Capítulo 1

Mecánica newtoniana

Tal vez sea una simplificación, pero no una muy terrible, decir que el curso de mecánica clásica busca reemplazar la mecánica basada en las ecuaciones de Newton,

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

por un *formalismo* más poderoso y que se podrá aplicar luego a otros campos. Este formalismo es el corazón de la mecánica clásica.

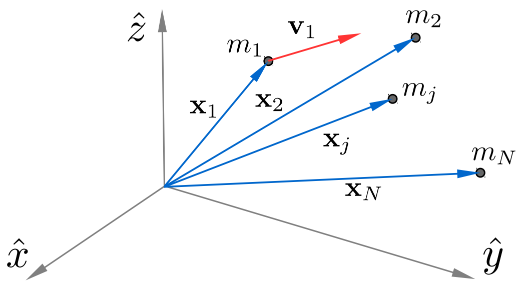

Figura 0.1 Sistema de partículas de masas m_i con sus correspondientes vectores de posición $\boldsymbol{x}_i$. La partícula m_1 tiene además indicado su vector velocidad $\boldsymbol{v}_1$.

1.1 Momento angular

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

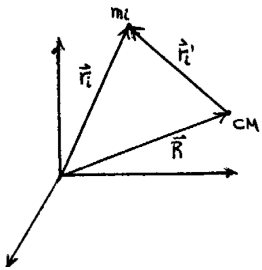

Figura 1.2

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i' \qquad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i'$$

$$\boldsymbol{L}_O^T = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i') \times m_i (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i')$$

$$\boldsymbol{L}_O^T = \sum_i (\boldsymbol{R} \times m_i \boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times m_i \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{V} + \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i')$$

pero si recordamos que se cumplen

$$\boldsymbol{R} = \sum_i \frac{m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

$$M\boldsymbol{R} = \sum_i m_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i') = \sum_i m_i \boldsymbol{R} + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'$$

$$M\boldsymbol{R} = M\boldsymbol{R} + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \quad \Longrightarrow 0 = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'$$

podemos volver a las ecuaciones anteriores para poner

$$\boldsymbol{L}_O^T = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{r}_i') + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \right) \times \boldsymbol{V} + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i'$$

$$\boldsymbol{L}_O^T = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V} + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i'$$

$$\boldsymbol{L}_O^T = \boldsymbol{L}^{cm} + \boldsymbol{L}_{cm}^{sist}$$

siendo el primer término del lado derecho el momento angular orbital y el segundo el momento angular de spin.

Con respecto a la conservacion del momento angular, se tendrá

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_O$$

que se puede ver como suma del torque de fuerzas externas y de fuerzas internas. En el primer caso, los torques externos sumarán cero si las fuerzas externas son nulas o centrales. En el segundo caso los torques internos son nulos si vale el principio de acción y reacción fuerte; es decir si

$$\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \parallel F_{ij}.$$

1.2 Trabajo y energía

$$T_2 - T_1 = W_{1\to 2} = U_1 - U_2$$

donde la primera igualdad vale siempre y la segunda se da si se puede escribir la fuerza como el gradiente de un potencial, i.e.

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U$$

y entonces se conserva la energía

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

Sólo las componentes tangenciales de la fuerza producen trabajo.

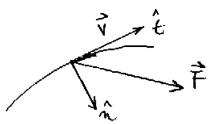

Figura 2.3

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

entonces

$$m\frac{dv}{dt} = F_t \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_n$$

y haciendo un cambio de variable a desplazamiento s

$$mdv\frac{ds}{dt} = F_t ds$$

$$m\int vdv = \int F_t ds = \int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\frac{1}{2}mv^2\bigg|_i^f = W_{i\to f}$$

siendo este resultado el llamado *teorema de las fuerzas vivas*. Notemos que el versor desplazamiento $d\boldsymbol{s}$ *camina* por la trayectoria.

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

y entonces como el trabajo externo viene de

$$\sum_i^N \int \boldsymbol{F}_i^{ext}\cdot d\boldsymbol{s}_i$$

necesito $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i)$ y $\nabla\times\boldsymbol{F}_i = 0$. Para el trabajo interno

$$W_i^{int} = \int\sum_j^N \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{s}_i$$

$$W^{int} = \sum_i\int\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{s}_i$$

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\int \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{s}_j = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\int \boldsymbol{F}_{ij}\cdot\left(d\boldsymbol{s}_i - d\boldsymbol{s}_j\right)$$

1.3 Definiciones

El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes para resolver el problema. Las fuerzas de vínculo F^v se *acomodan* en todo momento para satisfacer las ligaduras. Entonces las $\boldsymbol{F}^v$ son perpendiculares a los desplazamientos compatibles con los vínculos de manera que

$$W_{F^v} = 0$$

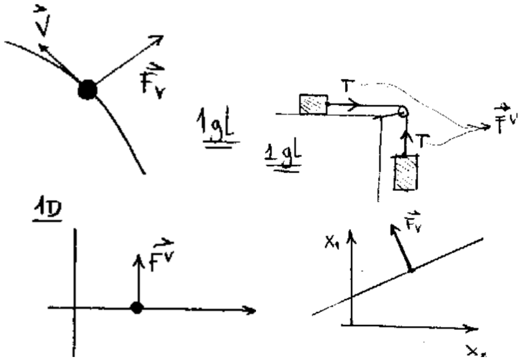

Figura 3.4

Los vínculos se clasifican en

$$\text{holónomos}\left\{\begin{array}{cc} f(r_i,t)=0 & \text{reónomos} \\ f(r_i)=0 & \text{escleronómos} \end{array}\right\}$$

los cuales cumplen que $W^{F^v}_{virtual}=0$, y

$$\text{no holónomos}\left\{\begin{array}{c} f(r_i,t)\geq 0 \\ f(r_i)\geq cte. \quad f(\dot{r}_i)=0 \end{array}\right\}$$

los cuales no cumplen, en general, que $\boldsymbol{F}^v$ perpendicular al desplazamiento posible. donde un desplazamiento virtual es un desplazamiento a t_0 fijo compati-

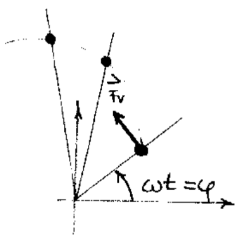

Figura 3.5

ble con los vínculos, mientras que un desplazamiento real es un desplazamiento en δt durante el cual varían fuerzas y ligaduras.

A tiempo fijo el desplazamiento es en $\hat{r}\perp\boldsymbol{F}^v$.

$$f(x_i, t) = cte. \Longrightarrow \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t = 0$$

o bien

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{\delta r} = 0$$