Capítulo 1

Transformaciones canónicas

1.1 Funciones generatrices

Consideraremos ahora varios casos diferentes de dependencia en la función generatriz,

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t)$$

$$\sum p_i \dot{q}_i - H + K - \sum P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$$

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \sum \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} - H + K = 0$$

y la transformación canónica queda definida por

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \qquad \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H$$

Todas las combinaciones posibles son

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t) \qquad F_2 = F_2(q_i, P_i, t) \qquad F_3 = F_3(p_i, Q_i, t) \qquad F_4 = F_4(p_i, P_i, t)$$

y para F_2, por ejemplo, se tiene

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_i^N q_i P_i$$

la cual es una identidad (transformación). Y

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i = p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = q_i = Q_i$$

1.2 Corchetes de Poisson

Sea $A = A(q_i, p_i, t)$ entonces

$$\frac{d}{dt}A = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}A = \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}}_{\equiv [A,H]} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}A = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Las constantes de movimiento en un sistema cumplen que su corchete de Poisson con el hamiltoniano es nulo.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = [q_i, H] \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = [p_i, H]$$

Una transformación canónica cumple

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [q_i, q_j] = 0$$

de modo que el corchete entre los momentos es nulo así también como el corchete entre las coordenadas.