,N!^{m_N}\, m_1!\, m_2! ...m_N!} \prod_{l=1}^{N} (l!\, \lambda^{3(l-1)} V b_l)^{m_l}$$

$$S(\{m_l\}) = N!\, \lambda^{3N} \prod_{l=1}^{N} \left(\frac{Vb_l}{\lambda^3}\right)^{m_l} \frac{1}{m_l!}$$

$$Z_N = \sum_{\{m_l\}}^{\prime} S(\{m_l\})$$

$$Q_N = \frac{1}{N!\, \lambda^{3N}} Z_N = \sum_{\{m_l\}}^{\prime} \prod_{l=1}^{N} \left(\frac{Vb_l}{\lambda^3}\right)^{m_l} \frac{1}{m_l!}$$

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V,T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\{m_l\}}^{\prime} \prod_{l=1}^{N} \left(\frac{Vb_l}{\lambda^3}\right)^{m_l} \frac{1}{m_l!}$$

$$\Xi = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_N=0}^{\infty} z^N \prod_{l=1}^{N} \left(\frac{Vb_l}{\lambda^3}\right)^{m_l} \frac{1}{m_l!}$$

donde hemos utilizado los resultados

$$z^N = z^{\sum_1^N l m_l} = \prod_1^N (z^l)^{m_l} \qquad \prod_{l=1}^{N} \frac{(l!)^{m_l}}{1!^{m_1} ...N!^{m_l}} = 1$$

$$\prod_{l=1}^{N} \lambda^{3 l m_l} = \lambda^{3\sum_1^N l m_l} = \lambda^{3N}$$

$$\Xi = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_N=0}^{\infty} z^N \prod_{l=1}^{N} \left(\frac{Vb_l}{\lambda^3}\right)^{m_l} \frac{1}{m_l!} = \prod_{l=1}^{N} \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{m_l!} \left(\frac{z^l V b_l}{\lambda^3}\right)^{m_l} = \prod_{l=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{z^l V b_l}{\lambda^3}}$$

$$\beta p V = \log \Xi = \sum_l \frac{z^l V b_l}{\lambda^3} = \frac{V}{\lambda^3} \sum_l z^l b_l$$

$$\begin{cases} \beta p = \frac{1}{\lambda^3} \sum_z^l b_l \\ \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_l z^l b_l \end{cases}$$

que es la cluster-expansion.

2.5.1 Integral configuracional y $Q_N(V,T)$

Para un hamiltoniano usual

$$\mathcal{H} = \sum_i^N \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{ij}(q_i) = K(\{p_i\}) + V(\{q_i\})$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{h^{3N}N!}\int d^{3N}p \int d^{3N}q \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}(\{p_i,q_i\})} = \frac{1}{h^{3N}N!}\int d^{3N}p \mathrm{e}^{-\beta K(\{p_i\})}\int d^{3N}q \mathrm{e}^{-\beta V(\{q_i\})}$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{\lambda^{3N}N!}\int d^{3N}q\, \mathrm{e}^{-\beta V(\{q_i\})} = \frac{1}{\lambda^{3N}N!} Z_N(V,T)$$

donde Z_N es la integral configuracional

$$\beta p = \frac{1}{\lambda^3}\sum_l z^l b_l \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3}\sum_l l z^l b_l$$

$$\beta p v = \frac{\sum_l z^l b_l}{\sum_l l z^l b_l}$$

y el virial es

$$\sum_{l=1} a_l(T)\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} = \frac{\sum_l z^l b_l}{\sum_l l z^l b_l}$$

$$\sum_{l=1} a_l(T)\left(\sum_l l z^l b_l\right)^{l-1}\sum_l l z^l b_l = \sum_l z^l b_l$$

$$\sum_{k=1} a_k[zb_1 + 2z^2b_2]^{k-1}(zb_1 + 2z^2b_2) \cong zb_1 + z^2b_2$$

$$a_1(zb_1 + 2z^2b_2) + a_2(zb_1 + 2z^2b_2)(zb_1 + 2z^2b_2) \cong zb_1 + z^2b_2$$

$$za_1b_1 + 2z^2a_1b_2 + a_2z^2b_1^2 + 4a_2z^3b_1b_2 + 4a_2z^4b_2^2 \cong zb_1 + z^2b_2$$

e igualando coeficientes de z tendremos

$$a_1b_1 = b_1 \quad \to \quad a_1 = 1$$

$$2a_1b_2 + a_2b_1^2 = b_2 \quad \to \quad a_2 = -\frac{b_2}{b_1^2} = -b_2$$

Capítulo 3

Gases clásicos ideales

3.1 Fluidos clásicos –reacomodar–

Empezamos con las funciones de distribución (en el ensamble canónico). Sabemos que

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta V}}{Z_N}\right) d^3q_1 d^3q_2 ... d^3q_N = \text{ \# de microestados tales que '1' está en } \vec{q}_1\text{, etc.}$$

donde los momentos están integrados y se cumple

$$V = \sum_{i<j}^{N} v_{ij}.$$

Pero ahora

$$\left[\int d^3q_{l+1} d^3q_{l+1} ... d^3q_N \frac{\mathrm{e}^{-\beta V}}{Z_N}\right] d^3q_1 d^3q_2 ... d^3q_l =$$

\# de partículas tales que '1' está en $\vec{q}_1$, la 'l' en q_l y las otras en cualquier parte

Como las partículas son indistinguibles agregamos

$$\frac{N!}{(N-l)!}\left[\int d^3q_{l+1} d^3q_{l+1} ... d^3q_N \frac{\mathrm{e}^{-\beta V}}{Z_N}\right] d^3q_1 d^3q_2 ... d^3q_l = \text{ \# de partículas ...}$$

y así definimos

$$\rho^{[1]}(q_1, ..., q_l, V, T) \equiv \frac{N!}{(N-l)!}\frac{1}{Z_N}\int d^{3N}q_{l+1} ... d^{3N}q_N \, \mathrm{e}^{-\beta V}$$

que es la función de distribución de l cuerpos.

$$\rho^{[1]}(q_1, V, T) = \frac{N}{Z_N} \int d^{3N}q_2...d^{3N}q_N \, \mathrm{e}^{-\beta V}$$

y entonces

$$\int dq_1 \rho^{[1]}(q_1, V, T) = N \qquad \text{normalización}$$

$\rho^{[1]} = cte.$ entonces $N = \int dq_1 \rho^{[1]}$ y $N/V = \rho^{[1]}$, lo cual es muy razonable.

Definimos

$$\rho^{[l]} = \left(\frac{N}{V}\right)^l g^{[l]} \qquad g^{[l]} = \frac{\rho^{[l]}}{\rho^l} \qquad N = \frac{N}{V} \int dq_1 g^{[1]}(q_1)$$

$g^{[l]}$ es una especie de densidad relativa.

3.1.1 Análisis de $g^{[2]}(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$

Se puede medir mediante scattering de rayos X. Con un potencial esférico

$$V(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = V(|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|) = V(q)$$

donde q es coordenada relativa y entonces

$$\rho^{[2]} = \left(\frac{N}{V}\right)^2 g^{[2]}(q_1, q_2) = \left(\frac{N}{V}\right)^2 g(q)$$

$$\int dq_1 dq_2 \rho^2 g^{[2]} = N(N-1) \qquad 4\pi \int dq \, q^2 \rho g(q) = N(N-1)$$

$$4\pi \int dq q^2 \rho g(q) \cong N \qquad \text{esféricas}$$

Ahora $g(q)\rho^2$ da la probabilidad de que dada una partícula en 'O' tenga otra a distancia q. Es una probabilidad conjunta. Los casos límite serán

$\rho^{[2]} = \rho^{[2]}(q_1, q_2, V, T)$ pero en un gas ideal es $\rho^{[1]}(q_1, V, T)\rho^{[1]}(q_2, V, T)$ lo que significa que no hay correlación.

- $q \to 0 \quad g \to 0$ Por la repulsión del carozo
- $q \to \infty \quad g \to 1$ Por el desvanecimiento del potencial (a gran distancia el sistema se ve homogéneo)

DIBUJO

Para un líquido da algo como esto. El valor de σ sería como la separación a primeros vecinos.

Para un sólido sería algo como esto, donde los picos están asociados a la separación entre primeros, segundos y terceros vecinos.

3.1.2 La termodinámica y $g(q)$

$$\mathcal{H} = K(p) + V(q)$$

$$E =< \mathcal{H} >= \frac{\int d^{3N}p \int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta K - \beta V}(K+V)}{\int d^{3N}p \int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta K - \beta V}} =$$

$$\frac{\int d^{3N}p \int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta K - \beta V} K + \int d^{3N}p \int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta K - \beta V} V}{\int d^{3N}p \, \mathrm{e}^{-\beta K} \int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta V}}$$

$$E =< K > + \frac{\int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta V} V}{Z_N}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_N = -\frac{1}{Z_N} \int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta V}(-V) = kT^2 \frac{\partial}{\partial T}$$

$$E =< K > + kT^2 \frac{\partial}{\partial T}(\log Z_N)$$

$$< V >= \frac{\int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta V} V}{Z_N} = \frac{\int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta \sum_{i<j}^{N} V_{ij}} \sum_{i<j}^{N} V_{ij}}{Z_N} = \sum_{i<j}^{N} \frac{\int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta V} V_{ij}}{Z_N}$$

La sumatoria en V_{ij} me la puedo sacar de encima.

$$< V >= \frac{(N-1)N}{2} \frac{\int d^{3N}q \, \mathrm{e}^{-\beta V} V_{ij}}{Z_N}$$

Metemos la expresión para $\rho^{[2]}$

$$\rho^{[2]} = \frac{N!}{(N-2)!} \frac{1}{Z_N} \int dq_3^3 ... d^3 q_N \, \mathrm{e}^{-\beta V}$$

$$< V >= \frac{(N-1)N}{2} \int d^3q_1 d^3q_2 \left(\frac{1}{Z_N} \int dq_3^3 ... d^3q_N \, \mathrm{e}^{-\beta V} \right) V_{ij}$$

$$< V >= \frac{(N-1)N}{2} \int d^3q_1 d^3q_2 \frac{(N-2)!}{N!} \rho^2 g^{[2]}(q_1, q_2) V_{12}$$

$$< V >= \frac{1}{2} \int d^3q_1 d^3q_2 \rho^2 g^{[2]}(q_1, q_2) V_{12} = \frac{1}{2} \int 4\pi dr r^2 \rho N g(r) V(r)$$

$$< V >= \frac{N^2}{2V} \int 4\pi r^2 g(r) V(r) dr$$

$$E = \frac{3}{2} NkT + \frac{N\rho}{2} \int_0^\infty 4\pi r^2 g(r) V(r) dr$$

siendo la integral del rhs la energía de interacción de una partícula con las demás sumada sobre todas las partículas.

