

Численные методы

Сборник задач

Под редакцией
У. Г. Пирумова

В. Ю. Гидаспов, И. Э. Иванов, Д. Л. Ревизников,
В. Ю. Стрельцов, В. Ф. Формалев

Численные методы

Сборник задач

Под редакцией У. Г. Пирумова

Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
«Математика. Прикладная математика»

ДРОФА



МОСКВА 2007

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.193я73
Ч-67

Авторы: В. Ю. Гидаспов, И. Э. Иванов, Д. Л. Ревизников,
В. Ю. Стрельцов, В. Ф. Формалев

Рецензенты: заслуженный деятель науки РФ, д-р техн. наук, проф.
Э. М. Карташов (зав. каф. высшей и прикладной математики МИТХТ);
д-р физ.-мат. наук, проф. В. М. Пасконов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

В оформлении обложки использована картина *Пута Мондриана*
«Composition with Large Blue Plane, Red, Black, Yellow and Gray»,
Dallas Museum of Art

Численные методы. Сборник задач : учеб. пособие для вузов /
Ч-67 В. Ю. Гидаспов, И. Э. Иванов, Д. Л. Ревизников и др. ; под ред.
У. Г. Пирумова. — М. : Дрофа, 2007. — 144 с. : ил.
ISBN 978-5-358-01310-0

Учебное пособие — одна из книг комплекта, в который также входит учебник
«Численные методы» У. Г. Пирумова. Оно содержит все традиционные разделы,
предусмотренные программой по данной дисциплине. Материал дается по единой
схеме, включающей в себя постановку задачи, описание алгоритма решения, де-
тально разобранные типовые примеры и тщательно подобранный комплекс задач
для самостоятельного решения.

Для студентов технических вузов, аспирантов и преподавателей, а также
инженеров, использующих в практической деятельности численные методы.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.193я73

Учебное издание

Гидаспов Владимир Юрьевич, Иванов Игорь Эдуардович,
Ревизников Дмитрий Леонидович, Стрельцов Вячеслав Юльевич,
Формалев Владимир Федорович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Сборник задач

Учебное пособие для вузов

Зав. редакцией *Б. В. Понкратов*. Ответственный редактор *Е. А. Вольмир*
Художественное оформление *Ю. В. Христинич*. Технический редактор *И. В. Грибова*
Компьютерная верстка *А. В. Маркин*. Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 31.05.07. Формат 70×108¹/₁₆. Бумага типографская. Гарнитура
«Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,6. Тираж 3000 экз. Заказ № .

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцеский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Суцеский вал, 49. Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»: 127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (495) 912-45-76; 140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,
ул. Октябрьской революции, 366/2. Тел.: (495) 741-59-76.

Интернет-магазин: <http://www.drofa.ru>

ISBN 978-5-358-01310-0

© ООО «Дрофа», 2007

Настоящее учебное пособие представляет собой сборник задач по основным разделам курса «Численные методы и алгоритмы». Излагаемый материал соответствует учебному пособию У. Г. Пирумова «Численные методы» [1].

Книга содержит пять основных разделов. Первый раздел посвящен численным методам линейной алгебры. Здесь рассмотрены базовые алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений и решения проблемы собственных значений и собственных векторов матриц. Во втором разделе изучаются численные методы решения нелинейных уравнений и систем. Третий раздел посвящен вопросам приближения функций, численному дифференцированию и интегрированию. В четвертом разделе рассматриваются численные алгоритмы решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и систем ОДУ, а в пятом — конечно-разностные алгоритмы решения задач для уравнений с частными производными.

Пособие предназначено для освоения читателями навыков применения численных методов при решении конкретных задач. С этой целью изложение материала построено по единой схеме, включающей постановку задачи, описание алгоритма решения, детально разобранные типовые примеры, демонстрирующие работу изучаемого алгоритма. В предлагаемых задачах требуется довести результат до конкретных численных значений. Во многих задачах в качестве ответа представлено точное (аналитическое) решение. Это позволит читателю самостоятельно провести анализ поведения погрешности численного решения в зависимости от параметров метода.

Материал, изложенный в книге, соответствует программам практических занятий по дисциплине «Численные методы и алгоритмы», преподаваемой в технических вузах. Для освоения представленного материала читатель должен обладать знанием основ линейной алгебры, математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Авторы рекомендуют читателям при решении задач активно использовать современные компьютерные технологии. Это касается как автоматизации расчетов на основе известных программных продуктов, так и разработки собственных программ. Применение компьютерных технологий сделает работу с книгой более эффективной и интересной.

Книга предназначена для студентов технических вузов, аспирантов и преподавателей, а также инженеров и научных работников, использующих в практической деятельности численные методы.

Среди численных методов алгебры существуют *прямые*, в которых решение получается после фиксированного числа операций, и *итерационные*, в которых результат достигается в процессе последовательных приближений.

В качестве прямых методов решения СЛАУ рассмотрим методы Гаусса и прогонки.

При решении методом Гаусса матрица СЛАУ с помощью равносильных преобразований превращается в верхнюю треугольную матрицу в результате прямого хода. В обратном ходе определяются неизвестные.

[illegible]

Ведущая строка \longrightarrow

x_1	x_2	x_3	\dots	x_n	b
a_{11}	a_{12}	a_{13}	\dots	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	\dots	a_{2n}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	\dots	a_{3n}	b_3
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	\dots	a_{nn}	b_n

Ведущий столбец \uparrow

$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right); \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right); \dots; \left(\frac{a_{n1}}{a_{11}} \right).$

$\xrightarrow{1\text{-й шаг}}$

На первом шаге алгоритма Гаусса выберем диагональный элемент $a_{11} \neq 0$ (если он равен нулю, то первую строку переставляем с какой-либо нижележащей строкой) и объявляем его *ведущим*, а соответствующую строку и столбец, на пересечении которых он стоит, — *ведущими*. Обнулیم элементы a_{21}, \dots, a_{n1} ведущего столбца. Для этого сформируем числа

$(-a_{21}/a_{11}); (-a_{31}/a_{11}); \dots; (-a_{n1}/a_{11})$. Умножая ведущую строку на число $(-a_{21}/a_{11})$, складывая со второй и ставя результат на место второй строки, получим вместо элемента a_{21} нуль, а вместо элементов a_{2j} , $j = 2, \dots, n$, b_2 — соответственно элементы $a_{2j}^1 = a_{2j} + a_{1j}(-a_{21}/a_{11})$, $b_2^1 = b_2 + b_1(-a_{21}/a_{11})$ и т. д. Умножая ведущую строку на число $(-a_{n1}/a_{11})$, складывая с n -й строкой и ставя результат на место n -й строки, получим вместо элемента a_{n1} нуль, а остальные элементы этой строки будут иметь вид $a_{nj}^1 = a_{nj} + a_{1j} \times (-a_{n1}/a_{11})$, $b_n^1 = b_n + b_1(-a_{n1}/a_{11})$. Сохраняя ведущую строку неизменной, получим в результате первого шага алгоритма Гаусса следующую матрицу:

$$\begin{array}{c}
 \text{Ведущая} \\ \text{строка} \longrightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & b \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 \hline
 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\
 \hline
 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & \dots & a_{3n}^1 & b_3^1 \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & \dots & a_{nn}^1 & b_n^1
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left(-\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}; \dots; \left(\frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1} \right) \right) \\
 \xrightarrow{2\text{-й шаг}}
 \end{array}$$

\uparrow
 Ведущий
столбец

На втором шаге алгоритма Гаусса в качестве ведущего элемента выбирается элемент $a_{22}^1 \neq 0$ (если он равен нулю, то вторую строку взаимно меняем на нижележащую строку). Формируются следующие числа: $(-a_{32}^1/a_{22}^1); \dots; (-a_{n2}^1/a_{22}^1)$. Умножая ведущую строку на число $(-a_{32}^1/a_{22}^1)$ и складывая результат с третьей строкой, получим вместо элемента a_{32}^1 нуль, а вместо элементов a_{3j}^1 , $j = 3, 4, \dots, n$, b_3^1 — элементы $a_{3j}^2 = a_{3j}^1 + a_{2j}^1(-a_{32}^1/a_{22}^1)$, $b_3^2 = b_3^1 + b_2^1(-a_{32}^1/a_{22}^1)$ и т. д. Умножая ведущую строку на число $(-a_{n2}^1/a_{22}^1)$, складывая результат с n -й строкой и ставя полученную сумму на место n -й строки, получим вместо элемента a_{n2}^1 нуль, а вместо элементов a_{nj}^1 , b_n^1 — соответственно элементы $a_{nj}^2 = a_{nj}^1 + a_{2j}^1(-a_{n2}^1/a_{22}^1)$, $b_n^2 = b_n^1 + b_2^1(-a_{n2}^1/a_{22}^1)$, $j = 3, 4, \dots, n$. Сохраняя первую и вторую строки матрицы неизменными, получим в результате второго шага алгоритма Гаусса следующую матрицу:

$$\begin{array}{c}
 \text{Ведущая} \\ \text{строка} \longrightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & b \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 \hline
 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\
 \hline
 0 & 0 & a_{33}^2 & \dots & a_{3n}^2 & b_3^2 \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 0 & 0 & a_{n3}^2 & \dots & a_{nn}^2 & b_n^2
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{3\text{-й шаг}} \dots \xrightarrow{(n-1)\text{-й шаг}}
 \end{array}$$

\uparrow
 Ведущий
столбец

После $(n - 1)$ -го шага алгоритма Гаусса получаем следующую расширенную матрицу, содержащую верхнюю треугольную матрицу СЛАУ:

$$\left[\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & b \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \dots & a_{3n}^2 & b_3^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{array} \right].$$

Прямой ход алгоритма Гаусса завершен.

В обратном ходе алгоритма Гаусса из последнего уравнения сразу определяется x_n , из предпоследнего — x_{n-1} и т. д. Из первого уравнения определяется x_1 :

$$\begin{cases} a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1} & \Rightarrow x_n, \\ a_{n-1, n-1}^{n-2} x_{n-1} + a_{n-1, n}^{n-2} x_n = b_{n-1}^{n-2} & \Rightarrow x_{n-1}, \\ \dots & \dots \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 & \Rightarrow x_1. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если элементы какой-либо строки матрицы системы в результате преобразований стали равными нулю, а правая часть не равна нулю, то СЛАУ несовместна, поскольку не выполняются условия теоремы Кронекера — Капелли.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Если элементы какой-либо строки матрицы системы и правая часть в результате преобразований стали равными нулю, то СЛАУ совместна, но имеет бесконечное множество решений, получающееся с помощью метода Гаусса для СЛАУ порядка r , где r — ранг матрицы исходной СЛАУ.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

В результате прямого хода метода Гаусса можно вычислить определитель матрицы A исходной СЛАУ:

$$\det A = (-1)^p a_{11} \cdot a_{22}^1 \cdot a_{33}^2 \cdot \dots \cdot a_{nn}^{n-1}.$$

При этом с помощью множителя $(-1)^p$, где p — число перестановок строк в процессе прямого хода, учитываются соответствующие перемены знаков вследствие перестановок строк.

ЗАМЕЧАНИЕ 4

Метод Гаусса можно применить для обращения невырожденной ($\det A \neq 0$) матрицы.

Действительно, пусть требуется обратить невырожденную матрицу $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Тогда, обозначив $A^{-1} = X$, $X = [x_{ij}]$, можно написать матричное уравнение $AX = E$, где

$$E = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] —$$

единичная матрица, и на его основе записать цепочку СЛАУ

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

каждую из которых можно решить методом Гаусса. При этом, поскольку верхняя треугольная матрица для всех СЛАУ будет одной и той же, прямой ход метода Гаусса применяется лишь один раз. Строится следующая расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & & & & \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

В результате применения $(n-1)$ -го шага метода Гаусса получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & & & & \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_{21}^1 & b_{22}^1 & \dots & b_{2n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} & b_{n1}^{n-1} & b_{n2}^{n-1} & \dots & b_{nn}^{n-1} \end{array} \right).$$

При этом первый столбец $(x_{11} \ x_{21} \ \dots \ x_{n1})^T$ обратной матрицы определяется в обратном ходе метода Гаусса с правой частью b_1 , второй столбец $(x_{12} \ x_{22} \ \dots \ x_{n2})^T$ — с правой частью b_2 и т. д. Столбец $(x_{1n} \ x_{2n} \ \dots \ x_{nn})^T$ определяется с правой частью b_n .

ПРИМЕР 1.1 Методом Гаусса решить СЛАУ

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 10 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 10 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 10 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{1\text{-й шаг}} (-2/10); (-2/10)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 10 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 9.8 & 0.8 & 10.6 \\ 0 & 1.8 & 9.8 & 11.6 \end{array} \right) \xrightarrow{2\text{-й шаг}} (-1.8/9.8) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 10 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 9.8 & 0.8 & 10.6 \\ 0 & 0 & 9.653 & 9.653 \end{array} \right).$$

Обратный ход:

$$9.653x_3 = 9.653 \Rightarrow x_3 = 1,$$

$$9.8x_2 + 0.8x_3 = 10.6 \Rightarrow x_2 = 1,$$

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

ПРИМЕР 1.2

Методом Гаусса вычислить определитель матрицы и обратить матрицу СЛАУ из примера 1.1.

РЕШЕНИЕ

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix};$$

$\det A \approx 10 \cdot 9.8 \cdot 9.65 = 945.994$ (точное значение — 946).

Прямой ход:

$$\begin{array}{ccc} x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1-\text{й шаг}} (-2/10); (-2/10)$$

$$\begin{array}{ccc} x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9.8 & 0.8 & -0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 1.8 & 9.8 & -0.2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2-\text{й шаг}} (-1,8/9,8)$$

$$\begin{array}{ccc} x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9.8 & 0.8 & -0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9.653 & -0.163 & -0.184 & 1 \end{array} \right).$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} 9.653x_{31} = -0.163, \\ 9.8x_{21} + 0.8x_{31} = -0.2, \\ 10x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 9.653x_{32} = -0.814, \\ 9.8x_{22} + 0.8x_{32} = 1, \\ 10x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9.653x_{33} = 1, \\ 9.8x_{23} + 0.8x_{33} = 0, \\ 10x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.104 & -0.0085 & -0.0095 \\ -0.019 & 0.104 & -0.0085 \\ -0.0169 & -0.019 & 0.104 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.104 & -0.0085 & -0.0095 \\ -0.019 & 0.104 & -0.0085 \\ -0.0169 & -0.019 & 0.104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.004 & 0 & 0.0005 \\ 0.001 & 1.004 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 1.004 \end{pmatrix},$$

т. е. с точностью до ошибок округления получена единичная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 5

Компьютерная реализация метода Гаусса часто осуществляется с использованием *LU-разложения матриц*.

LU-разложение матрицы A представляет собой разложение матрицы A в произведение нижней и верхней треугольных матриц, т. е.

$$A = LU,$$

где L — нижняя треугольная матрица (матрица, у которой все элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю, $l_{ij} = 0$ при $i < j$), U — верхняя треугольная матрица (матрица, у которой все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, $u_{ij} = 0$ при $i > j$).

LU-разложение может быть построено с использованием описанного выше метода Гаусса. Рассмотрим k -й шаг метода Гаусса, на котором осуществляется присваивание нулевых значений (обнуление) поддиагональным элементам k -го столбца матрицы $A^{(k-1)}$. Как было описано, с этой целью используется следующая операция:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \mu_i^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}, \quad \mu_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n, \quad j = k, \dots, n.$$

В терминах матричных операций такая операция эквивалентна умножению $A^{(k)} = M_k A^{(k-1)}$, где элементы матрицы M_k определяются следующим образом:

$$m_{ij}^k = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \quad j \neq k, \\ -\mu_{k+1}^{(k)}, & i \neq j, \quad j = k, \end{cases}$$

т. е. матрица M_k имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_{k+1}^{(k)} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\mu_n^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выражение для обратной операции запишется в виде $A^{(k-1)} = M_k^{-1} A^{(k)}$, здесь

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{k+1}^{(k)} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu_n^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате прямого хода метода Гаусса получим $A^{(n-1)} = U$,

$$A = A^{(0)} = M_1^{-1} A^{(1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} A^{(2)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A^{(n-1)},$$

где $A^{(n-1)} = U$ — верхняя треугольная матрица, а

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$$

— нижняя треугольная матрица, имеющая вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mu_{k+1} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n^{(1)} & \mu_n^{(2)} & \mu_n^{(k)} & \mu_n^{(k+1)} & \mu_n^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получено искомое разложение $A = LU$.

В частности, для рассмотренного выше примера 1.1 LU -разложение матрицы A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.18 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 9.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 9.65 \end{pmatrix} = LU.$$

В дальнейшем LU -разложение может быть эффективно использовано при решении систем линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$. Действительно, подставляя LU -разложение в СЛАУ, получим $LUx = b$, или $Ux = L^{-1}b$. Далее процесс решения СЛАУ сводится к двум простым этапам.

На первом этапе решается СЛАУ $Lz = b$. Поскольку матрица системы — нижняя треугольная, решение можно записать в явном виде:

$$z_1 = b_1, z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}z_j, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

На втором этапе решается СЛАУ $Ux = z$ с верхней треугольной матрицей. Здесь, как и на предыдущем этапе, решение представляется в явном виде:

$$x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}, x_i = \frac{1}{u_{ii}} (z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j), \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Отметим, что второй этап эквивалентен обратному ходу метода Гаусса, тогда как первый соответствует преобразованию правой части СЛАУ в процессе прямого хода.

ЗАМЕЧАНИЕ 6

В программных продуктах для научных расчетов общепринятой считается реализация метода Гаусса с помощью LU -разложения с выбором ведущего элемента. Выбор ведущего (главного) элемента необходим, чтобы избежать деления на малые или нулевые величины при обнулении поддиагональных элементов. Строго говоря, в этой модификации метода LU -разложение выполняется над матрицей PA , где P — матрица перестановок.

Пусть на k -м шаге метода известна матрица $A^{(k-1)}$

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{k-1} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3k-1} & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} & \dots & a_{k-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $A^{(k-1)}$ производится выбор главного элемента a_{kk} . Главным элементом будем считать максимальный по абсолютному значению элемент из подмножества элементов k -го столбца. Пусть $a_{mk}^{(k-1)} = \max |a_{ik}^{(k-1)}|$, $i \geq k$, тогда матрицу перестановок $P^{(k)}$ получим перестановкой в единичной матрице строк m и k . Матрица $\hat{A}^{(k-1)}$ с выбранным главным элементом $\hat{a}_{kk}^{(k-1)} = a_{mk}^{(k-1)}$ будет равна $\hat{A}^{(k-1)} = P^{(k-1)} A^{(k-1)}$.

Далее будем производить замещение поддиагональных элементов k -го столбца матрицы $\hat{A}^{(k-1)}$ согласно следующим правилам:

$$a_{ij}^{(k)} = \hat{a}_{ij}^{(k-1)} - \mu_i^{(k)} \hat{a}_{kj}^{(k-1)}, \quad \mu_i^{(k)} = \frac{\hat{a}_{ik}^{(k-1)}}{\hat{a}_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n, j = k, \dots, n.$$

Это выражение эквивалентно произведению матриц

$$A^{(k)} = M_k \hat{A}^{(k-1)} = M_k P^{(k)} A^{(k-1)},$$

где

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_{k+1}^{(k)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\mu_n^{(k)} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нижнетреугольная матрица на k -м шаге метода определяется выражением

$$L^{(k)} = P^{(k)} L^{(k-1)} P^{(k)} M_k^{-1}.$$

На первом шаге $L^{(1)} = M_1^{-1}$.

Алгоритм LU -разложения завершается после $(n-1)$ -го шага:

$$L = L^{(n-1)}, U = A^{(n-1)}, P = P^{(n-2)} \times \dots \times P^{(1)}.$$

Окончательно LU -разложение имеет вид:

$$PA = LU.$$

Отметим, что $\det P = (-1)^p$. Этим объясняется наличие множителя $(-1)^p$ в формуле вычисления определителя.

Решение СЛАУ вида $Ax = b$ осуществляется в два этапа. На первом этапе решается СЛАУ с нижнетреугольной матрицей $Lz = Pb$. На втором этапе решается СЛАУ с верхнетреугольной матрицей $Ux = z$.

1.1.2. Метод прогонки

Метод прогонки является частным случаем метода Гаусса. Он применяется для решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Такие системы часто возникают при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных второго порядка. Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 & = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 & = d_2, \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 & = d_3, \\ \dots & \dots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n & = d_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n & = d_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

при этом будем полагать, что

$$a_1 = 0,$$

$$c_n = 0.$$

Решение (1.1) будем искать в виде

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

где P_i, Q_i — прогоночные коэффициенты, подлежащие определению. Для этого выразим x_1 из первого уравнения системы (1.1) через x_2 и получим

$$x_1 = \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} = P_1 x_2 + Q_1, \quad (1.3)$$

откуда следует

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Из второго уравнения системы (1.1) с помощью (1.3) выразим x_2 через x_3 , получим

$$x_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 P_1} x_3 + \frac{d_2 - a_2 Q_1}{b_2 + a_2 P_1} = P_2 x_3 + Q_2,$$

откуда следует

$$P_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 P_1}, \quad Q_2 = \frac{d_2 - a_2 Q_1}{b_2 + a_2 P_1}.$$

Продолжая этот процесс, получим из i -го уравнения системы (1.1)

$$x_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}},$$

следовательно,

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}}.$$

Из последнего уравнения системы (1.1) имеем

$$x_n = \frac{-c_n}{b_n + a_n P_{n-1}} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{b_n + a_n P_{n-1}} = 0 \cdot x_{n+1} + Q_n,$$

т. е., так как $c_n = 0$,

$$P_n = 0, \quad Q_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{b_n + a_n P_{n-1}} = x_n.$$

Таким образом, прямой ход определения прогоночных коэффициентов P_i , Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, завершен. В результате эти коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (1.4)$$

$$P_1 = \frac{-c_i}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}, \quad (1.5)$$

$$P_n = 0, \quad Q_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{b_n + a_n P_{n-1}}. \quad (1.6)$$

Обратный ход метода прогонки осуществляется в соответствии с выражением (1.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = P_n x_{n+1} + Q_n = \mathbf{0} \cdot x_{n+1} + Q_n = Q_n, \\ x_{n-1} = P_{n-1} x_n + Q_{n-1}, \\ x_{n-2} = P_{n-2} x_{n-1} + Q_{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 = P_1 x_2 + Q_1. \end{array} \right. \quad \textbf{[1.7]}$$

Формулы (1.4)—(1.7) являются формулами *правой прогонки*. Аналогично, начиная с последнего уравнения СЛАУ (1.1), можно вывести формулы *левой прогонки*.

Общее число операций в методе прогонки равно $8n + 1$, т. е. пропорционально числу уравнений. Такие методы решения СЛАУ называют *экономичными*. Для сравнения число операций в методе Гаусса пропорционально n^3 [1].

Для устойчивости метода прогонки (1.4)—(1.7) достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} a_i &\neq 0, c_i \neq 0, & i &= 2, 3, \dots, n-1, \\ |b_i| &\geq |a_i| + |c_i|, & i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.8)$$

причем строгое неравенство имеет место хотя бы при одном i . Здесь устойчивость понимается в смысле ненакопления погрешности решения в ходе вычислительного процесса при малых погрешностях входных данных (правых частей и элементов матрицы СЛАУ).

