

# CBFT Mecánica clásica

Mecánica lagrangiana

5 de diciembre 2015

## Contenidos

§1. Principio de los trabajos virtuales . . . . .	1
§2. Construcción del lagrangiano . . . . .	3
§3. Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total . . . . .	6
§4. Momentos conjugados y coordenadas cíclicas . . . . .	7
§5. Energía cinética de un sistema . . . . .	7
§6. Energía cinética de un sistema de partículas . . . . .	8
§7. Trabajo en un sistema de partículas . . . . .	9
§8. Lagrangiano cíclico en el tiempo . . . . .	10
§9. Energía cinética y el hamiltoniano . . . . .	11
§10 Principio de acción mínima . . . . .	11
§11 Aplicaciones del principio de acción mínima . . . . .	13
§12 Multiplicadores de Lagrange . . . . .	14

## §1. Principio de los trabajos virtuales

Escribimos las ecuaciones de Newton para un sistema de partículas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

Esto es sumamente sketchy,  
debemos leer la carpeta de la  
cursada y luego la teoría.

pero sabiendo que el momento viene de las fuerzas aplicadas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{P}}_i$$

de manera que

$$\dot{\mathbf{F}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v = 0,$$

y entonces, sumando en las  $N$  partículas del sistema

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a - \mathbf{F}_i^v) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  son desplazamientos virtuales. Si hacemos estos desplazamientos compatibles con los vínculos

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde el último término es nulo debido a que la fuerza de vínculos son perpendiculares a los desplazamientos virtuales, es decir

$$\mathbf{F}_i^v \perp \delta \mathbf{r}_i$$

si es que, por supuesto, los  $\delta \mathbf{r}_i$  son compatibles con los vínculos.

Esto nos deja entonces, el Principio de los Trabajos Virtuales,

$$\sum_i^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

donde como son independientes entonces se sigue que

$$\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^a = 0 \quad \forall i$$

**Relación vínculos y desplazamientos:** El hecho de que la fuerza de vínculo sea perpendicular a los desplazamientos puede verse a partir de que la ecuación de vínculo en un sistema toma la forma

$$f(\mathbf{r}_i) - K = 0$$

luego, derivando implícitamente cada ecuación y sumando (si se nos permite un pequeño abuso de notación)

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = 0$$

pero esto no es otra cosa que

$$\nabla f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

donde debemos entender al gradiente y al vector  $\delta \mathbf{r}$  como  $N$  dimensionales.

*¿Y esta magia? Hay que aclarar realmente que sea así como se dice que es.*

## §2. Construcción del lagrangiano

Consideremos un sistema de  $N$  partículas,  $k$  ecuaciones de vínculo y por ende  $3N - k$  grados de libertad (estamos en 3 dimensiones).

Tenemos  $N$  relaciones

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

entonces una variación serán

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$$

donde el último  $\delta t$  es nulo por ser un desplazamiento virtual de manera que

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Por otro lado

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

y se puede reescribir el primer término como

$$\dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

resultando

$$\sum_i^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

La idea ahora es reescribir todo en términos más convenientes, para que aparezca un término multiplicado a una variación arbitraria. De esta manera quedará una sumatoria de un sumando multiplicado por una variación igualada a cero. No cabe otra posibilidad que el sumando sea nulo para cada índice de la suma.

**Escrito muy mal este texto. La idea es clara, no obstante: hay que purificarla**

Consideremos la derivada total de

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

Pero la diferencial del vector  $\mathbf{r}_i$  es (notemos que no es una variación)

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

La derivada de la velocidad de la partícula  $i$ -ésima respecto a la coordenada  $l$ -ésima es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i / \partial t}{\partial q_l / \partial t}.$$

Si derivamos nuevamente

$$\frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} dq_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial t} dt \right)$$

de tal manera que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_l}$$

Volvemos ahora a la eq III y

$$\sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j$$

y este corchete lo reescribimos como

$$\begin{aligned} & \sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ & \sum_i^N \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \end{aligned}$$