La determinación de la presión se hace merced a

$$p = -\left.\frac{\partial A}{\partial V}\right|_{N,T}, \quad A = -kT\log[Q_N(V,T)] \qquad p = kT\frac{1}{Q_N}\frac{\partial}{\partial V}[Q_N(V,T)]$$

$A = T - TS$ **y entonces** $dA = dU - TdS - SdT = -pdV + \mu dN - SdT$ **y entonces** $p = -\partial A/\partial V$

pero la dependencia del volumen se halla en la parte espacial de modo que

$$p = kT\frac{1}{Z_N}\frac{\partial}{\partial V}[Z_N(V,T)]$$

$$Z_N = \int d^{3N}q\,\mathrm{e}^{\beta V} = \int_0^{V^{1/3}} dq_1 \int_0^{V^{1/3}} dq_2 ... \int_0^{V^{1/3}} dq_{3N}\,\mathrm{e}^{-\beta\sum_{i<j}^{N} V_{ij}(q_{ij})}$$

y cambiando variables con $r = q/V^{1/3}$ que lleva a $dq = V^{1/3}dr$

$$Z_N = V^N \int_0^1 d^{3N}r\,\mathrm{e}^{-\beta\sum_{i<j}^{N} V_{ij}(V^{1/3}r_{ij})}$$

Capítulo 4

Gases imperfectos

4.1 Cuánticos –reubicar

Ensamble de $\mathcal{N}$ sistemas $(k = 1, 2, ..., \mathcal{N})$. Cada uno tiene su estado descripto por

$$\Psi^k(\mathbf{x}, t), \qquad \hat{H}\Psi^k = i\hbar\frac{\partial \Psi^k}{\partial t} \quad \forall k$$

Todos son la *misma* combinación lineal de la base.

Si son estados puros entonces

$$\Psi^k = \sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x}) \qquad \{\phi_n\} \text{ set ortonormal}$$

Un estado puro es superposición coherente de una base

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}a_m^k = \sum_n H_{mn}a_n^k$$

El sistema k-ésimo puede describirse a partir de Ψ^k o bien a partir de los coeficientes $\{a_n\}$.

Definimos un operador de densidad,

Promedio en el ensamble de la interferencia cuántica entre ϕ_m y ϕ_n. p_k es la probabilidad del estado k.

$$\rho_{mn} \equiv \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k a_m^k (a_n^k)^*$$

el cual proviene de

$$\hat{\rho}_{mn} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \left|\Psi^k\right\rangle \left\langle\Psi^k\right|$$

¿Y los índices mn capo?

Puede verse que se cumple

$$i\hbar\dot{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}],$$

un teorema de Liouville cuántico.

Sea el valor medio de $\hat{G}$

$$\langle G \rangle_{ENS} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \langle G \rangle_k = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \langle \Psi^k | \hat{G} | \Psi^k \rangle_k = \sum_k p_k \int \sum_i a_i^{k*} \phi_i^* \hat{G} \sum_j a_j^k \phi_j dx$$

$$\langle G \rangle_{ENS} = \sum_k p_k \sum_i \sum_j a_i^{k*} a_j^k \int \phi_i^* G \phi_j dx = \sum_i \sum_j \left(\sum_k p_k a_i^{k*} a_j^k \right) G_{ij}$$

$$\langle G \rangle_{ENS} = \sum_i \sum_j \rho_{ij} G_{ij} = \text{ Traza } (\hat{\rho}\hat{G}) = \sum_i [\rho G]_{ii}$$

Ahora, si el conjunto $\{\phi_n\}$ fuesen autoestados de $\hat{G}$ entonces

$$\int dx \phi_i^* G \phi_j = \int dx \phi_i^* \phi_j g_j = \delta_{ij} g_j = g_i$$

$$\langle G \rangle_{ENS} = \sum_k p_k \sum_i a_i^{k*} a_i^k g_i = \sum_k p_k \sum_i |a_i^k|^2 g_i$$

La matriz densidad $\hat{\rho}$ se define de modo que sus elementos ρ_{ij} resultan

$$\langle \phi_i | \hat{\rho} | \phi_j \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \langle \phi_i | \Psi^k \rangle \langle \Psi^k | \phi_j \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \int dx \phi_i^* \sum_l a_l^k \phi_l \int dx' \phi_j \sum_m a_m^{k*} \phi_m^*$$

$$\langle \phi_i | \hat{\rho} | \phi_j \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \sum_l \sum_m a_l^k a_m^{k*} \int dx \phi_i^* \phi_l \int dx' \phi_j \phi_m^* = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k \sum_l \sum_m a_l^k a_m^{k*} \delta_{il} \delta_{jm}$$

$$\rho_{ij} = \sum_k p_k a_i^k a_j^{k*}$$

El primer postulado de la QSM es asegurarse de que $\rho_{ij} \propto \delta_{ij}$, es decir que EN PROMEDIO no hay correlación entre funciones $\{\phi_i\}$ para diferentes miembros k del ensamble. El elemento ρ_{ij} es el promedio en el ensamble de la interferencia entre ϕ_i y ϕ_j.

En la práctica los ensambles serán mezcla, una superposición de estados puros pero incoherente, de modo que

Es muy difícil preparar un ensamble puro.

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} p_k |\Psi^k\rangle \langle \Psi^k| \qquad p_k \geq 0 \quad \sum_k p_k = 1$$

donde p_k serán las *abundancias relativas* de los estados puros Ψ^k.

Para un ensamble puro sería

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

donde no hay supraíndice k puesto que todos son el mismo estado.

Un estado puro puede escribirse

$$\Psi^k = \sum_n a_n \phi_n, \qquad \text{o bien} \qquad \left|\Psi^k\right\rangle = \sum_n a_n \left|\phi_n\right\rangle$$

y sabemos que el valor de expectación será

$$\langle A\rangle_k = \langle\Psi^k|\hat{A}|\Psi^k\rangle = \int dx \Psi^{k*} A \Psi^k$$

Un estado mezcla será en cambio

$$|\xi\rangle \cong \sum_n p_n \left|\phi_n\right\rangle \tag{1.1}$$

donde $\sum_n p_n = 1$ y $p_n \in \mathbb{R} > 0$. Pero $|\xi\rangle$ no es un estado de sistema como Ψ^k pués

$$|\xi\rangle \neq \sum_n c_n \left|\phi_n\right\rangle \tag{1.2}$$

no hay cambio de base que lleve (1.1) al miembro derecho de (1.2). Entonces

$$\langle A\rangle_\xi \neq \langle\xi|\hat{A}|\xi\rangle$$

Pero como en la práctica lo que se tiene son estados mezcla, la matriz de densidad $\hat{\rho}$ permite trabajar con ellos tranquilamente.

Sea que evaluamos el valor medio de $\hat{G} = \hat{\mathcal{H}}$ que será la energía $\langle E\rangle$ en autoestados de $\hat{\mathcal{H}}$.

$$\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle_{ENS} = \langle E\rangle = \sum_k p_k \sum_i \sum_j a_i^{k*} a_j^k \int \phi_i^* \phi_j E_j = \sum_k p_k \sum_j a_j^{k*} a_j^k E_j$$

$$\langle E\rangle = \sum_k p_k \sum_j a_j^{k*} a_j^k E_j = \sum_j \left(\sum_k p_k a_j^{k*} a_j^k \right) E_j = \sum_j \rho_{jj} E_j$$

Se tiene que $\hat{\rho}$ es diagonal para un operador $\hat{G}$ tal que utilizamos la base de autoestados.

Querremos que esto valga para cualquier base entonces necesitaremos que las fases sean números aleatorios:

$$\rho_{ij} = \sum_k^{\mathcal{N}} p_k a_i^{k*} a_j^k = \sum_k^{\mathcal{N}} p_k |a_i^k||a_j^k| \, \mathrm{e}^{i(\theta_i^k - \theta_j^k)}$$

y asi además son equiprobables (microcanónico) los estados base accesibles,

$$p_k = \frac{1}{\mathcal{N}} \qquad \text{y} \qquad |a_i^k| = |a_i| \quad \forall k$$

y asimismo pedimos que para cada miembro del ensamble la amplitud sea la misma, se tiene

$$\rho_{ij} = |a_i||a_j| \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_k^{\mathcal{N}} \mathrm{e}^{i(\theta_i^k - \theta_j^k)} = |a_i||a_j| \delta_{ij}$$

donde se han usado fases al azar, de modo que

$$\rho_{ij} = |a_i|^2 \delta_{ij} = \rho_i \delta_{ij}$$

Esto no está consistente: colapsas la delta o no, papi?

y entonces

$$\begin{cases} \rho_i = \dfrac{1}{\Gamma} \\ \rho_i = 0 \end{cases}$$

Entonces ρ_i será la probabilidad del estado de base ϕ_i. Se sigue que el operador densidad del microcanónico puede escribirse

$$\hat{\rho} = \sum_i |a_i|^2 \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right|$$

de manera que es una superposición incoherente de estados de la base $\{\phi_i\}$

$$\hat{\rho} = \sum_i \rho_i \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right|$$

y al final del día

$$\rho_{kl} = \langle\phi_k|\hat{\rho}|\phi_l\rangle = \sum_i \rho_i \left\langle\phi_k|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i|\phi_l\right\rangle = \sum_i \rho_i \delta_{ki}\delta_{il} = \rho_k \delta_{kl}$$

$$\Omega = 1 \text{ ensamble puro} \qquad\qquad S = k \log \Omega = 0$$

$$\rho_{mn} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_k^{\mathcal{N}} a_m^{k*} a_m^k = a_m a_n^*$$

si es la misma $\Psi \forall k$ el sistema se halla en una combinación lineal de ϕ_n, o bien

$$\rho_{mn} = |a_m|^2 \delta_{mn}$$

el sistema se halla en un único autoestado ϕ_n

$$\Omega > 1 \text{ ensamble mezcla}$$

4.1.1 Resumen formalismo

$$\rho_{ij} = \rho_i \delta_{ij}$$

$$\rho_i = \frac{1}{\Omega} \qquad \text{Microcanónico}$$

$$\rho_i = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_i}}{Q_N(V,T)} \qquad \text{Canónico}$$

$$\rho_i = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_i + \beta \mu N_i}}{\Xi(z,V,T)} \qquad \text{Gran canónico}$$

$$\hat{\rho} = \sum_i |\phi_i\rangle \, \rho_i \, \langle\phi_i| \qquad \text{Traza } (\hat{\rho}) = 1 \text{ bien normalizado}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Omega} \sum_i^{\text{ACC}} |\phi_i\rangle \langle\phi_i| = \frac{1}{\Omega} \hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}} \qquad \text{Tr } (\hat{\rho}) = 1$$

donde $\hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}}$ es una indentidad con 0 para los sitios de la diagonal donde no hay estado accesible. Luego Traza $(\hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}}) = \Omega$. Para los otros dos casos,

$$\hat{\rho} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_i}}{Q_N(V,T)} \sum_i^{\text{ACC}} |\phi_i\rangle \langle\phi_i| = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_i}}{Q_N(V,T)} \hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}} \qquad \text{Tr } (\hat{\rho}) = \frac{1}{Q_N} \text{ Tr } (\mathrm{e}^{-\beta E_i} \hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}})$$

$$\hat{\rho} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_i + \beta \mu N_i}}{\Xi(z,V,T)} \sum_i^{\text{ACC}} |\phi_i\rangle \langle\phi_i| = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_i + \beta \mu N_i}}{\Xi(z,V,T)} \hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}} \qquad \text{Tr } (\hat{\rho}) = \frac{1}{\Xi} \text{ Tr } (\mathrm{e}^{-\beta E_i + \beta \mu N_i} \hat{\mathbb{1}}^{\text{ACC}})$$

El conteo de estados se hace cuánticamente de modo que no hay paradoja de Gibbs. Los estados accesibles en el microcanónico (Ω) son tales que sus probabilidad es

$$|a_i|^2 = \frac{1}{\Omega} \quad \forall i \text{ accesible}$$

Serán aquellos de la base $\{\phi_i\}$ en cuestión tales que la energía resulte vale entre E y $E + \Delta E$.

Los dos postulados

- i) Equiprobabilidad
- ii) Fases al azar

aseguran que no hay correlación entre las funciones $\{\phi_i\}$ (en promedio).