ПРИМЕР 1.3 Методом прогонки решить СЛАУ

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 6, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 8, \\ -x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ Имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{-c_1}{b_1} = \frac{2}{8} = 0.25; & Q_1 &= \frac{d_1}{b_1} = 0.75; \\ P_2 &= \frac{-c_2}{b_2 + a_2 P_1} = \frac{2}{6 - 1 \cdot 0.25} = 0.3478; & Q_2 &= \frac{d_2 - a_2 Q_1}{b_2 + a_2 P_1} = \frac{(3 + 1 \cdot 0.75)}{5.75} = \\ & & &= 0.6522; \\ P_3 &= \frac{-c_3}{b_3 + a_3 P_2} = 0.374; & Q_3 &= \frac{d_3 - a_3 Q_2}{b_3 + a_3 P_2} = 0.626; \\ P_4 &= 0 \ (c_4 = 0); & Q_4 &= \frac{d_4 - a_4 Q_3}{b_4 + a_4 P_3} = 1.0; \\ x_4 &= P_4 x_5 + Q_4 = 1.0; & x_3 &= P_3 x_4 + Q_3 = 1.0; & x_2 &= P_2 x_3 + Q_2 = 1.0; \\ x_1 &= P_1 x_2 + Q_1 = 1.0. \end{aligned}$$

1.1.3. Нормы векторов и матриц

Для исследования сходимости численных методов решения задач линейной алгебры вводятся понятия нормы векторов и матриц.

Нормой вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (обозначают $\|\mathbf{x}\|$) в n -мерном вещественном пространстве векторов $\mathbf{x} \in R^n$ называют неотрицательное число, вычисляемое с помощью компонент вектора и обладающее следующими свойствами:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ $\|\mathbf{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда \mathbf{x} — нулевой вектор; для нулевого вектора введем обозначение $\mathbf{0}$;
- $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ для любых действительных чисел α ;
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Нормой матрицы $A_{n \times n}$ (обозначается $\|A\|$) с вещественными элементами в пространстве матриц называют неотрицательное число, вычисляемое с помощью элементов матрицы и обладающее следующими свойствами:

- $\square \|A\| > 0$ $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица; для нулевой матрицы введем обозначение Θ ;
- $\square \|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ для любых действительных чисел α ;
- $\square \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для всех $n \times n$ матриц A и B рассматриваемого пространства;
- $\square \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всех $n \times n$ матриц A и соответствующих матриц B .

Как видно из последнего свойства (если в качестве матрицы B использовать вектор x), норма матриц должна быть согласована с нормой векторов. Это согласование осуществляется связью

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \quad (1.9)$$

Наиболее употребительными являются следующие нормы векторов:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (1.10)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{(x, x)}. \quad (1.11)$$

$$\|x\|_c = \max_i |x_i|. \quad (1.12)$$

Наиболее распространенными согласованными с ними с помощью связи (1.9) нормами матриц будут соответственно:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (1.13)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}, \quad (1.14)$$

$$\|A\|_c = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.15)$$

Отметим, что норма (1.15) согласована со всеми приведенными выше нормами векторов.

Для исследования погрешностей, возникающих при решении СЛАУ, вводят понятие *числа обусловленности матрицы*:

$$\chi(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Число обусловленности характеризует степень зависимости относительной погрешности решения СЛАУ от погрешности входных данных (правые части, элементы матрицы). Можно показать, что для ненулевых векторов x справедливы следующие неравенства:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}.$$

Таким образом, чем больше число обусловленности, тем сильнее влияние погрешности входных данных на конечный результат. Матрица считается плохо обусловленной, если $\chi(A) \gg 1$.

Если в качестве нормы матрицы принять ее спектральный радиус $\max_i |\lambda_i|$ (см. раздел 1.2), то

$$\chi(A) = \max_i |\lambda_i| \frac{1}{\min_i |\lambda_i|} \geq 1,$$

поскольку спектральный радиус обратной матрицы A^{-1} равен обратной величине модуля минимального собственного значения исходной матрицы.

ПРИМЕР 1.4

Для матрицы A и вектора b вычислить различные нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_c$. Проверить выполнение условия согласованности норм $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для различных комбинаций норм. Вычислить число обусловленности матрицы A , если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

Вычислим соответствующие нормы:

$$\|b\|_1 = |3| + |-4| = 7, \quad \|b\|_2 = (3^2 + (-4)^2)^{1/2} = 5, \quad \|b\|_c = \max(|3|, |-4|) = 4;$$

$$\|A\|_1 = \max(|-1| + |3|, |2| + |-5|) = 7,$$

$$\|A\|_2 = ((-1)^2 + 3^2 + 2^2 + (-5)^2)^{1/2} = \sqrt{39};$$

$$\|A\|_c = \max(|-1| + |2|, |3| + |-5|) = 8.$$

Для проверки условия согласованности вычислим различные нормы вектора

$$c = Ab = \begin{pmatrix} -11 \\ 29 \end{pmatrix};$$

$$\|c\|_1 = |-11| + |29| = 40, \quad \|c\|_2 = ((-11)^2 + 29^2)^{1/2} = \sqrt{962},$$

$$\|c\|_c = \max(|-11|, |29|) = 29.$$

Легко убедиться в том, что условие согласованности выполняется для следующих комбинаций норм:

$$\|c\|_1 = 40 \leq \|A\|_1 \|b\|_1 = 7 \cdot 7 = 49, \quad \|c\|_2 = \sqrt{962} \leq \|A\|_2 \|b\|_2 = \sqrt{39} \cdot 5 = \sqrt{975},$$

$$\|c\|_c = 29 \leq \|A\|_c \|b\|_c = 8 \cdot 4 = 32.$$

Кроме того, известно, что матричная норма $\|A\|_c$ согласована со всеми введенными выше нормами векторов. В данном примере это подтверждается выполнением неравенств

$$\|c\|_1 = 40 \leq \|A\|_c \|b\|_1 = 8 \cdot 7 = 56, \quad \|c\|_2 = \sqrt{962} \leq \|A\|_c \|b\|_2 = 8 \cdot 5 = 40.$$

В то же время использование ряда других комбинаций норм матрицы и вектора приводит в данном случае к нарушению условия согласованности

$$\|c\|_c = 29 > \|A\|_1 \|b\|_c = 7 \cdot 4 = 28, \quad \|c\|_c = 29 > \|A\|_2 \|b\|_c = \sqrt{39} \cdot 4.$$

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует важность использования согласованных норм матрицы и вектора.

Вычислим число обусловленности матрицы A , взяв в качестве нормы матрицы $\|\cdot\|_c$. Для этого найдем сначала обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее норму

$$\|A^{-1}\|_c = \max (|5| + |2|, |3| + |1|) = 7.$$

В результате получим

$$\chi(A) = \|A\|_c \|A^{-1}\|_c = 8 \cdot 7 = 56.$$

1.1.4. Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простых итераций. При большом числе уравнений прямые методы решения СЛАУ (за исключением метода прогонки) становятся труднореализуемыми на ЭВМ, прежде всего из-за сложности хранения и обработки матриц большой размерности. В то же время характерной особенностью ряда часто встречающихся в прикладных задачах СЛАУ является разреженность матриц. Число ненулевых элементов таких матриц мало по сравнению с их размерностью. Для решения СЛАУ с разреженными матрицами предпочтительнее использовать итерационные методы.

Методы последовательных приближений, в которых при вычислении последующего приближения используются предыдущие, уже известные приближенные решения, называются *итерационными*.

Рассмотрим СЛАУ с невырожденной матрицей ($\det A \neq 0$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad [1.16]$$

Приведем СЛАУ к эквивалентному виду

[illegible]

или, в векторно-матричной форме,

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta,$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Такое приведение может быть выполнено различными способами. Одним из наиболее распространенных является следующий.

Разрешим систему (1.16) относительно неизвестных при ненулевых диагональных элементах $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$; если какой-либо коэффициент на главной диагонали равен нулю, достаточно соответствующее уравнение

поменять местами с любым другим уравнением. Получим следующие выражения для компонентов вектора β и матрицы α эквивалентной системы:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{b_i}{a_{ii}}; \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j; \\ \alpha_{ii} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

При таком способе приведения исходной СЛАУ к эквивалентному виду метод простых итераций носит название *метода Якоби*.

В качестве нулевого приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ вектора неизвестных примем вектор правых частей $\mathbf{x}^{(0)} = \beta$ или $(x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)})^T = (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n)^T$. Тогда *метод простых итераций* примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} = \beta, \\ \mathbf{x}^{(1)} = \alpha \mathbf{x}^{(0)} + \beta, \\ \mathbf{x}^{(2)} = \alpha \mathbf{x}^{(1)} + \beta, \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{x}^{(k)} = \alpha \mathbf{x}^{(k-1)} + \beta. \end{cases} \quad (1.19)$$

Из (1.19) видно преимущество итерационных методов по сравнению, например, с рассмотренным методом Гаусса. В вычислительном процессе участвуют только произведения матрицы на вектор. Это позволяет работать только с ненулевыми элементами матрицы, что значительно упрощает процесс хранения и обработки матриц.

Имеет место следующее *достаточное* условие сходимости метода простых итераций.

Метод простых итераций (1.19) сходится к единственному решению СЛАУ (1.17) (а следовательно, и к решению исходной СЛАУ (1.16)) при любом начальном приближении $\mathbf{x}^{(0)}$, если какая-либо норма матрицы α эквивалентной системы меньше единицы $\|\alpha\| < 1$.

Если используется метод Якоби (выражения (1.18) для эквивалентной СЛАУ), то достаточным условием сходимости является *диагональное преобладание матрицы A* , т. е. $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \forall i$ (для каждой строки матрицы A модули элементов, стоящих на главной диагонали, больше суммы модулей недиагональных элементов). Очевидно, что в этом случае $\|\alpha\|_c$ меньше единицы и, следовательно, итерационный процесс (1.19) сходится.

Приведем также *необходимое и достаточное* условие сходимости метода простых итераций.

Для сходимости итерационного процесса (1.19) необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы α эквивалентной системы лежал внутри круга с радиусом, равным единице.

При выполнении достаточного условия сходимости оценка погрешности решения на k -й итерации дается выражением

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon^{(k)} = \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|, \quad (1.20)$$

где \mathbf{x}^* — точное решение СЛАУ. Процесс итераций останавливается при выполнении условия $\varepsilon^{(k)} \leq \varepsilon$, где ε — задаваемая вычислителем погрешность.

Принимая во внимание, что из (1.20) следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

можно получить априорную оценку необходимого для достижения заданной точности числа итераций. При использовании в качестве начального приближения вектора β такая оценка определится неравенством

$$\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\| \leq \varepsilon,$$

из которого получаем априорную оценку числа итераций k при $\|\alpha\| < 1$:

$$k + 1 \geq \frac{\lg \varepsilon - \lg \|\beta\| + \lg (\|\alpha\|)}{\lg \|\alpha\|}.$$

Следует подчеркнуть, что это неравенство дает завышенное число итераций k , поэтому редко используется на практике.

ЗАМЕЧАНИЕ

Поскольку $\|\alpha\| < 1$ является только достаточным (не необходимым) условием сходимости метода простых итераций, итерационный процесс может сходиться и в случае, если оно не выполнено. Тогда критерием окончания итераций может служить неравенство $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$. Отметим, однако, что при этом не гарантируется достижение заданной точности.

ПРИМЕР 1.5

Методом простых итераций с погрешностью $\varepsilon = 0.01$ решить СЛАУ

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ

Приведем СЛАУ к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \end{cases}$$

или $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = (1.2 \quad 1.3 \quad 1.4)^T.$$

Здесь $\|\alpha\|_c = 0.4 < 1$, следовательно, достаточное условие сходимости метода простых итераций выполнено.

Итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta;$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \alpha\beta + \beta = (0.93 \quad 0.92 \quad 0.9)^T; \quad \varepsilon^{(1)} = 0.333 > \varepsilon;$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \alpha\mathbf{x}^{(1)} + \beta = (1.018 \quad 1.024 \quad 1.03)^T; \quad \varepsilon^{(2)} = 0.0867 > \varepsilon;$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \alpha\mathbf{x}^{(2)} + \beta = (0.9946 \quad 0.9934 \quad 0.9916)^T; \quad \varepsilon^{(3)} = 0.0256 > \varepsilon;$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \alpha\mathbf{x}^{(3)} + \beta = (1.0015 \quad 1.00192 \quad 1.0024)^T; \quad \varepsilon^{(4)} = 0.0072 > \varepsilon.$$

простых итераций ($\|\alpha\| < 1$ или, если используется эквивалентная СЛАУ в форме (1.18), — диагональное преобладание матрицы A). При выполнении этих условий для оценки погрешности на k -й итерации можно использовать выражение

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{\|C\|}{1 - \|\alpha\|} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|.$$

Отметим, что, как и метод простых итераций, метод Зейделя может сходиться и при нарушении условия $\|\alpha\| < 1$. В этом случае $\varepsilon^{(k)} = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|$.

ПРИМЕР 1.6

Методом Зейделя решить СЛАУ из примера 1.5 с той же погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

РЕШЕНИЕ

Приведение СЛАУ к эквивалентному виду аналогично примеру (1.5). Диагональное преобладание элементов исходной матрицы СЛАУ гарантирует сходимость метода Зейделя.

Итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (1.2 \ 1.3 \ 1.4)^T;$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.1 \cdot 1.3 - 0.1 \cdot 1.4 + 1.2 = 0.93; \\ x_2^{(1)} = -0.2 \cdot 0.93 - 0.1 \cdot 1.4 + 1.3 = 0.974; \\ x_3^{(1)} = -0.2 \cdot 0.93 - 0.2 \cdot 0.974 + 1.4 = 1.0192, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0.1 \cdot 0.974 - 0.1 \cdot 1.0192 + 1.2 = 1.0007, \\ x_2^{(2)} = -0.2 \cdot 1.0007 - 0.1 \cdot 1.0192 + 1.3 = 0.998, \\ x_3^{(2)} = -0.2 \cdot 1.0007 - 0.2 \cdot 0.998 + 1.4 = 1.0003. \end{cases}$$

Таким образом, уже на второй итерации погрешность $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$, т. е. метод Зейделя в данном случае сходится быстрее метода простых итераций.

1.2. Численные методы решения задач на собственные значения и собственные векторы матриц

1.2.1. Основные определения и спектральные свойства матриц

Рассмотрим матрицу $A_{n \times n}$ в n -мерном вещественном пространстве R^n векторов $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$.

Собственным вектором \mathbf{x} матрицы A называется ненулевой вектор ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), удовлетворяющий равенству

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{1.21}$$

где λ — собственное значение матрицы A , соответствующее рассматриваемому собственному вектору.

Собственные значения матрицы A с действительными элементами могут быть вещественными различными, вещественными кратными, комплексными попарно сопряженными, комплексными кратными.

Классический способ нахождения собственных значений и собственных векторов заключается в следующем. Для однородной СЛАУ, полученной из (1.21),

$$(A - \lambda E)x = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T,$$

ненулевые решения $x \neq \mathfrak{g}$ (а именно такие решения и находятся) имеют место при

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{1.22}$$

причем уравнение (1.22) называют *характеристическим уравнением*, а выражение в левой части — *характеристическим многочленом*. Сначала каким-либо способом находят решения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ алгебраического уравнения (1.22) n -й степени (предположим, что они вещественны и различны). Затем, решая однородную СЛАУ (1.22) для различных собственных значений $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$,

$$(A - \lambda_j E)x^j = \mathfrak{g},$$

получают линейно независимые собственные векторы x^j , соответствующие собственным значениям λ_j .

Попарно различным собственным значениям соответствуют линейно независимые собственные векторы; k -кратному корню характеристического уравнения (1.22), построенного для произвольной матрицы $A_{n \times n}$, соответствуют не более k линейно независимых собственных векторов. Если количество линейно независимых собственных векторов матрицы $A_{n \times n}$ совпадает с размерностью пространства R^n , то их можно принять за новый базис, в котором матрица $A_{n \times n}$ примет диагональный вид

$$\Lambda = U^{-1} \cdot A \cdot U. \tag{1.23}$$

Здесь на главной диагонали находятся собственные значения, а столбцы матрицы преобразования U являются собственными векторами матрицы A . Матрицы Λ и A , удовлетворяющие равенству (1.23), называются *подобными*. Собственные значения подобных матриц Λ и A совпадают.

Симметрическая матрица $A, A = A^T$ имеет полный спектр $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$, *вещественных* собственных значений; *положительно определенная симметрическая матрица* $A = A^T, (Ax, x) > 0$, имеет полный спектр *вещественных положительных* собственных значений; k -кратному корню характеристического уравнения (1.22) *симметрической* матрицы соответствуют ровно k линейно независимых собственных векторов.

Симметрическая матрица имеет ровно n ортогональных собственных векторов. Приняв их за новый базис (т. е. построив матрицу преобразования U , в качестве столбцов которой взяты координатные столбцы собственных векторов), можно преобразовать симметрическую матрицу A к *диагональному* виду с помощью преобразования (1.23). Для симметрической матрицы A матрица преобразования U в (1.23) является ортогональной, $U^{-1} = U^T$, следовательно, преобразование (1.23) имеет вид

$$\Lambda = U^T \cdot A \cdot U. \tag{1.24}$$

1.2.2. Метод вращений Якоби численного решения задач на собственные значения и собственные векторы матриц

Метод вращений Якоби применим только для симметрических матриц $A_{n \times n}$ ($A = A^T$) и решает полную проблему собственных значений и собственных векторов таких матриц. Он основан на отыскании с помощью итерационных процедур матрицы U в преобразовании подобия $\Lambda = U^{-1}AU$, а поскольку для симметрических матриц A матрица преобразования подобия U является ортогональной $U^{-1} = U^T$, имеем $\Lambda = U^T A U$, здесь Λ — диагональная матрица с собственными значениями на главной диагонали

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть дана симметрическая матрица A . Требуется вычислить для нее с погрешностью ε все собственные значения и соответствующие им собственные векторы. Приведем алгоритм метода вращения. Пусть известна матрица $A^{(k)}$ на k -й итерации, при этом $k = 0$ для $A^{(0)} = A$.

■ Выбирается максимальный по модулю недиагональный элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы $A^{(k)}$, $|a_{ij}^{(k)}| = \max |a_{lm}^{(k)}|$, $l < m$.

■ Ставится задача найти ортогональную матрицу $U^{(k)}$ такую, чтобы в результате преобразования подобия $A^{(k+1)} = U^{(k)T} A^{(k)} U^{(k)}$ произошло обнуление элемента $a_{ij}^{(k+1)}$ матрицы $A^{(k+1)}$. В качестве ортогональной матрицы выбирается матрица вращения, имеющая следующий вид:

$$U^k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \cos \varphi^{(k)} & \dots & -\sin \varphi^{(k)} & \dots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \dots & \sin \varphi^{(k)} & \dots & \cos \varphi^{(k)} & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}.$$

В матрице вращения на пересечении i -й строки и j -го столбца находится элемент $u_{ij}^{(k)} = -\sin \varphi^{(k)}$, где $\varphi^{(k)}$ — угол вращения, подлежащий определению. Симметрично относительно главной диагонали (j -я строка, i -й столбец) расположен элемент $u_{ji}^{(k)} = \sin \varphi^{(k)}$. Диагональные элементы $u_{ii}^{(k)}$ и $u_{jj}^{(k)}$ равны соответственно $u_{ii}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$, $u_{jj}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$; другие диагональные элементы $u_{mm}^{(k)} = 1$, $m = 1, 2, \dots, n$, $m \neq i$, $m \neq j$. Остальные элементы в матрице вращения $U^{(k)}$ равны нулю.

Угол вращения $\varphi^{(k)}$ определяется из условия $a_{ij}^{(k+1)} = 0$:

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}},$$

причем если $a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)}$, то $\varphi^{(k)} = \pi/4$.

■ Строится матрица $A^{(k+1)}$

$$A^{(k+1)} = U^{(k)T} A^{(k)} U^{(k)},$$

в которой элемент $a_{ij}^{(k+1)} \approx 0$.

В качестве критерия окончания итерационного процесса используется условие малости суммы квадратов внедиагональных элементов:

$$t(A^{(k+1)}) = \left(\sum_{l, m; l < m} (a_{lm}^{(k+1)})^2 \right)^{1/2}.$$

Если $t(A^{(k+1)}) > \varepsilon$, то итерационный процесс

$$A^{(k+1)} = U^{(k)T} A^{(k)} U^{(k)} = U^{(k)T} U^{(k-1)T} \dots U^{(0)T} A^{(0)} U^{(0)} U^{(1)} \dots U^{(k)}$$

продолжается. Если $t(A^{(k+1)}) < \varepsilon$, то итерационный процесс останавливается, и в качестве искомым собственным значениям принимаются $\lambda_1 \approx a_{11}^{(k+1)}, \lambda_2 \approx a_{22}^{(k+1)}, \dots, \lambda_n \approx a_{nn}^{(k+1)}$.

Координатными столбцами собственных векторов матрицы A в единичном базисе будут столбцы матрицы $U = U^{(0)T} A^{(0)} U^{(0)} U^{(1)} \dots U^{(k)}$, т. е.

$$(x^1)^T = (u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}), (x^2)^T = (u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2}),$$

$$(x^n)^T = (u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{nn}),$$

причем эти собственные векторы будут ортогональны между собой, т. е. $(x^l, x^m) \approx 0, l \neq m$.

ПРИМЕР 1.7

С погрешностью $\varepsilon = 0.3$ вычислить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \equiv A^{(0)}.$$

РЕШЕНИЕ

Используем приведенный алгоритм.

■ Выбираем максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы $A^{(0)}$, т. е. находим $a_{ij}^{(0)}$ такой, что $|a_{ij}^{(0)}| = \max |a_{lm}^{(0)}|, l < m$. Им является элемент $a_{23}^{(0)} = 3$.

■ Находим соответствующую этому элементу матрицу вращения:

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi^{(0)} & -\sin \varphi^{(0)} \\ 0 & \sin \varphi^{(0)} & \cos \varphi^{(0)} \end{bmatrix};$$

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \cdot 3}{5 - 6} = 0.7033; \quad \sin \varphi^{(0)} = -0.65; \quad \cos \varphi^{(0)} = 0.76;$$

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.76 & 0.65 \\ 0 & -0.65 & 0.76 \end{bmatrix}.$$

■ Вычисляем матрицу $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = U^{(0)T} A^{(0)} U^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0.87 & 2.06 \\ 0.87 & 2.46 & -0.03 \\ 2.06 & -0.03 & 8.54 \end{bmatrix}.$$

В полученной матрице с точностью до ошибок округления элемент $a_{23}^{(1)} = 0$. Так как

$$t(A^{(1)}) = \left(\sum_{l, m; l < m} (a_{lm}^{(1)})^2 \right)^{1/2} = (0.87^2 + 2.06^2 + (-0.03)^2)^{1/2} > \varepsilon,$$

итерационный процесс необходимо продолжить.

