Capítulo 1

Pequeñas oscilaciones

Es un formalismo para analizar el movimiento que realiza un sistema cuando está sometido a ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio.

Escribimos

$$V(q_1,...,q_n) \approx V(q_1^0,...,q_n^0)+\sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i^0}(q_i-q_i^0)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i^0}(q_i-q_i^0)(q_j-q_i^0)$$

$$T(q_1,...,q_n,\dot q_1,...,\dot q_n) \approx \frac{1}{2}\left(m(q_1^0,...,q_n^0)+\sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial m}{\partial q_i}\right|_{q_i^0}(q_i-q_i^0)+...\right)\sum_{i,j}\dot q_i \dot q_j$$

Haciendo la aproximación consistente es

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}^n \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i^0}(\eta_i)(\eta_j)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^n \left.m_{ij}\right|_{q_i^0}\dot\eta_i\dot\eta_j$$

con $V_{ij} \equiv \partial^2 V/\partial q_i \partial q_j|_{q_i^0}, m_{ij} = m_{ij}|_{q_i^0}$ simétricos y donde $\eta_i = q_i - q_i^0$. Con esta nomenclatura puede escribirse

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n m_{ij}\dot\eta_i\dot\eta_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n V_{ij}\eta_i\eta_j$$

siendo ambas sumatorias formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas. Matricialmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{T}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^t \mathbb{V}\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

y si ahora evaluamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este formalismo resulta que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\frac{d}{d\dot{\eta}_k}(\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j)\right)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}\frac{d}{d\eta_k}(\eta_i\eta_j) = 0$$

son n ecuaciones diferenciales de Euler,

$$\sum_{j=1}^{n} m_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j = 0 \qquad k = (1, ..., n).$$

Se propone como solución

$$\eta_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

tomando al final del proceso $\Re\{A_j e^{i\omega t}\}$ como solución física. Esta elección lleva a

$$\sum_{j=1}^{n}(-\omega^2 m_{kj} + V_{kj})A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T})\mathbf{A} = 0$$

que no es otra cosa que un problema de autovalores y autovectores generalizado. Necesito

$$\left|\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}\right| = 0$$

siendo $\omega_1^2, ..., \omega_n^2$ autofrecuencias con $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$ y $\omega_s^2 \geq 0$.

Entonces, dado un $V = V(q_i)$ puede ser más fácil obtener explícitamente la serie de Taylor con $\partial^2 V/\partial q_i \partial q_j|_{q_i^0}$ o bien cambiar variable $\eta = q_i - q_i^0$ y quedarse con los términos cuadráticos en $\eta_i\eta_j$. Para la energía cinética $T = T(q, \dot{q})$ puede ser más fácil evaluar $m_{ij}(q_i)|_{q_i^0}$ y quedarnos con los términos cuadráticos en $\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$.

$$\eta_j^s = A_j^s e^{i\omega_s t} \qquad s = 1, ..., N$$

Vectorialmente es

$$\boldsymbol{\eta}^s = \mathbf{A}_j^s e^{i\omega_s t} = \begin{pmatrix} A_1 e^{i\omega_s t} \\ A_2 e^{i\omega_s t} \\ ... \\ A_N e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$

para la frecuencia ω_s, siendo cada uno un grado de libertad moviéndose con frecuencia ω_s.

Luego, es

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = c_1 \boldsymbol{\eta}^1 + c_2 \boldsymbol{\eta}^2 + ... + c_N \boldsymbol{\eta}^N$$

$$\boldsymbol{\eta}_{tot} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ ... \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 A_1^1 e^{i\omega t} + c_2 A_1^2 e^{i\omega t} + ... + c_n A_1^n e^{i\omega t} \\ c_1 A_2^1 e^{i\omega t} + c_2 A_2^2 e^{i\omega t} + ... + c_n A_2^n e^{i\omega t} \\ ... \\ c_1 A_n^1 e^{i\omega t} + c_2 A_n^2 e^{i\omega t} + ... + c_n A_n^n e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

entonces $\mathbf{A}^s$ es un modo normal de frecuencia s.