4.2 Sistemas de partículas indistinguibles y no interactuantes

- no interacción
- indistinguibilidad (partículas idénticas)

$$\hat{H} = \sum_{i}^{N} H_i(\vec{q}_i, \vec{p}_i)$$

$$\hat{H}\Psi_E = E\Psi_E \qquad \text{donde}$$

$$\Psi_E = \prod_{i=1}^{N} u_{e_1}(q_i) \qquad \text{y } u_{e_1}(q_i)$$

siendo esta última la solución de una única partícula en el nivel e_i y donde e_i es el nivel energético de la partícula 'i'.

El sistema cuántico se describe mediante números de ocupación

$$E = \sum_{j=1}^{L} e_j n_j \qquad\qquad N = \sum_{j=1}^{L} n_j$$

siendo n_j el número de partículas en el nivel de energía e_j

$$\Psi_E = \prod_{i=1}^{n_1} u_{e_1}(q_i) \cdot \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} u_{e_2}(q_i) \cdot ...$$

Permutando coordenadas $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_N) \rightarrow (P\mathbf{q}_1, P\mathbf{q}_2, ..., P\mathbf{q}_N)$ llego a

$$\frac{N!}{n_1! n_2! ...} = N! \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i!}$$

diferentes estados. Cada vez que permuto dos partículas en diferentes niveles energéticos cuento un estado extra.

Podemos construir una función de onda cuántica correcta (que no se altere por permutaciones) si respetamos

$$|P\Psi|^2 = |\Psi|^2 \quad \text{dos casos}$$

$$P\Psi = \Psi \qquad\qquad P\Psi = \begin{cases} +\Psi \text{ número par de permutaciones} \\ -\Psi \text{ número impar de permutaciones} \end{cases}$$

simétrica antisimétrica

$$\Psi = \sum_P P\Psi \qquad\qquad \Psi = \sum_P \delta_P P\Psi, \delta_P = \pm 1$$

Faltaría el coeficiente de normalización

La antisimetría puede escribirse como determinante de Slater. Además, una función antisimétrica Ψ será nula al sumar en 'P' si existe más de una partícula en un mismo nivel energético. Esto equivale a tener dos filas iguales en el determinante de Slater. Vemos que el hecho de forzar la simetría de intercambio ha llevado al PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN.

BOSE-EINSTEIN (spin entero)	$n_i = 0, 1, 2, ..., N$	Cualquier ocupación es válida
FERMI-DIRAC (spin semientero)	$n_i = o, 1$	Sólo puede haber a lo sumo una partícula por nivel

La exclusión es $\sum_i^L n_i^2 = N$

Entonces, dado un conjunto $\{n_i\}$ de números de ocupación tendré

- 1 estado bosónico : $\Psi_S = \sum_P P\Psi_{\text{Boltz}}$
- 1 estado fermiónico : $\Psi_A = \sum_P \delta_P P\Psi_{\text{Boltz}}$ (si $N0 \sum_i^N n_i^2$)
- $\frac{N!}{\prod_i^L n_i!}$ estados de Boltzmann $\Psi_{\text{Boltz}} = \prod_{i=1}^N u_i(\vec{q}_i)$

4.2.1 Gas ideal cuántico

Consideramos N partículas no interactuantes indistinguibles ocupando un volumen V y con energía E Un estado es un conjunto $\{n_i^\nu\}$ donde 'i' es nivel energético

$$E_\nu = \sum_i e_i n_i^\nu \qquad\qquad N_\nu = \sum_i n_i^\nu \tag{2.1}$$

En el microcanónico $E_\nu = E$ y $N_\nu = N$ para todo estado ν. Pensamos en cierta estructura fina de niveles

donde g_i es el número de subniveles energéticos en la celda 'i' y n_i es el correspondiente número de partículas en la celda 'i'.

DIBUJO

Luego

$$\Gamma = \sum_{\{n_i\}}' W(\{n_i\}) = \sum_{\{n_i\}}' \prod_i^L \omega_i$$

tendremos

- bosones $\omega_i = \frac{(g_i - 1 + n_i)!}{(g_i - 1)! n_i!}$
- fermiones $\omega_i = \frac{(g_i - n_i + n_i)!}{(g_i - n_i)! n_i!} = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)! n_i!}$
- boltzmanniones $\omega_i = g_i^{n_i}$ y hay que multiplicar por el factor $N! / \prod n_i!$

Permutaciones de partículas y paredes (bosones). Permutaciones de partículas y huecos $g_i \geq n_i$.

donde ω_i es el número de maneras de tener n_i en g_i subniveles.

Para el caso de Boltzmann debemos multiplicar por el factor de buen conteo,

$$\Gamma = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_i\}}' \prod_i^L \frac{N!}{\prod (n_i)!} (g_i)^{n_i} = \sum_{\{n_i\}} \prod_i^L \frac{(g_i)^{n_i}}{(n_i)!}$$

La entropía S es

$$S = k \log \sum_{\{n_i\}}' W(\{n_i\}) \approx k \log W(\hat{n}_i)$$

donde se supone que el conjunto $\{\bar{n}_i\}$ domina la $\sum'$. Buscaremos ese conjunto extremando S sujeto a las condiciones (2.1).

$$\delta(k \log W(\{n_i\})) + \alpha \delta N + \beta \delta E = 0$$

$$\bar{n}_i = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} \, \mathrm{e}^{\beta e_i} - 1} \text{ Bose}$$

$$\bar{n}_i = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} \, \mathrm{e}^{\beta e_i} + 1} \text{ Fermi}$$

$$\bar{n}_i = g_i \, \mathrm{e}^{\beta\mu} \, \mathrm{e}^{\beta e_i} \text{ Boltzmann}$$

Los coeficientes son para las dimensiones. Luego se ve que $\alpha = -\mu/kT \quad \beta = 1/kT \quad z \equiv \mathrm{e}^{\beta\mu}$

Esto da el número de partículas por celda energética 'e$_i$' pero interesará por nivel 'g$_i$'. Entonces dividiremos sobre 'g$_i$' y cambiamos el índice

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} \, \mathrm{e}^{\beta e_j} + a} \qquad a = \begin{cases} 1 \text{ Bose} \\ -1 \text{ Fermi} \\ 0 \text{ Boltmann} \end{cases}$$

La identificación de los coeficientes puede hacerse desde

$$U = TS - pV + \mu N \qquad TS = U + pV - \mu N$$

$$\frac{S}{k} = \frac{E}{kT} + \frac{pV}{kT} - \frac{\mu}{kT}N \qquad (S = S(E,V,N))$$

$$\frac{S}{k} = \frac{1}{kT}\sum_i n_i e_i + \frac{pV}{kT} - \frac{\mu}{kT}\sum_i n_i \tag{2.2}$$

La idea es escribir S/k en (2.2) de modo que queden explícitas las $\sum$ que definen N y E. Para Bose es

$$\frac{S}{k} = \sum_i n_i \log\left(1 + \frac{g_i}{n_i}\right) + g_i \log\left(1 + \frac{n_i}{g_i}\right)$$

$$n_i \log(n_i + g_i) - n_i \log(n_i) = n_i \log(n_i \, \mathrm{e}^{A} \, \mathrm{e}^{Be_i}) - n_i \log(n_i)$$

$$\sum_i n_i (A + Be_i) + g_i$$

$$\frac{S}{k} = A\sum_i n_i + B\sum_i e_i n_i + \sum_i g_i \log\left(1 + \frac{n_i}{g_i}\right)$$

$$A = -\frac{\mu}{kT} \qquad B = \frac{1}{kT}$$

4.2.2 Microcanónico cuántico (gas ideal) de Boltzmann

Se puede hacer la cuenta explícitamente.

$$\frac{S}{k} = \log\left(\prod_i\right) = \sum_i n_i \log(g_i) - \log n_i!$$

$$\frac{S}{k} \approx \sum_i n_i \log\left(\frac{g_i}{n_i}\right) + n_i = \sum_i n_i \left(\log(g_i/n_i) + 1\right)$$

$$N = \sum_i g_i z \mathrm{e}^{-\beta e_i} = \sum_j z \mathrm{e}^{-\beta e_j} = \frac{1}{h^3}\int d^3p z \mathrm{e}^{-\beta p^2/2m} \int d^3 q = \frac{zV}{h^3}(2\pi m kT)^{3/2} = \frac{zV}{\lambda^3}$$

donde hemos preparado el paso al continuo

En Boltmann es

$$N = \frac{zV}{\lambda^3} \quad \to \quad z = \frac{\lambda^3}{v} \ll 1$$

$$E = \frac{3}{2}NkT \qquad \frac{S}{k} = \beta E - N\log(z) + N$$

4.3 Cuánticos II

- Gas ideal en el gran canónico, entonces el cálculo de Q_N previamente
- Gas ideal (Boltmann) en el canónico $\to$ multinomial

$$Q_N = \frac{1}{N!} \sum_{n_1}^{\prime} \sum_{n_2}^{\prime} \dots \sum_{n_i}^{\prime} \frac{N!}{n_1! \, n_2! \dots} \, \mathrm{e}^{-\beta \sum_i n_i e_i}$$

$$Q_N = \frac{1}{N!} \sum_{n_1}^{\prime} \sum_{n_2}^{\prime} \dots \sum_{n_i}^{\prime} \frac{N!}{n_1! \, n_2! \dots} \prod_i^L \mathrm{e}^{-\beta n_i e_i}$$

$$Q_N = \frac{1}{N!} \left(\mathrm{e}^{-\beta e_1} + \mathrm{e}^{-\beta e_2} + \dots \right)^N = \frac{1}{N!} \left(\sum_i \mathrm{e}^{-\beta e_i} \right)^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

$$\log(Q_N) = N \log(V/\lambda^3) - N \log N + 1$$

$$\frac{1}{N} \approx \log\left(\frac{v}{\lambda^3}\right)$$

$$\boxed{\log Q_N = N \left[\log\left(\frac{v}{\lambda^3}\right) + 1 \right]}$$

- Gas ideal (Fermi y Bose) en el canónico $\to$ *hard* $\to$ paso al gran canónico.

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T)$$

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta \mu N} \sum_{n_1}^{\prime} \sum_{n_2}^{\prime} \dots \sum_{n_i}^{\prime} \mathrm{e}^{-\beta \sum_i n_i e_i}$$

y con un *magic pass*

$$\Xi = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \dots \sum_{n_i}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta \mu \sum_i n_i} \mathrm{e}^{-\beta \sum_i n_i e_i} = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \dots \sum_{n_i}^{\infty} \prod_i \mathrm{e}^{\beta(\mu - e_i) n_i}$$

$$\Xi = \prod_i^L \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta(\mu - e_i) n_i} \right)$$

Para Boltzmann el gran canónico será

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{zV}{\lambda^3} \right)^N$$

$$\Xi(z,V,T) = \begin{cases} \prod_i \frac{1}{1-\,\mathrm{e}^{\beta(\mu-e_i)}} & \text{Bose} \\ \prod_i 1+\,\mathrm{e}^{\beta(\mu-e_i)} & \text{Fermi} \\ \mathrm{e}^{zV/\lambda^3} & \text{Boltzmann} \end{cases}$$

$$\log\Xi(z,V,T) = \frac{pV}{kT} = \begin{cases} \sum_i -\log(1-\,\mathrm{e}^{\beta(\mu-e_i)}) & \text{Bose} \\ \sum_i \log(1+\,\mathrm{e}^{\beta(\mu-e_i)}) & \text{Fermi} \\ \frac{zV}{\lambda^3} = z\sum_i^L \,\mathrm{e}^{-\beta e_i} & \text{Boltzmann} \end{cases}$$

