

---

# CURSO BÁSICO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 1: Mecánica Clásica

---

E.F. Lavia y Colaboradores

versión 0.1

21 de diciembre de 2015

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Mecánica lagrangiana</b>	<b>1</b>
1.1	Principio de los trabajos virtuales . . . . .	1
1.2	Construcción del lagrangiano . . . . .	2
1.3	Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total . . . . .	5
1.4	Momentos conjugados y coordenadas cíclicas . . . . .	6
1.5	Energía cinética de un sistema . . . . .	7
1.6	Energía cinética de un sistema de partículas . . . . .	8
1.7	Trabajo en un sistema de partículas . . . . .	9
1.8	Lagrangiano cíclico en el tiempo . . . . .	10
1.9	Energía cinética y el hamiltoniano . . . . .	11
1.10	Principio de acción mínima . . . . .	11
1.11	Aplicaciones del principio de acción mínima . . . . .	13
1.12	Multiplicadores de Lagrange . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Simetrías</b>	<b>18</b>
2.1	Constantes de movimiento y simetrías . . . . .	18
2.2	El teorema de Noether . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Fuerzas centrales</b>	<b>23</b>
3.1	Fuerzas centrales . . . . .	23
3.2	Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	24
3.3	Velocidad areolar . . . . .	25
3.4	Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler . . . . .	26
3.5	Vector de Runge-Lenz . . . . .	28
3.6	Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente . . . . .	28
3.7	Dispersión . . . . .	30
3.8	Dispersión por dos cuerpos . . . . .	31
3.9	Scattering . . . . .	33
3.10	Dispersión por potenciales infinitos . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Pequeñas oscilaciones</b>	<b>35</b>

4.1	Oscilaciones viscosas . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Cuerpos rígidos</b>	<b>40</b>
5.1	Cuerpos rígidos . . . . .	40
5.1.1	Grados de libertad de un cuerpo rígido . . . . .	40
5.1.2	Velocidad de un cuerpo rígido . . . . .	40
5.1.3	Unicidad de la velocidad de rotación . . . . .	41
5.1.4	Eje instantáneo de rotación . . . . .	42
5.2	Ángulos de Euler . . . . .	42
5.3	Energía cinética del cuerpo rígido . . . . .	45
5.4	La peonza simétrica . . . . .	47
5.5	Teorema de Steiner . . . . .	48
5.6	Sistemas inerciales . . . . .	49
5.7	Lagrangiano de un sistema no inercial que se traslada . . . . .	51
5.7.1	Lagrangiano en un sistema rotante . . . . .	52
5.8	Sistemas rotantes . . . . .	52
5.9	El tensor de inercia . . . . .	55
5.10	Movimiento de un cuerpo asimétrico . . . . .	57

# Mecánica lagrangiana

## 1.1 Principio de los trabajos virtuales

Escribimos las ecuaciones de Newton para un sistema de partículas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

pero sabiendo que el momento viene de las fuerzas aplicadas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{P}}_i$$

de manera que

$$\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, sumando en las  $N$  partículas del sistema

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  son desplazamientos virtuales. Si hacemos estos desplazamientos compatibles con los vínculos

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde el último término es nulo debido a que la fuerza de vínculos son perpendiculares a los desplazamientos virtuales, es decir

$$\mathbf{F}_i^v \perp \delta \mathbf{r}_i$$

Esto es sumamente sketchy, debemos leer la carpeta de la cursada y luego la teoría.

si es que, por supuesto, los  $\delta \mathbf{r}_i$  son compatibles con los vínculos.

Esto nos deja entonces, el Principio de los Trabajos Virtuales,

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde como son independientes entonces se sigue que

$$\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

**Relación vínculos y desplazamientos:** El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{r}_i) - K = 0$$

luego, derivando implícitamente cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector  $\delta \mathbf{r}$  como  $N$  dimensionales.

*¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.*

## 1.2 Construcción del lagrangiano

Consideremos un sistema de  $N$  partículas,  $k$  ecuaciones de vínculo y por ende  $3N - k$  grados de libertad (estamos en 3 dimensiones).

Tenemos  $N$  relaciones

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

entonces una variación serán

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$$

donde el último  $\delta t$  es nulo por ser un desplazamiento virtual de manera que

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Por otro lado

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

y se puede reescribir el primer término como

$$\dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla

Consideremos la derivada total de

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

Pero la diferencial del vector  $\mathbf{r}_i$  es (notemos que no es una variación)

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

La derivada de la velocidad de la partícula  $i$ -ésima respecto a la coordenada  $l$ -ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t}.$$

Si derivamos nuevamente

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} dq_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial t} dt \right)$$

de tal manera que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l}$$

Volvemos ahora a la eq III y

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j$$

y este corchete lo reescribimos como

$$\begin{aligned} & \sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ & \sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \end{aligned}$$

Ahora introducimos la sumatoria en  $i$  hacia adentro de ambos términos,

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

de modo que dentro de los paréntesis resulta  $T$ , luego

$$\begin{aligned} \sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) \right\} \delta q_j \\ \sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

siendo  $Q_j$  la fuerza generalizada. Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas entonces

$$Q_j \delta q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j$$

y como  $V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  se tiene

$$V = \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

pero

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Definimos como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

y entonces podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Si existieran fuerzas que no provienen de un potencial entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

y finalmente

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j^{NC} \delta q_j$$

Como esto vale para todo grado de libertad  $l$  llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este es el resultado más importante del capítulo.

## 1.3 Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

Sea una función de las coordenadas y del tiempo  $F = F(q_i, t)$  que sumamos al lagrangiano  $\mathcal{L}$ , de modo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$



y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este nuevo lagrangiano son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

Ahora es necesario escribir la derivada total de  $F$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Luego, usando esta información, resulta que los términos que surgen de la adición de la derivada total de  $F$  resultan ser

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right)$$

y si aceptamos que  $F$  es de clase  $C^2$  se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

de modo que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos una derivada total respecto del tiempo de una función de  $q_j, t$ .

## 1.4 Momentos conjugados y coordenadas cíclicas

El momento canónicamente conjugado a  $q_j$  se define como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \equiv Q_j$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ . Sea un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  entonces si no depende explícitamente de la coordenada  $k$  será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_i, t)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$Q_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_k = 0 \quad \rightarrow \quad p_k = cte.$$

no existe fuerza generalizada en el grado de libertad  $k$ , de forma que se conserva el momento  $p_k$  canónicamente conjugado a  $q_k$ .

## 1.5 Energía cinética de un sistema

A continuación expresaremos la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas,

**Este chapter es básicamente un desarrollo formal, habría que bajar con alguna aplicación práctica.**

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \left( \sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \quad (5.1)$$

Usando  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$  desarrollamos un desplazamiento real como

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y podemos incorporar esta información en (5.1) para obtener

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \dot{q}_j + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right) + 2 \left( \sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \dot{q}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$$

Esto se puede reescribir más cómodamente definiendo

$$T_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}$$

$$b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

Hay un factor de 1/2 de diferencia. Revisar la carpeta.

y entonces, juntando todo,

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j + \sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j$$

Para una partícula libre será

$$T = T_2$$

y para una partícula con vínculos en general tendrá las tres clases de cinética.

## 1.6 Energía cinética de un sistema de partículas

La energía de un sistema de partículas es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N 2m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

y veremos ahora que el último término es nulo ya que son vectores perpendiculares. Para ello notemos que

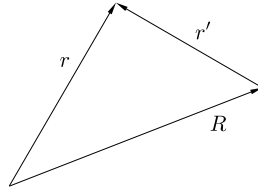
$$\begin{aligned} M\mathbf{R}_{cm} &= \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}'_i) \\ 0 &= \sum_i^N m_i \mathbf{r}'_i \end{aligned}$$

y también

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{v}'_i$$

de modo que

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i.$$



**Figura 6.1** Sistema de partículas

Finalmente

$$T^{tot} = T^{cm} + T_{cm}^{tot}$$

Esto hay que revisarlo, derivo ambos miembros? Vincular con la figura.

## 1.7 Trabajo en un sistema de partículas

Empezamos desde

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

donde el trabajo externo puede escribirse

$$W^{ext} = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s} \quad (7.1)$$

La no dependencia del camino para la integral que da (7.1) requiere que

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}_i) \quad \nabla_{\mathbf{r}_i} \times \mathbf{F}_i^e = 0$$

y entonces puedo inducir la existencia de una función potencial para las fuerzas externas, barra resizable ya.

$$W^{ext} = - \sum_i^N \Delta V_i \Big|_1^2$$

Por otro lado,

$$W_c^{int} = \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\sum_i^N W_i^{int} = W^{int} = \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}^N \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

## 1.8 Lagrangiano cíclico en el tiempo

Empecemos desde la derivada total con respecto al tiempo del lagrangiano,

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y usando la derivada total del término

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Reemplazando una en otra resulta que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y acomodando un poco

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{d}{dt} (p\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y entonces previo pase mágico de términos,

$$\frac{d}{dt} (p\dot{q} - \mathcal{L}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y si definimos

$$\mathcal{H} \equiv p\dot{q} - \mathcal{L}$$

resulta que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Entonces si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = cte.$ . Además, si se cumplen

$$T = T_2 \quad V \neq V(\dot{q})$$

y además los vínculos no dependen del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = E$ , es decir, el Hamiltoniano es la energía. La condición de que los vínculos no dependan del tiempo genera en realidad que  $T = T_2$ .

