CBFT Mecánica clásica

Fuerzas centrales

17 de noviembre de 2015

Contenidos

§1. Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que cumple

$$\mathbf{F}(r) = f(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

de tal suerte que la parte cinética del lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}^2\right)$$

El momento angular $\mathbf{L}$ se conserva puesto que $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Como es $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = cte$ entonces se sigue que $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ se hallan contenidos en el mismo plano.

Puedo pedir, sin pérdida de generalidad, que $\theta = \pi/2$ y entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r).$$

Como ϕ es cíclica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L = mr^2\dot{\phi}$$

que no es otra cosa que la conservación del momento angular, información que puede ser llevada al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]$$

donde el último corchete será lo que llamaremos un potencial efectivo V_{eff},

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta en

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

pero es más sencillo utilizar la conservación de la energía que explícitamente tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

desde la cual se puede integrar directamente la trayectoria $r = r(t)$ según

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)},$$

aunque suele ser más útil la trayectoria en el espacio físico $r = r(\phi)$ o bien $\phi = \phi(r)$.

$$mr^2\frac{d\phi}{dt} = L \quad \longrightarrow mr^2\frac{d\phi}{dr}\dot{r} = L$$

luego

$$\dot{r}d\phi = \frac{L}{mr^2}dr$$

$$\int d\phi = \int \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)}}dr$$

En el gráfico bajo estas líneas ilustramos muchas de las características de la física del problema de fuerzas centrales.

§2. Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$d\phi = \frac{L}{mr^2}dt \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d}{t}(\dot{r}) = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{\phi}(\dot{r})$$

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{L}{r^2}\frac{d}{\phi}\left(\frac{dr}{dt}\right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{L}{r^2}\frac{d}{\phi}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\phi}\right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

y acá probamos el conveniente cambio de variables

$$U = \frac{1}{r} \qquad dU = -\frac{1}{r^2}dr \qquad \frac{dU}{d\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} = -U^2\frac{dr}{d\phi}$$

$$U^2 L\frac{d}{d\phi}\left\{-\frac{L}{m}\frac{dU}{d\phi}\right\} - \frac{L^2}{mr^3}U^3 = F(1/U)$$

$$-\frac{U^2 L^2}{m}\frac{d^2 U}{d\phi^2} - \frac{L^2}{mr^3}U^3 = F(1/U)$$

$$-\frac{U^2 L^2}{m}\left[\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U\right] = F(1/U)$$

o bien

$$\left[\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U\right] = -\frac{F(1/U)m}{U^2 L^2}.$$

En el caso del potencial de Kepler será

$$\left[\frac{d^2 U}{d\phi^2} + U\right] = -\frac{Km}{L^2},$$

es decir que el miembro derecho es una constante. Sale fácil entonces.

§3. Velocidad areolar

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

De la figura puede verse que

$$A = \frac{1}{2} r^2 d\phi$$

y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = cte.$$

§4. Las fuerzas centrales y las leyes de Kepler

Tenemos

$$\int d\phi = \int \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr \qquad \frac{d^2U}{d\phi^2} + U = -\frac{F(1/U)m}{U^2L^2} \quad U = 1/r$$

que es simétrica respecto a ϕ y $-\phi$. Esto determina una simetría orbital si tomamos

$$U(\phi = 0) = U_0 \qquad \left.\frac{dU}{d\phi}\right|_{\phi=0} = 0$$

lo cual significa que U_0 es un extremo (punto apsidal).

Calculemos ahora el ángulo que recorre una oscilación completa,

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(L/Mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} dr$$

Si $\Delta\phi = 2q$ siendo $q = (m/n)\pi$ son $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\Delta\phi = 2 \frac{m}{n} \pi$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$$

y esto significaría que la órbita se cierra.

La ecuación a resolver es

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + \left(U - \frac{km}{L^2}\right) = 0$$

o bien

$$\frac{d^2\beta}{d\phi^2} + \beta = 0$$

entonces

$$\beta = A\cos(\phi - \phi_0)$$

$$U = \frac{km}{L^2} + A\cos(\phi - \phi_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} + A\cos(\phi - \phi_0)$$

y habría que usar r_m, r_M para evaluar A.

Con respecto a las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \sigma^2 = a^2 - b^2$$

$$b = a\sqrt{1 - (\sigma/a)^2}$$

Por otro lado,

$$s^2 = (2\sigma)^2 + r^2 - 4\sigma r\cos(\pi - \phi)$$

$$(2a - r)^2 = 4\sigma^2 + r^2 + 4\sigma r\cos(\phi)$$

y definiendo $\sigma/a \equiv \varepsilon$ resulta

$$a - r = \varepsilon(\sigma + r\cos(\phi))$$

Acá hay que hacer un laburo muy importante.

y esto es una elipse.

Entonces en resumen, las leyes de Kepler son

1. Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos. Esto es común de los potenciales del tipo

$$V \propto 1/r$$

2. El radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$A = \frac{1}{2}r^2 d\phi \quad \longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\dot{\phi} = \frac{L}{2m}(cte.)$$

3. $$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$\pi ab = \int dA = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L}{2m} \tau \qquad a = \frac{L\tau}{2\pi mb}$$

pero como $km/L^2 = a/b^2$ es

$$B = L\sqrt{\frac{a}{km}}$$

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2}\tau^2$$

y esto es independiente de la masa del planeta.

Trabajamos más con la elipse,

$$r_M + r_m = 2a$$

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \qquad E - \frac{L^2}{2m}U^2 - kU = 0$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{\frac{2mkE}{L^2} \mp \sqrt{\left(\frac{2mkE}{L^2}\right)^2 + \frac{8mE}{L^2}}}{2}$$

$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{mEk}{L^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2L^2}{mEk^2}}\right)$$

y acá constatamos que representa una elipse; es decir que las órbitas son elípticas.

§5. Vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - k\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}r - \frac{dr}{dt}\mathbf{r}}{r^2}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$$

pero como $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = 0$ resulta lo que resulta.

Referencias