El número de partículas sale desde

$$\langle N\rangle = z\frac{\partial}{\partial z}(\log\Xi(z,V,T))$$

$$\langle N\rangle = \begin{cases} z\sum_i -\frac{1}{1-z\,\mathrm{e}^{-\beta e_i}}(-\,\mathrm{e}^{-\beta e_i}) = \sum_i \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i}-1} & \text{Bose} \\ z\sum_i \frac{1}{1+z\,\mathrm{e}^{-\beta e_i}}(\,\mathrm{e}^{-\beta e_i}) = \sum_i \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i}+1} & \text{Fermi} \\ \frac{zV}{\lambda^3} & \text{Boltzmann} \end{cases}$$

$$\langle n_j\rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta e_j}(\log\Xi(z,V,T))$$

$$\langle n_j\rangle = \begin{cases} -\dfrac{-1}{1-z\,\mathrm{e}^{-\beta e_i}}(-z\,\mathrm{e}^{-\beta e_i})(-1) = \dfrac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i}-1} & \text{Bose} \\ \\ \dfrac{-1}{1+z\,\mathrm{e}^{-\beta e_i}}(z\,\mathrm{e}^{-\beta e_i})(-1) = \dfrac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i}+1} & \text{Fermi} \\ \\ z\,\mathrm{e}^{-\beta e_j} & \text{Boltzmann} \end{cases}$$

4.3.1 Funciones termodinámicas

Todo comienza desde la función de partición

Fermi	Bose
$\Xi = \prod_i 1+\,\mathrm{e}^{-\beta(e_i-\mu)}$	$\Xi = \prod_i \frac{1}{1-\,\mathrm{e}^{-\beta(e_i-\mu)}}$
$\beta pV = \sum_i \log(1+\,\mathrm{e}^{-\beta(e_i-\mu)})$	$\beta pV = \sum_i -\log(1-\,\mathrm{e}^{-\beta(e_i-\mu)})$

En gas ideal es, en cartesianas,

$$e = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$$

o en esféricas

$$e = \frac{p^2}{2m}$$

Un gas ideal cuántico generalizará al gas ideal clásico y para valores determinados de los parámetros (T, V grandes) debería devolver el resultado clásico.

$$\langle N \rangle = \sum_i \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(e_i-\mu)}+1} \quad \Bigg| \quad \langle N \rangle = \sum_i \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(e_i-\mu)}-1}$$

El paso al continuo y la integración por partes luego del reemplazo

$$\beta e = \frac{\beta p^2}{2m} = \frac{p^2}{2mkT} \cong x$$

llevará a

$$\begin{array}{c|c} \beta p = \dfrac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) & \beta p = \dfrac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \\[2ex] \dfrac{\langle N \rangle}{V} = \dfrac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) & \dfrac{\langle N \rangle}{V} - \dfrac{N_0}{V} = \dfrac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \end{array}$$

Así queda todo en función de

$n_0 = \frac{1}{z^{-1}-1} = \frac{z}{1-z}$ se va a ∞ con $z \to 1$ que es $\mu \to 0$.

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} dx \qquad \text{y } g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x - 1} dx$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \quad \Bigg| \quad \frac{\lambda^3}{v}(N - n_0) = g_{3/2}(z)$$

$N - n_0$ es la población en los estados excitados.

Pero tenemos expresiones en términos de z

$$f_\nu(z) = \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j^\nu} \quad \Bigg| \quad g_\nu(z) = \sum_{j=1}^\infty \frac{z^j}{j^\nu}$$

Podemos escribir

$$\frac{\lambda^3}{v} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - ... \qquad \Bigg| \qquad \frac{\lambda^3}{v}(N - n_0) = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - ...$$

con lo cual con $z \ll 1$ nos podemos quedar con los primeros términos. Asimismo $n_0 \ll N$.

$$\beta p = \frac{z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + ...}{v(z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + ...)} \qquad \Bigg| \qquad \beta p = \frac{z + \frac{z^2}{2^{5/2}} + ...}{v(z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + ...)}$$

$$\frac{pV}{NkT} \cong 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \qquad \Bigg| \qquad \frac{pV}{NkT} \cong 1 - \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}}$$

Así vemos la corrección positiva (negativa) de origen cuántico. La presión en el caso de Fermi es mayor (por exclusión) que la ideal; en cambio en Bose es mayor (condensación). El gas de Boltzmann tendrá como solución

$$\frac{\lambda^3}{v} = z$$

clásicamente

$$\underbrace{\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}}_{\text{chico}} \underbrace{\frac{N}{V}}_{\text{chico}} = z = \mathrm{e}^{\mu/kT}$$

y además como

$$\mathrm{e}^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1 \qquad \frac{\mu}{kT} \ll 0$$

y entonces

$$|\mu| \gg 1, \mu < 0$$

pero $\mu \equiv \partial U / \partial N$ con lo cual decimos que clásicamente al aumentar un δN tenemos un decrecimiento de la energía δU muy grande (con $\delta V = \delta S = 0$).

Anoté ***investigarlo*** **este asunto.**

Hemos pedido que $\mathrm{e}^{\beta(\mu - e_i)} < 1$ para Bose de modo que

$$\beta(\mu - e_i) < 0 \qquad \mu < e_i \forall i$$

es el requerimiento para Bose y si e_i es el ground entonces $\mu < 0$. Si se da que $\mu \to 0^-$ con $e_i = 0$ entonces $\langle n_0 \rangle \to \infty$.

Para Fermi no hay requerimientos pero

$$0 \leq \langle n_0 \rangle \leq 1$$

4.3.2 Ecuaciones de estado para los gases ideales

Hay que pasar al continuo

$$\frac{pV}{kT} = \log\left[\Xi(z,V,T)\right] \qquad \langle N\rangle = z\frac{\partial}{\partial z}\left\{\log\left[\Xi(z,V,T)\right]\right\}$$

$x = \beta e = p^2/2mkT$

En el caso de Fermi,

$$\frac{pV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} = \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$\frac{\langle N\rangle}{V} = \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} = \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j+1}\frac{z^j}{j^\nu}$$

No pasamos al continuo el estado fundamental porque puede diverger

y en el caso de Bose

$$\frac{pV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x - 1} - \log(1-z) = \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \log(1-z)$$

$$\frac{\langle N\rangle}{V} = \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x - 1} + \frac{1}{V}\left(\frac{1}{z^{-1}-1}\right) = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{\langle n_0\rangle}{V}$$

$$g_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{j=1}^\infty \frac{z^j}{j^\nu}$$

La energía siempre resulta valer

$$\langle E\rangle = \frac{3}{2}pV$$

valor que es universal y no depende por lo tanto de la ecuación de estado.

El límite clásico es cuando

$$z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e_i} \ggg 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^{\beta e_i}}{z} \ggg 1$$

y como $e_i > 0$ se da $\mathrm{e}^{e_i/kT} > 1$

$$z \ll 1 \qquad \mathrm{e}^{\beta\mu} \ll 1 \qquad \beta\mu \ll 0 \qquad \frac{\mu}{kT} \ll 0$$

$$\mu < 0 \qquad \text{y } |\mu| \to \infty$$

pues $kT \propto 10^{-19}$ Joules (a 10000 °K). El límite clásico se da con T altas, $\mu \to -\infty$ y por ello $z \lll 1$.

DIBUJOS

Sea un sistema ideal de bosones $\mu < 0$ $0 \leq e$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}\,\mathrm{e}^{\beta e} - 1}$$

se tiene que para $e = 0$ y $\beta\mu = -1$ es $\langle n \rangle = 0.582$ y para $e = 0$ y $\beta\mu = -0.5$ es $\langle n \rangle = 1.541$

Vemos entonces que el condensado de Bose debe producirse con $\mu \to 0^-$.

Capítulo 5

Gas de Fermi

DIBUJOS

$$\langle n_e \rangle = \frac{1}{z^{-1}\,\mathrm{e}^{\beta e}+1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\mu-e)}+1}$$

Si $\mu < 0$ como $e > 0$ siempre, ni aún en el estado de más baja energía se llega a ocupar el nivel (restan muchos niveles vacíos).

Sea que $T \to \infty$ entonces $\beta \to \infty$ y se sigue que

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to \infty e > \mu$$

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to 0 e < \mu$$

$$\mathrm{e}^{\beta(e-\mu)} \to 1 e = \mu$$

Luego, con $T = 0$ es Fermi un escalón. El valor de μ que determina el último estado ocupado se llama e_F

DIBUJO

$$f_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v} = \int_0^{\xi=\beta\mu} \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)3/2} dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta\mu)^{3/2} = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}(\beta e_F)^{3/2}$$

5.1 Análisis del gas ideal de Fermi

La primera aproximación consiste en

- Caso no degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ que lleva a T alta y v alto por ende N/V chico.

$$z \ll 1 \qquad f_\nu(z) \approx z \qquad \frac{\lambda^3}{v} \approx z$$

Si vale la condición entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \ll 1 \qquad z \ll 1$$

$$\beta p V \approx 1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}} \qquad\qquad U = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta}\left(1 + \frac{\lambda^3}{v 2^{5/2}}\right)$$

- $\frac{\lambda^3}{v} < 1$ entonces $z < 1$ y hay que expandir el virial,

$$\beta p V = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

λ^3/v **a orden 1 hay efectos cuánticos**

que igualando coeficientes se hace (¿?)

$$f_{5/2}(z) = f_{3/2}(z) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}$$

- $\frac{\lambda^3}{v} \approx 1$ Cálculo numérico
- Caso altamente degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$ se tiene $z \gg 1$ Se puede expandir $f_\nu(z)$ en función de $(\log)^{-1}$ mediante lema de Sommerfeld

$z \ggg 1$ **entonces** $\log z \gg 1$ $(\log z)^{-1} \ll 1$ $\log z = \beta\mu$

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\pi^{1/2}} (\log z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

y entonces

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\log z)^{3/2} \qquad \text{a orden } 0$$

$$\frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{N}{V} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (kT)^{3/2} = \mu^{3/2}$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = \mu^{3/2} = e_F^{3/2}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\pi^{1/2}}{4} (kT)^{3/2} = \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + ...\right]$$

$$\frac{h^3}{\pi} \frac{N}{V} \frac{3}{(2m)^{3/2} 4} = e_F^{3/2} \approx \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]$$

$$e_F \approx \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\frac{\mu}{kT})^{-2} \right]^{2/3} \approx \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Anoté *investigar este pasaje.*

$$e_F \approx \mu \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (\frac{kT}{e_F})^2 \right]$$

y consideramos

$$\frac{1}{\mu^2} \approx \frac{1}{e_F^2}$$

pués μ es muy grande.

$$\beta p v = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{2\beta\mu}{5} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

Hasta orden dos en T resulta

$$pv \approx \frac{2\mu}{5} \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] = \frac{2e_F}{5} \left[1 - \frac{\pi}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$pv \approx \frac{2e_F}{5} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$U = \frac{3}{2} pv \approx \frac{3}{5} N e_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \approx \frac{N\pi^2 k^2 T}{2e_F} \qquad C_V \propto T$$

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{2} N k \left(\frac{T}{T_F} \right)$$

DIBUJO T_F siempre estará ene general en la zona clásica donde no vale la aproximación degenerada.

Calor específico Fermi (¿?)