Ahora introducimos la sumatoria en  $i$  hacia adentro de ambos términos,

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

de modo que dentro de los paréntesis resulta  $T$ , luego

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) \right\} \delta q_j$$

$$\sum_i^N \dot{\mathbf{P}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_i^N Q_j \delta q_j$$

siendo  $Q_j$  la fuerza generalizada. Entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Si suponemos que las fuerzas son conservativas entonces

$$Q_j \delta q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j$$

y como  $V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  se tiene

$$V = \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial r_i} \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

pero

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

y entonces

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right\} \delta q_j = 0.$$

Definimos como

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

y entonces podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Si existieran fuerzas que no provienen de un potencial entonces

$$Q_j + Q_j^{NC} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

y finalmente

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j^{NC} \delta q_j$$

Como esto vale para todo grado de libertad  $l$  llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este es el resultado más importante del capítulo.

### §3. Invariancia del lagrangiano ante adición de una derivada total

Sea una función de las coordenadas y del tiempo  $F = F(q_i, t)$  que sumamos al lagrangiano  $\mathcal{L}$ , de modo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para este nuevo lagrangiano son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

Ahora es necesario escribir la derivada total de  $F$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y ver que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}$$

Luego, usando esta información, resulta que los términos que surgen de la adición de la derivada total de  $F$  resultan ser

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right)$$

y si aceptamos que  $F$  es de clase  $C^2$  se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0$$

de modo que las ecuaciones de Euler Lagrange no se modifican si añadimos una derivada total respecto del tiempo de una función de  $q_j, t$ .

## §4. Momentos conjugados y coordenadas cíclicas

El momento canónicamente conjugado a  $q_j$  se define como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j$$

y entonces

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \equiv Q_j$$

que es la fuerza generalizada en el grado de libertad  $j$ . Sea un lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  entonces si no depende explícitamente de la coordenada  $k$  será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_i, t)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$Q_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_k = 0 \quad \rightarrow \quad p_k = cte.$$

no existe fuerza generalizada en el grado de libertad  $k$ , de forma que se conserva el momento  $p_k$  canónicamente conjugado a  $q_k$ .

## §5. Energía cinética de un sistema

A continuación expresaremos la energía cinética de un sistema en función de coordenadas generalizadas,

Este chapter es básicamente un desarrollo formal, habría que bajar con alguna aplicación práctica.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \left( \sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \quad (5.1)$$

Usando  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$  desarrollamos un desplazamiento real como

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt$$

y podemos incorporar esta información en (5.1) para obtener

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \dot{q}_j + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right) + 2 \left( \sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \dot{q}_j \right) + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_i^N m_i \left( \sum_j^{3n-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$$

Esto se puede reescribir más cómodamente definiendo

$$T_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}$$

$$b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \equiv \sum_i^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

**Hay un factor de 1/2 de diferencia. Revisar la carpeta.**

y entonces, juntando todo,

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j + \sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j$$

Para una partícula libre será

$$T = T_2$$

y para una partícula con vínculos en general tendrá las tres clases de cinética.

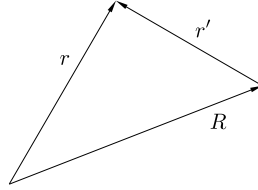
## §6. Energía cinética de un sistema de partículas

La energía de un sistema de partículas es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{V}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_i^N 2m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i$$





**Figura 6.1** Sistema de partículas

y veremos ahora que el último término es nulo ya que son vectores perpendiculares. Para ello notemos que

$$M\mathbf{R}_{cm} = \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}'_i)$$

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{r}'_i$$

y también

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{v}'_i$$

de modo que

$$0 = \sum_i^N m_i \mathbf{V}_{cm} \cdot \mathbf{r}'_i.$$

Finalmente

$$T^{tot} = T^{cm} + T_{cm}^{tot}$$

Esto hay que revisarlo, derivo ambos miembros? Vincular con la figura.