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ ... \\ A_n^s \end{pmatrix} e^{i\theta_0}$$

La solución total (j es el grado de libertad) se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_{s=1}^{N} c_s A_j^s e^{i\omega_s t}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{s=1}^{N} c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t}$$

y finalmente

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \Re \left\{ \sum_{s=1}^{N} c_s \mathbf{A}^s e^{i\omega_s t} \right\}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbb{T} \mathbf{A} = 1$$

siendo el † el traspuesto conjugado. Se pide que la norma (en la métrica dada por $\mathbb{T}$ de la unidad)

$$A^t \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

lo cual significa que A diagonaliza a $\mathbb{T}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & ... & A_1^n \\ A_2^1 & ... & & \\ A_n^1 & A_n^2 & ... & A_n^n \end{pmatrix}$$

la matriz modal donde sus columnas son autovectores.

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T})\mathbf{A} = 0$$

interpolando a la matriz

$$A^t \mathbb{V} A = \omega^2 A^t \mathbb{T} A = \omega^2 \mathbb{1}$$

y sea ahora el siguiente cambio de coordenadas

$$\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$$

tal que

$$A^{n\times n}\xi^{n\times 1} \qquad\qquad (A\boldsymbol{\xi})^t = {\xi^t}^{1\times n}{A^t}^{n\times n}$$

y que se llaman coordenadas normales.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^t\mathbb{T}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^t\mathbb{V}\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^t\dot{\boldsymbol{\xi}}^t\mathbb{T}A\dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}A^t\dot{\boldsymbol{\xi}}^t\mathbb{V}\dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^t\mathbb{1}\dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^t\omega^2\mathbb{1}\dot{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i\dot{\boldsymbol{\xi}}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i\boldsymbol{\xi}_i^2\omega_i^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_i} = \sum_i\ddot{\xi}_i + \omega_i^2\xi_i = 0$$

y son N ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\sum_i(-\omega^2 + \omega_i^2)A_i = 0$$

de modo que si $\omega^2 = \omega_i^2$ entonces

$$\xi_i = C_i e^{i\omega_i t}$$

Digamos que en coordenadas normales

$$\xi_j = C_j e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en ξ (un grado de libertad es una ω) y se desacoplan los grados de libertad en lo que hace a ω_s. Por otro lado,

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N} c_s A_j^s e^{i\omega_j t}$$

grados de libertad en η, un grado de libertad entonces es combinación lineal de todas las ω.

Si $\omega = 0$ es

$$\xi_j = At + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} c_s A_j^s e^{i\omega_j t} + A_j(Gt + D)$$

siendo el último término asociado a la $\omega = 0$. Para volver atrás es

$$A^\dagger \mathbb{T} A = \mathbb{1}$$

y entonces

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = A^\dagger \mathbb{T} A \boldsymbol{\xi}$$

$$A^\dagger \mathbb{T} \boldsymbol{\eta} = \mathbb{1} \xi$$

coordenadas normales en función de las de desplazamiento.

En conclusión podemos decir varias cosas,

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados.
- En coordenadas normales cada grado de libertad oscial con una frecuencia única (son N osciladores independientes)
- Las amplitudes cumplen

  $$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} a_1^s e^{i\phi_s} \\ a_2^s e^{i\phi_s} \\ \dots \\ a_n^s e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$

  donde tienen la misma fase los A_j^s para toda frecuencia ω_s
- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales).
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

  $$\mathbf{A} = a_1(v_1) + a_2(v_2)$$

  si por ejemplo generan dos autovectores de esta forma.

1.1 Oscilaciones viscosas

$$\sum_j m_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j + B_{ij}\dot{\eta}_j = 0$$

no se puede convertir en osciladores independientes.

$$det\left\{\mathbb{V} + \omega^2 \mathbb{T} + \omega \mathbb{B}\right\} = 0$$