

## Capítulo 1

---

# Ondas planas

Lejos de las fuentes de campo las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Podemos derivar con respecto al tiempo en cada ecuación de rotor y reemplazar con la otra de manera que

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

y esto nos lleva a

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

dos sendas ecuaciones de onda para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Pero es sabido que la solución de

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

es

$$\psi = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

de modo que podemos postular como soluciones para nuestras ecuaciones de onda a

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \mathbf{B} = \vec{\mathbb{B}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Se tiene además que  $\mathbf{k} = k\hat{n}$  da a través de  $\hat{n}$  la dirección de propagación de la onda. El número de onda  $k$  podrá ser complejo lo cual refleja atenuación. Las características del medio entran a través de

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c}$$

Por su parte  $\vec{\mathbb{E}}_0$  y  $\vec{\mathbb{B}}_0$  son complejos uniformes y podrán dar desfases.

Al utilizar las ecuaciones de divergencia sobre las soluciones se obtiene que

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 = 0 \quad \hat{n} \cdot \vec{\mathbb{B}}_0 = 0$$

de manera que las ondas se propagan perpendicularmente a los campos, por ello las ondas electromagnéticas son transversales.

Utilizando las ecuaciones de rotor se llega a la importante relación

$$\vec{\mathbb{B}}_0 = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}_0$$

de modo que los vectores  $\vec{\mathbb{E}}_0$  y  $\vec{\mathbb{B}}_0$  también son perpendiculares. Si el vector  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$  entonces  $\vec{\mathbb{E}}_0$  y  $\vec{\mathbb{B}}_0$  tienen la misma fase.

En el vacío o en un medio LIH los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  estarán en fase. Asimismo

$$\mathbf{S} \parallel \hat{n}$$

pues  $\mathbf{S} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

En un medio anisótropo  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$  siendo  $\epsilon$  un tensor. Allí  $\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \hat{n} \neq 0$  salvo que  $\epsilon$  este diagonalizado y  $\mathbf{E} \parallel$  al eje principal.

Notemos que  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\hat{n}$  forman una terna derecha.

### 1.0.1 Sobre complejos

$$\mathcal{R}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{con } A \in \mathbb{C}$$

Sean

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

siempre trabajaremos en general con dependencias temporales armónicas y me-temos  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  en el módulo  $vbA_0$  que pasa a depender de  $\mathbf{x}$ .

Los campos físicos son siempre la parte real de las expresiones complejas.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

Acá hay que hacer las cuentas para demostrar todo esto que acá se dice sin más.

con operaciones lineales es lo mismo tomar parte real antes o después.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

con operaciones no lineales no es lo mismo. Para hacer producto necesito tomar la parte real de cada factor y entonces

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} e^{-i2\omega t})$$

Pero como en las aplicaciones estaré interesado en el promedio sobre un número entero de períodos,

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{B} \rangle = \langle \mathcal{R}(\mathbf{A}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{B}) \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*)$$

## 1.0.2 Poynting promedio y energías promedio

Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en ondas electromagnéticas toman la forma

$$\mathbf{E} = \vec{\mathbb{E}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{H} = \vec{\mathbb{H}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

de manera que

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \mathcal{R}(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^* + \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}} e^{-i2\omega t})$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{H}}^*)$$

En un MLIH es

$$\vec{\mathbb{B}} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{n} \times \vec{\mathbb{E}} \quad \vec{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{n} \times \vec{\mathbb{E}}$$

donde usamos que  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\vec{\mathbb{E}} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} \times \vec{\mathbb{E}})^*)$$

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} (\vec{\mathbb{E}} \cdot \vec{\mathbb{E}}^*) - \vec{\mathbb{E}}^* (\vec{\mathbb{E}} \cdot \hat{n}))$$

y finalmente

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{\mathbb{E}}|^2 \hat{n}$$

que es el vector de Poynting para ondas en MLIH.

