Capítulo 1

Ondas planas

Lejos de las fuentes de campo las ecuaciones de Maxwell son

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Podemos derivar con respecto al tiempo en cada ecuación de rotor y reemplazar con la otra de manera que

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

y esto nos lleva a

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

dos sendas ecuaciones de onda para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Pero es sabido que la solución de

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

es

$$\psi = A\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} + B\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

de modo que podemos postular como soluciones para nuestras ecuaciones de onda a

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}_0 \, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \qquad \mathbf{B} = \vec{\mathbb{B}}_0 \, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

Se tiene además que $\mathbf{k} = k\hat{n}$ da a través de $\hat{n}$ la dirección de propagación de la onda. El número de onda k podrá ser complejo lo cual refleja atenuación. Las características del medio entran a través de

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c}$$

Acá hay que hacer las cuentas para demostrar todo esto que acá se dice sin más.

Por su parte $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ son complejos uniformes y podrán dar desfasajes.

Al utilizar las ecuaciones de divergencia sobre las soluciones se obtiene que

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 = 0 \qquad \hat{n} \cdot \vec{\mathbb{B}}_0 = 0$$

de manera que las ondas se propagan perpendicularmente a los campos, por ello las ondas electromagnéticas son transversales.

Utilizando las ecuaciones de rotor se llega a la importante relación

$$\vec{\mathbb{B}}_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}_0$$

de modo que los vectores $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ también son perpendiculares. Si el vector $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ entonces $\vec{\mathbb{E}}_0$ y $\vec{\mathbb{B}}_0$ tienen la misma fase.

En el vacío o en un medio LIH los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ estarán en fase. Asimismo

$$\mathbf{S} \parallel \hat{n}$$

pues $\mathbf{S} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

En un medio anisótropo $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon\mathbf{E}) = 0$ siendo ϵ un tensor. Allí $\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \hat{n} \neq 0$ salvo que ϵ estee diagonalizado y $\mathbf{E} \parallel$ al eje principal.

Notemos que $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ y $\hat{n}$ forman una terna derecha.

1.0.1 Sobre complejos

$$\mathcal{R}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad \text{con } A \in \mathbb{C}$$

Sean

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \, \mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, \mathrm{e}^{-i\omega t}$$

siempre trabajaremos en general con dependencias temporales armónicas y metemos $\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ en el módulo vbA_0 que pasa a depender de $\mathbf{x}$.

Los campos físicos son siempre la parte real de las expresiones complejas.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

con operaciones lineales es lo mismo tomar parte real antes o después.

$$\mathscr{R}(\mathbf{A}.\mathbf{B}) \neq \Re(\mathbf{A}) + \mathscr{R}(\mathbf{B})$$

con operaciones no lineales no es lo mismo. Para hacer producto necesito tomar la parte real de cada factor y entonces

$$\Re(\mathbf{A}).\Re(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{A}.\mathbf{B}^* + \mathbf{A}.\mathbf{B}\,\mathrm{e}^{-i2\omega t})$$

Pero como en las aplicaciones estaré interesado en el promedio sobre un número entero de períodos,

$$\langle \mathbf{AB} \rangle = \langle \Re(\mathbf{A}).\Re(\mathbf{B}) \rangle = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{A}.\mathbf{B}^*)$$

1.0.2 Poynting promedio y energías promedio

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en ondas electromagnéticas toman la forma

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \mathbf{H} = \vec{\mathbb{H}}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

de manera que

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{2}\Re(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^* + \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}\,\mathrm{e}^{-i2\omega t})$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\Re(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^*)$$

En un MLIH es

$$\vec{\mathbb{B}} = \sqrt{\mu\epsilon}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}} \qquad\qquad \vec{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}$$

donde usamos que $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\Re(\vec{\mathbb{E}} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}})^*)$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(\hat{n}(\vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{E}}^*) - \vec{\mathbb{E}}^*(\vec{\mathbb{E}} \cdot \hat{n}))$$

y finalmente

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\vec{\mathbb{E}}|^2\hat{n}$$

que es el vector de Poynting para ondas en MLIH.