Переходим к следующей итерации ($k = 1$):

$$a_{13}^{(1)} = 2.06; \left(|a_{13}^{(1)}| = \max_{l, m; l < m} |a_{lm}^{(1)}| \right), l < m;$$

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(1)} & 0 & -\sin \varphi^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi^{(1)} & 0 & \cos \varphi^{(1)} \end{bmatrix};$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \cdot 2.06}{4 - 8.54} = -0.3693; \quad \sin \varphi^{(1)} = -0.361; \quad \cos \varphi^{(1)} = 0.933;$$

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.933 & 0 & 0.361 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.361 & 0 & 0.933 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)} = U^{(1)T} A^{(1)} U^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.19 & 0.819 & 0.005 \\ 0.819 & 2.46 & 0.28 \\ 0.005 & 0.28 & 9.38 \end{bmatrix};$$

$$t(A^{(2)}) = \left(\sum_{l, m; l < m} (a_{lm}^{(2)})^2 \right)^{1/2} = (0.819^2 + 0.28^2 + 0.005^2)^{1/2} > \varepsilon.$$

Переходим к следующей итерации ($k = 2$):

$$a_{12}^{(2)} = 0.819; \left(|a_{12}^{(2)}| = \max_{l, m; l < m} |a_{lm}^{(2)}| \right);$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \cdot 0.819}{3.19 - 2.46} = 0.5758; \quad \sin \varphi^{(2)} = 0.5445; \quad \cos \varphi^{(2)} = 0.8388.$$

$$U^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8388 & -0.5445 & 0 \\ 0.5445 & 0.8388 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A^{(3)} = U^{(2)T} A^{(2)} U^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.706 & 0.0003 & 0.1565 \\ 0.0003 & 1.929 & 0.232 \\ 0.1565 & 0.232 & 9.38 \end{bmatrix};$$

$$t(A^{(3)}) = (0.0003^2 + 0.1565^2 + 0.232^2)^{1/2} = 0.07839^{1/2} < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве искоемых собственных значений могут быть приняты диагональные элементы матрицы $A^{(3)}$:

$$\lambda_1 \approx 3.706; \quad \lambda_2 \approx 1.929; \quad \lambda_3 \approx 9.38.$$

Собственные векторы определяются из произведения

$$U^{(0)} U^{(1)} U^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.78 & -0.5064 & 0.361 \\ 0.2209 & 0.7625 & 0.6 \\ -0.58 & -0.398 & 0.7 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.78 \\ 0.2209 \\ -0.58 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} -0.5064 \\ 0.7625 \\ -0.398 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 0.361 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix}.$$

Полученные собственные векторы ортогональны в пределах заданной точности, т. е. $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = -0.00384$; $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3) = 0.0081$; $(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3) = -0.0039$.

1.2.3. Частичная проблема собственных значений и собственных векторов матрицы. Степенной метод

Рассмотренный метод вращения решает полную проблему собственных значений и собственных векторов матриц (симметрических) в том смысле, что определяются все собственные значения и собственные векторы.

Зачастую не нужно находить все собственные значения (спектр), а необходимо найти лишь максимальное по модулю из них (спектральный радиус). Существует степенной метод по определению спектрального радиуса матрицы, т. е. максимального собственного значения матрицы и соответствующего ему собственного вектора.

Пусть дана матрица A , и пусть ее собственные значения упорядочены по абсолютным величинам:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (1.25)$$

Тогда, выбрав некоторый вектор $y^{(0)}$, например вектор, компоненты которого равны единице $y^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$, можно для определения λ_1 построить следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= Ay^{(0)}, & \lambda_1^{(1)} &= \frac{y_j^{(1)}}{y_j^{(0)}}; \\ y^{(2)} &= Ay^{(1)}, & \lambda_1^{(2)} &= \frac{y_j^{(2)}}{y_j^{(1)}}; \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(k)} &= Ay^{(k-1)}, & \lambda_1^{(k)} &= \frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}}; \end{aligned} \quad (1.26)$$

где $y_j^{(k-1)}$, $y_j^{(k)}$ — соответствующие компоненты векторов $y^{(k-1)}$, $y^{(k)}$. При этом в качестве номера j может использоваться любое число из диапазона $j = 1, 2, \dots, n$.

В связи с тем, что вектор $y^{(k)}$ на k -й итерации может быть представлен в виде $y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = A^k y^{(0)}$, рассматриваемый итерационный процесс носит название *степенного метода*. При выполнении условий (1.25) итерационный процесс сходится к искомому собственному значению λ_1 и соответствующему собственному вектору, причем скорость сходимости определяется отношением $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ (чем оно меньше, тем выше скорость сходимости). В качестве критерия завершения вычислений используется условие $\varepsilon^{(k)} = |\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}| \leq \varepsilon$, где ε — задаваемая вычислителем погрешность расчета.

ПРИМЕР 1.8

Вычислить спектральный радиус матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

с погрешностью $\varepsilon = 0.1$.

РЕШЕНИЕ

В качестве начального приближения собственного вектора возьмем $y^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Реализуем итерационный процесс (1.26), полагая $j = 1$:

$$\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{y}^{(0)} = (8 \ 6 \ 6)^T,$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(0)}} = \frac{8}{1} = 8;$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{y}^{(1)} = (58 \ 38 \ 40)^T,$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(1)}} = \frac{58}{1} = 7.25;$$

$$\varepsilon^{(2)} = |\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}| = 0.75 > \varepsilon;$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = A\mathbf{y}^{(2)} = (480 \ 250 \ 274)^T,$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{y_1^{(3)}}{y_1^{(2)}} = \frac{480}{58} = 7.034;$$

$$\varepsilon^{(3)} = |\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}| = 0.216 > \varepsilon;$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = A\mathbf{y}^{(3)} = (2838 \ 1682 \ 1888)^T,$$

$$\lambda_1^{(4)} = \frac{y_1^{(4)}}{y_1^{(3)}} = \frac{2838}{408} = 6.9559;$$

$$\varepsilon^{(4)} = |\lambda_1^{(4)} - \lambda_1^{(3)}| = 0.078 > \varepsilon.$$

Таким образом, полученное на четвертой итерации значение $\lambda_1^{(4)} = 6.9559$ удовлетворяет заданной погрешности и может быть взято в качестве приближенного значения λ_1 . Искомое значение спектрального радиуса $\rho(A) = \max_i |\lambda_i| = |\lambda_1| = 6.9559$.

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует существенный недостаток алгоритма (1.26), связанный с возрастанием компонент итерированного вектора $\mathbf{y}^{(k)}$ в ходе итерационного процесса. Видно, что $|y_j^{(k)} / y_j^{(k-1)}| \approx |\lambda_1|$. Во избежание неограниченного возрастания (при $|\lambda_1| > 1$) или убывания (при $|\lambda_1| < 1$) компонент $\mathbf{y}^{(k)}$ по мере увеличения числа итераций k обычно при проведении компьютерных расчетов применяется степенной метод с нормировкой итерированного вектора. С этой целью алгоритм (1.26) модифицируется следующим образом:

$$\mathbf{z}^{(k)} = A\mathbf{y}^{(k-1)}, \quad \lambda_1^{(k)} = \frac{z_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}}, \quad \mathbf{y}^{(k)} = \frac{\mathbf{z}^{(k)}}{\|\mathbf{z}^{(k)}\|}. \quad (1.27)$$

При этом в качестве начального приближения $\mathbf{y}^{(0)}$ берется вектор с единичной нормой.

Широко распространена также версия *степенного метода*, использующая скалярные произведения:

$$\mathbf{z}^{(k)} = A\mathbf{y}^{(k-1)}, \quad \mathbf{y}^{(k)} = \frac{\mathbf{z}^{(k)}}{\|\mathbf{z}^{(k)}\|}, \quad \lambda_1^{(k)} = (\mathbf{y}^{(k)}, A\mathbf{y}^{(k)}). \quad (1.28)$$

1.2.4. QR-алгоритм нахождения собственных значений матриц

При решении полной проблемы собственных значений для несимметричных матриц эффективным является подход, основанный на приведении матриц к подобным, имеющим треугольный или квазитреугольный вид. Одним из наиболее распространенных методов этого класса является *QR-алгоритм*, позволяющий находить как вещественные, так и комплексные собственные значения.

В основе QR-алгоритма лежит представление матрицы в виде $A = QR$, где Q — ортогональная матрица, $Q^{-1} = Q^T$, а R — верхняя треугольная.

Такое разложение существует для любой квадратной матрицы. Одним из возможных подходов к построению QR -разложения является использование *преобразования Хаусхолдера*, позволяющего обратить в нуль группу поддиагональных элементов столбца матрицы.

Преобразование Хаусхолдера осуществляется с использованием *матрицы Хаусхолдера*, имеющей вид

$$H = E - \frac{2}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad (1.29)$$

где \mathbf{v} — произвольный ненулевой вектор-столбец, E — единичная матрица, $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ — квадратная матрица того же размера. Легко убедиться, что любая матрица такого вида является симметричной и ортогональной. При этом произвол в выборе вектора \mathbf{v} дает возможность построить матрицу, отвечающую некоторым дополнительным требованиям.

Рассмотрим случай, когда необходимо обратить в нуль все элементы какого-либо вектора, кроме первого, т. е. построить матрицу Хаусхолдера такую, что

$$\tilde{\mathbf{b}} = H \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, \quad \tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, 0, \dots, 0)^T.$$

Тогда вектор \mathbf{v} определится следующим образом:

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} + \text{sign}(b_1) \|\mathbf{b}\|_2 \mathbf{e}_1. \quad (1.30)$$

Здесь $\|\mathbf{b}\|_2 = \left(\sum_i b_i^2 \right)^{1/2}$ — евклидова норма вектора, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Применяя описанную процедуру с целью обнуления поддиагональных элементов каждого из столбцов исходной матрицы, можно за фиксированное число шагов получить ее QR -разложение. Рассмотрим подробнее реализацию этого процесса.

Положим $A_0 = A$ и построим преобразование Хаусхолдера H_1 , переводящее матрицу A_0 в матрицу A_1 с нулевыми элементами первого столбца под главной диагональю $A_1 = H_1 A_0$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \dots & a_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & a_{nn}^0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что матрица Хаусхолдера H_1 должна определяться по первому столбцу матрицы A_0 , т. е. в качестве вектора \mathbf{b} в выражении (1.30) берется вектор $(a_{11}^0, a_{21}^0, \dots, a_{n1}^0)^T$. Тогда компоненты вектора \mathbf{v} вычисляются следующим образом:

$$v_1^1 = a_{11}^0 + \text{sign}(a_{11}^0) \left(\sum_{j=1}^n (a_{j1}^0)^2 \right)^{1/2},$$

$$v_i^1 = a_{i1}^0, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Матрица Хаусхолдера H_1 вычисляется согласно (1.29):

$$H_1 = E - 2 \frac{\mathbf{v}^1 \mathbf{v}^{1T}}{\mathbf{v}^{1T} \mathbf{v}^1}.$$

На следующем, втором шаге рассматриваемого процесса строится преобразование Хаусхолдера H_2 , обнуляющее элементы второго столбца матрицы A_1 , расположенные ниже главной диагонали: $A_2 = H_2 A_1$. Взяв в

качестве вектора \mathbf{b} вектор $(a_{22}^1, a_{32}^1, \dots, a_{n2}^1)^T$ размерности $(n - 1)$, получим следующие выражения для компонент вектора \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 0, \\ v_2^2 &= a_{22}^1 + \operatorname{sign}(a_{22}^1) \left(\sum_{j=2}^n (a_{j2}^1)^2 \right)^{1/2}, \\ v_i^2 &= a_{i1}^1, \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{aligned}$$

Повторяя процесс $(n - 1)$ раз, получим искомое разложение $A = QR$, где

$$Q = (H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1)^T = H_1H_2\dots H_{n-1}, \quad R = A_{n-1}.$$

Следует отметить определенное сходство рассматриваемого процесса с алгоритмом Гаусса. Отличие заключается в том, что здесь обнуление поддиагональных элементов соответствующего столбца осуществляется с использованием ортогонального преобразования.

Процедура QR -разложения многократно используется в QR -алгоритме вычисления собственных значений. Строится следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= A, \\ A^{(0)} &= Q^{(0)}R^{(0)} \text{ — производится } QR\text{-разложение,} \\ A^{(1)} &= R^{(0)}Q^{(0)} \text{ — производится перемножение матриц,} \\ &\dots\dots\dots \\ A^{(k)} &= Q^{(k)}R^{(k)} \text{ — разложение,} \\ A^{(k+1)} &= R^{(k+1)}Q^{(k)} \text{ — перемножение.} \end{aligned}$$

Таким образом, каждая итерация реализуется в два этапа. На первом этапе осуществляется разложение матрицы $A^{(k)}$ в произведение ортогональной $Q^{(k)}$ и верхней треугольной $R^{(k)}$ матриц, а на втором — полученные матрицы перемножаются в обратном порядке.

Нетрудно показать подобие матриц $A^{(k+1)}$ и $A^{(k)}$. Действительно, учитывая ортогональность $Q^{(k)}$, $Q^{(k)T}Q^{(k)} = E$, можно записать:

$$A^{(k+1)} = R^{(k)}Q^{(k)} = Q^{(k)T}Q^{(k)}R^{(k)}Q^{(k)} = Q^{(k)T}A^{(k)}Q^{(k)}.$$

Аналогично можно показать, что любая из матриц $A^{(k)}$ ортогонально подобна матрице A . При отсутствии у матрицы кратных собственных значений последовательность $A^{(k)}$ сходится к верхней треугольной матрице (в случае, когда все собственные значения вещественны) или к верхней квазитреугольной матрице (если имеются комплексно-сопряженные пары собственных значений).

Таким образом, каждому вещественному собственному значению будет соответствовать столбец со стремящимися к нулю поддиагональными элементами и в качестве критерия сходимости итерационного процесса для таких собственных значений можно использовать неравенство

$$\left(\sum_{l=m+1}^n (a_{lm}^{(k)})^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon. \text{ При этом соответствующее собственное значение принимается равным диагональному элементу данного столбца.}$$

Каждой комплексно-сопряженной паре соответствует диагональный блок размерностью 2×2 , т. е. матрица $A^{(k)}$ имеет блочно-диагональную структуру. Принципиально то, что элементы этих блоков изменяются от итерации к итерации без видимой закономерности, в то время как комплексно-сопряженные собственные значения, определяемые каждым блоком, имеют тенденцию к сходимости. Это обстоятельство необходимо

учитывать при формировании критерия выхода из итерационного процесса. Если в ходе итераций прослеживается комплексно-сопряженная пара собственных значений, соответствующая блоку, образуемому элементами j -го и $(j+1)$ -го столбцов $a_{jj}^{(k)}$, $a_{j+1,j}^{(k)}$, $a_{j,j+1}^{(k)}$, $a_{j+1,j+1}^{(k)}$, то, несмотря на значительное изменение в ходе итераций самих этих элементов, собственные значения, соответствующие данному блоку и определяемые из решения квадратного уравнения

$$\left(a_{jj}^{(k)} - \lambda^{(k)}\right)\left(a_{j+1,j+1}^{(k)} - \lambda^{(k)}\right) = a_{j+1,j}^{(k)} a_{j,j+1}^{(k)},$$

начиная с некоторого k отличаются незначительно. В качестве критерия окончания итераций для таких блоков может быть использовано условие $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| \leq \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Существенным недостатком рассмотренного алгоритма является большое число операций (оно пропорционально n^3 , где n — размерность матрицы), необходимое для QR -факторизации матрицы на каждой итерации. Эффективность QR -алгоритма может быть повышена, если предварительно с помощью преобразования подобия привести матрицу к верхней Хессенберговой форме, в которой равны нулю все элементы, находящиеся ниже главной диагонали, за исключением элементов первой поддиагонали. Иными словами, предварительно производится операция

$$A^{(0)} = H^T A H,$$

где $A^{(0)}$ — матрица Хессенберга, имеющая следующую структуру (знак x обозначает ненулевые элементы):

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ x & x & x & \dots & x & x \\ 0 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & 0 & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}.$$

Здесь принципиально то, что в дальнейшем, в ходе QR -итераций, матрицы $A^{(k)}$ сохраняют верхнюю Хессенбергову форму, что позволяет более экономно проводить их QR -разложение. Подробное изложение данного вопроса можно найти, например, в [2].

ПРИМЕР 1.9

Используя преобразование Хаусхолдера, построить QR -разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

Будем следовать предложенному алгоритму.

■ Положим $A_0 = A$ и найдем ортогональную матрицу Хаусхолдера H_1 такую, что в матрице $A_1 = H_1 A_0$ все поддиагональные элементы первого столбца равны нулю. С этой целью компоненты вектора v определим, используя элементы первого столбца матрицы A_0 :

$$v_1^1 = a_{11}^0 + \operatorname{sign} \left(a_{11}^0 \right) \left(\sum_{j=1}^3 \left(a_{j1}^0 \right)^2 \right)^{1/2} = 1 + (1 + 1 + 4^2)^{1/2} = 5.24,$$

$$v_2^1 = a_{21}^0 = 1,$$

$$v_3^1 = a_{31}^0 = 4.$$

В результате получен вектор $\mathbf{v}^1 = (5.24 \ 1 \ 4)^T$. Найдем соответствующую этому вектору матрицу Хаусхолдера:

$$H_1 = E - 2 \frac{\mathbf{v}^1 \mathbf{v}^{1T}}{\mathbf{v}^{1T} \mathbf{v}^1} = \begin{pmatrix} -0.24 & -0.24 & -0.94 \\ -0.24 & 0.96 & -0.18 \\ -0.94 & -0.18 & 0.28 \end{pmatrix}.$$

В заключение первого шага вычислим матрицу A_1 :

$$A_1 = H_1 A_0 = \begin{pmatrix} -4.24 & -3.77 & -2.12 \\ 0 & -0.29 & 3.40 \\ 0 & -2.17 & -1.38 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после первого шага получена матрица с нулевыми поддиагональными элементами в первом столбце.

■ На втором шаге сделаем аналогичную процедуру, обнуляя поддиагональный элемент второго столбца.

$$v_1^2 = 0,$$

$$v_2^2 = a_{22}^1 + \text{sign} \left(a_{22}^1 \right) \left(\sum_{j=2}^3 \left(a_{j2}^2 \right)^2 \right)^{1/2} = \\ = -0.29 - (0.29^2 + 2.17^2)^{1/2} = -2.48,$$

$$v_3^2 = a_{32}^1 = -2.17,$$

т. е. искомый вектор $\mathbf{v}^2 = (0, -2.48, -2.17)^T$.

Далее найдем соответствующую ему матрицу Хаусхолдера:

$$H_2 = E - 2 \frac{\mathbf{v}^2 \mathbf{v}^{2T}}{\mathbf{v}^{2T} \mathbf{v}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.13 & -0.99 \\ 0 & -0.99 & 0.13 \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу A_2 :

$$A_2 = H_2 A_1 = \begin{pmatrix} -4.24 & -3.77 & -2.12 \\ 0 & 2.19 & 0.91 \\ 0 & 0 & -3.56 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная матрица A приведена к верхнему треугольному виду, т. е. получена матрица $R = A_2$ искомого разложения.

Результирующая ортогональная матрица преобразования Q получается в результате перемножения матриц H_i , $i = 1, 2$:

$$Q = H_1 H_2 = \begin{pmatrix} -0.24 & 0.97 & 0.11 \\ -0.24 & 0.05 & -0.97 \\ -0.94 & -0.25 & 0.22 \end{pmatrix}.$$

В заключение выпишем окончательный результат $A = QR$ в явном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.24 & 0.97 & 0.11 \\ -0.24 & 0.05 & -0.97 \\ -0.94 & -0.25 & 0.22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4.24 & -3.77 & -2.12 \\ 0 & 2.19 & 0.91 \\ 0 & 0 & -3.56 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.10

С помощью QR -алгоритма вычислить собственные значения матрицы A из примера 1.9 с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

РЕШЕНИЕ

Приступим к процедуре решения.

■ Положим $A^{(0)} = A$ и найдем QR -разложение этой матрицы $A^{(0)} = Q^{(0)}R^{(0)}$. Эта процедура подробно рассмотрена в предыдущем примере. Получены следующие матрицы $Q^{(0)}, R^{(0)}$:

$$Q^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.24 & 0.97 & 0.11 \\ -0.24 & 0.05 & -0.97 \\ -0.94 & -0.25 & 0.22 \end{pmatrix}, R^{(0)} = \begin{pmatrix} -4.24 & -3.77 & -2.12 \\ 0 & 2.19 & 0.91 \\ 0 & 0 & -3.56 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A^{(1)}$ определим перемножением полученных в результате QR -разложения матриц в обратном порядке $A^{(1)} = R^{(0)}Q^{(0)}$:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.89 & -3.75 & 2.74 \\ -1.38 & -0.12 & -1.92 \\ 3.35 & 0.9 & -0.77 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация завершена. Поддиагональные элементы матрицы $A^{(1)}$ достаточно велики, поэтому итерационный процесс необходимо продолжить.

■ Находим QR -разложение $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$, используя преобразование Хаусхолдера аналогично примеру 1.9:

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.73 & 0.68 & 0.05 \\ 0.26 & 0.21 & 0.94 \\ -0.63 & -0.7 & 0.33 \end{pmatrix}, R^{(1)} = \begin{pmatrix} -5.32 & 2.14 & -2.02 \\ 0 & 3.21 & -2.0 \\ 0 & 0 & -1.93 \end{pmatrix}.$$

Перемножая полученные выше матрицы в обратном порядке, находим матрицу $A^{(2)}$:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5.72 & 1.75 & 1.09 \\ 2.09 & -2.08 & 2.37 \\ 1.22 & -1.36 & -0.64 \end{pmatrix}.$$

Продолжая итерационный процесс, получим соответственно на 6-й и 7-й итерациях следующие матрицы:

$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} 6.34 & 0.94 & -0.73 \\ 0.034 & -2.53 & 1.69 \\ 0.023 & -1.86 & -0.81 \end{pmatrix}, A^{(7)} = \begin{pmatrix} 6.34 & 0.27 & 1.13 \\ -0.0014 & -2.01 & -2.58 \\ 0.0006 & 0.98 & -1.33 \end{pmatrix}.$$

Видно, что поддиагональные элементы первого столбца становятся достаточно малыми, и, следовательно, диагональный элемент $a_1^{(7)}$ может быть принят в качестве собственного значения. В то же время отчетливо прослеживается комплексно-сопряженная пара собственных значений, соответствующая блоку, образуемому элементами второго и третьего столбцов $a_{22}^{(k)}, a_{23}^{(k)}, a_{32}^{(k)}, a_{33}^{(k)}$. Несмотря на значительное изменение в ходе итераций самих этих элементов, собственные значения, соответствующие данному блоку и определяемые из решения квадратного уравнения $(a_{22}^{(k)} - \lambda^{(k)})(a_{33}^{(k)} - \lambda^{(k)}) = a_{23}^{(k)}a_{32}^{(k)}$, меняются незначительно — в пределах допустимой погрешности. Таким образом, окончательное решение задачи можно записать в виде:

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(7)} = 6.34, \quad \lambda_2 = \lambda_2^{(7)} = -1.67 + 1.55i, \quad \lambda_3 = \lambda_3^{(7)} = -1.67 - 1.55i.$$

ЗАДАЧИ

1.1. Методом Гаусса решить системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для матрицы СЛАУ вычислить определитель и обратную матрицу.

