CBFT Mecánica clásica

Mecánica lagrangiana

4 de noviembre de 2015

Contenidos

§1. Principio de los trabajos virtuales

Esto es sumamente sketchi, debemos leer la carpeta de la cursada y luego la teoría.

Escribimos las ecuaciones de Newton para un sistema de partículas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

pero sabiendo que el momento viene de las fuerzas aplicadas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{P}}_i$$

de manera que

$$\dot{\mathbf{F}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, sumando en las N partículas del sistema

$$\sum_i^N \left(\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde $\delta \mathbf{r}_i$ son desplazamientos virtuales. Si hacemos estos desplazamientos compatibles con los vínculos

$$\sum_i^N \left(\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde el último término es nulo debido a que la fuerza de vínculos son perpendiculares a los desplazamientos virtuales, es decir

$$\mathbf{F}_i^v \perp \delta \mathbf{r}_i$$

si es que, por supuesto, los $\delta \mathbf{r}_i$ son compatibles con los vínculos.

Esto nos deja entonces, el Principio de los Trabajos Virtuales,

$$\sum_i^N \left(\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde como son independientes entonces se sigue que

$$\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

Relación vínculos y desplazamientos: El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{r}_i) - K = 0$$

luego, derivando implícitamante cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$ como N dimensionales.

¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.

§2. Construcción del lagrangiano

Consideremos un sistema de N partículas, k ecuaciones de vínculo y por ende $3N - k$ grados de libertad (estamos en 3 dimensiones).

Tenemos N relaciones

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t)$$

entonces una variación serán

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$$

donde el último δt es nulo por ser un desplazamiento virtual de manera que

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j.$$

Por otro lado

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

y se puede reescribir el primer término como

$$\dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla

Consideremos la derivada total de

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

Pero la diferencial del vector $\mathbf{r}_i$ es (notemos que no es una variación)

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

La derivada de la velocidad de la partícula i-ésima respecto a la coordenada l-ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t}.$$

Si derivamos nuevamente

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j}dq_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial t}dt\right)$$

de tal manera que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l}$$

Volvemos ahora a la eq III y

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j$$

y este corchete lo reescribimos como

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right\}\delta q_j$$

Ahora introducimos la sumatoria en i hacia adentro de ambos términos,

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i^N \frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i^N \frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2\right)\right\}\delta q_j$$

de modo que dentro de los paréntesis resulta T, luego

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}(T)\right\}\delta q_j$$

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_i^N Q_j \delta q_j$$

siendo Q_j la fuerza generalizada. Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}(T) - Q_j\right\}\delta q_j = 0.$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas entonces

$$Q_j \delta q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j$$

y como $V = V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n)$ se tiene

$$V = \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial r_i} \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

pero

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Definimos como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

y entonces podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Si existieran fuerzas que no provienen de un potencial entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

y finalmente

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j^{NC} \delta q_j$$

Como esto vale para todo grado de libertad l llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este es el resultado más importante del capítulo.

§3. Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

Sea una función de las coordenadas y del tiempo $F = F(q_i, t)$ que sumamos al lagrangiano $\mathcal{L}$, de modo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este nuevo lagrangiano son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

Ahora es necesario escribir la derivada total de F,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Luego, usando esta información, resulta que los términos que surgen de la adición de la derivada total de F resultan ser

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

y si aceptamos que F es de clase C^2 se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial {q_j}^2}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

de modo que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos una derivada total respecto del tiempo de una función de q_j, t.

§4. Momentos conjugados y coordenadas cíclicas

El momento canónicamente conjugado a q_j se define como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \equiv Q_j$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad j. Sea un lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ entonces si no depende explícitamente de la coordenada k será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, ..., q_{k-1}, q_{k+1}, ..., q_n, \dot{q}_i, t)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$Q_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k = 0 \quad \rightarrow \dot{p}_k = 0 \quad \rightarrow \; p_k = cte.$$

no existe fuerza generalizada en el grado de libertad k, de forma que se conserva el momento p_k canónicamente conjugado a q_k.

§5. Energía cinética de un sistema

A continuación expresaremos la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\left(\sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)$$

Referencias