Por otro lado  $E = cte.$  si  $W^{nc} = 0$ .

## 1.9 Energía cinética y el hamiltoniano

Dado que la energía cinética tiene la forma general

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{T_0} + \underbrace{\sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j}_{T_2}$$

entonces se sigue que

$$E = T_0 + T_1 + T_2 + V \quad (9.1)$$

y como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = T_1 + 2T_2$$

es

$$\mathcal{H} = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = 2T_2 + T_1 - T_0 - T_1 - T_2 + V = T_2 - T_0 + V$$

pero como E es (9.1) se tendrá

$$E = H \iff 2T_0 + T_1 = 0$$

y un solución de este sistema es, por supuesto,  $T_0 = T_1 = 0$

## 1.10 Principio de acción mínima

También Principio variacional de Hamilton. Partimos de una acción,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad \mathcal{L} = T - V$$

La trayectoria real de un sistema con lagrangiano  $\mathcal{L}$  es tal que  $S$  es mínimo para cualquier trayectoria posible entre  $q(t = t_i)$  y  $q(t = t_f)$ . Consideramos una variación con extremos fijos, es decir

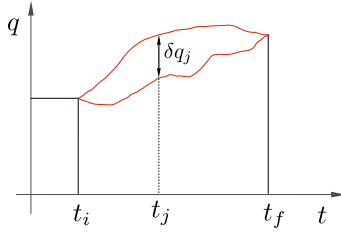
$$\delta q(t = t_i) = 0 \quad \delta q(t = t_f) = 0$$

y a tiempo fijo  $\delta t = 0$ . Esto último significa que todas las trayectorias emplearán el mismo tiempo (no se variará).

Consideramos una variación de la integral,

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt,$$

**Cuán sketchi es todo esto!!  
Mucho para aclarar. Tal vez se justifique un minicurso de variacional como apéndice.**

**Figura 10.2** El principio de acción mínima

y notamos que será beneficioso utilizar integración por partes para expresar todo en función de las variaciones de las coordenadas (las  $\delta q_i$ ), de manera que como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

resulta

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt,$$

separamos los dos términos,

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt - \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt,$$

y resulta que el primero por el teorema fundamental del cálculo es

$$\int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_i}^{t_f} \quad (10.1)$$

y es nulo porque  $\delta q_i = 0$  en los extremos (recordemos que las variaciones son nulas en los extremos de integración). Decimos que este es un término de superficie. Entonces

$$\delta I = - \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0$$

se verificará por el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Luego, si se hace  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df/dt$  (ambos lagrangianos difieren en una derivada total con respecto al tiempo) la trayectoria que minimiza  $\mathcal{L}'$  es la que misma que minimiza  $\mathcal{L}$  por la condición dada por (10.1). Entonces

$$\delta S = 0 \iff \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

La moraleja es que si los lagrangianos difieren en una derivada total del tiempo obtenemos la misma física.

## 1.11 Aplicaciones del principio de acción mínima

$$S = \int (T - V_0) dt$$

donde el lagrangiano es con  $V = V_0$  constante (un lagrangiano sujeto a potencial constante). La integral de acción da una medida de la longitud de la órbita (el espacio recorrido). Para una partícula sujeta a  $V = 0$

$$S = \frac{1}{2} \int m v_0^2 dt = \frac{1}{2} m v_0^2 (t - t_0)$$

de manera que  $v_0(t - t_0)$  representa la distancia  $d$  recorrida, y es

$$S = \frac{1}{2} m v_0 d$$

Comentario sobre el cálculo de las variaciones

Esta idea debe estar en el suplemento matemático que le dedicaremos a variacional

$$I = \int f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) dt$$

entonces  $I$  es extremo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial [dx/dt]} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

También podemos encontrar esta notación, dependiendo del tipo de problema,

$$I = \int f \left( y, \frac{dy}{dx}, x \right) dx$$



## 1.12 Multiplicadores de Lagrange

Partimos de la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i[t], \dot{q}_i[t], t) dt$$

entonces

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j dt$$

donde  $\delta q_j$  son desplazamientos independientes. Si no se puede despejar alguna  $\delta q_j$  (con vínculos no-holónomos, por ejemplo) entonces algún  $\delta q_j$  es independiente de modo que para que valga  $\delta S = 0$  necesitaré

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0$$

que son los vínculos ( $k = 1, \dots, s$ ); son  $s$  ecuaciones de vínculo. Multiplicamos por  $\delta t$  y vemos que no son independientes

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} + b^k(q_i, t) \delta t = 0$$

Sean  $\delta q_{\ell}$  variación a  $t$  fijo, entonces

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0$$

recordando que  $\ell$  suma en los grados de libertad. Podemos sacar la suma fuera,

$$\sum_k^s \int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0$$

Absorbo la otra sumatoria en el segundo término y paso de  $\ell \rightarrow j$ .

$$\int \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_k^s \lambda^k a_{\ell}^k(q_i, t) \right\} \delta q_{\ell} dt = 0$$

entonces

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^N \sum_k^s \lambda^k a_\ell^k(q_i, t) = \sum_{j=1}^N \sum_k^s \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \frac{\delta \mathbf{r}_j}{\delta q_j}$$

siendo  $\nabla_j f^k$  el gradiente de la ecuación de vínculo respecto de  $j$  y donde  $\lambda^k$  es la fuerza de vínculo asociada al vínculo no despejado pues como la fuerza generalizada (que no proviene de potencial)

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

y comparando vemos que

$$Q_j = \sum \lambda^k a_j^k(q_j, t) \quad \text{vínculos no holónomos}$$

$$Q_j = \sum \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \delta \mathbf{r}_j \quad \text{vínculos holónomos}$$

En el caso de vínculos holónomos

$$g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

donde no quise despejar en función de  $q_1, \dots, q_n$  resulta que

$$Q_j^{\delta q_j} = \sum_i^N \lambda (\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  es un desplazamiento virtual de la partícula. Vamos a reescribir este término,

$$\sum_i^N \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = 0$$

$$\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j^{\delta q_j} = \lambda \sum_k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

luego como

$$a_j^k \equiv \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i}$$

se sigue que los  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo.

El supraíndice con  $\delta q_j$  va sobre el igual en realidad.

En el caso de vínculos no holónomos  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos no retirados.

$$\begin{aligned} Q_j \delta q_j &= \sum \lambda^k (\nabla_i g^k \cdot \delta \mathbf{r}_i) \\ Q_j &= \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ Q_j &= \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial q_j} \end{aligned}$$

entonces  $\lambda^k = F^v$ .

Como extra escribamos que para cada grado de libertad  $j$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_k^s \lambda^k a_j^k \equiv 0$$

donde  $\delta q_j$  son ahora independientes.

$$Q_j = \sum_i^N F_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

### EJEMPLO 12.1 Moneda rodando por un plano

Consideramos una moneda que rueda libremente por un plano (no sujeta a potencial). Situaemos un sistema de ejes sobre la moneda, que etiquetaremos 123 y otro fijo fuera de la misma xyz.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{cm} &= -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -(\dot{\phi} \hat{2} + \dot{\psi} \hat{3}) \times (-a \hat{2}) \\ \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} &= -a \dot{\psi} \hat{1} \end{aligned}$$

siendo los vínculos

$$z_{cm} - a = 0 \quad \theta = \pi/2 \quad |\mathbf{V}_{cm}| = a \dot{\psi}$$

de tal modo que son dos grados de libertad. El lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_2^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \dot{\psi}^2.$$

Como los vínculos dependen de la velocidad, resulta

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a \dot{\psi} \cos(\psi) \sin(\phi) = a \sin(\phi) \dot{\psi} \\ \dot{x} &= a \dot{\psi} \cos(\psi) \cos(\phi) = a \cos(\phi) \dot{\psi} \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\dot{y} - a \sin(\phi) \dot{\psi} = 0 \quad \dot{x} - a \cos(\phi) \dot{\psi} = 0$$

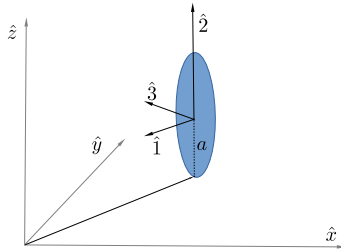
y luego esto equivale a

$$\lambda_1 (dy - a \sin(\phi) d\psi) = 0 \quad \lambda_2 (dx - a \cos(\phi) d\psi) = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

**No entiendo/recuerdo lo que quise decir con la expresión bajar los ejes. Calculo que se relaciona con la proyección de los ejes 123 en xyz. Confirmarlo.**



**Figura 12.3** Moneda que rueda libremente por un plano.

Podemos escribir

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \lambda_1 & m\ddot{x} &= ma \frac{d}{dt}(\cos(\phi)\dot{\psi}) \\
 m\ddot{x} &= ma(-\sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\psi} + \cos(\phi)\ddot{\psi}) \\
 m\ddot{y} &= \lambda_2 \\
 I_2\ddot{\phi} &= 0 & I_3\ddot{\psi} &= -\lambda_2 a \sin(\phi) - \lambda_1 a \cos(\phi) \\
 \hat{1} &= \cos(\psi)[\sin(\phi)\hat{y} + \cos(\phi)\hat{x}]
 \end{aligned}$$

## Capítulo 2

---

# Simetrías

## 2.1 Constantes de movimiento y simetrías

Sean

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

y se ve que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_i = \text{cte.}$$

Si  $\delta q_i$  es traslación rígida entonces  $p_i = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$  y  $Q_j = \mathbf{F} \cdot \hat{n}$  en cambio si es rotación rígida se tiene  $p_i = \mathbf{L} \cdot \hat{n}$  y  $Q_j = \mathbf{T} \cdot \hat{n}$ . De tal forma vale que

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

pués  $T$  es escalar y no cambia ante una rotación y  $T = T(\dot{q})$  no depende explícitamente de las coordenadas (no depende del origen decía  $i$ ?). Luego  $T = T_2$  y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Como  $V \neq V(\dot{q})$  entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} (p_j) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

es la fuerza total proyectada en  $\hat{n}$ .