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 24, \\ -3x_1 - 5x_2 + 14x_3 + 13x_4 = 41, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 = -39, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_4 = 41, \\ -x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 4, \\ 9x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 8x_4 = 113. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 9x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -8, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = 38, \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 47, \\ 6x_1 - x_2 + 9x_3 + 8x_4 = -8. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -12, \\ -8x_1 + x_2 - 9x_3 = -60, \\ 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -91, \\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 = -43. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + x_3 - 7x_4 = 96, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -13, \\ -x_1 + x_2 - 9x_3 - 3x_4 = -54, \\ -6x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 82. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 = -23, \\ 8x_1 - 9x_3 - 3x_4 = 39, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 30. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 = -75, \\ x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -41, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \\ -9x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 29. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -51, \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 76, \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 26, \\ -8x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 = -73. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -7x_1 - 9x_2 + x_3 - 9x_4 = 29, \\ -6x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 42, \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 11, \\ -2x_1 - 5x_3 - 9x_4 = 75. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -126, \\ 8x_1 - x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 29, \\ 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 27, \\ -7x_1 - 9x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 34. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 5x_4 = -40, \\ -9x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -58, \\ -6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -75, \\ -x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -x_1 - 8x_2 + 5x_4 = -60, \\ 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -10, \\ 9x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 65, \\ -5x_1 - 9x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} -6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 101, \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 51, \\ -6x_1 + 5x_3 + 5x_4 = -53, \\ -7x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -63. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 30, \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -90, \\ -8x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -9x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 = -81, \\ -7x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -50, \\ -3x_1 - x_2 + 8x_3 = -69, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 48. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} -5x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 18, \\ -2x_1 + 8x_3 - 4x_4 = -12, \\ -7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -12. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 8x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 13, \\ 8x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 38, \\ 5x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -95. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -20, \\ -9x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 60, \\ -7x_1 + 8x_3 - 6x_4 = -60, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 = -44. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
19. \begin{cases} -8x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 6x_4 = -144, \\ 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 - x_4 = 25, \\ -5x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = -21, \\ 5x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 103. \end{cases} & 20. \begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -126, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -42, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -115, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 = -67. \end{cases} \\
21. \begin{cases} -6x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 8x_4 = -32, \\ 9x_1 + 8x_3 + 3x_4 = 8, \\ -9x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 4x_4 = -36. \end{cases} & 22. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 120, \\ 8x_1 - x_2 - 9x_3 + x_4 = 31, \\ -3x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 25. \end{cases} \\
23. \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 57, \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 24, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 28, \\ -9x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 12. \end{cases} & 24. \begin{cases} -7x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -12, \\ -4x_1 + 6x_2 - 4x_4 = 22, \\ -8x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 51, \\ -7x_3 + x_4 = 49. \end{cases} \\
25. \begin{cases} -5x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 64, \\ 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -55, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -48, \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 68. \end{cases} & 26. \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -26, \\ -7x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -25, \\ -6x_1 + 2x_2 = -16, \\ -3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases} \\
27. \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 93, \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 16, \\ 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -80, \\ 9x_2 + 7x_3 + 7x_4 = -119. \end{cases} & 28. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 7x_4 = -67, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -57, \\ -x_1 + 3x_2 - 9x_3 - x_4 = -26, \\ -5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 52. \end{cases} \\
29. \begin{cases} 9x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 = 55, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -66, \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -43, \\ -9x_1 - 5x_2 - x_3 - 6x_4 = -24. \end{cases} & 30. \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 57, \\ 4x_1 + 9x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -23, \\ -5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 23, \\ 4x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 6x_4 = -20. \end{cases}
\end{array}$$

1.2. Методом прогонки решить СЛАУ.

$$\begin{array}{ll}
1. \begin{cases} -11x_1 - 9x_2 = -122, \\ 5x_1 - 15x_2 - 2x_3 = -48, \\ -8x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -14, \\ 6x_3 - 15x_4 + 4x_5 = -50, \\ 3x_4 + 6x_5 = 42. \end{cases} & 2. \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = -120, \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 = -91, \\ 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 5, \\ 5x_3 + 16x_4 - 4x_5 = -74, \\ -8x_4 + 16x_5 = -56. \end{cases} \\
3. \begin{cases} 13x_1 - 5x_2 = -66, \\ -4x_1 + 9x_2 - 5x_3 = -47, \\ -x_2 - 12x_3 - 6x_4 = -43, \\ 6x_3 + 20x_4 - 5x_5 = -74, \\ 4x_4 + 5x_5 = 14. \end{cases} & 4. \begin{cases} -14x_1 - 6x_2 = -78, \\ -9x_1 + 15x_2 - x_3 = -73, \\ x_2 - 11x_3 + x_4 = -38, \\ -7x_3 + 12x_4 + 3x_5 = 77, \\ 6x_4 - 7x_5 = 91. \end{cases} \\
5. \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 48, \\ -5x_1 + 22x_2 + 8x_3 = 125, \\ -5x_2 - 11x_3 + x_4 = -43, \\ -9x_3 - 15x_4 + x_5 = 18, \\ x_4 + 7x_5 = -23. \end{cases} & 6. \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = -58, \\ -6x_1 + 16x_2 + 9x_3 = 161, \\ 9x_2 - 17x_3 - 3x_4 = -114, \\ 8x_3 + 22x_4 - 8x_5 = -90, \\ 6x_4 - 13x_5 = -55. \end{cases}
\end{array}$$

$$7. \begin{cases} 15x_1 + 8x_2 = 92, \\ 2x_1 - 15x_2 + 4x_3 = -84, \\ 4x_2 + 11x_3 + 5x_4 = -77, \\ -3x_3 + 16x_4 - 7x_5 = 15, \\ 3x_4 + 8x_5 = -11. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -11x_1 - 8x_2 = 99, \\ 9x_1 - 17x_2 + x_3 = -75, \\ -4x_2 + 20x_3 + 9x_4 = 66, \\ -4x_3 - 14x_4 + 3x_5 = 54, \\ -6x_{14} + 14x_5 = 8. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 32, \\ -2x_1 + 12x_2 - 7x_3 = 15, \\ 2x_2 - 9x_3 + x_4 = -10, \\ -8x_3 + 17x_4 - 4x_5 = 133, \\ -7x_4 + 13x_5 = -76. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -7x_1 - 6x_2 = -75, \\ 6x_1 + 12x_2 = 126, \\ -3x_2 + 5x_3 = 13, \\ -9x_3 + 21x_4 + 8x_5 = -40, \\ -5x_4 - 6x_5 = -24. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} -10x_1 - 9x_2 = 7, \\ -5x_1 - 21x_2 - 8x_3 = 29, \\ 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 31, \\ 8x_4 + 2x_5 = 56, \\ 2x_4 + 10x_5 = -24. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -114, \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 81, \\ -2x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -8, \\ 3x_3 - 14x_4 + 7x_5 = -38, \\ 8x_4 + 10x_5 = 144. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 14x_1 + 9x_2 = 125, \\ -8x_1 + 14x_2 + 6x_3 = -56, \\ -5x_2 - 17x_3 + 8x_4 = 144, \\ x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 36, \\ -4x_4 - 10x_5 = 70. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -x_1 - x_2 = -4, \\ 7x_1 - 17x_2 - 8x_3 = 132, \\ -9x_2 + 19x_3 + 8x_4 = -59, \\ 7x_3 - 20x_4 + 4x_5 = -193, \\ -4x_4 + 12x_5 = -40. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 16x_1 - 8x_2 = 0, \\ -7x_1 - 16x_2 + 5x_3 = -123, \\ 4x_2 + 12x_3 + 3x_4 = -68, \\ -4x_3 + 12x_4 - 7x_5 = 104, \\ -x_4 + 7x_5 = 20. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 18x_1 - 9x_2 = -81, \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 71, \\ -9x_2 + 21x_3 - 8x_4 = -39, \\ -4x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 64, \\ 7x_4 + 12x_5 = 3. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -6x_1 + 5x_2 = 51, \\ -x_1 + 13x_2 + 6x_3 = 100, \\ -9x_2 - 15x_3 - 4x_4 = -12, \\ -x_3 - 7x_4 + x_5 = 47, \\ 9x_4 - 18x_5 = -90. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = -14, \\ 7x_1 - 19x_2 + 9x_3 = -55, \\ -4x_2 + 21x_3 - 8x_4 = 49, \\ 7x_3 - 23x_4 + 9x_5 = 86, \\ 4x_4 - 7x_5 = 8. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 10x_1 - x_2 = 16, \\ -8x_1 + 16x_2 + x_3 = -110, \\ 6x_2 - 16x_3 + 6x_4 = 24, \\ -8x_3 + 16x_4 - 5x_5 = -3, \\ 5x_4 - 13x_5 = 87. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -6x_1 + 6x_2 = 30, \\ 2x_1 + 10x_2 - 7x_3 = -31, \\ -8x_2 + 18x_3 + 9x_4 = 108, \\ 6x_3 - 17x_4 - 6x_5 = -114, \\ 9x_4 + 14x_5 = 124. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 65, \\ -3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 23, \\ -2x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 1, \\ -2x_3 - 12x_4 - 8x_5 = -58, \\ -3x_4 - 10x_5 = -8. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} -14x_1 + 6x_2 = 82, \\ 2x_1 + 7x_2 = -51, \\ -7x_2 - 18x_3 - 9x_4 = -46, \\ 2x_3 - 13x_4 + 2x_5 = 111, \\ -7x_4 - 7x_5 = 35. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 38, \\ -6x_1 + 19x_2 - 9x_3 = 14, \\ 6x_2 - 18x_3 + 7x_4 = -45, \\ -7x_3 - 11x_4 - 2x_5 = 30, \\ 5x_4 - 7x_5 = 48. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -117, \\ -9x_1 + 17x_2 + 6x_3 = -97, \\ 5x_2 + 20x_3 + 8x_4 = -6, \\ -6x_3 - 20x_4 + 7x_5 = 59, \\ 2x_4 + 8x_5 = -86. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 12x_1 - 5x_2 = 148, \\ -3x_1 - 18x_2 - 8x_3 = 45, \\ -2x_2 - 16x_3 - 9x_4 = -155, \\ -4x_3 + 18x_4 - 7x_5 = 11, \\ 4x_4 - 9x_5 = 3. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} -12x_1 - 7x_2 = -102, \\ -7x_1 - 11x_2 - 3x_3 = -92, \\ -7x_2 + 21x_3 - 8x_4 = -65, \\ 4x_3 - 13x_4 + 5x_5 = 38, \\ -6x_4 + 14x_5 = -12. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -6x_1 + 3x_2 = -33, \\ 6x_1 - 23x_2 - 9x_3 = -107, \\ 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 18, \\ 4x_3 + 15x_4 - 9x_5 = -69, \\ 5x_4 - 11x_5 = -31. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 16x_1 - 9x_2 = -27, \\ 8x_1 - 13x_2 - 5x_3 = -84, \\ -3x_2 - 21x_3 + 9x_4 = -225, \\ -9x_3 + 16x_4 - 5x_5 = -89, \\ x_4 - 9x_5 = 69. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} -11x_1 + 9x_2 = -158, \\ -8x_2 - 6x_3 = 66, \\ 6x_2 + 15x_3 - 2x_4 = -45, \\ 4x_3 + 6x_4 - x_5 = 24, \\ -7x_4 - 10x_5 = -1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 0, \\ -9x_1 - 17x_2 + 3x_3 = -99, \\ -3x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -107, \\ 2x_3 - 9x_4 - 6x_5 = 5, \\ -4x_4 + 5x_5 = -6. \end{cases}$$

1.3. Методом простых итераций и методом Зейделя решить СЛАУ с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

$$1. \begin{cases} 19x_1 - 4x_2 - 9x_3 - x_4 = 100, \\ -2x_1 + 20x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -5, \\ 6x_1 - 5x_2 - 25x_3 + 9x_4 = 34, \\ -3x_2 - 9x_3 + 12x_4 = 69. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 24x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 = -9, \\ -6x_1 - 27x_2 - 8x_3 - 6x_4 = -76, \\ -4x_1 + 8x_2 + 19x_3 + 6x_4 = -79, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 13x_4 = -70. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -23x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -26, \\ -7x_1 - 21x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -55, \\ 9x_1 + 5x_2 - 31x_3 - 8x_4 = -58, \\ x_2 - 2x_3 + 10x_4 = -24. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 26x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 20, \\ 9x_1 - 21x_2 - 2x_3 + 8x_4 = -164, \\ -3x_1 + 2x_2 - 18x_3 + 8x_4 = 140, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 11x_4 = -81. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 20x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = -117, \\ -x_1 + 13x_2 - 7x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 17x_3 + 5x_4 = 49, \\ -9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 25x_4 = -21. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 23x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 232, \\ 8x_1 + 22x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -82, \\ 7x_1 - 6x_2 + 18x_3 - x_4 = 202, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 19x_4 = -57. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 29x_1 + 8x_2 + 9x_3 - 9x_4 = 197, \\ -7x_1 - 25x_2 + 9x_4 = -226, \\ x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 2x_4 = -95, \\ -7x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 17x_4 = -58. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -7x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -24, \\ 3x_1 - 20x_2 - 8x_4 = -47, \\ -9x_1 + x_2 + 18x_3 - 6x_4 = 28, \\ -x_1 - x_3 - 6x_4 = -50. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 12x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -31, \\ 5x_1 + 20x_2 + 9x_3 + x_4 = 90, \\ 6x_1 - 3x_2 - 21x_3 - 7x_4 = 119, \\ 8x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 27x_4 = 71. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 28x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -159, \\ -5x_1 + 21x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 63, \\ -8x_1 + x_2 - 16x_3 + 5x_4 = -45, \\ -2x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 24. \end{cases}$$

- $$11. \begin{cases} 21x_1 + x_2 - 8x_3 + 4x_4 = -119, \\ -9x_1 - 23x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 79, \\ 7x_1 - x_2 - 17x_3 + 6x_4 = -24, \\ 8x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 26x_4 = -52. \end{cases}$$
- $$12. \begin{cases} 14x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 38, \\ -3x_1 + 23x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -195, \\ -7x_1 - 8x_2 + 21x_3 - 5x_4 = -27, \\ -2x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 18x_4 = 142. \end{cases}$$
- $$13. \begin{cases} 24x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -190, \\ -3x_1 - 9x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -12, \\ 3x_1 + 7x_2 + 24x_3 + 9x_4 = 155, \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 15x_4 = -17. \end{cases}$$
- $$14. \begin{cases} -22x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 96, \\ 3x_1 - 17x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -26, \\ 2x_1 + 6x_2 - 17x_3 + 5x_4 = 35, \\ -x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 23x_4 = -234. \end{cases}$$
- $$15. \begin{cases} -14x_1 + 6x_2 + x_3 - 5x_4 = 95, \\ -6x_1 + 27x_2 + 7x_3 - 6x_4 = -41, \\ 7x_1 - 5x_2 - 23x_3 - 8x_4 = 69, \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 26x_4 = 27. \end{cases}$$
- $$16. \begin{cases} 21x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 4x_4 = 127, \\ -6x_1 + 20x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -144, \\ -2x_1 - 7x_2 - 20x_3 + 3x_4 = 236, \\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 24x_4 = -5. \end{cases}$$
- $$17. \begin{cases} -19x_1 + 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 38, \\ 2x_1 + 14x_2 - 4x_4 = 20, \\ 6x_1 - 5x_2 - 20x_3 - 6x_4 = 52, \\ -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 15x_4 = 43. \end{cases}$$
- $$18. \begin{cases} 18x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -84, \\ -7x_1 + 15x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -5, \\ -4x_1 + 13x_3 + 4x_4 = -38, \\ -8x_1 - 8x_2 - 6x_3 + 31x_4 = 263. \end{cases}$$
- $$19. \begin{cases} 15x_1 + 7x_3 + 5x_4 = 176, \\ -3x_1 - 14x_2 - 6x_3 + x_4 = -111, \\ -2x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 74, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 76. \end{cases}$$
- $$20. \begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -99, \\ 4x_1 + 28x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 23x_3 + 4x_4 = 67, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 15x_4 = 58. \end{cases}$$
- $$21. \begin{cases} 24x_1 + 9x_2 - x_3 - 5x_4 = -24, \\ -x_1 - 14x_2 + x_3 + 9x_4 = 40, \\ -7x_1 + 5x_2 - 21x_3 = -84, \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 22x_4 = -56. \end{cases}$$
- $$22. \begin{cases} -18x_1 + 9x_2 - x_3 - 8x_4 = -60, \\ 6x_1 + 22x_2 + 9x_3 = -109, \\ -4x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 9x_4 = -103, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 - 14x_4 = -33. \end{cases}$$
- $$23. \begin{cases} -24x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 130, \\ -8x_1 + 21x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 139, \\ 6x_1 + 6x_2 + 16x_3 = -84, \\ -7x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 24x_4 = -165. \end{cases}$$
- $$24. \begin{cases} -25x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 86, \\ -9x_1 + 21x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 29, \\ 9x_1 + 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 = 28, \\ -7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 25x_4 = 68. \end{cases}$$
- $$25. \begin{cases} 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 104, \\ 4x_1 - 14x_2 - x_3 + 4x_4 = 70, \\ 7x_1 - 7x_2 + 27x_3 - 8x_4 = 170, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 14x_4 = 48. \end{cases}$$
- $$26. \begin{cases} 18x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 50, \\ -x_1 + 14x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 + 26x_3 + 7x_4 = 273, \\ -2x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 24x_4 = 111. \end{cases}$$
- $$27. \begin{cases} -26x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 2x_4 = -51, \\ 2x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 85, \\ -7x_1 - 6x_2 - 23x_3 - 3x_4 = 71, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 13x_4 = 91. \end{cases}$$
- $$28. \begin{cases} 10x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 110, \\ 2x_1 + 16x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 128, \\ x_1 + 5x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 102, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 - 17x_4 = 81. \end{cases}$$
- $$29. \begin{cases} 15x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 36, \\ 7x_1 - 15x_2 - 6x_3 + x_4 = -112, \\ -4x_1 + 7x_2 - 19x_3 - 6x_4 = 19, \\ 3x_1 - 5x_3 + 8x_4 = -23. \end{cases}$$
- $$30. \begin{cases} 22x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -158, \\ -8x_1 - 22x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 254, \\ 8x_1 - 2x_2 - 18x_3 + 2x_4 = -108, \\ 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 24x_4 = -24. \end{cases}$$

1.4. Используя метод вращений, найти собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и собственные векторы h_1, h_2, h_3 симметрических матриц с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

$$1. \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 4 & -6 & -9 \\ 5 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -9 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & -8 \\ -1 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & -7 & 7 \\ -7 & -9 & -5 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 9 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -1 \\ -7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} -6 & 6 & -8 \\ 6 & -4 & 9 \\ -8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 7 & -9 & -6 \\ -1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} -7 & -6 & 8 \\ -6 & 3 & -7 \\ 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$11. \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & -3 & -7 \\ -4 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & -8 \\ -1 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ -5 & 5 & 2 \\ -9 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 8 & -3 & 9 \\ -3 & 8 & -2 \\ 9 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} -8 & 9 & 6 \\ 9 & 9 & 1 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} -7 & -9 & 1 \\ -9 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$21. \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22. \begin{pmatrix} 2 & -9 & 4 \\ -9 & 0 & 9 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{pmatrix} 9 & -5 & -6 \\ -5 & 1 & -8 \\ -6 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$24. \begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$25. \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 4 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$26. \begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 1 & 9 & 1 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$27. \begin{pmatrix} -8 & 5 & -7 \\ 5 & 1 & 4 \\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$28. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & -7 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$29. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \\ -8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$30. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

1.5. Используя степенной метод, оценить спектральный радиус матриц из задач 1.4 с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

1.6. Используя QR -алгоритм, найти собственные значения заданных матриц с погрешностью $\varepsilon = 0.01$.

$$1. \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -9 & -8 & 7 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -6 & -4 & -0 \\ -7 & 6 & -7 \\ -2 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -1 & -8 & -5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} -4 & -6 & -3 \\ -1 & 5 & -5 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 7 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 9 & -8 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & 4 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$11. \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 5 & -6 & 8 \\ -7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 9 & 3 & 4 \\ 8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -8 & 0 & -6 \\ 7 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} -2 & 7 & -6 \\ -1 & 9 & -4 \\ -1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & -3 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 6 & 5 & -6 \\ -4 & -6 & 9 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21. \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -8 & -6 & 5 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$22. \begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 8 & -4 & 4 \\ 2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & -9 \\ 6 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$24. \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 6 & 9 & -4 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$25. \begin{pmatrix} -9 & 9 & -7 \\ -7 & 5 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$26. \begin{pmatrix} -9 & -9 & -3 \\ -9 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$27. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$28. \begin{pmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 9 & 1 & -6 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$29. \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$30. \begin{pmatrix} 8 & -9 & -6 \\ -6 & 7 & -5 \\ -1 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТЫ

1.1.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. (2, 4, 2, 3). | 2. (8, -3, 2, -3). | 3. (0, -5, 3, -5). |
| 4. (-2, -4, 8, 9). | 5. (-3, -6, 8, -7). | 6. (6, 6, -1, 6). |
| 7. (2, 4, 7, -8). | 8. (8, 4, 8, -5). | 9. (-4, 2, -8, -3). |
| 10. (8, -9, 2, -5). | 11. (7, 3, -2, -6). | 12. (7, 6, -6, -1). |
| 13. (-2, -3, -6, -7). | 14. (-3, 6, -3, -9). | 15. (-1, 0, -9, -3). |
| 16. (-2, 3, -3, -2). | 17. (-4, -3, -1, -8). | 18. (-4, 0, -8, -4). |
| 19. (9, -6, -6, -1). | 20. (-4, -5, -7, 5). | 21. (-4, 2, 4, 4). |
| 22. (6, -5, 3, 5). | 23. (1, -5, 7, 9). | 24. (6, 3, -8, -7). |
| 25. (-2, -5, 7, 2). | 26. (3, 1, -1, -2). | 27. (-9, -7, -7, -1). |
| 28. (-5, 9, 7, -5). | 29. (2, -4, -4, 5). | 30. (-3, 5, 8, 0). |

1.2.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. (7, 5, 4, 6, 4). | 2. (-9, -6, 2, -7, -7). | 3. (-7, -5, 6, -4, 6). |
| 4. (6, -1, 4, 7, -7). | 5. (3, 6, 1, -2, -3). | 6. (-8, 2, 9, -7, 1). |
| 7. (4, 4, 8, -1, -1). | 8. (-9, 0, 6, -6, -2). | 9. (6, 4, 3, 9, -1). |
| 10. (3, 3, -9, 8, 0, 4). | 11. (2, -3, 3, 8, 4). | 12. (3, -9, 6, 8, 8). |
| 13. (7, 3, -7, 5, -9). | 14. (6, -2, -7, 7, -1). | 15. (2, 4, -9, 8, 4). |
| 16. (-8, -7, -6, 3, 2). | 17. (-1, 9, -3, -6, -2). | 18. (-1, 3, 1, -5, -4). |
| 19. (1, -6, -6, -6, -9). | 20. (-5, 0, 3, 6, 5). | 21. (7, -8, -3, 6, -1). |
| 22. (8, -5, 8, -7, 2). | 23. (9, 5, 3, -3, -9). | 24. (9, -2, 3, -7, -9). |
| 25. (9, -8, 9, 3, 1). | 26. (5, 6, -3, -5, -3). | 27. (9, 7, 0, -4, 1). |
| 28. (0, 3, 9, -3, -8). | 29. (7, -9, 1, 3, -2). | 30. (-3, 6, -8, -1, -2). |

1.3.