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{D})$$

$$\langle U(\mathbf{x},t)\rangle = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2}\Re(\vec{\mathbb{H}}\cdot\vec{\mathbb{B}}^{*} + \vec{\mathbb{E}}\cdot\vec{\mathbb{D}}^{*})$$

$$\langle U(\mathbf{x},t)\rangle = \frac{1}{16\pi}\Re(\frac{1}{\mu}|\vec{\mathbb{B}}|^{2} + \epsilon|\vec{\mathbb{E}}|^{2}) = \frac{1}{8\pi}|\vec{\mathbb{E}}|^{2}$$

puesto que

$$|\vec{\mathbb{B}}|^{2} = \mu\epsilon|\vec{\mathbb{E}}|^{2},$$

y entonces la densidad de energía promedio es

$$\langle U(\mathbf{x},t)\rangle = \frac{1}{8\pi}|\vec{\mathbb{E}}|^{2}.$$

1.1 Polarización de ondas

Una onda plana bien general en $\hat{n}$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = (\hat{\epsilon}_1\vec{\mathbb{E}}_1 + \hat{\epsilon}_2\vec{\mathbb{E}}_2)\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

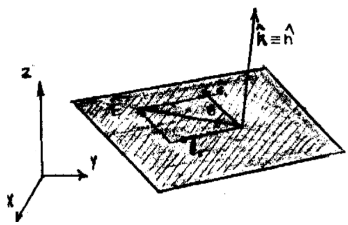

Figura 1.1

Si $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$ están en fase entonces $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ está linealmente polaridaza con θ fijo. Es como que $\mathbf{E}$ viaja siempre por el mismo andarivel, oscilando. Las amplitudes $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$ son complejos para permitir la diferencia de fase entre componentes.

Si $\vec{\mathbb{E}}_1, \vec{\mathbb{E}}_2$ tienen fase arbitraria entonces $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ está elípticamente polarizada.

Si $|\vec{\mathbb{E}}_1| = |\vec{\mathbb{E}}_2|$ y la fase es $\pi/2$ entonces $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ está circularmente polarizada.

$$\vec{\mathbb{E}}_2 = \vec{\mathbb{E}}_1 \, e^{i\pi/2} = \vec{\mathbb{E}}_1 i$$

entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_1 (\hat{\epsilon}_1 \pm \hat{\epsilon}_2) \, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

donde el $+$ corresponde a $\mathcal{C}^+$ antihoraria y el $-$ a horaria. Nos definimos por comodidad,

$$\hat{\epsilon}_+ \equiv \frac{\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2}{\sqrt{2}} \qquad \hat{\epsilon}_- = \frac{\hat{\epsilon}_1 - i\hat{\epsilon}_2}{\sqrt{2}}$$

una base de polarizaciones. Se cumplen

$$\hat{\epsilon}_\pm \cdot \hat{\epsilon}^*_\mp = 0 \qquad \hat{\epsilon}_\pm \cdot \hat{\epsilon}^*_\pm = 1$$

$$\hat{\epsilon}_1 = \sqrt{2}(\hat{\epsilon}_+ + i\hat{\epsilon}_-) \qquad \hat{\epsilon}_2 = \sqrt{2}(\hat{\epsilon}_+ - i\hat{\epsilon}_-)$$

luego cualquier polarización se puede escribir como combinación lineal de $\mathcal{C}^+$ y $\mathcal{C}^-$. Entonces una onda plana general es

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{\epsilon}_+ \vec{\mathbb{E}}_+ + \hat{\epsilon}_- \vec{\mathbb{E}}_-) \, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

Una onda que rebota en un espejo transfiere impulso lineal. Una onda $\mathcal{C}$ lleva $\mathbf{L}$ pero no lo transfiere en un rebote perfecto. Por ser $\mathbf{L}$ un vectorial axial (pseudovector) el reflejo es equivalente a una simetría del sistema.

Tenemos dos base entonces $\{\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2\}$ y $\{\hat{\epsilon}_+, \hat{\epsilon}_-\}$. Además,

$$\frac{\vec{\mathbb{E}}_-}{\vec{\mathbb{E}}_+} = r \, e^{i\alpha}$$

si $r = \pm 1, \alpha = 0$ entonces estamos frente a linealmente polarizada.

1.2 Reflexión y refracción de ondas en medios

Partimos de una onda

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbb{E}}_0 \, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

donde

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$$

siendo v la velocidad en el medio. Los índices de refracción serán

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \qquad n' = \sqrt{\mu'\epsilon'}$$

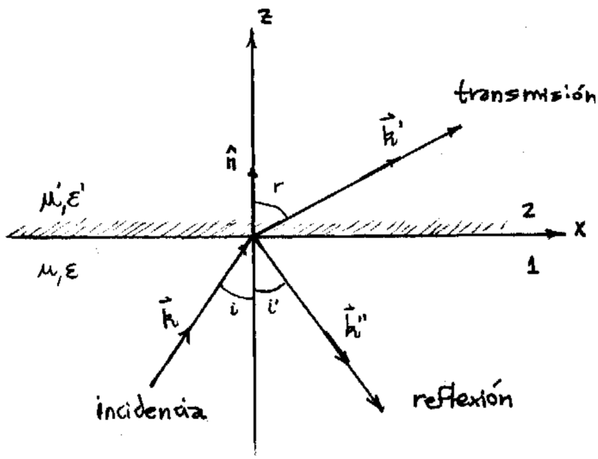

Figura 2.2

de tal suerte que los campos son

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k}\,\mathbf{k}\times\mathbf{E} \qquad\qquad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{1}{k}\,\mathbf{k}\times\mathbf{E}$$

y tenemos

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| \qquad \text{pues} \quad \mu'' = \mu,\ \epsilon'' = \epsilon$$