## 2.2 El teorema de Noether

Si existe una transformación continua  $q_i \longrightarrow q_i + \delta q_i$  que deje invariante el  $\mathcal{L}$  entonces hay una constante de movimiento asociada a dicha transformación.

La transformación es

$$q_i \longrightarrow q'_i = q_i + \delta q_i$$

y cumple

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q'_i, \dot{q}'_i, t) = \mathcal{L}(q_i[q'_i, t], \dot{q}_i[\dot{q}'_i, t], t)$$

y así si consideramos una variación a  $t$  fijo,

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0$$

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

pero como el primer término del RHS es nulo por las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos que

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0,$$

lo que está dentro del paréntesis es la cantidad conservada. Recordemos que

$$\delta q_i = q'_i - q_i$$

y una traslación infinitesimal es

$$\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}.$$

La variable cíclica es un caso particular de teorema de Noether, pero hay constantes de movimiento que no provienen de ninguna simetría.

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\delta \alpha \hat{n} \times \mathbf{r}_i) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \delta \alpha \sum_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i \right) = \delta \alpha \frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i \right) = 0$$

siendo  $\delta \alpha \equiv \epsilon$  un parámetro infinitesimal. Para  $k$  grados de libertad

$$q'_i = q_i + \underbrace{\epsilon_i g_i(q_1, \dots, q_n, t)}_{\delta q}$$

...

$$q'_k = \dots$$

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r} \quad \text{traslación rígida}$$

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta \alpha \hat{n} \times \mathbf{r}_i \quad \text{rotación rígida}$$

o también

$$\delta \mathbf{r} \times \mathbf{r}$$

$T$  es invariante siempre frente a (por ser un escalar)

$$T = T'$$

entonces habrá que examinarlo. Constatemos que

$$V = V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

es invariancia ante una traslación rígida, y

$$V = V(x_1, x_2)$$

es una invariancia de traslación en  $x_3$ .

$\mathcal{L}$  tendrá como constante un momento lineal si  $V$  es invariante frente a traslación.  $\mathcal{L}$  tendrá como constante un momento angular si  $V$  es invariante frente a rotación.  $\mathcal{L}$  tendrá como constante una combinación si  $V$  es invariante frente a una roto-traslación.

Otra construcción posible es

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q'_i, \dot{q}'_i, t) = 0$$

pidiendo que  $d\mathcal{L} = 0$  llevo a

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \delta q' \right) \right\} = 0$$

Las primas están mal. Hay que pensar una construcción adecuada. Queda odd.

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell} \right) \right\} = 0$$

y podemos usar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

pues  $g \neq g(t)$  y es todo a tiempo fijo. Se tiene

$$q' = q + \delta q$$

$$q'_i = q_i + \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell}$$

siendo esta la transformación general

$$\delta q'_i = \delta q_i + \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell}$$

Extraemos también que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_i} \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell} = C$$

Se puede pensar también como que  $\mathcal{L}$  es invariante ante la transformación infinitesimal  $\delta q$

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$



$$\delta \mathcal{L} = 0 = \sum_i^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \sum_i^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

siendo el primer término nulo, y siendo lo que se conserva lo que aparece en el segundo término, donde

$$\delta q_i = \sum_{\ell}^s \epsilon_{\ell} g_i^{\ell}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Finalmente

$$\delta \mathcal{L} = 0 = \frac{d}{dt} \left( \sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)$$

## Capítulo 3

---

# Fuerzas centrales

## 3.1 Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que cumple

$$\mathbf{F}(r) = f(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

de tal suerte que la parte cinética del lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2 \right)$$

El momento angular  $\mathbf{L}$  se conserva puesto que  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ . Como es  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \text{cte}$  entonces se sigue que  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  se hallan contenidos en el mismo plano.

Puedo pedir, sin pérdida de generalidad, que  $\theta = \pi/2$  y entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r).$$

Como  $\phi$  es cíclica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L = mr^2\dot{\phi}$$

que no es otra cosa que la conservación del momento angular, información que puede ser llevada al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[ \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right]$$

donde el último corchete será lo que llamaremos un potencial efectivo  $V_{eff}$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta en

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

pero es más sencillo utilizar la conservación de la energía que explícitamente tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

desde la cual se puede integrar directamente la trayectoria  $r = r(t)$  según

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)},$$

aunque suele ser más útil la trayectoria en el espacio físico  $r = r(\phi)$  o bien  $\phi = \phi(r)$ .

$$mr^2 \frac{d\phi}{dt} = L \quad \rightarrow \quad mr^2 \frac{d\phi}{dr} \dot{r} = L$$

luego

$$\begin{aligned} \dot{r} d\phi &= \frac{L}{mr^2} dr \\ \int d\phi &= \int \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)}} dr \end{aligned}$$

En el gráfico bajo estas líneas ilustramos muchas de las características de la física del problema de fuerzas centrales.

## 3.2 Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$d\phi = \frac{L}{mr^2} dt \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\dot{r}) &= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi}(\dot{r}) \\
m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\
\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{dr}{dt} \right) - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{dV}{dr} \\
\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{mr^3} &= -\frac{dV}{dr}
\end{aligned}$$

y acá probamos el conveniente cambio de variables

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{r} \quad dU = -\frac{1}{r^2} dr \quad \frac{dU}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -U^2 \frac{dr}{d\phi} \\
U^2 L \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{L}{m} \frac{dU}{d\phi} \right\} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 &= F(1/U) \\
-\frac{U^2 L^2}{m} \frac{d^2 U}{d\phi^2} - \frac{L^2}{mr^3} U^3 &= F(1/U) \\
-\frac{U^2 L^2}{m} \left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] &= F(1/U)
\end{aligned}$$

o bien

$$\left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2}.$$

En el caso del potencial de Kepler será

$$\left[ \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U \right] = -\frac{Km}{L^2},$$

es decir que el miembro derecho es una constante. Sale fácil entonces.

### 3.3 Velocidad areolar

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

De la figura puede verse que

$$A = \frac{1}{2} r^2 d\phi$$

y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = cte.$$

### 3.4 Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler

Tenemos

$$\int d\phi = \int \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr \quad \frac{d^2 U}{d\phi^2} + U = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2} \quad U = 1/r$$

que es simétrica respecto a  $\phi$  y  $-\phi$ . Esto determina una simetría orbital si tomamos

$$U(\phi = 0) = U_0 \quad \left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0$$

lo cual significa que  $U_0$  es un extremo (punto apsidal).

Calculemos ahora el ángulo que recorre una oscilación completa,

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

Si  $\Delta\phi = 2q$  siendo  $q = (m/n)\pi$  son  $m, n \in \mathbb{Z}$  entonces

$$\Delta\phi = 2 \frac{m}{n} \pi$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$$

y esto significaría que la órbita se cierra.

La ecuación a resolver es

$$\frac{d^2 U}{d\phi^2} + \left( U - \frac{km}{L^2} \right) = 0$$

o bien

$$\frac{d^2 \beta}{d\phi^2} + \beta = 0$$

entonces

$$\beta = A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$U = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0)$$

y habría que usar  $r_m, r_M$  para evaluar  $A$ .

Con respecto a las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \sigma^2 = a^2 - b^2$$

$$b = a\sqrt{1 - (\sigma/a)^2}$$

Por otro lado,

$$s^2 = (2\sigma)^2 + r^2 - 4\sigma r \cos(\pi - \phi)$$

$$(2a - r)^2 = 4\sigma^2 + r^2 + 4\sigma r \cos(\phi)$$

y definiendo  $\sigma/a \equiv \varepsilon$  resulta

$$a - r = \varepsilon(\sigma + r \cos(\phi))$$

y esto es una elipse.

Entonces en resumen, las leyes de Kepler son

1. Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Esto es común de los potenciales del tipo

$$V \propto 1/r$$

2. El radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$A = \frac{1}{2}r^2 d\phi \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{L}{2m} (cte.)$$

- 3.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$\pi ab = \int dA = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L}{2m} \tau \quad a = \frac{L\tau}{2\pi mb}$$

pero como  $km/L^2 = a/b^2$  es

$$B = L\sqrt{\frac{a}{km}}$$

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} \tau^2$$

y esto es independiente de la masa del planeta.

**Acá hay que hacer un laburo muy importante.**

Trabajamos más con la elipse,

$$r_M + r_m = 2a$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad E - \frac{L^2}{2m} U^2 - kU = 0$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{\frac{2mkE}{L^2} \mp \sqrt{\left(\frac{2mkE}{L^2}\right)^2 + \frac{8mE}{L^2}}}{2}$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{mEk}{L^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2}{mEk^2}} \right)$$

y acá constatamos que representa una elipse; es decir que las órbitas son elípticas.