Точные решения СЛАУ:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. (8, 4, 3, 9). | 2. (4, 2, -7, 9). | 3. (1, 2, 3, -2). |
| 4. (2, 8, -9, -4). | 5. (-8, 2, 4, 5). | 6. (8, -7, 6, 4). |
| 7. (7, 6, -9, -3). | 8. (7, 1, 7, 6). | 9. (0, 7, -5, -5). |
| 10. (-6, 3, 6, 0). | 11. (-6, -1, -1, 0). | 12. (-1, -6, -2, 8). |
| 13. (-6, 2, 7, -1). | 14. (-5, -2, -6, -9). | 15. (-8, -2, -5, 0). |
| 16. (1, -9, -8, 5). | 17. (-2, 2, -4, 1). | 18. (-5, -4, -6, 5). |
| 19. (9, 5, 3, 4). | 20. (-8, 4, -5, -5). | 21. (0, 0, 4, 4). |
| 22. (0, -7, 5, -1). | 23. (-9, 3, -3, -8). | 24. (-3, 0, 4, 3). |
| 25. (8, -4, 2, 4). | 26. (3, 2, 9, 2). | 27. (4, -3, -3, -4). |
| 28. (9, 7, 6, 2). | 29. (1, 7, 2, -2). | 30. (-6, -9, 4, -3). |

1.4.

- | | |
|--|---|
| 1. $\begin{cases} \lambda_1 = -3.71, \lambda_2 = 2.07, \lambda_3 = -19.36 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.34 \\ 0.3 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.73 \\ -0.67 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.45 \\ 0.58 \\ 0.66 \end{pmatrix} \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} \lambda_1 = -11.69, \lambda_2 = 19.53, \lambda_3 = -0.83 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.28 \\ -0.11 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.69 \\ 0.66 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ -0.66 \\ 0.74 \end{pmatrix} \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} \lambda_1 = 8.7, \lambda_2 = -6.23, \lambda_3 = 0.53 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 0.36 \\ 0.42 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.41 \\ 0.9 \\ 0.04 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.37 \\ -0.21 \\ 0.9 \end{pmatrix} \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} \lambda_1 = 8.79, \lambda_2 = -13.02, \lambda_3 = 2.22 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.93 \\ 0.26 \\ -0.22 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.03 \\ 0.71 \\ 0.70 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.34 \\ -0.65 \\ 0.67 \end{pmatrix} \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} \lambda_1 = 10.30, \lambda_2 = -12.96, \lambda_3 = -7.33 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.68 \\ -0.41 \\ 0.60 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.9 \\ 0.13 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.59 \\ 0.15 \\ 0.78 \end{pmatrix} \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} \lambda_1 = 13.34, \lambda_2 = -4.30, \lambda_3 = -3.04 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.12 \\ -0.49 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.16 \\ 0.98 \\ -0.03 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.11 \\ 0.86 \end{pmatrix} \end{cases}$ |

7. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 0.77, \lambda_2 = -19.34, \lambda_3 = 6.57 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.76 \\ 0.62 \\ -0.17 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.59 \\ 0.56 \\ -0.56 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.53 \\ 0.80 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 9.35, \lambda_2 = 10.29, \lambda_3 = -10.65 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.81 \\ 0.43 \\ 0.38 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.55 \\ 0.78 \\ 0.28 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.17 \\ -0.44 \\ 0.87 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.07, \lambda_2 = -14.62, \lambda_3 = -2.44 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.44 \\ -0.29 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.29 \\ 0.84 \\ 0.44 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.44 \\ -0.29 \\ 0.84 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -11.61, \lambda_2 = -3.41, \lambda_3 = 15.02 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 0.19 \\ -0.37 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.09 \\ 0.77 \\ 0.62 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.41 \\ -0.60 \\ 0.68 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -1.31, \lambda_2 = -12.02, \lambda_3 = 4.32 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.87 \\ -0.46 \\ -0.13 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.61 \\ 0.66 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.63 \\ 0.73 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.57, \lambda_2 = -13.05, \lambda_3 = 2.47 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.34 \\ -0.34 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.09 \\ 0.81 \\ 0.57 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.47 \\ -0.47 \\ 0.74 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.41, \lambda_2 = 6.12, \lambda_3 = -7.53 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.95 \\ -0.22 \\ -0.19 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.92 \\ 0.25 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.12 \\ -0.30 \\ 0.94 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -11.9, \lambda_2 = 4.21, \lambda_3 = 14.68 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.90 \\ 0.22 \\ 0.36 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.89 \\ -0.44 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.42 \\ 0.38 \\ 0.81 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -4.13, \lambda_2 = 8.30, \lambda_3 = 5.82 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.10 \\ -0.32 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.95 \\ 0.28 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.33 \\ -0.26 \\ 0.90 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 16. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 14.11, \lambda_2 = 5.94, \lambda_3 = -12.05 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.78 \\ -0.5 \\ 0.36 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.86 \\ 0.18 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.03 \\ 0.91 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 9.006, \lambda_2 = -5.77, \lambda_3 = -1.23 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.78 \\ -0.36 \\ -0.51 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.82 \\ -0.55 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.62 \\ 0.42 \\ 0.65 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -6, \lambda_2 = 14.37, \lambda_3 = -12.37 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.71 \\ -0.71 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.64 \\ 0.40 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.28 \\ -0.28 \\ 0.91 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -13.14, \lambda_2 = 14.75, \lambda_3 = 7.38 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.90 \\ -0.35 \\ -0.23 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.75 \\ 0.49 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.005 \\ -0.54 \\ 0.83 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 20. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -11.55, \lambda_2 = 12.03, \lambda_3 = 8.51 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.44 \\ -0.08 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.36 \\ 0.82 \\ 0.42 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.34 \\ 0.90 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
21. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -9.73, \lambda_2 = 11.07, \lambda_3 = 3.66 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.77 \\ -0.21 \\ -0.60 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.19 \\ 0.81 \\ -0.54 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.53 \\ 0.58 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 22. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 7.7, \lambda_2 = -12.82, \lambda_3 = 13.12 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.78 \\ -0.23 \\ 0.57 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.70 \\ -0.45 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.29 \\ 0.67 \\ 0.67 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
23. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 11.89, \lambda_2 = 7.23, \lambda_3 = -12.13 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.25 \\ -0.24 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.77 \\ -0.62 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.57 \\ 0.73 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -2.02, \lambda_2 = 5.63, \lambda_3 = -19.6 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.76 \\ -0.58 \\ 0.27 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.64 \\ 0.72 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.60 \\ -0.48 \\ 0.63 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
25. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 9.73, \lambda_2 = 1.29, \lambda_3 = -10.02 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.85 \\ -0.11 \\ 0.51 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.77 \\ 0.57 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.46 \\ -0.62 \\ 0.63 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -7.51, \lambda_2 = 8.96, \lambda_3 = 10.54 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.89 \\ -0.08 \\ 0.43 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.202 \\ 0.94 \\ -0.24 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.39 \\ 0.30 \\ 0.86 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$
27. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -13.84, \lambda_2 = 3.11, \lambda_3 = 7.72 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.82 \\ -0.38 \\ 0.41 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.86 \\ -0.13 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.30 \\ 0.31 \\ 0.90 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 28. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 2.47, \lambda_2 = -9.71, \lambda_3 = 10.22 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.61 \\ -0.26 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -0.38 \\ 0.71 \\ 0.57 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.54 \\ -0.32 \\ 0.77 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$

$$29. \begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.76, \lambda_2 = -2.80, \lambda_3 = -9.96 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.26 \\ -0.60 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.88 \\ 0.15 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 0.49 \\ -0.37 \\ 0.78 \end{pmatrix} \end{bmatrix} 30. \begin{bmatrix} \lambda_1 = 0.66, \lambda_2 = 6.28, \lambda_3 = -7.94 \\ h_1 = \begin{pmatrix} 0.72 \\ -0.36 \\ 0.57 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.91 \\ 0.06 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -0.55 \\ 0.19 \\ 0.81 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

1.6.

1. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -13.496, \\ \lambda_2 = 5.248 + 2.864i, \\ \lambda_3 = 5.248 - 2.864i. \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 10.016, \\ \lambda_2 = -11.349, \\ \lambda_3 = -5.667. \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -5.416 + 5.831i, \\ \lambda_2 = -5.416 - 5.831i, \\ \lambda_3 = 4.832. \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 7.112, \\ \lambda_2 = -0.556 + 3.821i, \\ \lambda_3 = -0.556 - 3.821i. \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 4.76, \\ \lambda_2 = -5.351, \\ \lambda_3 = 2.591. \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 13.403, \\ \lambda_2 = 8.779, \\ \lambda_3 = 1.819. \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 10.027, \\ \lambda_2 = 3.986 + 6.096i, \\ \lambda_3 = 3.986 - 6.096i. \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -9.071, \\ \lambda_2 = 5.071, \\ \lambda_3 = -4.999. \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -6.224 + 4.709i, \\ \lambda_2 = -6.224 - 4.709i, \\ \lambda_3 = 3.448. \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 5.665, \\ \lambda_2 = -7.548, \\ \lambda_3 = -4.117. \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.907, \\ \lambda_2 = -13.982, \\ \lambda_3 = 1.076. \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 6.384, \\ \lambda_2 = 3.839, \\ \lambda_3 = -1.224. \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -13.006, \\ \lambda_2 = 4.503 + 2.803i, \\ \lambda_3 = 4.503 - 2.803i. \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 7.813, \\ \lambda_2 = -5.406 + 1.501i, \\ \lambda_3 = -5.406 - 1.501i. \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 4.134 + 4.655i, \\ \lambda_2 = 4.134 - 4.655i, \\ \lambda_3 = -2.269. \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 7.211, \\ \lambda_2 = -11.932, \\ \lambda_3 = -1.278. \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.321, \\ \lambda_2 = -6.268, \\ \lambda_3 = 4.946. \end{bmatrix}$
18. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 4.854, \\ \lambda_2 = -1.854, \\ \lambda_3 = 1. \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 2.311 + 5.103i, \\ \lambda_2 = 2.311 - 5.103i, \\ \lambda_3 = 3.377. \end{bmatrix}$
20. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 9.861, \\ \lambda_2 = -13.276, \\ \lambda_3 = 4.414. \end{bmatrix}$
21. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -6.834 + 2.908i, \\ \lambda_2 = -6.834 - 2.908i, \\ \lambda_3 = 6.669. \end{bmatrix}$
22. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 9.637, \\ \lambda_2 = -10.524, \\ \lambda_3 = -6.113. \end{bmatrix}$
23. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -1.827, \\ \lambda_2 = -12.787, \\ \lambda_3 = -0.384. \end{bmatrix}$
24. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 10.313, \\ \lambda_2 = -7.861, \\ \lambda_3 = -4.452. \end{bmatrix}$
25. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 6.114, \\ \lambda_2 = -3.057 + 2.245i, \\ \lambda_3 = -3.057 - 2.245i. \end{bmatrix}$
26. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = -15.996, \\ \lambda_2 = 5.536, \\ \lambda_3 = -2.54. \end{bmatrix}$
27. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 6.497, \\ \lambda_2 = -10.147, \\ \lambda_3 = -1.35. \end{bmatrix}$
28. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 7.443, \\ \lambda_2 = -7.388, \\ \lambda_3 = -0.054. \end{bmatrix}$
29. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 8.313, \\ \lambda_2 = -6.156 + 0.681i, \\ \lambda_3 = -6.156 - 0.681i. \end{bmatrix}$
30. $\begin{bmatrix} \lambda_1 = 14.697, \\ \lambda_2 = 11.784, \\ \lambda_3 = -3.481. \end{bmatrix}$

При проведении научных и инженерных расчетов достаточно часто возникает необходимость решения скалярных нелинейных уравнений или систем нелинейных уравнений. В настоящем разделе рассматривается ряд численных методов, позволяющих решать подобные задачи.

2.1. Решение нелинейных уравнений

Численное решение нелинейных (алгебраических или трансцендентных) уравнений вида

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

заключается в нахождении значений x , удовлетворяющих с заданной точностью данному уравнению, и состоит из следующих основных этапов:

- *отделение* (изоляция, локализация) корней уравнения;
- уточнение с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.

Целью первого этапа является нахождение отрезков из области определения функции $f(x)$, внутри которых содержится только один корень решаемого уравнения. Иногда ограничиваются рассмотрением лишь какой-нибудь части области определения, вызывающей по тем или иным соображениям интерес. Для реализации данного этапа используются *графические* или *аналитические* способы.

При аналитическом способе отделения корней полезна следующая теорема [2].

ТЕОРЕМА 2.1

Непрерывная строго монотонная функция $f(x)$ имеет единственный нуль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является сохранение знака производной функции.

Графический способ отделения корней целесообразно использовать в случае, когда имеется возможность построения графика функции $y = f(x)$. Наличие графика исходной функции дает непосредственное представление о количестве и расположении нулей функции, что позволяет определить промежутки, внутри которых содержится только один корень. Если построение графика функции $y = f(x)$ вызывает затруднение, часто оказывается удобным преобразовать уравнение (2.1) к эквивалентному виду $f_1(x) = f_2(x)$ и построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут соответствовать значениям корней решаемого уравнения.

Так или иначе при завершении первого этапа должны быть определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения.

Для уточнения корня с требуемой погрешностью обычно применяется какой-либо итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, сходящейся к искомому корню $x^{(*)}$ уравнения (2.1).

Метод половинного деления. Процесс уточнения корня уравнения (2.1) на отрезке $[a, b]$ при условии, что функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке, заключается в следующем ([1], [3]).

Исходный отрезок делится пополам. Если $f((a + b)/2) = 0$, то корнем уравнения является $x^{(*)} = (a + b)/2$. Если $f((a + b)/2) \neq 0$, то выбирается та из половин $[a, (a + b)/2]$ или $[(a + b)/2, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ снова делится пополам и проводится то же рассмотрение и т. д. В результате на каком-то этапе либо находится точный корень уравнения (2.1), либо имеется последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a^{(1)}, b^{(1)}]$, $[a^{(2)}, b^{(2)}]$, \dots , $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, для которых $f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Если требуется найти корень с погрешностью ε , то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε . Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой погрешностью.

Метод Ньютона (метод касательных). При нахождении корня уравнения (2.1) методом Ньютона итерационный процесс определяется формулой

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Для начала вычислений требуется задание начального приближения $x^{(0)}$. Условия сходимости метода определяются следующей теоремой [2].

ТЕОРЕМА 2.2

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные постоянного знака и пусть $f(a)f(b) < 0$. Тогда, если точка $x^{(0)}$ выбрана на $[a, b]$ так, что

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0, \quad (2.3)$$

то начатая с нее последовательность $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяемая методом Ньютона (2.2), монотонно сходится к корню $x^{(*)} \in (a, b)$ уравнения (2.1).

В качестве условия окончания итераций в практических вычислениях часто используется правило $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$.

Метод секущих. Использование метода Ньютона предполагает вычисление на каждой итерации значения функции и ее производной. Заменяя производную функции приближенным разностным отношением

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

и подставляя это отношение в (2.2), получаем итерационную формулу метода секущих

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Использование этого метода избавляет от необходимости расчета производной функции в процессе вычислений. Метод является двухшаговым; как видно из формулы (2.4), результат $(k+1)$ -го шага зависит от результатов (k) -го и $(k-1)$ -го шагов.

Для выполнения первой итерации требуется задание двух начальных точек $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Выбор начальной точки $x^{(0)}$ осуществляется по тому же принципу, что и в методе касательных, например с использованием условия (2.3). Вторая начальная точка $x^{(1)}$ выбирается в непосредственной близости от $x^{(0)}$, желательно между точкой $x^{(0)}$ и искомым корнем.

Окончание счета по методу секущих, учитывая его быструю сходимость, можно контролировать путем проверки на малость или модуля невязки $|f(x^{(k)})|$, или модуля $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ (см. [2]).

Метод простой итерации. При использовании метода простой итерации уравнение (2.1) заменяется эквивалентным уравнением с выделенным линейным членом

$$x = \varphi(x). \quad (2.5)$$

Решение ищется путем построения последовательности

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

начиная с некоторого заданного значения $x^{(0)}$. Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, а $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — сходящаяся последовательность, то значение $x^{(*)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ является решением уравнения (2.5). Условия сходимости метода и оценка его погрешности определяются теоремой, доказанной в [2].

ТЕОРЕМА 2.3

Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, если выполняются условия

$$\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b],$$

$$\exists q: |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in (a, b),$$

то уравнение (2.5) имеет единственный на $[a, b]$ корень $x^{(*)}$; к этому корню сходится определяемая методом простой итерации последовательность $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, начинающаяся с любого $x^{(0)} \in [a, b]$. При этом справедливы оценки погрешности ($\forall k \in N$):

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|, \quad (2.7)$$

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q^{k+1}}{1-q} |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

ПРИМЕР 2.1

С погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$ решить уравнение

$$f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0. \quad (2.8)$$

РЕШЕНИЕ

Для локализации корней применим графический способ. Преобразуем исходное уравнение к эквивалентному виду

$$e^{2x} = 4 - 3x.$$

Построив графики функций $f_1(x) = e^{2x}$ и $f_2(x) = 4 - 3x$ (рис. 2.1), определяем, что у решаемого уравнения имеется только один корень, который находится в интервале $0.4 < x^{(*)} < 0.6$.

Уточним значение корня с требуемой погрешностью, пользуясь приведенными методами.

Метод половинного деления. В качестве исходного отрезка выберем $[0.4, 0.6]$. Результаты дальнейших вычислений, согласно приведенному выше алгоритму, содержатся в табл. 2.1.

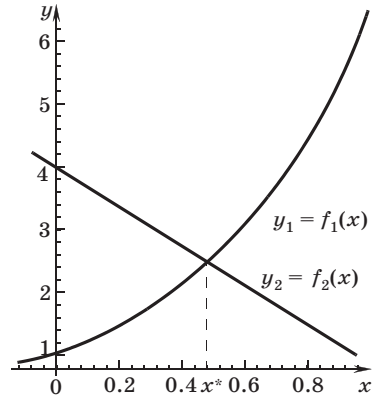


Рис. 2.1

Таблица 2.1

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$\frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$	$f\left(\frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}\right)$
0	0.4000	0.6000	-0.5745	1.1201	0.5000	0.2183
1	0.4000	0.5000	-0.5745	0.2183	0.4500	-0.1904
2	0.4500	0.5000	-0.1904	0.2183	0.4750	0.0107
3	0.4500	0.4750	-0.1904	0.0107	0.4625	-0.0906
4	0.4625	0.4750	-0.0906	0.0107	0.4688	-0.0402
5	0.4688	0.4750	-0.0402	0.0107	0.4719	-0.0148
6	0.4719	0.4750	-0.0148	0.0107	0.4734	-0.0020
7	0.4734	0.4750	-0.0020	0.0107	[0.4742]	

Корень уравнения: $x^{(*)} \approx 0.474$.

Метод Ньютона. Для корректного использования данного метода необходимо в соответствии с теоремой 2.2 определить поведение первой и второй производных функции $f(x)$ на интервале уточнения корня и правильно выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

Для функции $f(x) = e^{2x} + 3x - 4$ имеем $f'(x) = 2e^{2x} + 3$, $f''(x) = 4e^{2x}$ — положительные во всей области определения функции. При решении уравнения $f(x) = 0$ в качестве начального приближения можно выбрать правую границу интервала $x^{(0)} = 0.6$, для которой выполняется неравенство (2.3):

$$f(0.6)f''(0.6) > 0.$$

Дальнейшие вычисления проводятся по формуле (2.2), где

$$f(x^{(k)}) = e^{2x^{(k)}} + 3x^{(k)} - 4, \quad f'(x^{(k)}) = 2e^{2x^{(k)}} + 3.$$

Итерации завершаются при выполнении условия $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$. Результаты вычислений содержатся в табл. 2.2.

Таблица 2.2

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$
0	0.6000	1.1201	9.6402	-0.1162
1	0.4838	0.0831	8.2633	-0.0101
2	0.4738	0.0005	8.1585	-0.0001
3	[0.4737]			

Корень уравнения: $x^{(*)} \approx 0.474$.

Метод секущих. В качестве начальных точек зададим: $x^{(0)} = 0.6$ и $x^{(1)} = 0.59$. Дальнейшие вычисления проводятся по формуле (2.4), где $f(x^{(k)}) = e^{2x^{(k)}} + 3x^{(k)} - 4$. Итерации завершаются при выполнении условия $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$. Результаты вычислений содержатся в табл. 2.3.

Таблица 2.3

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	0.6000	1.1201
1	0.5900	1.0244
2	0.4830	0.0765
3	0.4744	0.0056
4	[0.4737]	

Корень уравнения: $x^{(*)} \approx 0.474$.

Метод простой итерации. Уравнение (2.8) можно записать в виде

$$x = (4 - e^{2x})/3 \quad (2.9)$$

или

$$x = (\ln (4 - 3x))/2. \quad (2.10)$$

Из двух этих вариантов приемлемым является вариант (2.10), так как, взяв в качестве основного интервал $(0.4, 0.55)$ и положив $\varphi(x) = (\ln(4 - 3x))/2$, будем иметь:

$$\varphi(x) \in [0.4, 0.55] \forall x \in [0.4, 0.55], \quad \varphi'(x) = -\frac{3}{2(4-3x)}.$$

Таким образом, на интервале $(0.4, 0.55)$ получим $|\varphi'(x)| < 0.64 = q$. Условия теоремы 2.3 выполнены.

В качестве начального приближения положим $x^{(0)} = (0.4 + 0.55)/2 = 0.475$. Вычисляем последовательные приближения $x^{(k)}$ с одним запасным знаком по формуле (2.6), где $\varphi(x^{(k)}) = (\ln(4 - 3x^{(k)}))/2$. В соответствии с (2.7) достижение требуемой точности контролируется условием $\frac{1}{1-a}|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

k	$x^{(k)}$	$\varphi(x^{(k)})$
0	0.4750	0.4729
1	0.4729	0.4741
2	0.4741	0.4734
3	0.4734	0.4738
4	[0.4738]	

Корень уравнения $x^{(*)} \approx 0.474$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если непосредственное преобразование уравнения (2.1) к виду (2.5) не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода простой итерации, можно преобразовать уравнение (2.1) к следующему эквивалентному уравнению:

$$x = x - \lambda f(x).$$

Данное уравнение имеет вид (2.5) с $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. Здесь λ — параметр, который подбирается таким образом, чтобы в нужной области выполнялось неравенство $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1$ (см. [2], [3]).