- Caso totalmente degenerado : $\frac{\lambda^3}{v} \to \infty \qquad (T \to 0) \qquad z \to \infty$

  La distribución de estados es escalón,

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{1}{z^{-1}\, \mathrm{e}^{\beta p^2/2m} + 1} \right) dp$$

$z = e^{\beta\mu}$ **y**
$z(T \to 0) = e^{\beta e_F} \to \infty$

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp$$

Teniendo el límite sale la cuenta

Notemos que

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 kT \log(1 + e^{-1/kT(p^2/2m - \mu_0)}) dp$$

tiene un comportamiento no trivial con $T \to 0$. Si $kT \to 0$ entonces si $e > \mu_0$ el log $\to 0$ y si $e < \mu_0$ el log $\to \infty$. Parecería que con $T \to 0$ es

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left(\frac{p^2}{2m} - \mu_0 \right) dp$$

y haciendo el cambio de variables de acuerdo a $p^2/2m = e$, que lleva a $pdp = mde$, se tiene

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{e_F} \sqrt{2e} m^{3/2} (e - \mu_0) de$$

$$pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} \left(\frac{e_F^{5/2}}{5/2} - \mu_0 \frac{e_F^{5/2}}{3/2} \right) = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{4}{15}$$

$$U = \frac{3}{2} pV = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{1/2} m^{3/2} e_F^{5/2} \frac{2}{5}$$

$$p = \frac{2}{5} e_F \frac{\langle N \rangle}{V} \qquad U = \frac{3}{5} e_F \langle N \rangle$$

A $T = 0$ tenemos presión y energía no nulas; las partículas no se acomodan todas en un único nivel energético (exclusión de Pauli). Para $T \approx 0$ (T bajas) el escalón en estados apenas se desdibuja

DIBUJO.

5.2 Cuánticos III –reubicar–

5.2.1 Los números de ocupación

DIBUJO

Se ve que para Bose $\mu < 0$ siempre pero $\langle n \rangle \to \infty$ si $\mu \to 0^+$. El gráfico es para T alta. Con T bajas todo tiende a suceder más pegado al eje $\beta(e - \mu) = 0$

5.2.2 Comportamiento de $f_{3/2}(z)$

$$f_{3/2}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j^{3/2}} \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \qquad z \text{ chico}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}\,\mathrm{e}^x + 1} dx \approx \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx$$

Notemos que con $\beta\mu$ grande el integrando es 1 o 0 (DIBUJO); en realidad es un escalón en el límite en que $\xi \equiv \beta\mu \to \infty$

Definimos $\log z \equiv \xi$ **para no especular con temperaturas.**

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \; z \text{ muy alto}$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + ... \right]$$

El valor λ^3/v determina relación entre T, V, N que son los parámetros macroscópicos que uno fija.

5.2.3 Casos

- Comportamiento clásico: $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ Altas T y bajas $n \equiv \frac{N}{V}$

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

y por inversión de la serie

$$z = \frac{\lambda^3}{v} + \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 2^{-3/2}$$

Sabemos que en Boltzmann es $\frac{\lambda^3}{v} = z$

y entonces si $\frac{\lambda^3}{v} \ll 1$ se tiene que $z \ll 1$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{v}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \qquad \frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z)$$

$$\frac{pv}{kT} = \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{z - z^2/2^{5/2}}{z - z^2/2^{3/2}} \approx 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)$$

siendo el último término una corrección cuántica.

- Comportamiento cuántico : $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$ Bajas T y altas $n \equiv \frac{N}{V}$
  A $T = 0$ determinamos la e_F como (con el límite de $T \to 0$)

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\log z = \beta\mu} x^{1/2} dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2}$$

$$\left(\frac{3\lambda^3\sqrt{\pi}}{4v}\right)^{2/3} = \left(\frac{3h^3\sqrt{\pi}}{4(2\pi mkT)^{3/2} v}\right)^{2/3} = \log z = \beta e_F$$

$$\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4\pi v}\right)^{2/3} = e_F = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{2/3}$$

A $T = 0$ la ocupación por nivel es un escalón ($e_F = \mu(T = 0)$)

$$\langle n_e \rangle = \begin{cases} 1 & e < e_F \\ 0 & e > e_F \end{cases}$$

5.2.4 Funciones termodinámicas con T baja y n alta

Usamos Sommerfeld

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \qquad\qquad \mu = e_F$$

orden 1

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]$$

$$\frac{\lambda^3}{v} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]^{-1} \approx (\log z)^{3/2}$$

$$e_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right) \approx \mu(T) \text{ cumple } \mu(T = 0) = e_F$$

Puede verse que con $\frac{\lambda^3}{v} \ggg 1$ (T baja y n alta) es

$$C_V \approx \frac{N\pi^2 k^2 T}{2e_F}$$

DIBUJO

Aún a $T = 0$ hay presión no nula pero $S \to 0$ con $T \to 0$ respetando la tercera ley. Existe una relación de recurrencia

$$z\frac{\partial}{\partial z} f_\nu(z) = z\frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{l z^{l-1} z}{l^\nu} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{z^l}{l^{\nu-1}} = f_{\nu-1}(z)$$

$$f_\nu(z) = \int \frac{1}{z} f_{\nu-1}(z) dz$$

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{5/2}$$

entonces

$$f_{5/2}(z) = \int dz \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{(\log z)^{3/2}}{z} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int dz \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial z} (\log z)^{5/2} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\log z)^{5/2}$$

Usamos $d(\log z)^n = n(\log z)^{n-1}/z$

5.2.5 Sobre la aproximación de gas de Fermi para el núcleo

En lo que sigue una deducción más detallada del cálculo. Considero una caja de lados L

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \qquad \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} = \frac{h}{L}\mathbf{n}$$

Tomo en el origen de coordenadas $n_i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ **y así voy de** $-L/2$ **a** $L/2 <$**.**

$$E = \frac{(\hbar|\mathbf{k}|)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{2\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

Quiero saber qué densidad de estados energéticos tengo. Para ello, en esféricas

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \frac{2\pi^2}{L^2} r^2$$

donde r vive en la esfera (no es necesario tomar el octante y dividir sobre 8)

$$g(E)dE = N(r)dr = 4\pi r^2 dr$$

siendo $g(E)dE$ el número de puntos entre E y $E + dE$,

$$dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{L^2 m} 4r dr$$

$$g(E)dE = \frac{L^3 m^{3/2} E^{1/2}}{\hbar^{3/2} \pi^2 \sqrt{2}} dE$$

$$N = g \int_0^{e_F} g(E)dE = \sqrt{2} \frac{V m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \int_0^{e_F} e^{1/2} dE$$

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \frac{2^{3/2}}{3} e_F^{3/2}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \frac{2^{3/2}}{3} e_F^{3/2}$$

y entonces deducimos de aquí que

$$e_F = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{v}\right)^{2/3}$$

que coincide con la expresión para e_F con degeneración $g = 2$

¿Y estas cuentas sueltas?

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{(\hbar\pi)^2}{2ma^2}r^2 \qquad dE = \frac{(\hbar\pi)^2}{ma^2}rdr$$

$$N(r)dr = \frac{\pi}{2}r^2 dr$$

será lo mismo que el incremento en niveles energéticos

$$N(e)de = \frac{m^2a^3}{\pi^2\hbar^3}\left(\frac{E}{2}\right)^{1/2} dE$$

Recordemos que a $T = 0$ era $pV = 2/5Ne_F$ y $U = 3/5Ne_F$

Pensamos un conjunto de nucleones como un gas de Fermi. Claramente

$$N = 2\int_0^{e_F} N(e)\, de$$

porque tenemos la ocupación en función de la energía

$$e_F \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \text{ según la definición de } e_F$$

Al aplicar este modelo (del gas de Fermi) al núcleo hacemos algunas consideraciones

$$R = a_0 A^{1/3} \qquad V \propto A$$

siendo A el número de nucleones.

Para un núcleo se tienen N=A-Z neutrones, siendo Z protones y A nucleones.

$$E = \frac{3}{5}N_T e_F(\text{ a } T = 0)$$

y tenemos un e_F de protones y de neutrones, que son

$$e_{Fp} \propto \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \qquad e_{Fn} \propto \left(\frac{A-Z}{A}\right)^{2/3}$$

$$E = \frac{3}{5}\left[Z\left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3} + (A-Z)\left(\frac{A-Z}{V}\right)^{2/3}\right] = \frac{3}{5}\left(\frac{Z^{5/3} + (A-Z)^{5/3}}{A^{2/3}}\right)$$

donde hemos supuesto ambos pozos iguales. Si los pozos no fueran iguales cambia la e_F.

Se minimiza E con $Z = N = A/2$ (simetría)

$$f_4 \propto E - E_0 = \frac{3}{5A^{2/3}} \left[Z^{5/3} + (A-Z)^{5/3} - 2(A/2)^{5/3} \right]$$

que se puede reescribir en función de $D = (N-Z)/2 = (A-2Z)/2 = A/2-Z$ (que será chico) y de esta manera

$$Z = \frac{A}{2} - D \qquad A - Z = \frac{A}{2} + D$$

$$f_4 \propto \frac{3}{5} \left(\frac{[A/2-D]^{5/3} + [A/2+D]^{5/3} - 2[A/2]^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$

y que con un Taylor en $D \approx 0$ resulta

$$f_4 \propto \frac{(A/2-Z)^2}{A} \propto D^2 \text{ término de simetría}$$

5.2.6 Cuánticos 3 – más material para reubicar–

Un esquema de temas: comportamiento de los números de ocupación gas de Fermi : comportamiento de $f_\nu(z)$ con $\nu = 3/2$ gas de Fermi con condiciones extremas

$$\lambda^3/v \ggg 1 \qquad\qquad \lambda^3/v \lll 1$$

e_F con degeneración g funciones termodinámicas con $\lambda^3/v \ggg 1$ $S \to 0$ con $T \to 0$ Aproximación de gas de Fermi para núcleo densidad de estados $g(e)$

La expresión para $\mu(T)$ con $T \geq 0$ sale de

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} \right]$$

$$(\log z)^{3/2} = \frac{3\sqrt{\pi} h^3}{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{3/2} 4v} \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2}\right]}$$

$$\mu = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m} \left(1 + \frac{\pi^2}{8 \log^2 z} \right)^{-2/3}$$

$$\mu = e_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{e_F} \right)^2 \right]$$

Hay un yeite en la deducción que refiere a que abajo es lo mismo usar orden 1 que orden dos y reemplazo $(\beta\mu)^{-2}$ por $(\beta e_F)^{-2}$

y con T baja podemos escribir todo en función de la e_F.

$$E = \frac{3}{5} N e_F \qquad \text{con } T = 0$$

Lo importante de tener $f_{3/2}(z)$ en función de λ^3/v, desde

$$\lambda^3/v = f_{3/2}(z)$$

DIBUJO

es que vemos que z chico lleva a λ^3/v grande y consecuentemente z grande lleva a λ^3/v grande.

Luego,

clásico $z \ll 1$

$$\frac{\lambda^3}{v} \ll 1 \text{ independientemente}$$

cuántico $z \gg 1$

$$\frac{\lambda^3}{v} \gg 1 \text{ independientemente}$$

Con $T = 0$ es $\mu(T = 0) = e_F$ DIBUJO escalón

Cuántico (límite máximo) entonces

$$z \to \infty \Rightarrow \frac{\lambda^3}{v} = \frac{4(\log z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{4}{2\sqrt{\pi}} (\beta e_F)^{3/2} \text{ con } z = \mathrm{e}^{\beta e_F}$$

Entonces e_F es el nivel tal que debajo de él hay N estados. En el espacio de momentos las partículas ocupan una esfera de radio p_F.