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \Re(\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^*)$$

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \Re\left(\frac{1}{\mu} |\vec{\mathcal{B}}|^2 + \epsilon |\vec{\mathcal{E}}|^2\right) = \frac{1}{8\pi} |\vec{\mathcal{E}}|^2$$

puesto que

$$|\vec{\mathcal{B}}|^2 = \mu \epsilon |\vec{\mathcal{E}}|^2,$$

y entonces la densidad de energía promedio es

$$\langle U(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} |\vec{\mathcal{E}}|^2.$$

## 1.1 Polarización de ondas

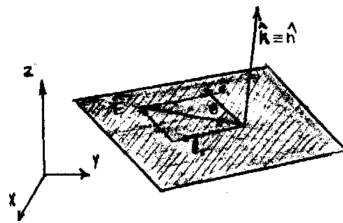


Figura 1.1

## 1.2 Reflexión y refracción de ondas en medios

## 1.3 Campo electromagnético en un medio conductor

## 1.4 Transformación de vectores

### 1.4.1 Intervalos

### 1.4.2 Transcurso del tiempo en un sistema con V grande

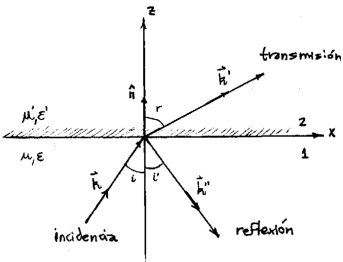


Figura 2.2



Figura 2.3

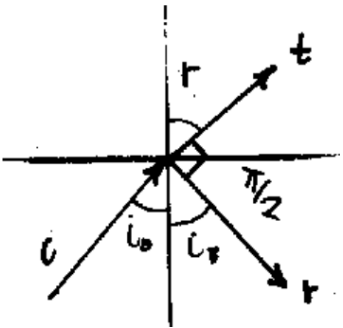


Figura 2.4

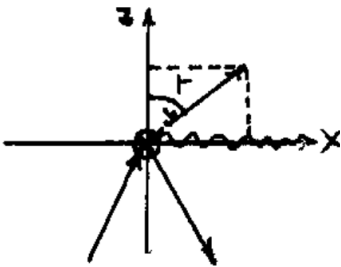


Figura 2.5

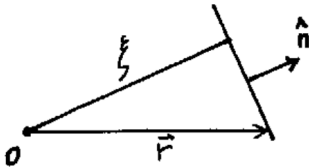


Figura 3.6

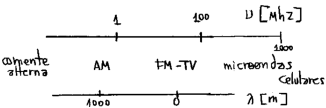


Figura 3.7

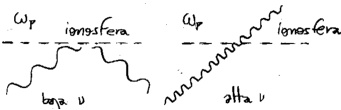


Figura 3.8

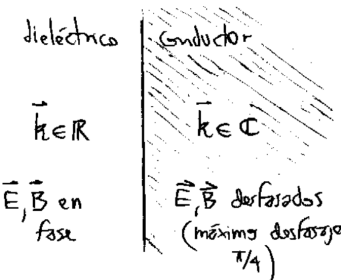


Figura 3.9

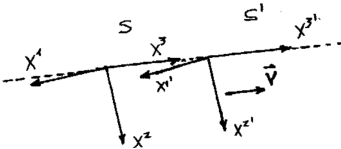


Figura 4.10

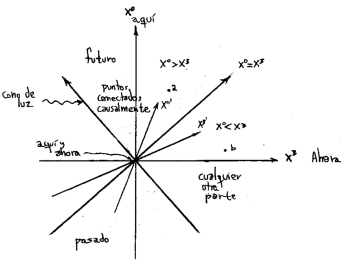


Figura 4.11

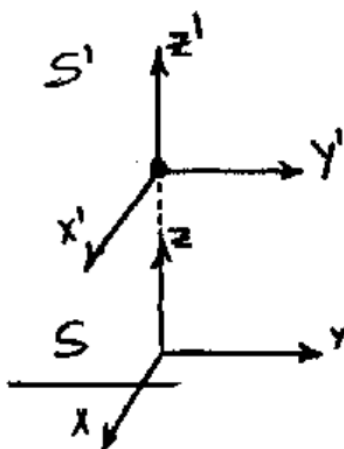


Figura 4.12