### 3.5 Vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \times \mathbf{L} - k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - k \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} r - \frac{dr}{dt} \mathbf{r}}{r^2} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \end{aligned}$$

pero como  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = 0$  resulta lo que resulta.

### 3.6 Reducción del problema de dos cuerpos a uno equivalente

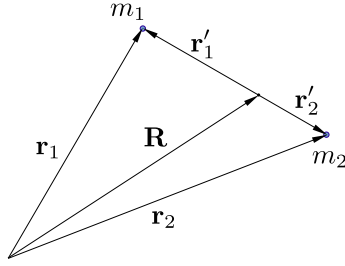
Consideramos el siguiente sistema de coordenadas,

$$r \equiv |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad \dot{r} \equiv |\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1|$$

donde el sistema centro de masas es

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad M \mathbf{V}_{cm} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$0 = m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2$$



**Figura 6.1** Sistema coordinado para la reducción del problema de dos cuerpos al de uno equivalente.

que provocan

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}'_2 \quad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}'_1$$

dando unas  $r$  relativas

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1}\mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathbf{r}'_1.$$

Luego, como la energía se conserva (el  $V_{cm} = cte.$ ) podemos escribir

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{V})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}'_2)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\dot{\mathbf{r}}_2'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)$$

y el

$$e = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r)$$

donde este último  $\mathbf{r}$  es un vector distancia relativa. Es un problema equivalente para la partícula centro de masas.

$$e = \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r)$$

Diremos que la *distancia relativa* describe una elipse. Las trayectoria reales en el espacio físico son dos elipses confocales. Por supuesto dejan de cumplirse las leyes de Kepler en este caso.



### 3.7 Dispersión

Consideramos la dispersión de un haz de partículas de cierta energía cinética por un centro dispersor, ver ilustración.

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

donde  $dN$  es el número de partículas dispersadas entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  y  $n$  es el número de partículas emitidas por tiempo y por área. De esta forma  $d\sigma$  tiene unidades de área.

Consideramos  $d$  centro dispersor con simetría esférica (cilíndrica basta). Usamos como suposiciones que todo lo que emerge entre  $\rho + d\rho - \rho$  es dispersado entre  $\chi + d\chi - \chi$ , y que se conservan tanto  $E$  como  $\mathbf{L}$ .

El anillo se dispersa en un sector esférico. Entonces podemos establecer las siguientes conclusiones para el anillo entre  $\rho + d\rho - \rho$ , a saber

$$A = \pi((\rho + d\rho)^2 - \rho^2) \quad \longrightarrow \quad A \approx 2\pi\rho d\rho,$$

entonces

$$d\sigma = \frac{2\pi\rho d\rho I}{I}$$

donde  $\rho$  es el parámetro de impacto y  $I$  el número de partículas por unidad de tiempo y área. Finalmente

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

Como se conservan la energía y el momento angular

$$E = \frac{1}{2}mV_\infty^2 \quad L = m\rho V_\infty^2$$

En general se desconoce  $V(r)$ .

Se puede calcular el ángulo  $\varphi_0$  de acuerdo a

$$\chi = \pi - 2\varphi_0,$$

donde

$$\varphi_0 = \int_{r_m}^{\infty} \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0(\rho)$$

e invertimos desde la última ecuación.

Veamos el caso de una esfera maciza. En general los cuerpos duros equivalen a un potencial del tipo

$$V = \begin{cases} \infty & \text{cuerpo} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0$$

$$\sin(\varphi_0) = \frac{\rho}{a} \quad d\rho = -a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)$$

y entonces

$$d\sigma = 2\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) d\chi$$

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\pi - \chi) d\chi = \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi$$

y como hay que integrar  $\chi$  de 0 a  $\pi$

$$\int_0^\pi \frac{\pi}{2} a^2 \sin(\chi) d\chi = \pi a^2$$

$$\sigma = \pi a^2$$

En el caso de los cuerpos duros la sección eficaz es la sombra de los mismos.

### 3.8 Dispersión por dos cuerpos

Consideramos el caso de un cuerpo que se fracciona en dos (creo?)

Desde el centro de masa

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$$

definimos una velocidad relativa

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1} \right).$$

Con respecto a la energía,

$$\frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2 + e_{int} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 + e_{int1} + e_{int2} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = e_{int} - e_{int1} - e_{int2} = \Delta e$$

**Sobre el ángulo sólido**

$$\Omega = \text{Area}/r^2$$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

$$\Omega = 4\pi$$

**para la esfera.**

y pasando todo en términos de la velocidad relativa

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v = \Delta e$$

entonces

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta e}{\mu}}.$$

El problema es evidentemente plano.

$$\mathbf{V}_1^L = \mathbf{V}_{cm} + \mathbf{V}'_1 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{V}_1^L - \mathbf{V}_{cm}) = \mathbf{V}'_1$$

$$V_1^{L^2} - V_{cm}^2 - 2\mathbf{V}_1^L \cdot \mathbf{V}_{cm} = V_1'^2$$

$$V_{1x}^{L^2} + V_{1y}^{L^2} - V_{cm}^2 - 2V_{1x}^L V_{cm} = V_1'^2$$

$$(V_{1x}^L - V_{cm})^2 + V_{1y}^{L^2} = V_1'^2$$

que es una circunferencia.

$$\tan(\theta) = \frac{V_1 \sin(\chi)}{V_{cm} + V_1 \cos(\chi)}$$

Esto tiene dos raíces  $\chi_{1,2}$  si  $V_{cm} > V_1$ .

Si  $V_{cm} > V_1$  hay una sola  $V$  de las partículas.

Si  $V_{cm} < V_1$  hay partículas emitidas hacia atrás vistas desde L.

Si pensamos en una distribución isótropa de partículas, desde el centro de masa

$$e = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

$$V_L^2 = V_1^2 + V_{cm}^2 - 2V_1 V_{cm} \cos(\pi - \chi)$$

a iguales  $V_1, V_{cm}$  se tienen variables  $V_L, \chi$ , entonces

$$dV_L^2 = -2V_1 V_{cm} \sin(\chi) d\chi$$

$$\frac{dV_L^2}{2V_1 V_{cm}} = \sin(\chi) d\chi$$

$$d\sigma = 2\pi \rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin(\chi) d\chi$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{d(V_L^2)}{4V_1 V_{cm}} = \frac{1}{2} \frac{d(1/2 m_1 V_L^2)}{m_1 V_1 V_{cm}}$$

### 3.9 Scattering

Tenemos dos suposiciones básicas:

- Interacción elástica.
- Conservación de energía y de momento.

Desde el centro de masa se tienen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = 0 \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$$

donde los últimos son las posiciones y velocidades relativas.

$$E = \frac{1}{2}M\mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{V}^2 + V(r)$$

$$m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 = 0 \quad m_1\mathbf{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{V}_2.$$

En términos de las velocidades relativas

$$\mathbf{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{V} \quad \mathbf{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{V}$$

Se puede escribir la energía cinética del siguiente modo

$$T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{V}_{1-in}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{V}_{2-in}^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_1\mathbf{V}_{1-cm}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{V}_{2-cm}^2$$

$$T - \frac{1}{2}M\mathbf{V}_{cm}^2 \equiv t = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{V}^2 = \frac{1}{2}\mu\mathbf{V}^2$$

$$\mathbf{V}_1^L = \mathbf{V}_{cm} - \frac{m_2}{M}\mathbf{V} \quad \mathbf{V}_2^L = \mathbf{V}_{cm} + \frac{m_1}{M}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{p}_1^L = m_1\mathbf{V}_{cm} - \mu\mathbf{V} = m_1\frac{\mathbf{P}}{M} - \mu\mathbf{V}$$

$$\mathbf{p}_2^L = m_2\mathbf{V}_{cm} + \mu\mathbf{V} = m_2\frac{\mathbf{P}}{M} + \mu\mathbf{V}$$

Donde

$$\mathbf{V}_{cm} + \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1^L$$

$$\mathbf{p}_2^L = \frac{m_2}{M}\mathbf{P} + \mu\mathbf{V}\hat{n} \quad \mathbf{p}_1^L = \frac{m_1}{M}\mathbf{P} - \mu\mathbf{V}\hat{n}$$

$$\frac{m_2}{M}\mathbf{P} + \frac{m_1}{M}\mathbf{P} = \mathbf{P} = \mathbf{p}_2^L + \mathbf{p}_1^L$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{P_1 \sin(\chi)}{(m_2/M)P + P_1 \cos(\chi)}$$

### 3.10 Dispersión por potenciales infinitos

La idea es que sabiendo  $\rho$  (parámetro de impacto) quiero saber qué ángulo  $\chi$  se desvían las partículas incidentes.

$$\phi_0 + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad 2\phi_0 + \alpha + \beta = \pi \quad \phi_0 + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \beta \quad 2\alpha = 2\beta = \chi$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \tan(\beta) = \tan\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho/dz}{dz/d\theta}$$

con  $\theta$  variable paramétrica. Donde  $\rho = \rho(z)$  es la función que da la curva roja (el perfil del cuerpo dispersor).

## Capítulo 4

---

### Pequeñas oscilaciones

Es un formalismo para analizar el movimiento que realiza un sistema cuando está sometido a ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio.