## §7. Trabajo en un sistema de partículas

Empezamos desde

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

donde el trabajo externo puede escribirse

$$W^{ext} = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{s} \quad (7.1)$$

Quiero un  $\ell$  en bold, no me gusta el  $s$ .

La no dependencia del camino para la integral que da (7.1) requiere que

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}_i) \quad \nabla_{\mathbf{r}_i} \times \mathbf{F}_i^e = 0$$

y entonces puedo inducir la existencia de una función potencial para las fuerzas externas, barra resizable ya.

$$W^{ext} = - \sum_i^N \Delta V_i|_1^2$$

Por otro lado,

$$W_c^{int} = \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

$$\sum_i^N W_i^{int} = W^{int} = \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}^N \int_1^2 \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^e \cdot d\mathbf{s}_i$$

## §8. Lagrangiano cíclico en el tiempo

Empecemos desde la derivada total con respecto al tiempo del lagrangiano,

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y usando la derivada total del término

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Reemplazando una en otra resulta que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y acomodando un poco

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = \frac{d}{dt} (p\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y entonces previo pase mágico de términos,

$$\frac{d}{dt} (p\dot{q} - \mathcal{L}) = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

y si definimos

$$\mathcal{H} \equiv p\dot{q} - \mathcal{L}$$

resulta que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Entonces si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = cte.$  Además, si se cumplen

$$T = T_2 \quad V \neq V(\dot{q})$$

y además los vínculos no dependen del tiempo se tiene que  $\mathcal{H} = E$ , es decir, el Hamiltoniano es la energía. La condición de que los vínculos no dependan del tiempo genera en realidad que  $T = T_2$ .

Por otro lado  $E = cte.$  si  $W^{nc} = 0$ .

## §9. Energía cinética y el hamiltoniano

Dado que la energía cinética tiene la forma general

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{T_0} + \underbrace{\sum_j^{3n-k} b_j(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_j}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_j^{3n-k} \sum_s^{3n-k} a_{js}(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \dot{q}_s \dot{q}_j}_{T_2}$$

entonces se sigue que

$$E = T_0 + T_1 + T_2 + V \quad (9.1)$$

y como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = T_1 + 2T_2$$

es

$$\mathcal{H} = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - (T_0 + T_1 + T_2 + V) = 2T_2 + T_1 - T_0 - T_1 - T_2 + V = T_2 - T_0 + V$$

pero como E es (9.1) se tendrá

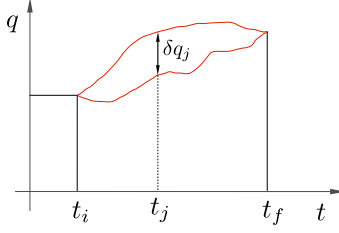
$$E = H \iff 2T_0 + T_1 = 0$$

y un solución de este sistema es, por supuesto,  $T_0 = T_1 = 0$

## §10. Principio de acción mínima

También Principio variacional de Hamilton. Partimos de una acción,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad \mathcal{L} = T - V$$



**Figura 10.2** El principio de acción mínima

La trayectoria real de un sistema con lagrangiano  $\mathcal{L}$  es tal que  $S$  es mínimo para cualquier trayectoria posible entre  $q(t = t_i)$  y  $q(t = t_f)$ . Consideramos una variación con extremos fijos, es decir

$$\delta q(t = t_i) = 0 \quad \delta q(t = t_f) = 0$$

y a tiempo fijo  $\delta t = 0$ . Esto último significa que todas las trayectorias emplearán el mismo tiempo (no se variará).