Capítulo 6

Gas de Bose

Capítulo 7

Elementos de la teoría de fenómenos críticos

Capítulo 8

Evolución temporal de sistemas macroscópicos

8.1 Teorema de Liouville

Un sistema de N partículas en el espacio físico $3D$ descripto por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{p_i, q_i\}, t) \qquad 1 \leq i \leq 3N$$

evolucionará de acuerdo a

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

Entonces se tendrá que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \right]$$

$\rho = \rho(\{p_i, q_i\}, t)$ describe un ensamble

Pero el número de estados se conserva. Sea ω un volumen arbitrario, el número de estados en ω es

$$\Omega_\omega = \int \rho d^{3N} q d^{3N} p \equiv \int_\omega \rho d\omega$$

Los estados que se fugan van a parar a otros ω dentro del ensamble

y entonces si hay una variación es porque se fugan estados de ω y

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\Omega_\omega) = \int_{S=\partial\omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

siendo el rhs el flujo saliente de estados del volumen ω huyendo por la superficie S y siendo $\mathbf{v} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{3N}, \dot{p}_1, \dot{p}_2, ..., \dot{p}_{3N})$. Aplicando teorema de la divergencia,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \rho d\omega = \int_\omega \mathrm{div}(\rho\mathbf{v})d\omega$$

$$\int_\omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v})\right] d\omega = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^{3N} \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho\dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho\dot{p}_i) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \rho\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i + \rho\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0$$

y vemos que se tiene un cero en

$$\rho\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0$$

El ensamble evoluciona como un fluido incompresible, pues el volumen se conserva.

8.2 Jerarquía BBGKY

Podemos definir funciones de correlación f_s. Las ecuaciones de movimiento para calcularlas resultan acopladas de modo que relacionan f_1 con f_2, f_2 con f_3, etc.

Este sistema es la jerarquía BBGKY. Truncándola se puede llegar a Boltzmann

$$z_i \equiv (\vec{p}_i, \vec{q}_i) \quad \text{con } i = 1, 2, ..., N$$

f_s : probabilidad de hallar s partículas con ciertos $\{p_i, q_i\}$ $(i = 1, ..., s)$

$$1 = \int \rho(z_1, z_2, ..., z_N)dz_1...dz_N \quad \text{normalizada}$$

$$f_s = \int dz_{s+1}...dz_N\rho(z_1, z_2, ..., z_N) \Rightarrow f_s = f_s(z_1, z_2, ..., z_s)$$

Es una matnera de pasar de Γ a μ

Dadas $(N-s)$ partículas con cualesquiera $\vec{p}, \vec{q}$ consideramos la probabilidad de tener s partículas con ciertos $\vec{p}, \vec{q}$

$$f_1 = f_1(z_1) \quad \text{es la función de distribución}$$

Se reescribe Liouville $\partial\rho/\partial t = 0$ con $\rho = \rho(\{p_i, q_i\}, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[\nabla_{\vec{q}_i}\rho \cdot \nabla_{\vec{p}_i}\mathcal{H} - \nabla_{\vec{p}_i}\rho \cdot \nabla_{\vec{q}_i}\mathcal{H}\right] = 0 \qquad \text{con un } \mathcal{H} \text{ generico}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i}^{N} \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \sum_{i}^{N} U_i(q_i) + \sum_{i<j}^{N} V_{ij}(q_i)$$

y tomándole el gradiente

$$\nabla_{\vec{p}_k}\mathcal{H} = \frac{|\vec{p}_k|\hat{k}}{m} = \frac{\vec{p}_k}{m}, \qquad \nabla_{\vec{q}_k}\mathcal{H} = \nabla_{\vec{q}_k}U_k + \sum_{i<j}^{N}\nabla_{\vec{q}_k}V_{kj}$$

$$, \nabla_{\vec{q}_k}\mathcal{H} = -\vec{F}_k - \sum_{i<j}^{N}\vec{K}_{kj}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\vec{p}_i}{2m}\cdot\nabla_{\vec{q}_i}\rho + \vec{F}_i\cdot\nabla_{\vec{p}_i}\rho + \sum_{i<j}^{N}\vec{K}_{kj}\cdot\nabla_{\vec{p}_i}\rho = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i}^{N}\frac{\vec{p}_i}{2m}\cdot\nabla_{\vec{q}_i} + \vec{F}_i\cdot\nabla_{\vec{p}_i} + \sum_{i\neq j}^{N}\frac{1}{2}\vec{K}_{kj}\cdot\left(\nabla_{\vec{p}_i} - \nabla_{\vec{p}_j}\right)\right]\rho = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\sum_{i}^{N} S_i + \frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} i \neq j P_{ij}}_{\equiv h_N(1,2,\ldots,N)}\right]\rho = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + h_N(1,2,...,N)\right]\rho = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i}^{S}S_i+\sum_{i=S+1}^{N}S_i+\frac{1}{2}\sum_{i}^{S}\sum_{j}^{S}i\neq jP_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i=S+1}^{N}\sum_{j=S+1}^{N}i\neq jP_{ij}\right]\rho=0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+h_S(1,2,...,S)+h_{N-S}(S+1,...,N)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=S+1}^{N}i\neq jP_{ij}\right]\rho=0$$

Ahora

$$f_s(1,2,...,S)=\frac{N!}{(N-S)!}\int dz_{S+1}...dz_N\rho(1,2,...,S,S+1,...,N)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_s+h_sf_s=-\frac{N!}{(N-S)!}\int dz_{S+1}...dz_N\left[h_{N-S}+\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=S+1}^{N}P_{ij}(i\neq j)\right]\rho(1,...,N)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+h_s\right)f_s=-\sum_{i=1}^{S}\frac{N!}{(N-S)!}\int dz_{S+1}...dz_N\left[\sum_{j=S+1}^{N}P_{ij}\rho(1,...,N)\right]$$

donde

$$\int dz_{S+1}...dz_Nh_{N-S}\rho=0$$

y donde

$$\sum_{j=S+1}^{N}P_{ij}\rho(1,...,N)=P_{i,S+1}\rho+P_{i,S+2}\rho+...+P_{i,N}\rho=(N-S)P_{i,S+1}$$

entonces

$$=-\sum_{i=1}^{S}\frac{N!}{(N-S)!}\int dz_{S+1}P_{i,S+1}\int dz_{S+2}...dz_N\rho(1,...,N)$$

$$=-\sum_{i=1}^{S}\int dz_{S+1}P_{i,S+1}\underbrace{\frac{N!}{(N-S)!}\int dz_{S+2}...dz_N\rho(1,...,N)}_{\equiv f_{S+1}(1,...,S+1)}$$

y

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+h_s\right)f_s=-\sum_{i=1}^{S}\int dz_{S+1}\vec{K}_{i,S+1}\cdot\nabla_{\vec{P}_i}f_{S+1}(1,...,S+1)$$

con ustedes la jerarquía BBGKY donde el término con $\nabla_{\vec{P}_{S+1}}$ no aporta.

Capítulo 9

Gases diluidos en las proximidades del equilibrio

Sistema clásico diluido, procesos colisionales en términos de σ, sistema grande con paredes reflejantes

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3xd^3p \equiv \#\text{de partículas en el cubo } d^3p,\, d^3x$$

siendo f la función de distribución de un cuerpo.

La teoría cinética busca hallar $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ para una dada interacción molecular. Sabemos que la interacción es a través de colisiones.

Sin colisiones las moléculas evolucionan de acuerdo a

Clásico implica $\lambda_{\mathbf{deB}} \ll (V/N)^{1/3}$, $h/p \ll v^{1/3}$ **o bien** $\frac{h}{\sqrt{2mkT}} \ll v^{1/3}$

$$t \to t+\delta t \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}+\mathbf{v}\delta t \qquad \mathbf{p} \to \mathbf{p}+\mathbf{F}\delta t$$

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3xd^3p = f(\mathbf{x}+\mathbf{v}\delta t, \mathbf{p} \to \mathbf{p}+\mathbf{F}\delta t, \mathbf{p}, t+\delta t)d^3x'd^3p'$$

El volumencillo con sus partículas evoluciona en el espacio de fases μ. El volumen evoluciona de acuerdo al jacobiano.

$$d^3r'd^3p' = |J|d^3rd^3p$$

pero

$$J = \frac{\partial(x',y',z',p'_x,p'_y,p'_z)}{\partial(x,y,z,p_x,p_y,p_z)}$$

da

$$1+\mathcal{O}(\delta t^3)$$

con lo cual si $\delta t \ll 1$ será $d^3r'd^3p' = d^3rd^3p$ y entonces

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{v}\delta t, \mathbf{p} \to \mathbf{p}+\mathbf{F}\delta t, \mathbf{p}, t+\delta t) = f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$$

pero si hay colisiones

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{v}\delta t, \mathbf{p} \to \mathbf{p}+\mathbf{F}\delta t, \mathbf{p}, t+\delta t) = f(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}} \delta t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\delta t d^3rd^3p = (\bar{R}-R)\delta t d^3rd^3p$$

donde $\bar{R}\delta t d^3r'd^3p'$ es el número de colisiones durante δt en las que una partícula se halla al final en $d^3r'd^3p'$ y $R\delta t d^3rd^3p$ es correspondientemente el número de colisiones durante δt en las que una partícula se halla al comienzo en d^3rd^3p.

$R\delta t d^3rd^3p$ será finalmente el número de partículas en el cubo d^3rd^3p.

Queremos ver cómo varía f en μ.

De t a $t+\delta t$ algunas moléculas de A pasan a B y otras van hacia otros lados. Hacia B llegan moléculas de A y desde fuera.

Dada la dilución consideramos colisiones binarias.

R es el número de colisiones en las cuales la partícula se halla en A y consecuentemente no llega a B (pérdida) (en el cubo d^3V_2) y $\bar{R}$ es el número de colisiones en las cuales la partícula se halla fuera de A y consecuentemente por colisión llega a B (ganancia) (en el cubo d^3V_2).

$$\underbrace{f(\mathbf{v}_2,t)d^3V_2}_{\text{d. blancos}} \ \underbrace{|\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1|}_{\text{condición de colisión}} \ \underbrace{f(\mathbf{v}_1,t)d^3V_1}_{\text{d. incidentes}} \ \underbrace{\sigma}_{V_1V_2\to V_1'V_2'} \ d^3V_1'd^3V_2'$$

Si quiero conocer R debo integrar: si la partícula con $\mathbf{V}_2$ se halla en A integrao en todas las $\mathbf{V}_1$ y en todos los destinos $\mathbf{V}_1'$ y $\mathbf{V}_2'$.

$$\underbrace{f(\mathbf{v}_2',t)d^3V_2'}_{\text{d. blancos}} \ \underbrace{|\mathbf{V}_2'-\mathbf{V}_1'|}_{\text{condición de colisión}} \ \underbrace{f(\mathbf{v}_1',t)d^3V_1'}_{\text{d. incidentes}} \ \underbrace{\sigma}_{V_1V_2\to V_1'V_2'} \ d^3V_1d^3V_2$$

Si quiero conocer $\bar{R}$ debo integrar: si la partícula con $\mathbf{V}_2$ se halla en B integrao en todas las $\mathbf{V}_1'$ $\mathbf{V}_2'$ (orígenes) y en todos los destinos $\mathbf{V}_1'$.

$$d^3V_2R = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} f(\mathbf{V}_2,t)d^3V_2|\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1|f(\mathbf{V}_1,t)d^3V_1 \underbrace{\sigma}_{12\to1'2'} d^3V_1'd^3V_2'$$

$$d^3V_2\bar{R} = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} f(\mathbf{V}_2',t)d^3V_2'|\mathbf{V}_2'-\mathbf{V}_1'|f(\mathbf{V}_1',t)d^3V_1' \underbrace{\sigma}_{1'2'\to12} d^3V_1d^3V_2$$

$$d^3V_2R = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} f_2f_1|\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1| \underbrace{\sigma}_{12\to1'2'} d^3V_1'd^3V_2'd^3V_2d^3V_1$$

$$d^3V_2\bar{R} = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} f_2' f_1' |\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1'| \underbrace{\sigma}_{1'2'\to 12} d^3V_1 d^3V_2 d^3V_2' d^3V_1'$$

y si usamos que $|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1'|$ y $\underbrace{\sigma}_{12\to 1'2'} = \underbrace{\sigma}_{1'2'\to 12}$ entonces