Escribimos

$$V(q_1, \dots, q_n) \approx V(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \approx \frac{1}{2} \left( m(q_1^0, \dots, q_n^0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial m}{\partial q_i} \right|_{q_i^0} (q_i - q_i^0) + \dots \right) \sum_{i,j}^n \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Haciendo la aproximación consistente es

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i^0} (\eta_i)(\eta_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n m_{ij} \Big|_{q_i^0} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

con  $V_{ij} \equiv \partial^2 V / \partial q_i \partial q_j \Big|_{q_i^0}$ ,  $m_{ij} = m_{ij} \Big|_{q_i^0}$  simétricos y donde  $\eta_i = q_i - q_i^0$ . Con esta nomenclatura puede escribirse

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j$$

siendo ambas sumatorias formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas. Matricialmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^t \mathbb{V} \boldsymbol{\eta}$$

y si ahora evaluamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este formalismo resulta que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \frac{d}{d\eta_k} (\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V_{ij} \frac{d}{d\eta_k} (\eta_i \eta_j) = 0$$

son  $n$  ecuaciones diferenciales de Euler,

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j = 0 \quad k = (1, \dots, n).$$

Se propone como solución

$$\eta_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

tomando al final del proceso  $\Re\{A_j e^{i\omega t}\}$  como solución física. Esta elección lleva a

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 m_{kj} + V_{kj}) A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

que no es otra cosa que un problema de autovalores y autovectores generalizado. Necesito

$$|\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}| = 0$$

siendo  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$  autofrecuencias con  $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$  y  $\omega_s^2 \geq 0$ .

Entonces, dado un  $V = V(q_i)$  puede ser más fácil obtener explícitamente la serie de Taylor con  $\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j|_{q_i^0}$  o bien cambiar variable  $\eta = q_i - q_i^0$  y quedarse con los términos cuadráticos en  $\eta_i \eta_j$ . Para la energía cinética  $T = T(q, \dot{q})$  puede ser más fácil evaluar  $m_{ij}(q_i)|_{q_i^0}$  y quedarnos con los términos cuadráticos en  $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ .

$$\eta_j^s = A_j^s e^{i\omega_s t} \quad s = 1, \dots, N$$

Vectorialmente es

$$\boldsymbol{\eta}^s = \mathbf{A}_j^s e^{i\omega_s t} = \begin{pmatrix} A_1^s e^{i\omega_s t} \\ A_2^s e^{i\omega_s t} \\ \dots \\ A_N^s e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$

para la frecuencia  $\omega_s$ , siendo cada uno un grado de libertad moviéndose con frecuencia  $\omega_s$ .

Luego, es

$$\eta_{tot} = c_1 \boldsymbol{\eta}^1 + c_2 \boldsymbol{\eta}^2 + \dots + c_N \boldsymbol{\eta}^N$$

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_1^1 e^{i\omega t} + c_2 A_1^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_1^n e^{i\omega t} \\ c_1 A_2^1 e^{i\omega t} + c_2 A_2^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_2^n e^{i\omega t} \\ \dots \\ c_1 A_n^1 e^{i\omega t} + c_2 A_n^2 e^{i\omega t} + \dots + c_n A_n^n e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

entonces  $\mathbf{A}^s$  es un modo normal de frecuencia  $s$ .

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \dots \\ A_n^s \end{pmatrix} e^{i\theta_0}$$

La solución total ( $j$  es el grado de libertad) se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t}$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \Re \left\{ \sum_{s=1}^N c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t} \right\}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbb{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

siendo el  $\dagger$  el traspuesto conjugado. Se pide que la norma (en la métrica dada por  $\mathbb{T}$  de la unidad)

$$A^t \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

lo cual significa que  $A$  diagonaliza a  $\mathbb{T}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & \dots & & \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

la matriz modal donde sus columnas son autovectores.

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \mathbf{A} = 0$$

interpolando a la matriz

$$A^t \mathbb{V} A = \omega^2 A^t \mathbb{T} A = \omega^2 \mathbb{1}$$



y sea ahora el siguiente cambio de coordenadas

$$\eta = A\xi$$

tal que

$$A^{n \times n} \xi^{n \times 1} \quad (A\xi)^t = \xi^{t \ 1 \times n} A^{t \ n \times n}$$

y que se llaman coordenadas normales.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^t \mathbb{T} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \dot{\eta}^t \mathbb{V} \dot{\eta}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^t \dot{\xi}^t \mathbb{T} A \dot{\xi} - \frac{1}{2} A^t \dot{\xi}^t \mathbb{V} \dot{\xi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^t \mathbb{1} \dot{\xi} - \frac{1}{2} \dot{\xi}^t \omega^2 \mathbb{1} \dot{\xi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \xi_i^2 \omega_i^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \sum_i \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

y son  $N$  ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\sum_i (-\omega^2 + \omega_i^2) A_i = 0$$

de modo que si  $\omega^2 = \omega_i^2$  entonces

$$\xi_i = C_i e^{i\omega_i t}$$

Digamos que en coordenadas normales

$$\xi_j = C_j e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en  $\xi$  (un grado de libertad es una  $\omega$ ) y se desacoplan los grados de libertad en lo que hace a  $\omega_s$ . Por otro lado,

$$\eta_j = \sum_{s=1}^N c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

grados de libertad en  $\eta$ , un grado de libertad entonces es combinación lineal de todas las  $\omega$ .

Si  $\omega = 0$  es

$$\xi_j = At + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} c_s A_j^s e^{i\omega_j t} + A_j(Gt + D)$$

siendo el último término asociado a la  $\omega = 0$ . Para volver atrás es

$$A^\dagger \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

y entonces

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = A^\dagger \mathbb{T} A \boldsymbol{\xi}$$

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = \mathbb{1} \boldsymbol{\xi}$$

coordenadas normales en función de las de desplazamiento.

En conclusión podemos decir varias cosas,

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados.
- En coordenadas normales cada grado de libertad oscila con una frecuencia única (son  $N$  osciladores independientes)
- Las amplitudes cumplen

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} a_1^s e^{i\phi_s} \\ a_2^s e^{i\phi_s} \\ \dots \\ a_n^s e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$

donde tienen la misma fase los  $A_j^s$  para toda frecuencia  $\omega_s$

- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales).
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

$$\mathbf{A} = a_1(v_1) + a_2(v_2)$$

si por ejemplo generan dos autovectores de esta forma.

## 4.1 Oscilaciones viscosas

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j + B_{ij} \dot{\eta}_j = 0$$

no se puede convertir en osciladores independientes.

$$\det \{\mathbb{V} + \omega^2 \mathbb{T} + \omega \mathbb{B}\} = 0$$

# Cuerpos rígidos

## 5.1 Cuerpos rígidos

Los vínculos constituyen la condición de rigidez,

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = d_{ij} \quad i \neq j \quad (1.1)$$

Del discreto al continuo

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \mathbf{R} = \frac{\int \rho \mathbf{r}_i dv}{\int \rho dv}$$

### 5.1.1 Grados de libertad de un cuerpo rígido

Cada punto tiene como vínculos las ecuaciones (1.1)

El cuerpo rígido tiene seis grados de libertad. Si las condiciones de rigidez son lineales resultan cinco grados de libertad.

### 5.1.2 Velocidad de un cuerpo rígido

Lo único que pueden hacer los puntos de un cuerpo rígido es rotar.

$$\delta r_{p_0} = r_{p_0} \sin(\beta) \delta \alpha$$

$$\frac{\delta r_{p_0}}{\delta t} = r_{p_0} \sin(\beta) \frac{\delta \alpha}{\delta t}$$

$$v_{p_0} = \dot{\alpha} r_{p_0} \sin(\beta)$$

pero  $v_{p_0} \perp \hat{n}$  y  $v_{p_0} \perp r_{p_0}$  de manera que

$$\mathbf{V}_{p_0} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}.$$

Luego, para ir a un sistema inercial le sumo la  $\mathbf{V}$  de algún punto del rígido (el origen  $O$ ) medido desde un sistema inercial. Entonces, el campo de velocidad del cuerpo rígido es

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}.$$

### 5.1.3 Unicidad de la velocidad de rotación

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p'_0}$$

siendo  $\boldsymbol{\Omega}'$  la  $\boldsymbol{\Omega}$  como se ve desde el sistema  $O'$

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es la vista desde el sistema  $O$ .

$$\mathbf{V}'_0 + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{p'_0} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

y descomponiendo de acuerdo con el dibujo resulta

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'} + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{O'p} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p_0}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_{OO'} - \mathbf{r}_{Op}) + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{O'p} = 0$$

$$(\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}_{O'p} = 0,$$

de la cual se deduce que  $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}$ . Entonces,  $\boldsymbol{\Omega}$  es la misma para cualquier punto del cuerpo rígido.

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{Op})$$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_p = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0$$

lo cual se cumple para todo punto  $p$  perteneciente al cuerpo rígido. Si es  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}_0 = 0$  entonces serán  $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{V}_0$  y  $\boldsymbol{\Omega} \perp \mathbf{V}_p$ .

Si en un instante dado  $\boldsymbol{\Omega}$  es perpendicular a  $\mathbf{V}_p$  entonces  $\boldsymbol{\Omega}$  es perpendicular a  $\mathbf{V}_{p'}$  para todo punto del cuerpo rígido.

### 5.1.4 Eje instantáneo de rotación

Si  $p$  es tal que  $\mathbf{V}_p = 0$  entonces

$$\mathbf{V}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{p0}$$

donde  $\mathbf{V}_0$  es una velocidad desde un sistema inercial. Desde el sistema inercial el cuerpo rígido realiza una rotación pura, puesto que veo al punto O rotar en torno a algún eje.

$$\mathbf{V}_0 = -\boldsymbol{\Omega} \times (r_{\perp} + r_{\parallel}) = -\boldsymbol{\Omega} \times r_{\perp}$$

y esto define un eje instantáneo de rotación.