Utilizando las condiciones de contorno llegamos a

$$\omega t = \omega' t = \omega'' t$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\,|_{z=0} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}\,|_{z=0} = \mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}\,|_{z=0}$$

La existencia de condiciones de contorno en $z = 0$ que deben ser satisfechas en todo t en todo punto (x, y) lleva a todos los factores de fase iguales en $z = 0$. Se debe tener $\mathbf{B}$ normal continuo y $\mathbf{D}$ normal continuo también, lo cual viene de $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ y $\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$.

La frecuencia ω es la misma para el medio 1 y el medio 2 pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Los tres vectores $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$ están en un mismo plano, entonces

$$k\sin(i) = k'\sin(r) = k''\sin(i'),$$

y se deducen las consecuencias

$$n\sin(i) = n'\sin(i') \qquad \text{Ley de Snell,}$$

$$i = i' \qquad \text{Ley de reflexión}$$

Luego se plantean los contornos

$$D_{\hat{n}}: \qquad [\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] \cdot \hat{n} = 0 \qquad \to \qquad [\epsilon' \mathbf{E}_0^{'} - \epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^{''})] \cdot \hat{n} = 0$$

$$E_{\hat{t}}: \qquad \hat{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0 \qquad \to \qquad \hat{n} \times [\mathbf{E}_0^{'} - (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^{''})] = 0$$

$$B_{\hat{n}}: \qquad [\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0^{'} - (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0^{''})] \cdot \hat{n}$$

Igual a cero esto?

$$H_{\hat{t}}: \qquad \hat{n} \times \left[\frac{1}{\mu'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0^{'} - \frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0^{''}) \right] = 0$$

de manera que

$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \qquad \qquad \mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

donde c/ω es el mismo para ambos medios.

Aplicando diligentemente los contornos se llega a las *relaciones de Fresnel* que son los cocientes de las amplitudes relativas.

Usando $\mu \sim 1$ (válido para medios transparentes) tenemos

$$\begin{array}{cc} TE & TM \\ \dfrac{E_0^{''}}{E_0} = -\dfrac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} & \dfrac{E_0^{''}}{E_0} = \dfrac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)} \\ \dfrac{E_0^{''}}{E_0} = 1 + \dfrac{\sin(r-i)}{\sin(i+r)} & \dfrac{E_0^{''}}{E_0} = \dfrac{2\sin(r)\cos(i)}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \end{array}$$

Figura 2.3

frecuencias ópticas $\mu'/\mu = 1$

.

Si $i \sim 0$ entonces TE y TM son similares a menos de un signo.

Polarization (Brewster angle)

Es un i_B tal que no hay onda $\mathbf{E}$ reflejada (en TM),

$$E_0^{''} = 0,$$

puest $\tan(i + r) \to \infty$

$$i_b = atan\left(\frac{n'}{n}\right),$$

pues $i_B + r = \pi/2$ entonces

$$\frac{n}{n'}\sin(i_B) = cos(i_B) \to i_b = atan\left(\frac{n'}{n}\right),$$

Sirve para producir luz polarizada linealmente.

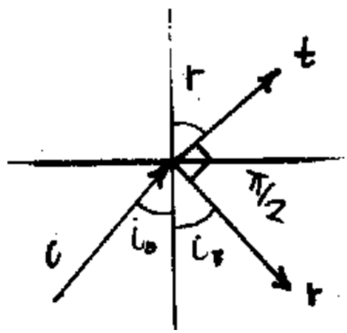

Figura 2.4

Atención, pero

$$\mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_t,$$

pues $\mathbf{S}$ no está relacionado linealmente con $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, y lo que sí vale es

$$\mathbf{S}_i \cdot \hat{n} = \mathbf{S}_r \cdot \hat{n} + \mathbf{S}_t \cdot \hat{n}$$

Reflexión interna total

Sea $n_{inc} > n_{trans}$. Entonces se da que

$$n\sin(i) = n'\sin(r),$$

$$\frac{n}{n'}\sin(i) = \sin(r),$$

y el LHS es mayor igual a 1 para algunos i. Existe un ángulo límite

$$\sin(r) = 1 = \frac{n}{n'}\sin(i)$$

$$i_0 = asin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

de manera que si $i \geq i_0$ entonces $\sin(r) > 1$ y se debe tener un $r \in \mathbb{C}$.

