Capítulo 1

Ecuaciones de Hamilton

Se pasa de las variables $(q, \dot{q})$ hacia el par (q, p) con

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Se parte del

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i}^{3N-k} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

y consideramos el diferencial

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

se deducen entonces,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

que son las ecuaciones de Hamilton. Donde (p, q) son $2N$ grados de libertad del sistema llamados las variables canónicas. Si $V \neq V(\dot{q})$ y los vínculos no dependen del tiempo entonces $T = T_2$ (la energía cinética es cuadrática en las velocidades) y $H = E$.

1.1 Transformación canónica del hamiltoniano

Es una transformación que verifica

$$H \longrightarrow K$$

donde $K = K(Q_i, P_i, t)$ es un nuevo hamiltoniano proveniente de

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \longrightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \longrightarrow \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

y ahora usamos el Principio Variacional de Hamilton,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right\} dt$$

$$\delta S = \sum p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t$$

pero el último término es nulo porque la variación es a tiempo fijo. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange en el primer término resulta que

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \frac{d}{dt} \left(p_i \delta q_i \right) \right\} dt$$

y llego pidiendo que sea extremo S a las ecuaciones de Hamilton (dos primeros paréntesis) mientras que el último término resulta

$$\int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt} \left(p_i \delta q_i \right) \right\} dt = \left. p_i \delta q_i \right|_{t_i}^{t_f} .$$

Entonces, usando la misma idea que el $\mathcal{L}$ se tiene

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

siendo F una función generatriz. Luego,

$$\sum p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{dF}{dt}$$