Consideramos una variación de la integral,

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt,$$

y notamos que será beneficioso utilizar integración por partes para expresar todo en función de las variaciones de las coordenadas (las  $\delta q_i$ ), de manera que como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

resulta

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt,$$

separamos los dos términos,

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt - \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt,$$

y resulta que el primero por el teorema fundamental del cálculo es

$$\int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_i}^{t_f} \quad (10.1)$$

**Cuán sketchi es todo esto!!  
Mucho para aclarar. Tal vez se justifique un minicurso de variacional como apéndice.**

y es nulo porque  $\delta q_i = 0$  en los extremos (recordemos que las variaciones son nulas en los extremos de integración). Decimos que este es un término de superficie. Entonces

$$\delta I = - \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0$$

se verificará por el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Luego, si se hace  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df/dt$  (ambos lagrangianos difieren en una derivada total con respecto al tiempo) la trayectoria que minimiza  $\mathcal{L}'$  es la que misma que minimiza  $\mathcal{L}$  por la condición dada por (10.1). Entonces

$$\delta S = 0 \iff \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] = 0.$$

La moraleja es que si los lagrangianos difieren en una derivada total del tiempo obtenemos la misma física.

## §11. Aplicaciones del principio de acción mínima

$$S = \int (T - V_0) dt$$

donde el lagrangiano es con  $V = V_0$  constante (un lagrangiano sujeto a potencial constante). La integral de acción da una medida de la longitud de la órbita (el espacio recorrido). Para una partícula sujeta a  $V = 0$

$$S = \frac{1}{2} \int m v_0^2 dt = \frac{1}{2} m v_0^2 (t - t_0)$$

de manera que  $v_0(t - t_0)$  representa la distancia  $d$  recorrida, y es

$$S = \frac{1}{2} m v_0 d$$

Comentario sobre el cálculo de las variaciones

$$I = \int f \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) dt$$

Esta idea debe estar en el suplemento matemático que le dedicaremos a variacional

entonces  $I$  es extremo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial [dx/dt]} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

También podemos encontrar esta notación, dependiendo del tipo de problema,

$$I = \int f \left( y, \frac{dy}{dx}, x \right) dx$$

## §12. Multiplicadores de Lagrange

Partimos de la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i[t], \dot{q}_i[t], t) dt$$

entonces

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j dt$$

donde  $\delta q_j$  son desplazamientos independientes. Si no se puede despejar alguna  $\delta q_j$  (con vínculos no-holónomos, por ejemplo) entonces algún  $\delta q_j$  es independiente de modo que para que valga  $\delta S = 0$  necesitaré

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \dot{q}_{\ell} + b^k(q_i, t) = 0$$

que son los vínculos ( $k = 1, \dots, s$ ); son  $s$  ecuaciones de vínculo. Multiplicamos por  $\delta t$  y vemos que no son independientes

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} + b^k(q_i, t) \delta t = 0$$

Sean  $\delta q_{\ell}$  variación a  $t$  fijo, entonces

$$\sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0$$

recordando que  $\ell$  suma en los grados de libertad. Podemos sacar la suma fuera,

$$\sum_k^s \int_{t_i}^{t_f} \lambda^k \sum_{\ell}^N a_{\ell}^k(q_i, t) \delta q_{\ell} dt = 0$$

Absorbo la otra sumatoria en el segundo término y paso de  $\ell \rightarrow j$ .

$$\int \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_k^s \lambda^k a_{\ell}^k(q_i, t) \right\} \delta q_{\ell} dt = 0$$

entonces

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^N \sum_k^s \lambda^k a_{\ell}^k(q_i, t) = \sum_{j=1}^N \sum_k^s \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \frac{\delta \mathbf{r}_j}{\delta q_j}$$

siendo  $\nabla_j f^k$  el gradiente de la ecuación de vínculo respecto de  $j$  y donde  $\lambda^k$  es la fuerza de vínculo asociada al vínculo no despejado pues como la fuerza generalizada (que no proviene de potencial)

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

y comparando vemos que

$$Q_j = \sum \lambda^k a_j^k(q_j, t) \quad \text{vínculos no holónomos}$$

$$Q_j = \sum \lambda^k \nabla_j f^k \cdot \delta \mathbf{r}_j \quad \text{vínculos holónomos}$$