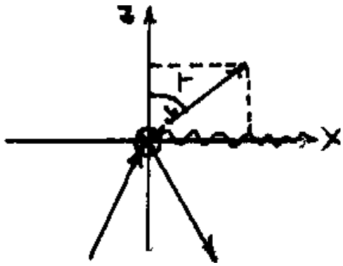

Figura 2.5

Si $\sin(r) > 1$ se tiene $\sin(r)^2 > 1$ y como por teorema de Pitágoras es

$$\cos(r)^2 = 1 - \sin(r)^2 \rightarrow \cos(r) = i\sqrt{\sin(r)^2 - 1}$$

donde notemos espcialmente que hemos sacado fuera un $\sqrt{-1} = i$ para que el argumento de la raíz sea positivo en este caso especial. Luego

$$\cos(r) = i\sqrt{\frac{n}{n'}\sin(i)^2 - 1} = ia$$

y si $\sin(r) = 1$ entonces $r = \pi/2$. Entonces

$$\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \mathrm{e}^{i(k\cos(r)z + k\sin(r)x)} = \underbrace{\mathrm{e}^{-kaz}}_{\text{atenuación}}\ \underbrace{\mathrm{e}^{ik\sin(r)x}}_{\text{propagación}}$$

1.3 Corrientes en conductores

La continuidad de la carga y la divergencia de $\mathbf{D}$,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

nos llevan a

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{J}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)=0$$

y esto lo puedo pensar como una densidad de corriente estacionaria,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_e=0 \tag{3.1}$$

Un campo irrotacional no puede mantener una corriente estacionaria, necesito una FEM para ella. La FEM es una fuente de E no conservativo.

siendo $\mathbf{J}_e$ proveniente de un $\mathbf{E}'$ tal que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}'\neq 0$.

Recordando la ley de Ohm microscópica, $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$,

$$\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}=\frac{\epsilon}{\sigma}\mathbf{J}$$

y esto nos conduce a una ecuación diferencial para $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J}_e=\mathbf{J}+\frac{\epsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}=\left(1+\frac{\epsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

y entonces

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_e+\mathbf{J}_0\,\mathrm{e}^{-4\pi\sigma/\epsilon t}$$

siendo el segundo término del RHS la parte no estacionaria de la corriente. Evidentemente, si $t\to\infty$ esta tiende a cero.

Dado que se verifica (3.1) se tiene

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_0\,\mathrm{e}^{-4\pi\sigma/\epsilon t}$$

y definimos un tiempo de relajación

$$\tau=\frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$$

que es un tiempo característico en el cual se alcanzarían condiciones estacionarias.

Podemos distinguir dos comportamientos entonces en términos de este tiempo de relajación τ, si $t<\tau$

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_e+\mathbf{J}_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

y en cambio cuando $t\gg\tau$ se tendrá $\mathbf{J}\approx\mathbf{J}_e$ de manera que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_e.$$

Por otra parte con respecto a los conductores, si se da que ($\sigma\ll 1$) estamos en presencia de un conductor malo y no se alcanza *nunca* la condición de $\mathbf{E}=0$ en el interior. Tienen un τ grande. Si estamos ante un conductor perfecto ($\sigma\to$

∞) la corriente es estacionaria y se tiene un $\mathbf{E} = 0$ en el interior, el tiempo τ es pequeño, tendiendo a cero.

Podemos desarrollar un enfoque similar en términos de la densidad de carga ρ.

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\mathbf{D}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}\rho = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} = \frac{\sigma}{\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}\rho$$

Entonces

$$\rho = \rho_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \tau \equiv \frac{\epsilon}{4\pi\sigma},$$

y una vez que $t \gg \tau$ y se estabiliza el sistema es $\rho = \rho_0$ entonces

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

1.4 Campo electromagnético en un medio conductor

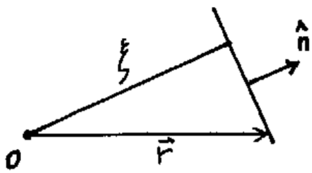

Figura 4.6

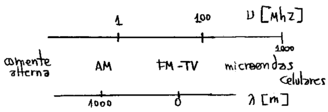

Figura 4.7

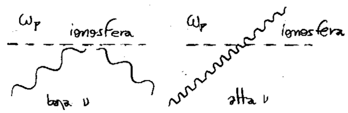

Figura 4.8

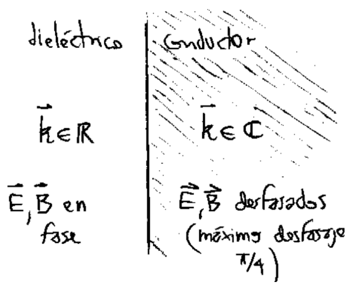

Figura 4.9