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial t}\right|_{\text{col}} = (\bar{R}-R) d^3V_2 = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} (f_1' f_2' - f_1 f_2)|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| \underbrace{\sigma}_{12\to 1'2'} d^3V_1' d^3V_2' d^3V_2 d^3V_1$$

Bajo estas líneas pueden verse los esquemas de integración,

9.0.1 Construcción de una cuenta

$$\frac{\overbrace{|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1|\delta t \delta A}^{\text{Volumen dentro del cual una partícula con } \mathbf{V}_1 \text{ chocaría a una de } \mathbf{V}_2.}}{\delta t \delta A} \qquad \underbrace{f(\mathbf{V}_1, t) d^3V_1}_{\text{densidad de incidentes}}$$

es el # de partículas incidentes con $\mathbf{V}_1$ que podría colisionar con una de $\mathbf{V}_2$ en la unidad de tiempo y por unidad de área.

$$\sigma(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_1'\mathbf{V}_2') d^3V_1' d^3V_2'$$

es la sección eficaz de dispersión del proceso $V_1V_2 \to V_1'V_2'$ teniendo como destinos $\mathbf{V}_1'$ y $\mathbf{V}_2'$.

$$[|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| f(\mathbf{V}_1, t) d^3V_1] \, \sigma_{12\to 1'2'} d^3V_1' d^3V_2'$$

es el # de partículas incidentes con $\mathbf{V}_1$ dispersadas en $\mathbf{V}_1'$ y con el blanco yendo a $\mathbf{V}_2'$ por unidad de tiempo y volumen.

$$[f(\mathbf{V}_2, t) d^3V_2] |\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| f(\mathbf{V}_1, t) d^3V_1 \sigma d^3V_1' d^3V_2'$$

es el # de partículas dispersadas hacia $\mathbf{V}_1'$ y $\mathbf{V}_2'$ proviniendo de $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ por unidad de tiempo y de volumen.

Quisiera conocer $Rdtd^3rd^3v$ (# de colisiones durante dt en las cuales una partícula incial –blanco– se halla en d^3r con d^3v_2)

pérdida; si golpeo un blanco en $\mathbf{V}_2$ lo saco del volumen

$$Rdtd^3rd^3v = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} dt d^3r f(\mathbf{V}_2, t) d^3V_2 |\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| f(\mathbf{V}_1, t) d^3V_1 \sigma d^3V_1' d^3V_2'$$

Se integra en las incidentes V_1 y en los destinos V_1', V_2'.

y también $\bar{R}dtd^3rd^3v$ (# de colisiones durante dt en las cuales una partícula final se halla en d^3r con d^3v_2)

ganancia si golpeo

$$\bar{R}dtd^3rd^3v = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} dt d^3r f(\mathbf{V}_2', t) d^3V_2' |\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1'| f(\mathbf{V}_1', t) d^3V_1' \sigma d^3V_1 d^3V_2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col} \delta t = (\bar{R} - R)\delta t$$

Usando

$$|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1'| \quad \sigma(12 \to 1'2') = \sigma(1'2' \to' 2)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}} = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' |\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1| \sigma(f(\mathbf{V}_1', t) f(\mathbf{V}_2', t) - f(\mathbf{V}_1, t) f(\mathbf{V}_2, t))$$

Por otro lado

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{p} + \mathbf{F}\delta t, t + \delta t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\delta t, t + \delta t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}\delta t + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\frac{\mathbf{F}}{m}\delta t + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t = \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t$$

y entonces con $\delta t \to 0$ es

$$\left(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial t}\right) f = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}}$$

y somos conducidos a

$$\boxed{(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial t}) f_2 = \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_1' f_2' - f_1 f_2)}$$

la ecuación de transporte de Boltmann.

Se ha supuesto CAOS MOLECULAR, de modo que la correlación de dos cuerpos (función de distribución de dos cuerpos en el mismo punto espacial)

La solución de equilibrio será aquella independiente del tiempo. Es decir $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\int\int\int dV ... V\sigma(f_1' f_2' - f_1 f_2) = 0$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t)$$

y esto nos lleva a que las velocidades de dos partículas en el elemento d^3r no están correlacionadas. La probabilidad de encontrarlas simultáneamente es el producto de hallarlas a cada una por separado.

Una condición suficiente es

$$f_1' f_2' - f_1 f_2 = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{col}} = 0$$

y veremos que es también necesaria.

9.0.2 otra

Supusimos un sistema diluido, con colisiones binarias y llegamos a

$$\left(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\vec{r}}+\frac{1}{m}\mathbf{F}\cdot\nabla_{\vec{v}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)f_2=\frac{\partial f_2}{\partial t}=\int\int\int d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_{1'}f_{2'}-f_1f_2) \tag{1}$$

Pensamos que en el equilibrio será $\partial f_2/\partial t=0$ y sabemos que

$$\text{si } f_{1'}f_{2'}-f_1f_2=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}=0$$

La función del equilibrio es MB, $f_0(\mathbf{v})\to\frac{\partial f_0}{\partial t}=0$

Definiendo $H(t)=\int d^3V f(\mathbf{v},t)\log(f(\mathbf{v},t))$ vemos que

$$\text{si } \frac{\partial f(\mathbf{v},t)}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{dH}{dt}=0$$

Ahora, considerando que f satisface (1) probamos que

$$\text{si } f \text{ verifica (1)}\Rightarrow\frac{dH}{dt}\leq 0$$

pero como el integrando en dH/dt no cambia de signo nunca debe anularse para obtener el cero con lo cual

$$\frac{dH}{dt}=0\Rightarrow f_{1'}f_{2'}-f_1f_2=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

y en definitiva

$$\boxed{\frac{dH}{dt}=0\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial t}=0}$$

y prueba que con

$$f(\mathbf{v},t)_{t\to\infty}\to f_0(\mathbf{v})\quad\text{con}\quad\frac{\partial f_0}{\partial t}=0$$

La ecuación (1) asume la hipótesis de CAOS MOLECULAR para su validez.

$f(\mathbf{p},t)$ en principiao sólo satisface la ecuación de transporte de Boltzmann cuando vale CAOS MOLECULAR. Una tal f es tal que

$$\frac{dH}{dt}\leq 0 \qquad H \text{ es decreciente siempre (un instante luego del CAOS MOLECULAR)}$$

$$\frac{dH}{dt}=0\qquad\text{si } f(\mathbf{p},t)=f_{MB}\text{ con }\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

CAOS MOLECULAR entonces significa que H es máximo local, luego decrece rápidamente y además se sale de f_{MB}

9.1 Teorema H y consecuencias

$$H(t) = \int d^3p f(\mathbf{p},t)\log(f(\mathbf{p},t)) =< \log f(\mathbf{p},t) >_{\text{no normalizado}}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \int d^3p\left(\frac{\partial f}{\partial t}\log f + f\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \int d^3p\frac{\partial f}{\partial t}\left(1+\log f\right)$$

$$\text{Si } \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Entonces la anulación de la derivada de H es condición necesaria pero no suficiente para que la derivada de f se anule.

Por otro lado, también vale que si f satisface la ecuación de Boltzmann, entonces

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} < \log f(\mathbf{p},t) >_{\text{no normalizado}} \leq 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \int d^3p\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{p},t)\left(1+\log f\right)$$

y si consideramos función de $\mathbf{v}_2$,

$$\frac{dH}{dt} = \int d^3V_2\int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_1'f_2' - f_1f_2)[1+\log f_2]$$

pero el intercambio de V_1 con V_2 no afecta la integral y podemos sumar dos medios,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\left[\int d^3V_2\int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_2'f_1' - f_2f_1)[1+\log f_1] + \right.$$
$$\left. \int d^3V_2\int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_1'f_2' - f_1f_2)[1+\log f_2]\right]$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\left[\int d^3V_2\int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_2'f_1' - f_2f_1)[2+\log(f_1f_2)]\right]$$

pero intercambio de V_1', V_2' con V_1, V_2 tampoco afecta, entonces

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4}\left[\int d^3V_2 \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_2 f_1 - f_2' f_1')[2+\log(f_1' f_2')] + \right.$$
$$\left. int d^3V_2 \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_2' f_1' - f_2 f_1)[2+\log(f_1 f_2)]\right]$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4}\int d^3V_2 \int_{V_1}\int_{V_1'}\int_{V_2'} d^3v_1 d^3v_1' d^3v_2' V\sigma(f_2 f_1 - f_2' f_1')[\log\left(\frac{f_1' f_2'}{f_1 f_2}\right)]$$

y como siempre es

$$(X-Y)\log\left(\frac{Y}{X}\right) \leq 0$$

luego

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

y si

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$$

pero de la prueba que acabamos de finalizar vemos que si

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow f_1 f_2 - f_1' f_2' = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

luego

$$\frac{dH}{dt} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{v}, t) = 0$$

con f de Boltzmann.

Entonces $dH/dt = 0$ si y sólo si $f_1 f_2 = f_1' f_2'$ para todas las colisiones. Esta condición se conoce como *balance detallado* y es la condición de equilibrio para el gas.

$$E = \int d^3V f(\mathbf{v}, t)|\mathbf{v}|^2 < \infty$$

$$H = \int d^3V f(\mathbf{v}, t)\log f(\mathbf{v}, t)$$

H es el promedio en la distribución de $\log f(\mathbf{p}, t)$ no normalizado.

Capítulo 10

Introducción al estudio de procesos de relajación

10.1 Procesos de Markov

Las P son densidades de probabilidad, cuando el espacio muestral sea continuo.

Sea Y una variable estocástica que puede tomar valores $y_1, y_2, \ldots$

$$P_1(y_1, t) \equiv \text{Prob. de tomar } y_1 \text{ en } t \text{ (1 paso)}$$

$$P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) \equiv \text{Prob. conjunto de tomar } y_1 \text{ en } t_1 \text{ y } y_2 \text{ en } t_2$$

$$P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) \equiv \text{Prob. condicional de tomar } y_2 \text{ en } t_2 \text{ habiendo tomado } y_1 \text{ en } t_1 \text{ (certeza de } y_1\text{)}$$

Abreviaremos obviando el tiempo. Además se tiene

$$P(y_1; y_2) \leq P(y_1 | y_2)$$

donde el lhs evalúa los caminos que comunican y_1, y_2 del total y el rhs evalúa los cminos que comunican y_1, y_2 del subconjunto de los que parten de y_1.

Además

$$P_2(y_1; y_2) = P_1(y_1) P_{1/1}(y_1 | y_2)$$

cumpliéndose lo siguiente

- $\int P_1(y_1) dy_1 = 1$ normalización
- $\int P_{1/1}(y_1 | y_2) dy_2 = 1$ normalización
- $\int P_2(y_1; y_2) dy_1 = \int P_1(y_1) P_{1/1}(y_1 | y_2) dy_1 = P_1(y_2)$ reducción

Ejemplito numérico

$$P(y_1;y_2) = P(y_1)P(y_1|y_2) = \frac{4}{4}\frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$
$$P(y_2;y_1) = P(y_2)P(y_2|y_1) = \frac{3}{7}\frac{2}{3} = \frac{2}{7}$$

Notemos que $P(A|B) \neq P(B|A)$ aunque $P(A;B) = P(B;A)$

Las densidades de muchos pasos: $P(y_1;y_2;y_3)$ son relevantes cuando el sistema tiene "memoria".