## 5.2 Ángulos de Euler

Se toma un sistema 123 inicialmente coincidente con uno XYZ paralelo al inercial, 123 tiene origen en el centro de masa del cuerpo.

$$A_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

y expresando  $\hat{z}, \hat{n}$  en  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$  resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi)]\hat{1} + [\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi)]\hat{2} + [\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}]\hat{3}$$

Ahora estamos interesados en el momento angular.

$$\mathbf{L}_0^{sist} = \mathbf{L}^{cm} + \mathbf{L}_{cm}^{sist}$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i)$$

que están en el sistema 123.

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i [\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega})]$$

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_i^N m_i \left[ \boldsymbol{\Omega} \sum_j^3 (x_j^{2i}) - \mathbf{r}_i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

y la componente  $k$ -ésima será

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[ \Omega_k \sum_j^3 (x_j^{2i}) - x_k^i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[ \sum_j^3 \delta_{kj} \Omega_j r_i^2 - x_k^i \sum_\ell^3 x_\ell^i \Omega_\ell \right]$$

$$L_k = \sum_j^3 \sum_i^N m_i [\delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i] \Omega_j = \sum_j^3 I_{kj} \Omega_j$$

o vectorialmente

$$\mathbf{L}_{spin} = I \boldsymbol{\Omega}$$

siendo  $I$  el tensor de inercia. Explícitamente:

$$I_{kj} = \sum_i^N m_i [\delta_{kj} r_i^2 - x_k^i x_j^i]$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Sean 1,2,3 los ejes principales, entonces  $I$  es diagonal y

$$\mathbf{L}_{spin} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = I \boldsymbol{\Omega}$$

y se puede escribir

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{in} \square = \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \square + \boldsymbol{\Omega} \times \square$$

que es válida pra sistemas rotantes (no aquellos que rotan y se trasladan). En este caso  $\Omega$  es la del sistema rotante (en un cuerpo rígido es la  $\Omega$  del cuerpo rígido).

Se puede escribir también

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{in} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm}$$

siendo la derivada de uns sitema XYZ, y  $\mathbf{T}$  el torque del cuerpo rígido referido al centro de masa y medido dese el sistema XYZ (inercial). Entonces

$$\mathbf{T}_{cm} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \mathbf{L}_{spin} + \Omega \times (\mathbf{L}_{spin})$$

y

$$\mathbf{T}_{cm} = I \left. \frac{d}{dt} \right|_{rot} \Omega + \Omega \times (I \Omega).$$

$I$  visto desde XYZ es  $I = I(t)$  e  $I$  desde 123 es constante.

$$\mathbf{T}_{cm} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\Omega}_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ I_1 \Omega_1 & I_2 \Omega_2 & I_3 \Omega_3 \end{vmatrix}$$

De este sistema resultan,

$$T_1 = I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3$$

$$T_2 = I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1$$

$$T_3 = I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2$$

que son las ecuaciones de Euler. Las mismas requieren  $I$  en ejes principales,  $\Omega$  en 1,2,3 (en función de  $\phi, \theta, \psi$ ). Es  $\Omega$  la velocidad de rotación del sistema cuerpo rígido (rotante) respecto a un sistema XYZ fijo en el centro de masa y coincidente con X'Y'Z' (inercial) a todo tiempo. Salvo la traslación del centro de masa, este sistema XYZ será inercial.

Todo este tratamiento de ecuaciones de Euler es para el caso  $\mathbf{L}_{spin} \equiv \mathbf{L}_{cm}^{ist}$ , de manera que no me importan las traslaciones del centro de masa.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{XYZ} \mathbf{L}_{spin} = \mathbf{T}_{cm} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{123} \mathbf{L}_{spin} + \Omega \times \mathbf{L}_{spin}$$

### 5.3 Energía cinética del cuerpo rígido

Queremos escribir la energía cinética de un cuerpo rígido explícitamente en términos del momento de inercia  $I$ .

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

donde la última  $\mathbf{r}_i$  está referida al centro de masa (posiciones de los puntos del cuerpo rígido referidas al centro de masa).

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_{cm}^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i))$$

pero es fácil ver que el término de cruza es cero dado que

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_{cm} \times \boldsymbol{\Omega}) = M \mathbf{R}_{cm} \cdot (\mathbf{v}_{cm} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0$$

puesto que  $M \mathbf{R}_{cm}$  es nulo para un sistema no inercial. Luego

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\Omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2)$$

pero veamos el último paréntesis en detalle,

$$\left( \sum_j \sum_k \Omega_j \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_\ell \sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i \right)$$

$$\left( \sum_j \sum_k \Omega_j \delta_{jk} \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_\ell \sum_p \Omega_\ell x_\ell^i \Omega_p x_p^i \right)$$

y reetiquetando

$$\left( \sum_j \sum_k \Omega_j \delta_{jk} \Omega_k x_k^i x_k^i - \sum_j \sum_k \Omega_j x_j^i \Omega_p x_p^i \right)$$

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k [\delta_{jk} (r^i)^2 - x_j^i x_k^i]$$



y entonces

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k I_{jk}$$

y como lo último es una forma cuadrática podemos escribir de manera más elegante

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^t I \mathbf{\Omega}.$$

Recordemos que el tensor de inercia tiene en su diagonal los momentos de inercia mientras que los términos fuera de la misma son los productos de inercia.

$$I_{ik} = \sum_q m_q (\delta_{ik}(r_q)^2 - x_i^q x_k^q)$$

y el paso al continuo nos deja los momentos de inercia,

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r}) [\delta_{ik}r^2 - x_i x_k] dV$$

donde por supuesto es  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

El cambio de sistema se hace de acuerdo a

$$I'_{ik} = \sum_{\ell s} a_{i\ell} I_{\ell s} a_{ks}$$

y en componentes,

$$\sum_q m_q (\delta_{ik} r_q'^2 - x_i' x_k') = a_{i\ell} a_{ks} \sum_q m_q (\delta_{\ell s} r_q^2 - x_\ell x_s)$$

donde en el miembro izquierdo es  $i \neq k$ , y el derecho  $\ell \neq s$

$$-\sum_q m_q x_i' x_k' = -\sum_q m_q a_{i\ell} x_\ell a_{ks} x_s$$

entonces

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

siendo el triángulo superior valores repetidos. El tensor de inercia es simétrico por su definición. De los nueve componentes son independientes seis. Matemáticamente

$$I_{ik} = I_{ki}.$$

Todo tensor simétrico se puede llevar a una forma diagonal eligiendo bien los ejes del sistema 123 fijo al cuerpo. Podemos conseguir una transformación  $I \rightarrow I'$  tal que

$$I' = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}$$

Los  $I'_{ik}$  son los momentos principales de inercia (aquellos que están calculados sobre *ejes principales de inercia*).

Cuando el cuerpo rígido tiene simetría pueden hallarse a ojo los ejes principales de inercia.

Para el cálculo de  $I$  se usa un sistema fijo al cuerpo rígido. Si usamos un sistema inercial, será  $I_{ik} = I_{ik}(t)$  lo cual no es conveniente.

Es conveniente elegir 123 con origen en el centro de masa y partícipes del movimiento del cuerpo rígido (clavados al mismo). Asimismo conviene elegir XYZ referidos al sistema inercial coincidentes pero trasladados al centro de masa. Así los  $I_{ik}$  resultan características geométricas del cuerpo.

## 5.4 La peonza simétrica

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2$$

donde son

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin(\theta) \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}$$

y debemos destacar que  $\psi = 0$  no es vínculo sino solo comodidad pues  $\dot{\psi} \neq 0$  y es independiente. Los vínculos pueden escribirse

$$\theta_e = \theta$$

$$\phi_e + \frac{3}{2}\pi = \phi \longrightarrow \dot{\phi}_e = \dot{\phi}$$

$$r^2 = a^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2 + z_{cm}^2$$

y las coordenadas

$$x = a \sin(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_e\right) = a \sin(\theta) \sin(\phi_e)$$

$$y = a \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_e\right) = -a \sin(\theta) \cos(\phi_e)$$

$$z = a \cos(\theta)$$

y la velocidad

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2$$

y el lagrangiano finalmente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2 \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

pero por la simetría  $I_1 = I_2 \equiv I$  de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(Ma^2 + I)(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - mga \cos(\theta)$$

y los primeros dos términos representan una rotación pura si tomo

$$(Ma^2 + I) \equiv I'$$

donde  $I'$  es otro momento de inercia.

Luego hay unos interesantes comentarios sobre la ubicación de los ejes. El famoso “bajo ejes”.

$$T = T_{trasl} + T_{rot} + T_{acopl}$$

y el último es nulo si elegimos el origen común  $O=O'$ = centro de masa.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

También es  $T_{acopl} = 0$  si  $V_0 = 0$  (aquí también se anula  $T_{trasl}$ ).

## 5.5 Teorema de Steiner

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} - \mathbf{a}$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} x_s^2 - x_i^s x_j^s)$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} (\mathbf{U}_s - \mathbf{a})^2 - (U_i^s - a_i)(U_j^s - a_j))$$

Trasladamos el punto (con el sistema de ejes paralelo al del centro de masa) sin rotarlo. Eso es importante.