En el caso de vínculos holónomos

$$g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

donde no quise despejar en función de  $q_j, \dots, q_n$  resulta que

$$Q_j^{\delta q_j} = \sum_i^N \lambda (\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

donde  $\delta \mathbf{r}_i$  es un desplazamiento virtual de la partícula. Vamos a reescribir este término,

$$\sum_i^N \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = 0$$

$$\nabla_i f^k \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

**El supraíndice con  $\delta q_j$  va sobre el igual en realidad.**

$$Q_j^{\delta q_j} = \lambda \sum_k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

luego como

$$a_j^k \equiv \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i}$$

se sigue que los  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo.

En el caso de vínculos no holónomos  $\lambda^k$  son las fuerzas de vínculo asociadas a los vínculos no retirados.

$$Q_j \delta q_j = \sum \lambda^k (\nabla_i g^k \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \frac{\partial g^k}{\partial q_j}$$

entonces  $\lambda^k = F^v$ .

Como extra escribamos que para cada grado de libertad  $j$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_k^s \lambda^k a_j^k \equiv 0$$

donde  $\delta q_j$  son ahora independientes.

$$Q_j = \sum_i^N F_i^a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

### EJEMPLO 12.1 Moneda rodando por un plano

Consideramos una moneda que rueda libremente por un plano (no sujeta a potencial). Situaemos un sistema de ejes sobre la moneda, que etiquetaremos 123 y otro fijo fuera de la misma xyz.

$$\mathbf{V}_{cm} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -(\dot{\phi} \hat{2} + \dot{\psi} \hat{3}) \times (-a \hat{2})$$

$$\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = -a \dot{\psi} \hat{1}$$

siendo los vínculos

$$z_{cm} - a = 0 \quad \theta = \pi/2 \quad |\mathbf{V}_{cm}| = a \dot{\psi}$$

de tal modo que son dos grados de libertad. El lagrangiano puede escribirse como

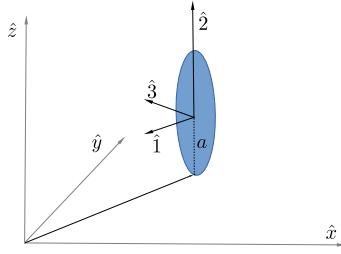
$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_2^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \dot{\psi}^2.$$

Como los vínculos dependen de la velocidad, resulta

$$\dot{y} = a \dot{\psi} \cos(\psi) \sin(\phi) = a \sin(\phi) \dot{\psi}$$

No entiendo/recuerdo lo que quise decir con la expresión bajar los ejes. Calculo que se relaciona con la proyección de los ejes 123 en xyz. Confirmarlo.





**Figura 12.3** Moneda que rueda libremente por un plano.

$$\dot{x} = a\dot{\psi} \cos(\psi) \cos(\phi) = a \cos(\phi) \dot{\psi}$$

de tal manera que

$$\dot{y} - a \sin(\phi) \dot{\psi} = 0 \quad \dot{x} - a \cos(\phi) \dot{\psi} = 0$$

y luego esto equivale a

$$\lambda_1(dy - a \sin(\phi)d\psi) = 0 \quad \lambda_2(dx - a \cos(\phi)d\psi) = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_i \nabla_i f \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Podemos escribir

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \quad m\ddot{x} = ma \frac{d}{dt}(\cos(\phi)\dot{\psi})$$

$$m\ddot{x} = ma(-\sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\psi} + \cos(\phi)\ddot{\psi})$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2$$

$$I_2\ddot{\phi} = 0 \quad I_3\ddot{\psi} = -\lambda_2 a \sin(\phi) - \lambda_1 a \cos(\phi)$$

$$\hat{\mathbf{1}} = \cos(\psi)[\sin(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\phi)\hat{\mathbf{x}}]$$

## Referencias