

## Capítulo 1

---

# Método de separación de variables

## 1.1 Separación de variables

Separamos los problemas en regiones donde vale  $\nabla^2\phi = 0$  entonces las fronteras tendrán la  $\rho(\mathbf{x}')$  en general en forma de  $\sigma, \lambda$ .

Para coordenadas cartesianas intentaremos resolver  $\nabla^2\phi = 0$ , es decir

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

pidiendo

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

de manera que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \quad -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

cada término es una constante. La solución general es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} e^{\pm i\alpha_m x} e^{\pm i\beta_n y} e^{\pm i\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z}$$

donde habrá que adaptar según las condiciones de contorno. Se da que  $A_{m,n}$  es una constante general y hay condiciones periódicas en  $x, y$

$$Ae^{\pm i\alpha x} = A_{\alpha} \cos(\alpha x) + B_{\alpha} \sin(\alpha x)$$

corresponde a condiciones de potencial periódicas, cuando necesito dos ceros por ejemplo (ver ilustración lateral –que falta–)

$$Ae^{\pm\gamma z} = A_\gamma \cosh(\gamma z) + B_\gamma \sinh(\gamma z)$$

corresponde a atravesar densidades de carga.

Para coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

proponiéndose la separación

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)Q(\varphi)$$

siendo

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)Q(\varphi)$$

un armónico esférico. Tenemos un oscilador armónico en  $\varphi$ ,

$$Q = e^{\pm i\alpha\varphi}$$

si usamos  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  de modo que  $\alpha \in \mathbb{Z}$  y entonces  $\alpha = m$ , con simetría azimutal es  $m = 0$  (rotación en  $\varphi$ ),

$$Q = G\varphi + H \quad G, H \text{ ctes.}$$

Para las otras funciones será

$$R(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}$$

$$\Theta(\theta) = C_\ell P_\ell^m(\cos(\theta)) + D_\ell Q_\ell^m(\cos(\theta))$$

siendo  $P_\ell^m$  polinomio de Legendre, que verifica la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [x^2 - 1]^\ell$$

con  $P_\ell(\cos(\theta))$  polinomio de Legendre de primera especie, y  $Q_\ell(\cos(\theta))$  de segunda especie. Los  $\{P_\ell\}$  son un conjunto completo y ortogonal en  $-1 \leq x \leq 1$  o bien en  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Los  $\{Q_\ell^m(\cos(\theta))\}$  tienen problemas en  $\theta = 0, \theta = \pi$  (eje  $z$ ) de manera que si está el eje  $z$  no podemos usar  $Q_\ell^m$ ; en estos problemas sólo podemos usar  $P_\ell^m(\cos(\theta))$ .

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}] [C_\ell P_\ell^m + D_\ell Q_\ell^m] [E_m \cos(m\phi) + F_m \sin(m\phi)]$$

y en el caso particular  $m = 0$

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}] [C_{\ell} P_{\ell}^m + D_{\ell} Q_{\ell}^m] [G_0 \phi + H_0]$$

Las constantes  $A_{\ell}, B_{\ell}, C_{\ell}, D_{\ell}, E_m, F_m$  se ajustan con el  $\phi(r \rightarrow \infty), \phi(r \rightarrow 0), \phi(z = 1)$  y  $\phi(z = -1)$ .

Lo que permite esquivar el problema del punto singular en  $x \equiv \cos(\theta) = 1$  es

$$\beta^2 = \ell(\ell + 1) \quad -\ell < m < \ell \quad \alpha^2 = m^2$$

Recordemos las sumas de series

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} z^{\ell} \quad |z| < 1,$$

el polinomio asociado de Legendre

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} [1-x^2]^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} [x^2-1]^{\ell}$$

que cumple

$$P_{\ell}(1) = 1 \quad P_{\ell}(-1) = (-1)^{\ell} \quad \forall \ell$$

con

$$\int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx = \frac{2}{2\ell+1}$$

siendo la ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} P_{\ell'}^m(\cos(\theta)) P_{\ell}^m(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta = \delta_{\ell\ell'}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^m(x) P_{\ell}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

En esféricas las constantes de separación están asociadas

$$R(r) \text{ con } \ell \quad \Theta(\theta) \text{ con } \ell, m \quad Q(\phi) \text{ con } m$$

## 1.2 Detalles sobre solución de problemas de potencial

### 1.2.1 Armónicos esféricos

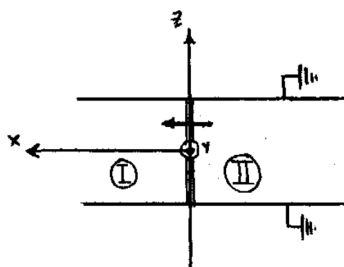


Figura 2.1

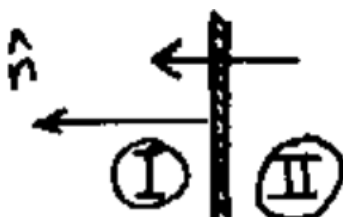


Figura 2.2

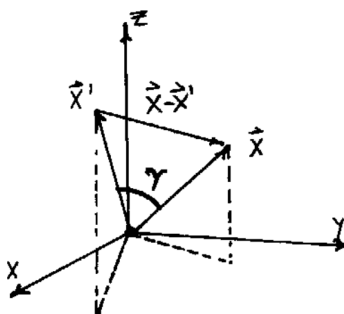


Figura 2.3

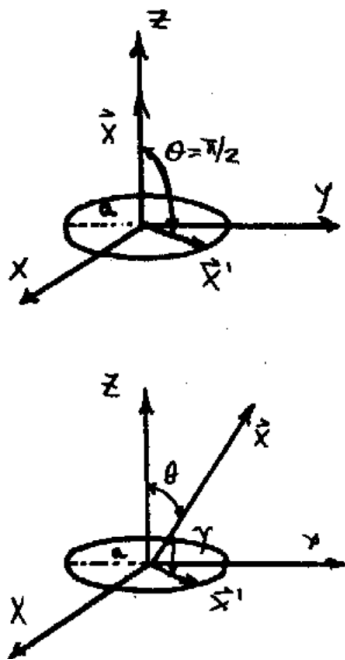


Figura 2.4

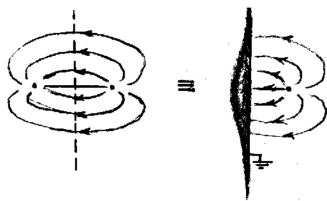


Figura 2.5

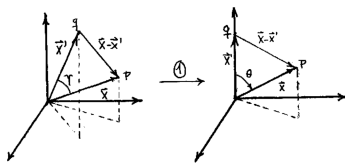


Figura 2.6

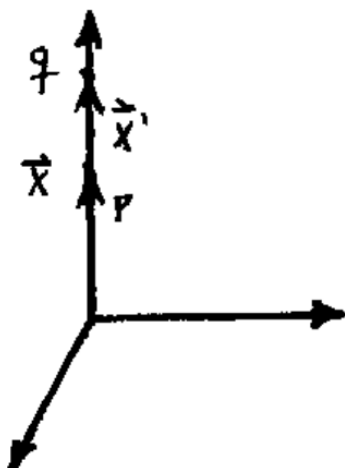


Figura 2.7