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s [\delta_{ij} (U_s^2 + a^2 - 2Ua) - (U_i^s U_j^s + a_i a_j - a_i U_j^s - a_j U_i^s)]$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s) + \sum_s^N m^s (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) - \sum_s^N m^s \delta_{ij} 2U^s a + \sum_s^N m^s (a_i U_j^s + a_j U_i^s)$$

pero las dos últimas sumatorias son nulas, y

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s (\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s) + \sum_s^N m^s (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) = I_{ij}^{cm} + M(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j)$$

Esto sale de

$$\sum_s^N m^s \delta_{ij} U^s a = \delta_{ij} a \sum_s^N m^s U^s = 0$$

puesto que es nula la suma en  $s$ . Porque

$$0 = \sum_s^N m^s \mathbf{U}^s = \sum_s^N m^s (U_1^s \hat{1} + U_2^s \hat{2} + U_3^s \hat{3})$$

pero como es vectorial vale para cada coordenada

$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s a$$

La moraleja es que trasladar en un solo eje conserva la diagonalidad del tensor de inercia.

## 5.6 Sistemas inerciales

$\Omega$  es la velocidad angular del sistema no inercial.  $\ddot{\mathbf{R}}$  es la aceleración del sistema no inercial. Ambas se miden sólo desde el sistema inercial.

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in} + \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in}$$

si despejamos la derivada respecto del sistema primado,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} - \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in}$$

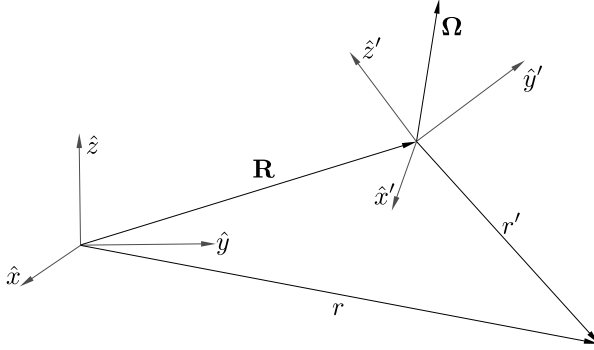


Figura 6.1 Sistemas rotantes.

y usamos

$$\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

va resultando

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} \right) \right|_{in} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} - \left. \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right|_{in} - \left. \frac{d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')}{dt} \right|_{in}$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} = \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{in} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{in}$$

donde hemos usado que

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{noin} \quad \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in} = - \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{noin}$$

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right|_{noin} + \left( \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} \right) = \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \left[ \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \right] \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \left[ \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \right]$$

$$\mathbf{a}'|_{noin} = \mathbf{a}|_{in} - \ddot{\mathbf{R}}|_{in} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' - \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}'|_{noin} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') - \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin}$$

$$\mathbf{a}'|_{noin} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}'|_{noin} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$$

Vale la pena aclarar la deducción,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|_{in} + \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{noin} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

pero si es  $\mathbf{R} = 0$  se tiene  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  y entonces

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{no in} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

donde el sistema no inercial es el rotante.

## 5.7 Lagrangiano de un sistema no inercial que se traslada

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(v + v')^2 - U(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{2}mv'^2 - U(\mathbf{r}) - U$$

pero el primer término se tira puesto que equivale a un término  $df/dt$  que cumple

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}mv^2 \quad f = \frac{1}{2}m\frac{v^3}{3} + K$$

y además

$$m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{r}' + \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})$$

y el último término acá lo tiramos porque equivale a un  $df_2/dt$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv'^2 - m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}'} = m \cdot \dot{\mathbf{v}} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{d\mathbf{r}'} = 0$$

$$m\mathbf{a} = -\frac{dU}{d\mathbf{r}'} - m\mathbf{A}$$

donde el último término es la aceleración del sistema inercial y el primero el producto  $m\mathbf{a}'$ . Expresamos  $v = v(V, v')$  con lo cual aparecen en el  $\mathcal{L}$  las fuerzas ficticias y expreso  $T$  en función de coordenadas que se hallan sobre un sistema no inercial.

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{in} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} = \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right) \Big|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \left( \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right)$$

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_{in} = \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_{rot} + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{rot} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

### 5.7.1 Lagrangiano en un sistema rotante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U(\mathbf{r})$$

donde esto último es un potencial efectivo  $U = U(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  y para  $U$  dependiente de la velocidad teníamos

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

## 5.8 Sistemas rotantes

Considero dos sistemas, XYZ inercial y X'Y'Z' rotante (no inercial).

$$\mathbf{U}' = A\mathbf{U}$$

donde  $A$  es la matriz del cambio de coordenadas (una transformación ortogonal) y  $U$  es una descripción desde el XYZ y  $U'$  una descripción desde el X'Y'Z'.

Haremos unas derivadas utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU_x}{dt} \hat{x} + \frac{dU_y}{dt} \hat{y} + \frac{dU_z}{dt} \hat{z}$$

donde es  $U = U(x, y, z)$ , pero ahora si es  $U = U(x', y', z')$  se tiene en cambio

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU'_x}{dt} \hat{x}' + U'_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dU'_y}{dt} \hat{y} + U'_y \frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dU'_z}{dt} \hat{z} + U'_z \frac{d\hat{z}'}{dt}$$

Pero X'Y'Z' es un sistema ortogonal y sus versores cumplen condiciones de ortogonalidad entonces

$$\hat{x}' \cdot \hat{x}' = \hat{y}' \cdot \hat{y}' = \hat{z}' \cdot \hat{z}' = 1$$

$$\hat{x}' \cdot \hat{y}' = \hat{x}' \cdot \hat{z}' = \hat{y}' \cdot \hat{z}' = 0$$

Ahora tenemos que hacer las variaciones de las dos ecuaciones precedentes.  
De la primera

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{x}' = \hat{y}' \cdot \delta \hat{y}' = \hat{z}' \cdot \delta \hat{z}' = 0 \quad (8.1)$$

y de la segunda

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' + \hat{y}' \cdot \delta \hat{x}' = 0 \quad \hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' + \hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' = 0 \quad \hat{y}' \cdot \delta \hat{z}' + \hat{z}' \cdot \delta \hat{y}' = 0 \quad (8.2)$$

Asimismo, una variación  $\delta \hat{x}'$  arbitraria puede escribirse como

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xx} \hat{x}' + \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}'$$

donde es  $\delta \alpha_{xx} = 0$  debido al primer miembro de (8.1). Notemos que  $\delta \alpha_{xy}$  significa una variación en  $\hat{x}'$  proyectada en  $\hat{y}'$ . Del mismo modo escribimos

$$\delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}'$$

donde ya hemos anulado las que sabemos son nulas por el mismo argumento.  
Usando (8.2) se tiene también

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' = -\hat{y}' \cdot \delta \hat{x}'$$

que pasan respectivamente a

$$\hat{x}' \cdot \delta \alpha_{zx} = -\hat{z}' \cdot \delta \alpha_{xz} \quad \hat{x}' \cdot \delta \alpha_{yx} = -\hat{y}' \cdot \delta \alpha_{xy}$$

Pero las variaciones son tres ( $i?$ )

$$\delta \alpha = (\delta \alpha_x, \delta \alpha_y, \delta \alpha_z).$$

La delta de un versor tiene componentes en los otros tres versores (no en el mismo versor)

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_{xy} \hat{y}' + \delta \alpha_{xz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{y}' = \delta \alpha_{yx} \hat{x}' + \delta \alpha_{yz} \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_{zx} \hat{x}' + \delta \alpha_{zy} \hat{y}'$$

pero proyectando

$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \longrightarrow \quad \delta \alpha_{zx} = -\delta \alpha_{xz}$$

$$\hat{y}' \cdot \delta \hat{z}' = -\hat{z}' \cdot \delta \hat{y}' \quad \longrightarrow \quad \delta \alpha_{zy} = -\delta \alpha_{yz}$$



$$\hat{x}' \cdot \delta \hat{y}' = -\hat{y}' \cdot \delta \hat{x}' \quad \longrightarrow \quad \delta \alpha_{yx} = -\delta \alpha_{xy}$$

Con las siguientes definiciones

$$\delta \alpha_{zx} \equiv \delta \alpha_y \quad \delta \alpha_{yz} \equiv \delta \alpha_x \quad \delta \alpha_{xy} \equiv \delta \alpha_z$$

estamos autorizados a escribir

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_z \hat{y}' - \delta \alpha_y \hat{z}'$$

$$\delta \hat{y}' = -\delta \alpha_z \hat{x}' + \delta \alpha_x \hat{z}'$$

$$\delta \hat{z}' = \delta \alpha_y \hat{x}' - \delta \alpha_x \hat{y}'$$

La rotación infinitesimal puede verse como un vector

$$\delta \boldsymbol{\alpha} = \delta \alpha_x \hat{x} + \delta \alpha_y \hat{y} + \delta \alpha_z \hat{z}$$

$$\frac{\delta \boldsymbol{\alpha}}{\delta t} = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + \Omega_z \hat{z}$$

donde hemos hecho  $\Omega_i = \delta \alpha_i / \delta t$ . En términos de las nuevas variables