2.2. Решение систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений с n неизвестными можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

или, более коротко, в векторной форме

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

где \mathbf{x} — вектор неизвестных величин, \mathbf{f} — вектор-функция

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В редких случаях для решения такой системы удастся применить метод последовательного исключения неизвестных и свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Значения других неизвестных величин находятся соответствующей подстановкой в конкретные выражения. Однако в подавляющем большинстве случаев для решения систем нелинейных уравнений используются итерационные методы. В дальнейшем предполагается, что ищется изолированное решение нелинейной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ

Как и в случае одного нелинейного уравнения, локализация решения может осуществляться на основе специфической информации по конкретной решаемой задаче (например, по физическим соображениям) и с помощью методов математического анализа. При решении системы двух уравнений часто удобным является графический способ, когда месторасположение корней определяется как точки пересечения кривых $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$ на плоскости (x_1, x_2) .

Метод Ньютона. Если определено начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$, то итерационный процесс нахождения решения системы (2.11) методом Ньютона можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)}, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

где значения приращений $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$, ..., $\Delta x_n^{(k)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой выражаются через известное предыдущее приближение $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} = 0, \\ f_2(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} = 0, \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

В векторно-матричной форме расчетные формулы имеют вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

где вектор приращений

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

находится из решения уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Здесь

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

— матрица Якоби первых производных вектора-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Выражая из (2.16) вектор приращений $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ и подставляя его в (2.15), итерационный процесс нахождения решения можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})$ — матрица, обратная матрице Якоби. Формула (2.17) есть обобщение формулы (2.2) на случай систем нелинейных уравнений.

При реализации алгоритма метода Ньютона в большинстве случаев предпочтительным является не вычисление обратной матрицы $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$, а нахождение из системы (2.14) значений приращений $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)}$ и вычисление нового приближения по (2.13). Для решения таких линейных систем можно привлекать самые разные методы, как прямые, так и итерационные (см. раздел 1.1), с учетом размерности n решаемой задачи и специфики матриц Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ (например, симметрии, разреженности и т. п.).

Использование метода Ньютона предполагает дифференцируемость функций $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$ и невырожденность матрицы Якоби ($\det \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$). В случае, если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, итерации сходятся к точному решению, причем сходимость является квадратичной.

В практических вычислениях в качестве условия окончания итераций обычно используется критерий (см. [2], [5]).

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad (2.18)$$

где ε — заданная погрешность.

ПРИМЕР 2.2

Методом Ньютона найти положительное решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0.1 x_1^2 + x_1 + 0.2 x_2^2 - 0.3 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0.2 x_1^2 + x_2 - 0.1 x_1 x_2 - 0.7 = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

с погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

РЕШЕНИЕ

Для выбора начального приближения применяем графический способ. Построив на плоскости (x_1, x_2) в интересующей нас области кривые $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$ (рис. 2.2), определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате $0 < x_1 < 0.5$, $0.5 < x_2 < 1.0$.

В качестве начального приближения примем $x_1^{(0)} = 0.25$, $x_2^{(0)} = 0.75$.

Для системы двух уравнений расчетные формулы (2.13), (2.14) удобно записать в виде, разрешенном относительно $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\det A_1^{(k)}}{\det J^{(k)}}, \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\det A_2^{(k)}}{\det J^{(k)}}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.20)$$

$$\text{где } J^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$A_1^{(k)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad A_2^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере имеем

$$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.1x_1^{(k)2} + x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)2} - 0.3,$$

$$f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.2x_1^{(k)2} + x_2^{(k)} - 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 0.7,$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.2x_1^{(k)} + 1, \quad \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 0.4x_2^{(k)},$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.4x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)}, \quad \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 1 - 0.1x_1^{(k)}.$$

Подставляя в правые части соотношений (2.20) выбранные значения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, получим приближение $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, используемое, в свою очередь, для нахождения $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$. Итерации продолжаются до выполнения условия (2.18), в котором

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|.$$

Результаты вычислений содержатся в табл. 2.5.

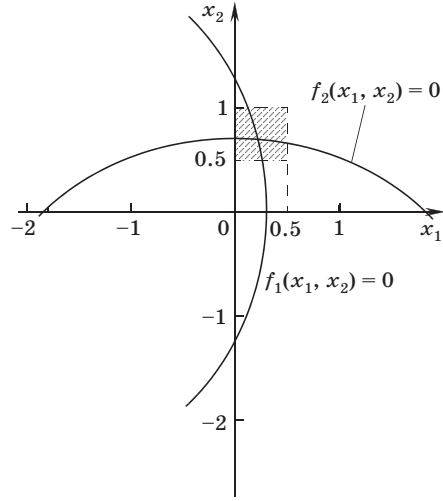


Рис. 2.2

то в области G имеем

$$\left| \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| = |-0.2x_1| + |-0.4x_2| \leq 0.5,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| = |-0.4x_1 + 0.1x_2| + |0.1x_1| \leq 0.2,$$

$$\max_{x \in G} \|\varphi'(\mathbf{x})\| \leq 0.5, \Rightarrow q < 1.$$

Следовательно, если последовательные приближения $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ не покинут области G (что легко обнаружить в процессе вычислений), то итерационный процесс будет сходящимся.

В качестве начального приближения примем $x_1^{(0)} = 0.25, x_2^{(0)} = 0.75$. Последующие приближения определяем как

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.3 - 0.1x_1^{(k)2} - 0.2x_2^{(k)2},$$

$$\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.7 - 0.2x_1^{(k)2} + 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)}.$$

В соответствии с (2.26) вычисления завершаются при выполнении условия

$$\frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon,$$

где

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|.$$

Результаты вычислений содержатся в табл. 2.6.

Таблица 2.6

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$	$\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$
0	0.25000	0.7500	0.18125	0.70702
1	0.18125	0.70702	0.19674	0.70617
2	0.19674	0.70617	0.19639	0.70615
3	0.19639	0.70615	0.19641	0.70615
4	0.19641	0.70615		

Корни системы уравнений: $x_1^{(*)} \approx 0.1964, x_2^{(*)} \approx 0.7062$.

ЗАМЕЧАНИЕ

В случае, когда при анализе сходимости конкретной итерационной схемы проверка условия (2.27) является затруднительной, можно определить норму матрицы $M(\mathbf{x})$ с элементами $m_{ij}(\mathbf{x}) = \max_{x \in G} \left| \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|$ так, что $\max_{x \in G} \|\varphi'(\mathbf{x})\| \leq \|M(\mathbf{x})\|$. Если $\|M(\mathbf{x})\| \leq q < 1$, то последовательные приближения сходятся к решению $\mathbf{x}^{(*)}$ (см. [5], [6]).

ЗАДАЧИ

2.1. Методами простой итерации и Ньютона найти положительный корень нелинейного уравнения; начальное приближение определить графически.

1. $2^x - x^2 - 0.5 = 0$.
2. $\ln(x + 2) - x^2 = 0$.
3. $\sqrt{1 - x^2} - e^x + 0.1 = 0$.
4. $x^3 + x^2 - x - 0.5 = 0$.
5. $\cos x + 0.25x - 0.5 = 0$.
6. $e^x - 2x - 2 = 0$.
7. $2^x + x^2 - 2 = 0$.
8. $\ln(x + 1) - 2x^2 + 1 = 0$.
9. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.
10. $\sin x - 2x^2 + 0.5 = 0$.
11. $e^x - x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$.
12. $3^x - 5x^2 + 1 = 0$.
13. $\ln(x + 1) - 2x + 0.5 = 0$.
14. $x^3 - 2x^2 - 10x + 15 = 0$.
15. $\sin x - x^2 + 1 = 0$.
16. $xe^x + x^2 - 1 = 0$.
17. $4^x - 5x - 2 = 0$.
18. $\ln(x + 1) - x^3 + 1 = 0$.
19. $x^4 - 2x - 1 = 0$.
20. $\operatorname{tg} x - 5x^2 + 1 = 0, x \in [-1, 1]$.
21. $3\sqrt{x + 1} - e^x - 0.5 = 0$.
22. $10^x - 5x - 2 = 0$.
23. $\ln(x + 2) - x^4 + 0.5 = 0$.
24. $x^6 - 5x - 2 = 0$.
25. $\sqrt{x + 2} - 2\cos x = 0$.
26. $\lg(x + 1) - x + 0.5 = 0$.
27. $x^6 - 5x^3 - 2 = 0$.
28. $\lg(2x + 1) - x^3 + 1 = 0$.
29. $x^5 - 7x^2 + 3 = 0$.
30. $x \lg(x + 2) + x^2 - 1 = 0$.

2.2. Методом Ньютона или методом простой итерации решить систему нелинейных уравнений (при наличии нескольких решений найти то из них, в котором значения неизвестных являются положительными); начальное приближение определить графически.

Вариант	Значение параметра a	Система уравнений
1 2 3	2 3 4	$\begin{cases} (x_1^2 + a^2)x_2 - a^3 = 0, \\ (x_1 - a/2)^2 + (x_2 - a/2)^2 - a^2 = 0. \end{cases}$
4 5 6	1 2 3	$\begin{cases} x_1 - \cos x_2 = 1, \\ x_2 - \lg(x_1 + 1) = a. \end{cases}$
7 8 9	2 3 4	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0, \\ x_1 - e^{x_2} + a = 0. \end{cases}$
10 11 12	1 2 3	$\begin{cases} x_1 - \cos x_2 = a, \\ x_2 - \sin x_1 = a. \end{cases}$
13 14 15	2 3 4	$\begin{cases} x_1^2/a^2 + x_2^2/(a/2)^2 - 1 = 0, \\ ax_2 - e^{x_1} - x_1 = 0. \end{cases}$
16 17 18	2 3 4	$\begin{cases} ax_1 - \cos x_2 = 0, \\ ax_2 - e^{x_1} = 0. \end{cases}$

Окончание таблицы

Вариант	Значение параметра a	Система уравнений
19 20 21	1 2 3	$\begin{cases} x_1^2 - 2 \lg x_2 - 1 = 0, \\ x_1^2 - ax_1x_2 + a = 0. \end{cases}$
22 23 24	1 2 3	$\begin{cases} ax_1^2 - x_1 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_2 - \operatorname{tg} x_1 = 0. \end{cases}$
25 26 27	1 2 3	$\begin{cases} ax_1^2 - x_2 + x_2^2 - a = 0, \\ x_1 - \sqrt{x_2 + a} + 1 = 0. \end{cases}$
28 29 30	4 5 6	$\begin{cases} e^{x_1x_2} + x_1 - a = 0, \\ x_1^2 - ax_2 - 1 = 0. \end{cases}$

ОТВЕТЫ

2.1. Для всех вариантов $\varepsilon = 10^{-4}$.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. -0.4708; 1.5738; 4.1423. | 2. -0.5876; 1.0571. |
| 3. -0.9590; 0.0915. | 4. -1.4516; -0.4030; 0.8546. |
| 5. -0.7966; 1.4271; 4.1461. | 6. -0.7680; 1.6784. |
| 7. -1.2578; 0.6535. | 8. -0.4492; 0.9070. |
| 9. -1.8019; -0.4450; 1.2470. | 10. -0.3112; 0.7744. |
| 11. -0.5926; 1.0738. | 12. -0.5556; 0.8380. |
| 13. -0.8997; 0.4282. | 14. -3.0000; 1.3820; 3.6180. |
| 15. -0.6368; 1.4096. | 16. -1.1675; 0.4782. |
| 17. -0.2607; 1.6942. | 18. -0.7648; 1.2154. |
| 19. -0.4747; 1.3953. | 20. -0.3548; 0.5738. |
| 21. -0.9095; 1.4294. | 22. -0.2997; 0.7654. |
| 23. -0.8837; 1.1319. | 24. -0.3992; 1.4487. |
| 25. -1.0667; 0.6262. | 26. -0.9658; 0.7407. |
| 27. -0.7194; 1.7514. | 28. -0.4600; 1.1494. |
| 29. -0.6426; 0.6691; 1.8273. | 30. -1.0000; 0.8011. |

2.2. Для всех вариантов $\varepsilon = 10^{-4}$.

Вариант	x_1	x_2	Вариант	x_1	x_2
1	2.9646	0.6255	16	0.3737	0.7266
2	4.4469	0.9383	17	0.3001	0.4500
3	5.9293	1.2511	18	0.2375	0.3170
4	1.2222	1.3468	19	1.2758	2.0596
5	0.4445	2.1597	20	1.1488	1.4449
6	0.0094	3.0041	21	1.1006	1.2755
7	1.5480	1.2664	22	0.8198	1.0713
8	2.4721	1.6997	23	0.7022	0.8461
9	3.4587	2.0094	24	0.6111	0.7006
10	0.8322	1.7394	25	0.5692	1.4623
11	1.0389	2.8618	26	0.8455	1.4057
12	2.2104	3.8023	27	1.0000	1.0000
13	0.4249	0.9772	28	1.7125	0.4832
14	1.1178	1.3920	29	1.9592	0.5677
15	1.7091	1.8082	30	2.1706	0.6186

В настоящем разделе рассмотрены задачи приближения функций с помощью многочленов Лагранжа и Ньютона, с использованием сплайн-интерполяции и метода наименьших квадратов. Приводятся формулы численного дифференцирования, полученные на основе приближения функций и их производных многочленами. Описаны методы численного интегрирования — прямоугольников, трапеций, парабол (метод Симпсона), метод Рунге — Ромберга для оценки точности и уточнения результатов интегрирования. Все методы иллюстрируются подробно разобранными примерами решения характерных задач. Для самостоятельного решения приведены пять задач с ответами; в каждой задаче содержится 30 вариантов условий.

3.1. Интерполяция

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано множество несовпадающих точек x_i (интерполяционных узлов), в которых известны значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Приближающая функция $\varphi(x, a)$ такая, что выполняются равенства

$$\varphi(x_i, a_0, \dots, a_n) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.1)$$

называется *интерполяционной*.

Наиболее часто в качестве приближающей функции используют многочлены степени n

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) значения узлов интерполяции и используя условие $P_n(x_i) = f_i$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i :

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = f_k, \quad k = 0, \dots, n, \quad (3.3)$$

которая в случае несовпадения узлов интерполяции имеет единственное решение.

Для нахождения интерполяционного многочлена не обязательно решать систему (3.3). Произвольный многочлен может быть записан в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x). \quad (3.4)$$

Здесь $l_i(x)$ — многочлены степени n , так называемые *лагранжевы многочлены влияния*, которые удовлетворяют условию

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

и, соответственно,

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

а интерполяционный многочлен (3.4) запишется в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (3.5)$$

Интерполяционный многочлен, записанный в форме (3.5), называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Если ввести функцию $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, то выражение для интерполяционного многочлена Лагранжа примет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i) \omega'_{n+1}(x_i)}. \quad (3.6)$$

Недостатком интерполяционного многочлена Лагранжа является необходимость полного пересчета всех коэффициентов в случае добавления дополнительных интерполяционных узлов. Чтобы избежать указанного недостатка, используют интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Введем понятие *разделенной разности*. Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка обозначаются как $f(x_i, x_j)$ и определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}.$$

Разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}.$$

Разделенная разность произвольного порядка определяется соотношениями

$$f(x_i, x_j, x_k, \dots, x_l, x_n) = \frac{f(x_i, x_j, x_k, \dots, x_l) - f(x_j, x_k, \dots, x_n)}{x_i - x_n}. \quad (3.7)$$

Таким образом, для $(n + 1)$ -й точки могут быть построены разделенные разности до n -го порядка; разделенные разности более высоких порядков равны нулю.

Пусть известны значения аппроксимируемой функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n . Интерполяционный многочлен, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $f(x)$, может быть записан в виде

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.8)$$

Запись многочлена в виде (3.8) называется *интерполяционным многочленом Ньютона*. Если функция $f(x)$ не есть многочлен n -й степени, то формула (3.8) для $P_n(x)$ приближает функцию $f(x)$ с некоторой

погрешностью. Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Если функция задана в точках x_0, x_1, \dots, x_n , принадлежащих некоторому отрезку $[a, b]$, то при построении интерполяционного многочлена Ньютона удобно пользоваться таблицей разделенных разностей, пример которой для $n = 4$ приведен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

Для повышения точности интерполяции в сумму (3.8) могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

Погрешность интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона для случая аналитически заданной функции $f(x)$ априорно может быть оценена по формуле, вывод которой приводится, например, в [1]:

$$|\varepsilon_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (3.9)$$

где $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(\xi)|$, $\xi \in [a, b]$.

Если величину производных аппроксимируемой функции оценить сложно (например, для таблично заданной функции), то используется апостериорная оценка по первому отброшенному члену интерполяционного многочлена Ньютона, в который входят разделенные разности, являющиеся аналогами производных соответствующих порядков.

Использование одной интерполяционной формулы на большом числе узлов нецелесообразно. Интерполяционный многочлен может проявить свои колебательные свойства, при этом его значения между узлами могут существенно отличаться от значений интерполируемой функции. Одна из возможностей преодоления этого недостатка заключается в применении *сплайн-интерполяции*.

Суть сплайн-интерполяции заключается в определении интерполирующей функции по формулам одного типа для различных непересекающихся промежутков и в стыковке значений функции и ее производных на их границах.

Наиболее широко применяемым является случай, когда между любыми двумя точками разбиения исходного отрезка строится многочлен n -й степени:

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_{ik} x^k, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

который в узлах интерполяции принимает значения аппроксимируемой функции и непрерывен вместе со своими $(n-1)$ -й производными. Здесь точки x_0, x_1, \dots, x_n упорядочены по возрастанию, т. е.

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad x_0 = a, x_n = b.$$

ПРИМЕР 3.1

Используя таблицу значений y_i функции $y = f(x)$, вычисленных в точках $x_i, i = 0, \dots, 3$, построить многочлен Лагранжа, проходящий через точки $\{x_i, y_i\}$, вычислить значение погрешности интерполяции в точке X^* для $y = \ln(x), x_i = 0.1, 0.5, 0.9, 1.3; X^* = 0.8$ и сравнить ее с оценкой (3.9).

РЕШЕНИЕ

Функция $y = \ln(x)$ задана в четырех точках, следовательно, искомым является многочлен Лагранжа третьей степени

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 f_i \frac{\omega_4(x)}{\omega_4'(x_i)}, \quad \omega_4(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

$$\omega_4'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3), \quad \omega_4'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3),$$

$$\omega_4'(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3), \quad \omega_4'(x_3) = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Заполним таблицу:

i	x_i	f_i	$\omega_4'(x_i)$	$f_i/\omega_4'(x_i)$	$X^* - x_i$
0	0.1	-2.30259	-0.384	5.99632	0.7
1	0.5	-0.69315	0.128	-5.41521	0.3
2	0.9	-0.10536	-0.128	0.82313	-0.1
3	1.3	0.26236	0.384	0.68324	-0.5

Искомый многочлен Лагранжа может быть записан в виде

$$L_3(x) = 5.99632(x - 0.5)(x - 0.9)(x - 1.3) - 5.41521(x - 0.1)(x - 0.9)(x - 1.3) + 0.82313(x - 0.1)(x - 0.5)(x - 1.3) + 0.68324(x - 0.1)(x - 0.5)(x - 0.9).$$

Вычислим значение интерполяционного многочлена и точное значение функции в точке $X^* = 0.8$:

$$L_3(0.8) = -0.20036, \quad y(0.8) = \ln(0.8) = -0.22314.$$

Абсолютная погрешность интерполяции составляет $\Delta(L_3(0.8)) = 0.02278$.

Оценка погрешности интерполяции по формуле (3.9) составляет

$$|\varepsilon_n(0.8)| \leq \frac{6 \cdot 10^4}{24} \cdot 1.05 \cdot 10^{-2} = 26.25.$$

ПРИМЕР 3.2

Используя таблицу значений y_i функции $y = f(x)$, вычисленных в точках $x_i, i = 0, \dots, 3$, построить многочлен Ньютона, проходящий через точки $\{x_i, y_i\}$.

Вычислить значение погрешности интерполяции в точке X^* и сравнить ее с оценкой (3.9).

РЕШЕНИЕ

Имеем $y = \sin(\pi x/6), X_i = 0, 1.0, 2.0, 3.0; X^* = 1.5$.

Функция $y = \sin(\pi x/6)$ задана в четырех точках, следовательно, искомым является многочлен Ньютона третьей степени

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Заполним таблицу конечных разностей:

i	x_i	f_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0.0	0.0			
1	1.0	0.5	0.5	-0.06699	
2	2.0	0.86603	0.36603	-0.11603	-0.01635
3	3.0	1.0	0.13398		

Искомый многочлен Ньютона записывается в виде

$$P_3(x) = 0.5x - 0.06699x(x - 1.0) - 0.01635x(x - 1.0)(x - 2.0).$$

Вычислим значение интерполяционного многочлена и точное значение функции в точке $X^* = 1.5$:

$$P_3(1.5) = 0.70589, \quad y(1.5) = \sin(\pi/4) = 0.70711.$$

Абсолютная погрешность интерполяции составляет $\Delta(P_3(1.5)) = 0.00122$, $|\varepsilon_4(1.5)| = (0.0751/24) \cdot 0.5625 = 0.0017$.

ПРИМЕР 3.3

Построить кубический сплайн для функции, заданной в узлах интерполяции, предполагая, что сплайн имеет нулевую кривизну при $x = x_0$ и $x = x_4$; вычислить значение функции $f(1.5)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
f_i	0.0	1.8415	2.9093	3.1411	3.2432

РЕШЕНИЕ

Запишем систему уравнений (3.13):

$$\begin{cases} 4c_2 + c_3 = -2.3209, \\ c_2 + 4c_3 + c_4 = -2.5080, \\ c_3 + 4c_4 = -0.38924. \end{cases}$$

Решив данную систему, найдем c_2 , c_3 , c_4 и, воспользовавшись формулами (3.14), заполним таблицу.

i	$[x_{i-1}, x_i]$	a_i	b_i	c_i	d_i
1	[0, 1]	0.0	1.9913	0.0	-0.14983
2	[1, 2]	1.8415	1.5418	-0.44949	-0.02450
3	[2, 3]	2.9093	0.56934	-0.52299	0.18548
4	[3, 4]	3.1411	0.07978	0.03344	-0.01115

Имеем

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Вычислим значение функции $f(1.5)$. Точка $x = 1.5$ принадлежит отрезку $[1, 2]$, на этом отрезке таблично заданная функция представляется кубическим сплайном:

$$f(x) = 1.8415 + 1.5418(x - 1) - 0.44949(x - 1)^2 - 0.0245(x - 1)^3, \\ 1 \leq x \leq 2, \quad i = 2.$$

Получаем $f(1.5) = 2.4969$.

3.2. Метод наименьших квадратов

Пусть задана таблично в узлах x_j функция $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$. При этом значения функции y_j определены с некоторой погрешностью. Пусть также из физических соображений известен вид функции, которой должны приближенно удовлетворять табличные точки, например многочлен степени n , у которого неизвестны коэффициенты a_i , $F_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Неизвестные коэффициенты будем находить из условия минимума квадратичного отклонения многочлена от таблично заданной функции:

$$\Phi = \sum_{j=0}^N [F_n(x_j) - y_j]^2. \quad (3.15)$$

Минимума Φ можно добиться только за счет изменения коэффициентов многочлена $F_n(x)$. Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2 \sum_{j=0}^N \left[\sum_{i=0}^n a_i x_j^i - y_j \right] x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Эту систему для удобства преобразуют к виду

$$\sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^N x_j^{k+i} = \sum_{j=0}^N y_j x_j^k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

Система (3.17) называется *нормальной системой метода наименьших квадратов* (МНК) и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i . Решив систему, построим многочлен $F_n(x)$, приближающий функцию $f(x)$ и минимизирующий квадратичное отклонение.