Un proceso es de Markov cuando el estado del sistema depende del paso inmediato anterior únicamente. Se define por

$$P_1(y_1), \quad P_{1/1}(y_1|y_2) \equiv \text{Probabilidad de transición}$$

$$P_{3/1}(y_1,y_2,y_3|y_4) \underbrace{\rightrightarrows}_{\text{Markov}} P_{1/1}(y_3|y_4)$$

Se puede demostrar una ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P_{1/1}(y_1|y_3) = \int P_{1/1}(y_1|y_2)P_{1/1}(y_2|y_3)dy_2$$

10.1.1 Ecuación maestra

Queremos ver la evolución de la $P_1(y_1,t)$

$$\frac{dP_1(y,t)}{dt} = \lim_{\tau\to 0}\frac{P_1(y,t+\tau)-P_1(y,t)}{\tau}$$

Usando que

$$P_1(y_2,t+\tau) = \int dy_1 P_1(y_1,t)P_{1/1}(y_1,t|y_2,t+\tau)$$

$$P_1(y_2,t) = \int dy_1 P_1(y_1,t)P_{1/1}(y_1,t|y_2,t)$$

$$\frac{dP_1(y,t)}{dt} = \int dy_1 P_1(y_1,t)\left[\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}(P_{1/1}(y_1,t|y_2,t+\tau) - P_{1/1}(y_1,t|y_2,t))\right]$$

que se puede escribir de modo que

$$\frac{1}{\tau}\left\{[1-\tau\int dyW(y_1,y)]\delta(y_1-y_2) + \tau W(y_1,y_2) - \delta(y_1-y_2)\right\}$$

y entonces

$$\frac{dP_1(y,t)}{dt} = \int dy_1 P_1(y_1,t) \left[-\int dy W(y_1,y)\delta(y_1-y_2) + W(y_1,y_2) \right]$$

$$\frac{dP_1(y,t)}{dt} = \int dy_1 P_1(y_1,t) W(y_1,y_2) - \int dy_1 P_1(y_1,t) \int dy W(y_1,y)\delta(y_1-y_2)$$

$$\frac{dP_1(y,t)}{dt} = \int dy_1 P_1(y_1,t) W(y_1,y_2) - \int dy P_1(y_2,t) W(y_2,y)$$

$$\frac{dP_1(y,t)}{dt} = \int dy_1 P_1(y_1,t) W(y_1,y_2) - P_1(y_2,t) \int dy W(y_2,y)$$

donde el primer término en el rhs se interpreta como ganancia (lo que entra) y el segundo pérdida (pues la integral es lo que sale).

$$W(y_1,y_2) \equiv \text{Transiciones } y_1 \to y_2 \text{ por la unidad de tiempo}$$

10.1.2 Camino aleatorio y ecuación de difusión

Si ℓ, T son escalas y n_2, s un número entero de pasos

$$P_1(n_2\ell, s\mathrm{T}) = \sum_{n_1} P_1(n_1\ell, [s-1]\mathrm{T}) P_{1/1}(n_1\ell, [s-1]\mathrm{T} | n_2\ell, s\mathrm{T})$$

Quiero saber cuáles son las chances de estar en $n_2\ell$ al tiempo $s\mathrm{T}$ sumando todas las transiciones desde diferentes lugares $n_1\ell$.

Si la probabilidad es uniforme

$$P_{1/1}(n_1\ell, [s-1]\mathrm{T} | n_2\ell, s\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\delta(n_2-[n_1+1]) + \frac{1}{2}\delta(n_2-[n_1-1]) = \frac{1}{2} \begin{cases} \text{si } n_2 = n_1+1 \\ \text{si } n_2 = n_1-1 \end{cases}$$

$$P_1(n_2\ell, s\mathrm{T}) = \sum_{n_1} P_1(n_1\ell, [s-1]\mathrm{T}) \left\{ \frac{1}{2}\delta(n_2-[n_1+1]) + \frac{1}{2}\delta(n_2-[n_1-1]) \right\}$$

y sumando y restando convenientemente,

$$P_1(n_2\ell, s\mathrm{T}) = -\frac{1}{2} P_1([n_2-1]\ell, [s-1]\mathrm{T}) + \frac{1}{2} P_1([n_2+1]\ell, [s-1]\mathrm{T}) + P_1(n_2\ell, [s-1]\mathrm{T}) - P_1(n_2\ell, [s-1]\mathrm{T})$$

$$\frac{P_1(n_2\ell, s\mathrm{T}) - P_1(n_2\ell, s\mathrm{T})}{\mathrm{T}} =$$
$$\frac{\ell^2}{2\mathrm{T}} \left[\frac{P_1([n_2-1]\ell, [s-1]\mathrm{T}) - 2P_1(n_2\ell, [s-1]\mathrm{T}) + P_1([n_2+1]\ell, [s-1]\mathrm{T})}{\ell^2} \right] \tag{1.1}$$

Pero esto no es otra cosa que expresiones de las derivadas, de manera que

$$\frac{\delta P(n_2\ell, s\mathrm{T})}{\delta \mathrm{T}} = \frac{\ell^2}{2\mathrm{T}} \frac{\delta^2 P(n_2\ell, [s-1]\mathrm{T})}{\delta \ell^2}$$

Esta es la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = C \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

una ecuación de onda para la probabilidad (?)

10.2 Cadenas de Markov

Espacio muestral discreto (dimensión L) ; medimos el tiempo en pasos

$$P_1(y_j, 1) = \sum_i^L P_1(y_i, 0) P_{1/1}(y_i, 0|y_j, 1)$$

donde la información sobre las transiciones se introduce en

$$Q : Q_{ij} \equiv P_{1/1}(y_i, 0|y_j, 1)$$

que es la matriz estocástica. Se verifica

$$\sum_i^L Q_{ij} = 1 \; \forall i$$

y entonces las filas son vectores de probabilidad

$$\overbrace{\vec{P(1)}}^{1\times L} = \overbrace{\vec{P(0)}}^{1\times L} \overbrace{Q}^{L\times L}$$

$$P_j(1) = P_i(0) Q_{ij} \quad \text{Asumimos convención de Einstein}$$

$$\vec{P(s)} = P(\vec{s-1})Q = P(\vec{s-2})QQ = ... = \vec{P(0)}Q^s$$

y decimos que Q es estocástica regular si existe $k : [Q^k]_{ij} > 0 \forall i, j$.

Si Q es estocástica regular entonces existe $s : Q^{s+1} = Q^s \equiv T$ y por lo tanto

$$QT = Q^{s+1} = T$$

T es la solución de equilibrio, pues $T = QT$

Si $n > s$

$$\vec{P(n)} = \vec{P(0)}Q^n = \vec{P(0)}Q^{n-s}Q^s = \vec{P(0)}T$$

$$\lambda_\alpha \overbrace{\vec{P}^\alpha}^{1\times L} = \overbrace{\vec{P}^\alpha}^{1\times L} \overset{L\times L}{\widehat{Q}} \qquad \to \qquad 0 = \vec{P}^\alpha(Q - \lambda_\alpha \mathbb{1})$$
$$\lambda_\beta \overbrace{\vec{P}^\beta}^{1\times L} = \overbrace{\vec{P}^\beta}^{1\times L} \overset{L\times L}{\widehat{Q}} \qquad \to \qquad 0 = (Q - \lambda_\beta \mathbb{1})\vec{P}^\beta$$
$$\lambda_\alpha \chi_j^\alpha = \chi_{1i}^\alpha Q_{ij} \qquad \vec{\chi} = (,,,)$$

donde los índices $j, 1i$ refieren a columnas y

$$\lambda_\beta \psi_{i1}^\beta = Q_{ij}\psi_{j1}^\beta \qquad \vec{\chi} = \left(\right)$$

donde los índices $i1, j1$ refieren a filas.

Y entonces deducimos que

- Autovectores a izquierda $\vec{\chi}$ y a derecha $\vec{\psi}$ son ortogonales.
- Los autovalores son $|\lambda_\gamma| \leq 1$.
- $\lambda = 1$ es siempre autovalor.

Sabemos que

$$P(m,s) = \sum_n P(n,0) Q_{nm}^s \qquad \to \text{con } s = 1$$
$$P(m,1) = \sum_n P(n,0) Q_{nm}$$

y esto es

$$\chi_m = \sum_n \chi_n Q_{nm} \qquad (\lambda = 1 \text{autovalor de } \vec{\chi} \text{ estacionario})$$

Siempre hay solución estacionaria $P = PQ$.

Para el autovector a derecha

$$\lambda_\beta \psi_{\ell 1}^\beta = \sum_i Q_{\ell i} \psi_{i1}^\beta$$

Si $\vec{\psi}^\beta = (1, 1, ..., 1)^t \to$

$$\lambda_\beta \psi_\ell^\beta = \lambda_\beta = \sum_i Q_{\ell i}\psi_i^\beta = \sum_i Q_{\ell i} = 1$$

y $\lambda_\beta = 1$ autovalor de

$$\vec{\psi}^\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.3 Solución general a través de descomposición espectral

$$\lambda_\alpha \chi_i^\alpha = \sum_j \chi_j^\alpha Q_{ij}$$

$$\lambda_\alpha \psi_\ell^\alpha \chi_i^\alpha = \sum_j \psi_\ell^\alpha \chi_j^\alpha Q_{ij}$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \psi_\ell^\alpha \chi_i^\alpha = \sum_j \sum_\alpha \psi_\ell^\alpha \chi_j^\alpha Q_{ij} = \sum_j \delta_{\ell j} Q_{ji} = Q_{\ell i}$$

y entonces

$$Q_{\ell i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \psi_\ell^\alpha \chi_i^\alpha$$

es una descomposición espectral. De esta forma

$$Q_{\ell i}^s = \sum_\alpha \lambda_\alpha^s \psi_\ell^\alpha \chi_i^\alpha$$

por ortogonalidad de $(\vec{\chi}, \vec{\psi})$.

$$Q_{\ell i}^s = \lambda_1^s \psi_\ell^1 \chi_i^1 + \sum_{\alpha=2} \lambda_\alpha^s \psi_\ell^\alpha \chi_i^\alpha$$

Y si $s \to \infty$ entonces $\lambda_1 = 1$ y $\psi^1 = (1, 1, ..., 1)^t$ de modo que

$$\lim_{s\to\infty} Q_{\ell i}^s = \overbrace{\psi_\ell^1}^{L\times 1} \overbrace{\chi_\ell^1}^{L\times 1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} (\chi_1^1 \chi_2^1 ... \chi_L^1) \right]_{\ell i} = \chi_i^1$$

Todas las filas son iguales.

$$\lim_{s\to\infty} Q_{\ell i}^s = T_{\ell i} = \chi_i^1 \forall \ell$$

entonces

$$T = \begin{pmatrix} [\ \chi^1\ ;] \\ [\ \chi^1\ ;] \\ ... \\ [\ \chi^1\ ;] \end{pmatrix}$$

Luego T tiene como filas al autovector que cumple

$$\vec{\chi} = c\vec{hi}Q \qquad \text{El punto fijo de } Q$$

Por otro lado

$$\lim_{s\to\infty} Q^s_{\ell i} = \lim_{s\to\infty} P_{1/1}(\ell,0|i,s) = P_1(i,0)$$

La probabilidad de un estado i final, una vez dentro del régimen estacionario, no depende del estado ℓ desde el cual partimos.

La solución de equilibrio claramente es

$$\vec{P} = \vec{P}Q$$

pues si $\vec{P}(s+1) = \vec{P}(s)Q$ y obtenemos

$$\vec{P}(s+1) = \vec{P}(s) = \vec{P}(s)Q$$

entonces resulta que

$$\vec{P}(s) = \vec{P}(s)Q$$

es lo que hay que buscar. La moraleja es que $\vec{P}$ de equilibrio es el punto fijo de Q.