CBFT Mecánica clásica

Fuerzas centrales

14 de noviembre 2015

Contenidos

§1. Fuerzas centrales **1**

§1. Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que cumple

$$\mathbf{F}(r) = f(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

de tal suerte que la parte cinética del lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}^2\right)$$

El momento angular $\mathbf{L}$ se conserva puesto que $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Como es $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = cte$ entonces se sigue que $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ se hallan contenidos en el mismo plano.

Puedo pedir, sin pérdida de generalidad, que $\theta = \pi/2$ y entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r).$$

Como ϕ es cíclica se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L = mr^2\dot{\phi}$$

que no es otra cosa que la conservación del momento angular, información que puede ser llevada al lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]$$

donde el último corchete será lo que llamaremos un potencial efectivo V_{eff},

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta en

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

pero es más sencillo utilizar la conservación de la energía que explícitamente tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

desde la cual se puede integrar directamente la trayectoria $r = r(t)$ según

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)},$$

aunque suele ser más útil la trayectoria en el espacio físico $r = r(\phi)$ o bien $\phi = \phi(r)$.

$$mr^2\frac{d\phi}{dt} = L \quad \longrightarrow mr^2\frac{d\phi}{dr}\dot{r} = L$$

luego

$$\dot{r}d\phi = \frac{L}{mr^2}dr$$

$$\int d\phi = \int \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)}}dr$$

Referencias