Необходимо отметить, что система (3.17) с увеличением степени n приближающего многочлена становится плохо обусловленной и решение ее связано с потерей точности. Поэтому при использовании метода наименьших квадратов, как правило, используют приближающий многочлен не выше третьей степени.

ПРИМЕР 3.4

Для таблично заданной функции путем решения нормальной системы МНК найти приближающие многочлены первой и второй степени. Для каждого из приближающих многочленов вычислить сумму квадратов ошибок. Построить графики приближаемой функции и приближающих многочленов.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5
y_i	0.0	1.3038	1.8439	2.2583	2.6077	2.9155

РЕШЕНИЕ

Найдем приближающий многочлен первой степени $F_1(x) = a_0 + a_1 x$. Для нахождения неизвестных коэффициентов a_0, a_1 запишем нормальную систему МНК (3.17):

$$\begin{cases} a_0(N+1) + a_1 \sum_{j=0}^N x_j = \sum_{j=0}^N y_j, \\ a_0 \sum_{j=0}^N x_j + a_1 \sum_{j=0}^N x_j^2 = \sum_{j=0}^N y_j x_j. \end{cases} \quad (3.18)$$

В данном примере $N = 5$, значения $x_i, y_i, i = 0, \dots, 5$, приведены в таблице. Подставив числовые значения в (3.18), получим

$$\begin{cases} 6a_0 + 25.5a_1 = 10.9292, \\ 25.5a_0 + 158.95a_1 = 62.517. \end{cases} \quad (3.19)$$

Решив систему (3.19), получим $a_0 = 0.4713, a_1 = 0.3177$. Таким образом найден приближающий многочлен первой степени $F_1(x) = 0.4713 + 0.3177x$, значения которого в заданных точках приведены в таблице:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5
$F_1(x_i)$	0.4713	1.0114	1.5515	2.0916	2.6317	3.1718

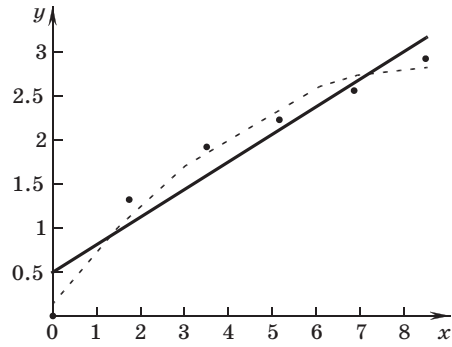


Рис. 3.1

Сумма квадратов ошибок составляет $\Phi = \sum_{j=0}^5 [F_1(x_j) - y_j]^2 = 0.4872$.

Найдем приближающий многочлен второй степени $F_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Для нахождения неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 запишем нормальную систему МНК (3.17):

$$\begin{cases} a_0(N+1) + a_1 \sum_{j=0}^N x_j + a_2 \sum_{j=0}^N x_j^2 = \sum_{j=0}^N y_j, \\ a_0 \sum_{j=0}^N x_j + a_1 \sum_{j=0}^N x_j^2 + a_2 \sum_{j=0}^N x_j^3 = \sum_{j=0}^N y_j x_j, \\ a_0 \sum_{j=0}^N x_j^2 + a_1 \sum_{j=0}^N x_j^3 + a_2 \sum_{j=0}^N x_j^4 = \sum_{j=0}^N y_j x_j^2. \end{cases} \quad (3.20)$$

Подставив числовые значения в (3.20), получим

$$\begin{cases} 6a_0 + 25.5a_1 + 158.95a_2 = 10.9292, \\ 25.5a_0 + 158.95a_1 + 1105.43a_2 = 62.517, \\ 158.95a_0 + 1105.43a_1 + 8176.71a_2 = 415.045. \end{cases} \quad (3.21)$$

Решив систему (3.21), найдем $a_0 = 0.1295, a_1 = 0.6193, a_2 = -0.0355$. Таким образом, сформирован приближающий многочлен второй степени $F_2(x) = 0.1295 + 0.6193x - 0.0355x^2$, значения которого в заданных точках приведены в таблице:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5
$F_2(x_i)$	0.1295	1.0798	1.8250	2.3651	2.7000	2.8299

Сумма квадратов ошибок составляет $\Phi = \sum_{j=0}^5 [F_2(x_j) - y_j]^2 = 0.0946$.

На рис. 3.1 точками обозначены табличные данные, сплошной линией — приближающий многочлен первой степени, пунктирной — приближающий многочлен второй степени.

3.3. Численное дифференцирование

Формулы численного дифференцирования в основном используются при нахождении производных от функции $y = f(x)$, заданной таблично. Исходная функция $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, M$, на отрезках $[x_j, x_{j+k}]$ заменяется некоторой приближающей, легко вычисляемой функцией $\varphi(x, a)$, $y = \varphi(x, a) + R(x)$, где $R(x)$ — остаточный член приближения, a — вектор коэффициентов, вообще говоря, различный для каждого из рассматриваемых отрезков, и полагают, что $y'(x) \approx \varphi'(x, a)$. Наиболее часто в качестве приближающей функции $\varphi(x, a)$ берется интерполяционный многочлен $\varphi(x, a) = P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, а производные соответствующих порядков определяются дифференцированием многочлена.

При решении практических задач, как правило, используются аппроксимации первых и вторых производных.

В первом приближении таблично заданная функция может быть аппроксимирована отрезками прямой

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

В этом случае производная является кусочно-постоянной функцией и рассчитывается по формуле

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \text{const}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (3.22)$$

с первым порядком точности в крайних точках интервала, и со вторым порядком точности в средней точке интервала [1]. Правая часть (3.22) совпадает с выражением для разделенной разности $f(x_i, x_{i+1})$ — см. п. 3.1.

При использовании для аппроксимации таблично заданной функции интерполяционного многочлена второй степени имеем

$$\begin{aligned} y(x) \approx \varphi(x) = & y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + \\ & + \frac{\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} (x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} y'(x) \approx \varphi'(x) = & \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \\ & + \frac{\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} (2x - x_i - x_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

При равноотстоящих точках разбиения данная формула обеспечивает второй порядок точности.

Для вычисления второй производной необходимо использовать интерполяционный многочлен как минимум второй степени. После дифференцирования многочлена получаем

$$y''(x) \approx \varphi''(x) = 2 \frac{\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (3.25)$$

Формулы (3.23)—(3.25) с использованием разделенных разностей могут быть записаны в виде

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_i + f(x_i, x_{i+1})(x - x_i) + f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})(x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = f(x_i, x_{i+1}) + f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})(2x - x_i - x_{i+1}),$$

$$y''(x) \approx \varphi''(x) = 2f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}).$$

В случае равноотстоящих узлов с шагом $h = (x_{i+1} - x_i) = x_{i+2} - x_{i+1}$ имеем

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}(x - x_i) + \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{2h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{2h^2}(2x - x_i - x_{i+1}),$$

$$y''(x) \approx \varphi''(x) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{2h^2}.$$

ПРИМЕР 3.5

Вычислить первую и вторую производные от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, в точке $x = X^*$; $X^* = 0.2$.

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1.0	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918

РЕШЕНИЕ

Вычислим производную, используя формулу (3.22) и отрезок $[x_1, x_2]$. Так как точка, в которой требуется найти значение производной, совпадает с правой границей отрезка, такую производную еще называют *левосторонней*:

$$y'(0.2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.2214 - 1.1052}{0.2 - 0.1} = 1.1623.$$

Аналогично вычисляется *правосторонняя* производная:

$$y'(0.2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{1.3499 - 1.2214}{0.3 - 0.2} = 1.2846.$$

Обе эти формулы позволяют вычислить производную с первым порядком точности. Вычислим производную со вторым порядком точности, для чего воспользуемся формулой (3.24):

$$\begin{aligned} y'(0.2) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} (2 \cdot 0.2 - x_1 - x_2) = \frac{1.2214 - 1.1052}{0.2 - 0.1} + \\ &+ \frac{\frac{1.3499 - 1.2214}{0.3 - 0.2} - \frac{1.2214 - 1.1052}{0.2 - 0.1}}{0.3 - 0.1} (2 \cdot 0.2 - 0.1 - 0.2) = 1.2234. \end{aligned}$$

Заметим, что результат вычисления по формуле (3.24) в случае равномерной сетки совпадает с полусуммой левосторонней и правосторонней производных.

Вычислим вторую производную в точке $x = 0.2$, используя соотношение (3.25):

$$y''(0.2) = 2 \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} = 2 \frac{\frac{1.3499 - 1.2214}{0.3 - 0.2} - \frac{1.2214 - 1.1052}{0.2 - 0.1}}{0.3 - 0.1} = 1.2224.$$

3.4. Численное интегрирование

Формулы численного интегрирования используются в тех случаях, когда вычислить аналитически определенный интеграл $F = \int_a^b f(x) dx$ не удается. Отрезок $[a, b]$ разбивают точками x_0, x_1, \dots, x_N так, что $a = x_0, b = x_N, a < x_1 < \dots < b$ с достаточно мелким шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$. При этом на одном или нескольких отрезках h_i подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют приближающей $\varphi(x)$ такой, что она, во-первых, близка к $f(x)$, а во-вторых, интеграл от $\varphi(x)$ легко вычисляется. Рассмотрим наиболее простой и часто применяемый способ, когда подынтегральную функцию заменяют на интерполяционный многочлен $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, причем коэффициенты многочлена a_j , вообще говоря, различны на каждом отрезке $[x_i, x_{i+n}]$ и определяются из условия $\varphi(x_l) = f(x_l), l = i, \dots, i+n$, т. е. многочлен P_n зависит от параметров $a_l - P_n(x, \bar{a}_i)$. В этом случае

$$f(x) = P_n(x, \bar{a}_i) + R_n(x, \bar{a}_i), \quad x \in [x_i, x_{i+k}], \quad (3.26)$$

где $R_n(x, \bar{a}_i)$ — остаточный член интерполяции. Тогда

$$F = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_n(x, \bar{a}_i) dx + R,$$

где $R = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_n(x, \bar{a}_i) dx$ — остаточный член формулы численного интегрирования или ее погрешность. Здесь $\bar{a}_i = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ — вектор, состоящий из коэффициентов интерполяционного многочлена P_n , аппроксимирующего функцию $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+n}]$.

При использовании интерполяционных многочленов различной степени получают формулы численного интегрирования различного порядка точности.

Заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Лагранжа нулевой степени, проходящим через середину отрезка — точку $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$, получим формулу прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N h_i f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \quad (3.27)$$

В случае постоянного шага интегрирования $h_i = h, i = 1, 2, \dots, N$, и существования $f''(x), x \in [a, b]$, имеет место следующая оценка остаточного члена формулы прямоугольников:

$$R \leq \frac{1}{24} h^2 M_2 (b - a), \quad (3.28)$$

где $M_2 = \max |f''(x)|, x \in [a, b]$.

Для таблично заданных функций удобно в качестве узлов интерполяции выбрать начало и конец отрезка интегрирования, т. е. заменить функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа первой степени

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (f_i + f_{i-1}) h_i. \quad (3.29)$$

Эта формула носит название *формулы трапеций*.

В случае постоянного шага интегрирования величина остаточного члена оценивается как

$$R \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad (3.30)$$

где $M_2 = \max |f''(x)|$, $x \in [a, b]$.

Для повышения порядка точности формулы численного интегрирования заменим подынтегральную кривую параболой — интерполяционным многочленом второй степени, выбрав в качестве узлов интерполяции концы и середину отрезка интегрирования: x_{i-1} , $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$, x_i .

В случае $h_i = (x_i - x_{i-1})/2$ получим *формулу Симпсона* (формулу *парабол*):

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) h_i. \quad (3.31)$$

При постоянном шаге интегрирования $h_i = h$, $i = 1, 2, \dots, N$, формула Симпсона принимает вид

$$F \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + 4f_{3/2} + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + 4f_{N-1/2} + f_N], \quad (3.32)$$

здесь число интервалов, на которое делится отрезок интегрирования, равно $2N$. В случае, если существует $f^{IV}(x)$, $x \in [a, b]$, для оценки величины погрешности справедлива мажорантная оценка

$$R \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4, \quad (3.33)$$

где $M_4 = \max |f^{IV}(x)|$, $x \in [a, b]$.

Метод Рунге — Ромберга — Ричардсона позволяет получать более высокий порядок точности вычисления. Если имеются результаты вычисления определенного интеграла на сетке с шагом h — $F = F_h + O(h^p)$ и на сетке с шагом kh — $F = F_{kh} + O((kh)^p)$, то

$$F = \int_a^b f(x) dx = F_h + \frac{F_h - F_{kh}}{k^p - 1} + O(h^{p+1}). \quad (3.34)$$

ПРИМЕР 3.6

Вычислить определенный интеграл $F = \int_{X_0}^{X_1} y dx$ методами прямоугольников, трапеций, Симпсона с шагами h_1 , h_2 . Уточнить полученные значения, используя Метод Рунге — Ромберга — Ричардсона. Принять $y = \frac{x}{(3x+4)^2}$, $X_0 = -1$, $X_k = 1$, $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.25$.

РЕШЕНИЕ

В случае интегрирования с постоянным шагом формулы принимают следующий вид:

□ метод прямоугольников:

$$F = h \left[y\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + y\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + y\left(\frac{x_{N-1} + x_N}{2}\right) \right];$$

□ метод трапеций:

$$F = h \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2} \right];$$

□ метод Симпсона:

$$F = \frac{h}{3} \left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N \right].$$

В настоящем примере используется формула метода Симпсона, аналогичная (3.32), но без введения полуцелых индексов; в этом случае число узлов N должно быть четным.

Вычислим интеграл с шагом 0.5, результаты занесем в таблицу:

i	x_i	y_i	$\int_{x_0}^{x_i} y \, dx$		
			Метод прямоугольников	Метод трапеций	Метод Симпсона
0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0
1	-0.5	-0.08	-0.12245	-0.27	
2	0.0	0.0	-0.13428	-0.29	-0.22
3	0.5	0.01653	-0.12874	-0.28587	
4	1.0	0.02041	-0.11914	-0.27663	-0.20558

Вычислим интеграл с шагом 0.25, результаты занесем в таблицу:

i	x_i	y_i	$\int_{x_0}^{x_i} y \, dx$		
			Метод прямоугольников	Метод трапеций	Метод Симпсона
0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0
1	-0.75	-0.24490	-0.11570	-0.15561	
2	-0.5	-0.08	-0.15031	-0.19622	-0.17163
3	-0.25	-0.02367	-0.16165	-0.20918	
4	0.0	0.0	-0.16403	-0.21214	-0.18619
5	0.25	0.01108	-0.16239	-0.21076	
6	0.5	0.01653	-0.15882	-0.20731	-0.18112
7	0.75	0.01920	-0.15430	-0.20284	
8	1.0	0.02041	-0.14914	-0.19789	-0.17164

Сравним полученные результаты с оценками (3.28), (3.30), (3.33) и получим: для

□ метода прямоугольников

$$R(h = 0.5) \leq 1.375, R(h = 0.25) \leq 0.34375;$$

□ метода трапеций

$$R(h = 0.5) \leq 2.75, R(h = 0.25) \leq 0.6875;$$

□ метода Симпсона

$$R(h = 0.5) \leq 8.6625, R(h = 0.25) \leq 0.5414.$$

Уточним значение интеграла $F = \int_{-1}^1 [x/(3x + 4)] \, dx$, используя метод Рунге — Ромберга — Ричардсона, получим при точном значении, равном -0.16474:

□ по методу прямоугольников

$$-0.15937 \text{ с абсолютной погрешностью } 0.00537;$$

□ по методу трапеций

$$-0.17164 \text{ с абсолютной погрешностью } 0.00690;$$

□ по методу Симпсона

$$-0.16938 \text{ с абсолютной погрешностью } 0.00464.$$

ЗАДАЧИ

3.1. Используя таблицу значений Y_i функции $y = f(x)$, вычисленных в точках X_i , $i = 0, \dots, 3$, построить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, проходящие через точки $\{X_i, Y_i\}$. Вычислить значение погрешности $\Delta(y(X^*))$ интерполяции в точке X^* . Сравнить погрешности метода с оценкой (3.9).

№	Функция	X_i		X^*
		a	b	
1.	$y = \sin x$	0.1 π , 0.2 π , 0.3 π , 0.4 π	0.1 π , $\pi/6$, 0.3 π , 0.4 π	$\pi/4$
2.	$y = \cos x$	0, $\pi/6$, 2 $\pi/6$, 3 $\pi/6$	0, $\pi/6$, 5 $\pi/12$, $\pi/2$	$\pi/4$
3.	$y = \operatorname{tg} x$	0, $\pi/8$, 2 $\pi/8$, 3 $\pi/8$	0, $\pi/8$, $\pi/3$, 3 $\pi/8$	3 $\pi/16$
4.	$y = \operatorname{ctg} x$	$\pi/8$, 2 $\pi/8$, 3 $\pi/8$, 4 $\pi/8$	$\pi/8$, 5 $\pi/16$, 3 $\pi/8$, $\pi/2$	$\pi/3$
5.	$y = \ln x$	0.2, 0.6, 1.0, 1.4	0.2, 0.6, 1.2, 1.4	0.8
6.	$y = e^x$	-2, -1, 0, 1	-2, -1, 0.2, 1	-0.5
7.	$y = \sqrt{x}$	0, 1.7, 3.4, 5.1	0, 1.7, 4.0, 5.1	3.0
8.	$y = \arcsin x$	-0.4, -0.1, 0.2, 0.5	-0.4, 0, 0.2, 0.5	0.1
9.	$y = \arccos x$	-0.4, -0.1, 0.2, 0.5	-0.4, 0, 0.2, 0.5	0.1
10.	$y = \operatorname{arctg} x$	-3, -1, 1, 3	-3, 0, 1, 3	-0.5
11.	$y = \operatorname{arccctg} x$	-3, -1, 1, 3	-3, 0, 1, 3	-0.5
12.	$y = \sin x + x$	0, $\pi/6$, 2 $\pi/6$, 3 $\pi/6$	0, $\pi/6$, 5 $\pi/12$, $\pi/2$	$\pi/4$
13.	$y = \cos x + x$	0, $\pi/6$, 2 $\pi/6$, 3 $\pi/6$	0, $\pi/6$, 5 $\pi/12$, $\pi/2$	$\pi/4$
14.	$y = \operatorname{tg} x + x$	0, $\pi/8$, 2 $\pi/8$, 3 $\pi/8$	0, $\pi/8$, $\pi/3$, 3 $\pi/8$	3 $\pi/16$
15.	$y = \operatorname{ctg} x + x$	$\pi/8$, 2 $\pi/8$, 3 $\pi/8$, 4 $\pi/8$	$\pi/8$, $\pi/3$, 3 $\pi/8$, $\pi/2$	3 $\pi/16$
16.	$y = \ln x + x$	0.1, 0.5, 0.9, 1.3	0.1, 0.5, 1.1, 1.3	0.8
17.	$y = e^x + x$	-2, -1, 0, 1	-2, -1, 0.2, 1	-0.5
18.	$y = \sqrt{x} + x$	0, 1.7, 3.4, 5.1	0, 1.7, 4.0, 5.1	3.0
19.	$y = \arcsin x + x$	-0.4, -0.1, 0.2, 0.5	-0.4, 0, 0.2, 0.5	0.1
20.	$y = \arccos x + x$	-0.4, -0.1, 0.2, 0.5	-0.4, 0, 0.2, 0.5	0.1
21.	$y = \operatorname{arctg} x + x$	-3, -1, 1, 3	-3, 0, 1, 3	-0.5
22.	$y = \operatorname{arccctg} x + x$	-3, -1, 1, 3	-3, 0, 1, 3	-0.5
23.	$y = 1/x$	0.1, 0.5, 0.9, 1.3	0.1, 0.5, 1.1, 1.3	0.8
24.	$y = 1/x^2$	0.1, 0.5, 0.9, 1.3	0.1, 0.5, 1.1, 1.3	0.8
25.	$y = 1/x + x$	0.1, 0.5, 0.9, 1.3	0.1, 0.5, 1.1, 1.3	0.8
26.	$y = 1/x^2 + x^2$	0.1, 0.5, 0.9, 1.3	0.1, 0.5, 1.1, 1.3	0.8
27.	$y = x \sin(x)$	0, $\pi/6$, 2 $\pi/6$, 3 $\pi/6$	0, $\pi/6$, 5 $\pi/12$, $\pi/2$	$\pi/4$
28.	$y = x \cos(x)$	0, $\pi/6$, 2 $\pi/6$, 3 $\pi/6$	0, $\pi/6$, 5 $\pi/12$, $\pi/2$	$\pi/4$
29.	$y = xe^x$	-2, -1, 0, 1	-2, -1, 0.2, 1	-0.5
30.	$y = x^2e^x$	-1.2, -0.7, -0.2, 0.3	-1.2, -0.7, 0, 0.3	-0.5

3.2. Построить кубический сплайн для функции, заданной в узлах интерполяции, предполагая, что сплайн имеет нулевую кривизну при $x = x_0$ и $x = x_4$. Вычислить значение функции в точке $x = X^*$.

1. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
f_i	0.0	0.5	0.86603	1.0	0.86603

2. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
f_i	1.0	0.86603	0.5	0.0	-0.5

3. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
f_i	0.0	0.36892	0.85408	1.7856	6.3138

4. $X^* = 2.66666667$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6
f_i	2.4142	1.0818	0.50953	0.11836	-0.24008

5. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	-2.3026	-0.69315	-0.10536	0.26236	0.53063

6. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
f_i	0.13534	0.36788	1.0	2.7183	7.3891

7. $X^* = 3.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8
f_i	0.0	1.3038	1.8439	2.2583	2.6077

8. $X^* = 0.1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	-0.41152	-0.10017	0.20136	0.52360	0.92730

9. $X^* = 0.1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	1.9823	1.6710	1.3694	1.0472	0.64350

10. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	-1.2490	-0.78540	0.78540	1.2490	1.3734

11. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	2.8198	2.3562	0.78540	0.32175	0.19740

12. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
f_i	0.0	0.97943	1.8415	2.4975	2.9093

13. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
f_i	1.0	1.5403	1.5839	2.01	3.3464

14. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
f_i	0.0	0.72235	1.5609	2.8459	7.7275

15. $X^* = 2.66666667$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6
f_i	2.8069	1.8279	1.6091	1.5713	1.5663

16. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	-2.2026	-0.19315	0.79464	1.5624	2.2306

17. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
f_i	-1.8647	-0.63212	1.0	3.7183	9.3891

18. $X^* = 3.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8
f_i	0.0	3.0038	5.2439	7.3583	9.4077

19. $X^* = 0.1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	-0.81152	-0.20017	0.40136	1.0236	1.7273

20. $X^* = 0.1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	1.5823	1.5710	1.5694	1.5472	1.4435

21. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	-4.2490	-1.7854	1.7854	4.2490	6.3734

22. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	-0.18016	1.3562	1.7854	3.3218	5.1974

23. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	10.0	2.0	1.1111	0.76923	0.58824

24. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	100.00	4.0	1.2346	0.59172	0.34602

25. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	10.1	2.5	2.0111	2.0692	2.2882

26. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	100.01	4.2500	2.0446	2.2817	3.2360

27. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0
f_i	0.0	0.26180	0.90690	1.5708	1.3090

28. $X^* = 1.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0
f_i	0.0	0.45345	0.52360	0.0	-2.2672

29. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.00	1.0	2.0
f_i	-0.27067	-0.36788	0.00	2.7183	14.778

30. $X^* = -0.5$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.2	-0.7	-0.2	0.3	0.8
f_i	0.43372	0.24333	0.03275	0.12149	1.4243

3.3. Для таблично заданной функции путем решения нормальной системы МНК найти приближающие многочлены первой (а) и второй (б) степени. Для каждого из приближающих многочленов вычислить сумму квадратов ошибок Φ . Построить графики приближаемой функции и приближающих многочленов.