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \Omega_z \hat{y}' - \Omega_y \hat{z}'$$

$$\frac{d\hat{y}'}{dt} = -\Omega_z \hat{x}' + \Omega_x \hat{z}'$$

$$\frac{d\hat{z}'}{dt} = \Omega_y \hat{x}' - \Omega_x \hat{y}'$$

entonces podemos hacer la construcción

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \Big|_{X'Y'Z'} + U'_x (\Omega_z \hat{y}' - \Omega_y \hat{z}') + U'_y (-\Omega_z \hat{x}' + \Omega_x \hat{z}') + U'_z (\Omega_y \hat{x}' - \Omega_x \hat{y}')$$

y usando la regla del producto vectorial podemos colapsar en

$$\frac{d}{dt} \Big|_{in} \mathbf{U} = \frac{d}{dt} \Big|_{rot} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$$

Notemos que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}' = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ U'_x & U'_y & U'_z \end{vmatrix}.$$

#### EJEMPLO 8.1 Rotación en $\hat{z}$

Consideremos una rotación en torno a  $\hat{z}'$  de modo que  $\delta \hat{z}' = 0$  de modo que  $\delta \alpha_x = \delta \alpha_y = 0$  de manera que

$$\delta \hat{x}' = \delta \alpha_z \hat{y}' \quad \delta \hat{y}' = -\delta \alpha_z \hat{x}'$$

y tener que

$$\delta \alpha_z \equiv \omega_z.$$

## 5.9 El tensor de inercia

Siendo  $I$  el tensor de inercia buscamos soluciones a

$$I\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

o bien en componentes

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij}v_j = \lambda v_i \quad (9.1)$$

que se trabaja así

$$\sum_{j=1}^3 I_{ij}v_j - \lambda v_i = \sum_{j=1}^3 (I_{ij} - \delta_{ij}\lambda)v_j = 0$$

lo cual en extenso corresponde al siguiente sistema de tres ecuaciones

$$(I_{11} - \lambda)v_1 + I_{12}v_2 + I_{13}v_3 = 0$$

$$I_{21}v_1 + (I_{22} - \lambda)v_2 + I_{23}v_3 = 0$$

$$I_{31}v_1 + I_{32}v_2 + (I_{33} - \lambda)v_3 = 0$$

Ahora multiplicamos la ecuación (9.1) y su conjugada compleja (denotada por  $*$ ) por  $\sum_i v_i$  y  $\sum_i v_i^*$ , respectivamente, para obtener

$$\sum_i v_i \sum_{j=1}^3 I_{ij}v_j^* = \lambda^* \sum_i v_i^* v_i$$

$$\sum_i v_i^* \sum_{j=1}^3 I_{ij}v_j = \lambda \sum_i v_i v_i^*$$

Ahora si resto ecuación a ecuación tenemos

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i I_{ij}v_j^* - v_i^* I_{ij}v_j) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

podemos cambiar de índices en el segundo sumando del miembro izquierdo puesto que los índices están sumados y son por ello mudos (*dummies*),

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i I_{ij}v_j^* - v_j^* I_{ji}v_i) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

pero si usamos la propiedad de simetría del tensor de inercia  $I_{ij} = I_{ji}$  entonces

$$0 = (\lambda^* - \lambda) \sum_i v_i^* v_i$$

de modo que como  $\mathbf{v}$  es arbitrario se tiene la importante conclusión de que  $\lambda^* = \lambda$ . Los autovalores del tensor de inercia son reales.

Si es por ejemplo  $\lambda^s$  uno de los autovalores se pueden despejar

$$(v_1^s, v_2^s(v_1), v_3^s(v_1)) e^{i\phi}$$

pero como la fase es la misma para todos me quedo con los módulos (los cuales definirán las direcciones). Pido

$$v_1^{s2} + v_2^s(v_1)^2 + v_3^s(v_1)^2 = 1$$

o dicho de otro modo que la norma sea uno.

Sean  $\lambda^p \neq \lambda^s$  entonces

$$\sum_i v_i^p \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^s = \lambda^s \sum_i v_i^p v_i^s$$

$$\sum_i v_i^s \sum_{j=1}^3 I_{ij} v_j^p = \lambda^p \sum_i v_i^s v_i^p$$

y restando ecuación a ecuación y cambiando subíndices como hiciéramos oportunamente,

$$\sum_i \sum_{j=1}^3 (v_i^p I_{ij} v_j^s - v_i^s I_{ij} v_j^p) = (\lambda^s - \lambda^p) \sum_i v_i^p v_i^s$$

luego como es nulo el miembro izquierdo resulta que

$$\sum_i v_i^p v_i^s = 0$$

de modo que son ortogonales  $v^p$  y  $v^s$ . Los autovectores son ortogonales.

$$I\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}^t I\mathbf{v} = \mathbf{v}^t \lambda\mathbf{v},$$

pero como la norma de  $\mathbf{v}$  es unitaria, es

$$\mathbf{v}^t I\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^t \mathbf{v} = \lambda$$

Si armo una matriz  $V = (v^s v^p v^q)$  será en todo su esplendor

$$V^t IV = \begin{pmatrix} v_1^s & v_2^s & v_3^s \\ v_1^p & v_2^p & v_3^p \\ v_1^q & v_2^q & v_3^q \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} v_1^s & v_1^p & v_1^q \\ v_2^s & v_2^p & v_2^q \\ v_3^s & v_3^p & v_3^q \end{pmatrix}$$

o bien

$$V^t IV = \lambda 1$$

donde entendemos el 1 como una matriz identidad. Entonces  $\lambda^s, \lambda^p, \lambda^q$  son los momentos principales de inercia

$$I = \begin{pmatrix} \lambda^s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^q \end{pmatrix}$$

Vale que, además,

$$\lambda^s = \sum_{ij} v_i^s I_{ij} v_j^s > 0$$

puesto que es una forma cuadrática.

Para el objeto debajo de estas líneas rotando en  $2\pi/3$  tengo la misma situación física (eje de simetría de orden tres), entonces tengo eje principal de inercia allí.

La idea es que si pienso en planos siempre se hacen nulos los productos de inercia rotacionales.

Para la siguiente figura el plano de simetría es eje principal, luego es eje principal de inercia.

## 5.10 Movimiento de un cuerpo asimétrico

$$\mathbf{L}_{spin} = I\Omega$$

y como la energía se conserva es

$$E = T + V$$

$$E = T_{trasl} + T_{rot} + V(R_{cm})$$

donde cada una se conserva separadamente.

Usaremos una notación en la cual el subíndice refiere a referido a y el su-praíndice a de qué puntos/puntos

$$\mathbf{L}_0^{sist} = \mathbf{L}_{orb}|_0^{cm} + \mathbf{L}_{spin}|_{cm}^{sist}$$

$$\left. \frac{d\mathbf{L}^{orb}}{dt} \right|_{in} = \boldsymbol{\tau}_0^{cm} = \mathbf{R}_{cm} \times \mathbf{F} = \mathbf{R}_{cm} \times -Mg\hat{z} \neq 0$$

de tal manera que el  $\mathbf{L}^{orb} \equiv \mathbf{L}_0^{cm}$  no se conserva.

El que se conserva es  $\mathbf{L}^{spin}$  pues pensamos la  $\mathbf{F} = Mg$  aplicada en el centro de masa que es el origen y que tiene  $\mathbf{R}_{cm} = 0$ .

$$\mathbf{L}^{spin} = L_1\hat{1} + L_2\hat{2} + L_3\hat{3} = I_1\Omega_1\hat{1} + I_2\Omega_2\hat{2} + I_3\Omega_3\hat{3}$$

y podemos escribir

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$$

$$T_{rot} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

$$1 = \frac{L_1^2}{2I_1T_{rot}} + \frac{L_2^2}{2I_2T_{rot}} + \frac{L_3^2}{2I_3T_{rot}}$$

Entonces, si se da que  $I_3 > I_2 > I_1$  se tiene

$$L_{spin}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad L^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2$$

donde como se conservan  $T_{rot} \equiv T$  y  $L_{spin} \equiv L$

$$2T = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \quad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

de la primera deducimos un elipsoide de semiejes en  $L_i$  y de la segunda una esfera de radio  $L$  en  $L_i$ .

Esto está super oscuro. No sé qué se quiso decir, tal vez se halle explicado mejor en la carpeta.

$$2I_3T > 2I_2T > 2I_1T$$

$$L^2 > 2I_3T \quad L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 > \frac{I_3}{I_1}L_1^2 + \frac{I_3}{I_2}L_2^2 + L_3^2$$

$$L_1^2 \left( \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) + L_2^2 \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) > 0$$

pero esto no vale. Asimismo tampoco vale que

$$L^2 < 2I_1T$$

y resulta

$$2I_3T > L^2 > 2I_1T$$

entonces  $L_{spin}$  (su punta) se mueve en la intersección de una esfera y un elipsoide. Estos movimientos son periódicos.

La peonza tiene movimientos estables para la rotación en torno a  $\hat{x}_1, \hat{x}_3$  pero inestables en torno a  $\hat{x}_2$ . El movimiento puede resolverse mediante ecuaciones de Euler. Es estable rotar en torno al mayor o menor momento de inercia lo que generará un movimiento oscilatorio para  $\Omega$  ( $\omega^2 > 0$ ), en cambio es inestable rotar en torno al momento de inercia intermedio, lo cual generará un movimiento armónico para  $\Omega$  ( $\omega^2 < 0$ ).

Con  $\mathbf{L}$  constante si  $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\Omega}$  entonces ambos son constantes (corresponde a una rotación). Se consigue con  $\boldsymbol{\Omega}$  en la dirección del eje principal. Si  $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\Omega}$  entonces  $\boldsymbol{\Omega}$  oscila en torno a  $\mathbf{L}$ .