1.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	-0.5	0.0	0.5	0.86603	1.0	0.86603

2.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.86603	1.0	0.86603	0.50	0.0	-0.50

3.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0.9	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
y_i	-0.36892	0.0	0.36892	0.85408	1.7856	6.3138

4.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6	5.5
y_i	2.4142	1.0818	0.50953	0.11836	-0.24008	-0.66818

5.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	-2.3026	-0.69315	-0.10536	0.26236	0.53063	0.74194
6.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
	y_i	0.04979	0.13534	0.36788	1.0	2.7183	7.3891
7.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	y_i	1.0	1.0032	1.0512	1.2592	1.8192	3.0
8.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-0.7	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
	y_i	-0.7754	-0.41152	-0.10017	0.20136	0.5236	0.9273
9.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-0.7	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
	y_i	2.3462	1.9823	1.671	1.3694	1.0472	0.6435
10.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-5.0	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
	y_i	-1.3734	-1.249	-0.7854	0.7854	1.249	1.3734
11.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-5.0	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
	y_i	2.9442	2.8198	2.3562	0.7854	0.32175	0.1974
12.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
	y_i	-1.8415	0.0	1.8415	2.9093	3.1411	3.2432
13.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
	y_i	-0.4597	1.0	1.5403	1.5839	2.010	3.3464
14.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-0.9	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
	y_i	-1.2689	0.0	1.2689	2.6541	4.4856	9.9138
15.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6	5.5
	y_i	3.4142	2.9818	3.3095	3.8184	4.3599	4.8318

16.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	-2.2026	-0.19315	0.79464	1.5624	2.2306	2.8419
17.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
	y_i	-2.9502	-1.8647	-0.63212	1.0	3.7183	9.3891
18.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5
	y_i	0.0	3.0038	5.2439	7.3583	9.4077	11.415
19.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-0.7	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
	y_i	-1.4754	-0.81152	-0.20017	0.40136	1.0236	1.7273
20.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-0.7	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
	y_i	1.6462	1.5823	1.571	1.5694	1.5472	1.4435
21.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-5.0	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
	y_i	-6.3734	-4.249	-1.7854	1.7854	4.249	6.3734
22.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	-5.0	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
	y_i	-2.0558	-0.18016	1.3562	1.7854	3.3218	5.1974
23.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	10	2.0	1.1111	0.76923	0.58824	0.47619
24.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	100.0	4.0	1.2346	0.59172	0.34602	0.22676
25.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	10.1	2.5	2.0111	2.0692	2.2882	2.5762
26.	i	0	1	2	3	4	5
	x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7	2.1
	y_i	100.01	4.250	2.0446	2.2817	3.236	4.6368

27.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0
y_i	0.5	0.0	0.5	1.7321	3.0	2.5

28.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0
y_i	-0.86603	0.0	0.86603	1.0	0.0	-4.3301

29.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
y_i	-0.14936	-0.27067	-0.36788	0.0	2.7183	14.778

30.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1.7	-1.2	-0.7	-0.2	0.3	0.8
y_i	0.52796	0.43372	0.24333	0.03275	0.12149	1.4243

3.4. Вычислить первую и вторую производную от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, в точке $x = X^*$.

1. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	-0.5	0.0	0.50	0.86603	1.0

2. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	-0.5	0.0	0.5	0.86603	1.0

3. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	0.0	0.40547	0.69315	0.91629	1.0986

4. $X^* = 0.2$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1.0	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918

5. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.0	1.0	1.4142	1.7321	2.0

6. $X^* = 0.2$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
y_i	-0.20136	0.0	0.20136	0.41152	0.64350

7. $X^* = 0.2$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
y_i	1.7722	1.5708	1.3694	1.1593	0.9273

8. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	-0.7854	0.0	0.78540	1.1071	1.249

9. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	2.3562	1.5708	0.7854	0.46365	0.32175

10. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	0.0	0.97943	1.8415	2.4975	2.9093

11. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	1.0	1.3776	1.5403	1.5707	1.5839

12. $X^* = 0.2$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.4	0.2	0.6	1.0
y_i	-1.4142	-0.55838	0.27870	0.84008	1.4142

13. $X^* = 0.8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4
y_i	12.906	5.5273	3.8777	3.2692	3.0319

14. $X^* = 3.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	1.0	2.6931	4.0986	5.3863	6.6094

15. $X^* = 0.4$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
y_i	1.0	1.4214	1.8918	2.4221	3.0255

16. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.0	2.0	3.4142	4.7321	6.0

17. $X^* = 0.2$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
y_i	-0.40136	0.0	0.40136	0.81152	1.2435

18. $X^* = 0.2$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
y_i	1.5722	1.5708	1.5694	1.5593	1.5273

19. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	-1.7854	0.0	1.7854	3.1071	4.249

20. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	1.3562	1.5708	1.7854	2.4636	3.3218

21. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	1.0	0.66667	0.50	0.40	0.33333

22. $X^* = 1.4$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
y_i	1.0	0.69444	0.5102	0.39062	0.30864

23. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	2.0	2.1667	2.5	2.9	3.3333

24. $X^* = 1.4$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
y_i	2.0	2.1344	2.4702	2.9506	3.5486

25. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.0	0.5	1.7321	3.0	3.4641

26. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.0	0.86603	1.0	0.0	-2.0

27. $X^* = 0.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
y_i	-0.36788	-0.30327	0.0	0.82436	2.7183

28. $X^* = 0.4$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
y_i	0.0	0.048856	0.23869	0.65596	1.4243

29. $X^* = 1.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
y_i	-0.5	0.0	0.5	0.86603	1.0

30. $X^* = 2.0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.0	0.5	0.86603	1.0	0.86603

3.5. Вычислить определенный интеграл $F = \int_{x_0}^{x_1} y \, dx$ методами прямоугольников, трапеций, Симпсона с шагами h_1, h_2 . Уточнить полученные значения, используя метод Рунге — Ромберга. Оценить погрешность методов интегрирования, используя формулы (3.28), (3.30), (3.33).

№	Функция	X_0	X_1	h_1	h_2
1	$y = \frac{x}{2x+5}$	-1	1	0.5	0.25
2	$y = \frac{x}{(3x+4)^2}$	0	4	1.0	0.5
3	$y = \frac{x}{(3x+4)^3}$	-1	1	0.5	0.25
4	$y = \frac{3x+4}{2x+7}$	-2	2	1.0	0.5
5	$y = \frac{1}{(2x+7)(3x+4)}$	-1	1	0.5	0.25
6	$y = \frac{x}{(2x+7)(3x+4)}$	-1	1	0.5	0.25
7	$y = \frac{1}{3x^2+4x+2}$	-2	2	1.0	0.5
8	$y = \frac{1}{x^2+4}$	-2	2	1.0	0.5
9	$y = \frac{x}{x^2+9}$	0	2	0.5	0.25
10	$y = \frac{x^2}{x^2+16}$	0	2	0.5	0.25
11	$y = \frac{1}{x^3+64}$	-2	2	1.0	0.5
12	$y = \frac{x}{x^3+8}$	-1	1	0.5	0.25
13	$y = \frac{x^2}{x^3-27}$	-2	2	1.0	0.5
14	$y = \frac{1}{x^4+16}$	0	2	0.5	0.25
15	$y = \frac{x}{x^4+81}$	0	2	0.5	0.25
16	$y = \frac{x^2}{x^4+256}$	0	2	0.5	0.25
17	$y = \frac{1}{256-x^4}$	-2	2	1.0	0.5
18	$y = \frac{x}{16-x^4}$	-1	1	0.5	0.25
19	$y = \frac{x^2}{625-x^4}$	0	4	1.0	0.5
20	$y = \frac{\sqrt{x}}{4+3x}$	1	5	1.0	0.5
21	$y = \frac{\sqrt{x}}{(1+2x)^2}$	1	5	1.0	0.5
22	$y = x\sqrt{2x+3}$	-1	1	0.5	0.25
23	$y = \frac{1}{\sqrt{(2x+7)(3x+4)}}$	0	4	1.0	0.5
24	$y = \sqrt{16-x^2}$	-2	2	1.0	0.5
25	$y = x\sqrt{49-x^2}$	-2	2	1.0	0.5
26	$y = x^2\sqrt{36-x^2}$	1	5	1.0	0.5
27	$y = \sqrt{9+x^2}$	1	5	1.0	0.5
28	$y = x^3\sqrt{4+x^2}$	1	5	1.0	0.5
29	$y = \sqrt{x^2-36}$	6.5	8.5	0.5	0.25
30	$y = x^3\sqrt{x^2-49}$	7.5	9.5	0.5	0.25

ОТВЕТЫ

3.1.

Вариант	<i>a</i>		<i>b</i>	
	$y(X^*)$	$\Delta(y(X^*))$	$y(X^*)$	$\Delta(y(X^*))$
1	0.70695	0.00016	0.70685	0.00026
2	0.70589	0.00122	0.70481	0.00230
3	0.64461	0.02357	0.58525	0.08293
4	0.55798	0.01938	0.57350	0.00385
5	-0.20778	0.01536	-0.19690	0.02624
6	0.59108	0.01545	0.58395	0.02258
7	1.75178	0.01973	1.77471	0.04266
8	0.10006	0.00011	0.10009	0.00007
9	1.47074	0.00011	1.47070	0.00007
10	-0.41000	0.05365	-0.41000	0.05365
11	1.98079	0.05365	1.98079	0.05365
12	1.49129	0.00122	1.48995	0.00255
13	1.49129	0.00122	1.49021	0.00230
14	1.23366	0.02357	1.17430	0.08293
15	2.15155	0.06589	2.20059	0.11494
16	0.59964	0.02278	0.63411	0.05725
17	0.09108	0.01545	0.08395	0.02258
18	4.75178	0.01973	4.77471	0.04266
19	0.20006	0.00011	0.20009	0.00007
20	1.57074	0.00011	1.57070	0.00007
21	-0.91000	0.05365	-0.91000	0.05365
22	1.48079	0.05365	1.48079	0.05365
23	1.02564	0.22436	0.69930	0.55070
24	-1.83213	3.39463	-6.65852	8.22102
25	1.82564	0.22436	1.49930	0.55070
26	-1.19213	3.39463	-6.01852	8.22102
27	0.55922	0.00386	0.56229	0.00693
28	0.54959	0.00577	0.54336	0.01200
29	-0.35991	0.05664	-0.38708	0.08382
30	0.14363	0.00807	0.13721	0.01442

3.2.

Вариант	Отрезок	Коэффициенты сплайна $f(x)$				$f(X^*)$
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	
1	[1, 2]	0.5	0.451808	-0.0722874	-0.0134956	0.706145
2	[1, 2]	0.866025	-0.239148	-0.157761	0.0308835	0.710872
3	[1, 2]	0.368919	0.550968	0.235096	-0.275910	0.724539
4	[1.9, 2.8]	1.08179	-1.05544	0.708373	-0.269070	0.567736
5	[0.5, 0.9]	-0.693147	2.72502	-4.86964	4.32685	-0.197082
6	[-1.0, 0.0]	0.367879	0.396883	0.246509	-0.0112712	0.626539
7	[1.7, 3.4]	1.30384	0.535474	-0.204257	0.0447927	1.75317
8	[-0.1, 0.2]	-0.100167	1.02012	-0.0885522	0.128102	0.101339
9	[-0.1, 0.2]	1.67096	-1.02012	0.0885522	-0.128102	1.46946
10	[-1, 1]	-0.785398	0.601405	0.277186	-0.0925945	-0.426974
11	[-1, 1]	2.35619	-0.601405	-0.277186	0.0925945	1.99777
12	[0.5, 1]	0.979426	1.87451	-0.253037	-0.0955856	1.51642
13	[1, 2]	1.54030	0.252035	-0.432401	0.223917	1.58621
14	[0.9, 1.8]	0.722349	0.943667	0.235096	-0.275910	1.31359
15	[1.9, 2.8]	1.82792	-0.662744	0.708373	-0.269070	1.61493
16	[0.5, 0.9]	-0.193147	3.72502	-4.86964	4.32685	0.602918
17	[-1, 0]	-0.632121	1.39688	0.246509	-0.0112712	0.126539
18	[1.7, 3.4]	3.00384	1.53547	-0.204257	0.0447927	4.75317
19	[-0.1, 0.2]	-0.200167	2.02012	-0.0885522	0.128102	0.201339
20	[-0.1, 0.2]	1.57096	-0.020121	0.0885522	-0.128102	1.56946

Окончание таблицы

Ва- ри- ант	Отрезок	Коэффициенты сплайна $f(x)$				$f(X^*)$
		a	b	c	d	
21	$[-1, 1]$	-1.78540	1.60140	0.277186	-0.0925945	-0.926974
22	$[-1, 1]$	1.35619	0.398595	-0.277186	0.0925945	1.49777
23	$[0.5, 0.9]$	2.0	-10.6572	35.0356	-34.8704	1.01454
24	$[0.5, 0.9]$	4.0	-115.855	465.544	-482.977	-1.89787
25	$[0.5, 0.9]$	2.5	-9.65719	35.0356	-34.8704	1.81454
26	$[0.5, 0.9]$	4.25	-114.912	466.830	-483.335	-1.25895
27	$[1, 2]$	0.261799	0.445714	0.275873	-0.0764867	0.544064
28	$[1, 2]$	0.453450	0.317090	-0.204539	-0.042402	0.55556
29	$[-1, 0]$	-0.367879	0.149801	0.370514	-0.152435	-0.219405
30	$[-0.7, -0.2]$	0.243327	-0.401208	-0.0612669	0.0427454	0.160976

3.3.

Ва- ри- ант	a			b			
	a_0	a_1	Φ	a_0	a_1	a_2	Φ
1	0.01836	0.29132	0.27082	0.07353	0.53957	-0.08275	0.01518
2	0.89232	-0.29132	0.27082	0.94749	-0.04307	-0.08275	0.01518
3	-0.19013	1.24620	8.67875	-0.46449	-0.12561	0.50808	2.35562
4	2.57557	-0.62758	0.47014	3.54759	-1.39808	0.11854	0.12596
5	-1.77444	1.37583	0.98535	-2.46043	3.40610	-0.92285	0.17139
6	2.58735	1.28792	11.4547	1.21263	1.80344	0.51552	1.53299
7	0.61813	1.80800	0.81696	1.09051	-1.73486	3.54286	0.06720
8	0.00553	1.10670	0.00394	-0.00699	1.10188	0.04814	0.00324
9	1.56527	-1.10670	0.00394	1.57779	-1.10188	-0.04814	0.00324
10	0.0	0.32570	0.70071	0.0	0.32570	0.0	0.70071
11	1.57080	-0.32570	0.70071	1.57080	-0.32570	0.0	0.70071
12	0.00974	1.02613	2.80932	0.18993	1.83696	-0.27028	0.08211
13	0.55616	0.63154	0.78843	0.56894	0.68904	-0.01917	0.77471
14	-0.19013	2.24620	8.67875	-0.46450	0.87439	0.50808	2.35562
15	2.57557	0.37242	0.47014	3.54759	-0.39808	0.11854	0.12596
16	-1.77444	2.37583	0.98534	-2.46043	4.40610	-0.92285	0.17139
17	2.58735	2.28792	11.4547	1.21263	2.80344	0.51552	1.53299
18	0.47130	1.31770	0.48722	0.12945	1.61933	-0.03549	0.09457
19	0.00553	2.10670	0.00394	-0.00699	2.10188	0.04814	0.00324
20	1.56527	-0.10670	0.00394	1.57779	-0.10188	-0.04814	0.00324
21	0.0	1.32570	0.70071	0.0	1.32570	0.0	0.70071
22	1.57080	0.67430	0.70071	1.57080	0.67430	0.0	0.70071
23	6.59193	-3.72830	30.2541	10.0988	-14.1074	4.71778	8.98184
24	57.8416	-36.4622	4408.67	98.4497	-156.648	54.6298	1556.37
25	6.59193	-2.72830	30.2541	10.0988	-13.1074	4.71778	8.98184
26	57.0983	-34.2622	4514.05	98.4497	-156.648	55.6298	1556.37
27	0.56886	0.48189	2.03722	0.56886	0.59752	-0.02891	1.96702
28	0.32843	-0.53007	12.8456	0.32843	1.02130	-0.38784	0.21008
29	3.98435	2.39920	78.7506	0.54779	3.68791	1.28871	16.7486
30	0.54968	0.19055	1.12040	0.24489	0.71140	0.57871	0.33895

3.4.

Вариант	Первая производная			Вторая производная
	левосторонняя	правосторонняя	центральная	
1	0.5	0.366025	0.433013	-0.133975
2	0.5	0.366025	0.433013	-0.133975
3	0.575364	0.446287	0.510826	-0.258154
4	1.16232	1.28456	1.22242	1.22242
5	0.414214	0.317837	0.366025	-0.096376
6	1.00679	1.05079	1.02879	0.220025
7	-1.00679	-1.05079	-1.02879	-0.220025
8	0.785398	0.321751	0.553574	-0.463648
9	-0.785398	-0.321751	-0.553574	0.463648
10	1.72409	1.31205	1.51807	-0.824086

Окончание таблицы

Вариант	Первая производная			Вторая производная
	левосторонняя	правосторонняя	центральная	
11	0.325439	0.060870	0.193155	-0.529139
12	1.39514	1.40344	1.40012	0.016598
13	-5.49885	-2.02839	-3.76362	11.5682
14	1.40547	1.28768	1.34657	-0.117783
15	2.35211	2.65147	2.50179	1.49680
16	1.41421	1.31784	1.36603	-0.096376
17	2.00679	2.05079	2.02879	0.220025
18	-0.006790	-0.050795	-0.028792	-0.220025
19	1.78540	1.32175	1.55357	-0.463648
20	0.214602	0.678249	0.446426	0.463648
21	-0.333333	-0.2	-0.266667	0.266667
22	-0.921202	-0.597895	-0.759549	1.61653
23	0.666667	0.800000	0.733333	0.266667
24	1.67880	2.40210	2.04045	3.61653
25	1.23205	1.26795	1.25000	0.035898
26	0.13398	-1.0	-0.433013	-1.13397
27	0.606531	1.64872	1.12763	2.08438
28	0.949179	2.08635	1.51777	5.68587
29	0.50	0.366025	0.433013	-0.133975
30	0.366025	0.133975	0.25	-0.232051

3.5. Дается точное значение интеграла с шестью значащими цифрами.

1	-0.0591223	16	0.0101483
2	0.0706994	17	0.0158274
3	-0.122449	18	0.0
4	1.77733	19	0.0423871
5	0.104471	20	0.531219
6	-0.041303	21	0.174347
7	1.85742	22	0.4
8	0.785398	23	0.417972
9	0.183862	24	15.3058
10	0.145410	25	0.0
11	0.0626407	26	186.625
12	-0.00629484	27	17.2998
13	-0.203636	28	701.285
14	0.108372	29	8.85296
15	0.0232347	30	6165.78

В настоящем разделе рассматриваются различные методы решения задачи Коши и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробно изучаются метод Эйлера и ошибки, возникающие при реализации метода на ЭВМ, семейство одношаговых методов Рунге — Кутты, многошаговые методы, методы решения начальной задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. При решении краевой задачи применяются метод стрельбы и разностный метод.

4.1. Численные методы решения задачи Коши

4.1.1. Задача Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения

Рассматривается задача Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4.1)$$

Требуется найти решение на отрезке $[a, b]$, здесь $x_0 = a$.

Введем разностную сетку на отрезке $[a, b]$:

$$\Omega^{(k)} = \{x_k = x_0 + hk\}, \quad h = |b - a|/N, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Точки x_k называются *узлами* разностной сетки, расстояние h между узлами — *шагом* разностной сетки, а совокупность заданных в узлах сетки значений какой-либо величины называется *сеточной функцией* $y^{(h)} = \{y_k, k = 0, 1, \dots, N\}$.

Приближенное решение задачи Коши (4.1) будем искать численно в виде сеточной функции $y^{(h)}$. Для оценки погрешности приближенного численного решения $y^{(h)}$ будем рассматривать это решение как элемент $(N + 1)$ -мерного линейного векторного пространства с какой-либо нормой. В качестве погрешности решения принимается норма элемента этого пространства $\delta^{(h)} = y^{(h)} - [y]^{(h)}$, где $[y]^{(h)}$ — точное решение задачи (4.1) в узлах расчетной сетки. Таким образом, погрешность $\varepsilon_h = \|\delta^{(h)}\|$.

4.1.2. Одношаговые методы

Метод Эйлера. Явный метод Эйлера играет важную роль в теории численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), хотя и не часто используется в практических расчетах из-за невысокой точности. Вывод расчетных соотношений для этого ме-

тогда может быть произведен несколькими способами: с помощью геометрической интерпретации, с использованием разложения в ряд Тейлора, конечно-разностным методом (с помощью разностной аппроксимации производной), квадратурным способом (с использованием эквивалентного интегрального уравнения).

Рассмотрим вывод соотношений метода Эйлера геометрическим способом (рис. 4.1). Пусть решение в узле x_0 известно из начальных условий. Рассмотрим процедуру получения решения в узле x_1 .

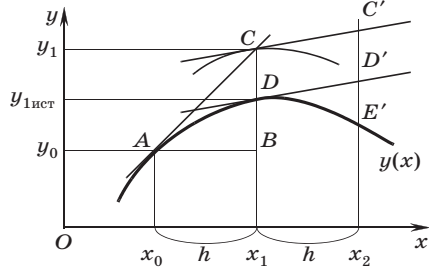


Рис. 4.1

График функции $y^{(h)}$, которая является решением задачи Коши (4.1), представляет собой гладкую кривую, проходящую через точку (x_0, y_0) согласно условию $y(x_0) = y_0$, и имеет в этой точке касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси Ox равен значению производной от решения в точке x_0 и равен значению правой части дифференциального уравнения в точке (x_0, y_0) согласно выражению $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. В случае небольшого шага разностной сетки h график функции и график касательной не успевают существенно разойтись друг от друга и можно в качестве значения решения в узле x_1 принять значение касательной y_1 вместо значения неизвестного точного решения $y_{1\text{ ист}}$. При этом допускается погрешность $|y_1 - y_{1\text{ ист}}|$, геометрически представленная отрезком CD на рис. 4.1. Из прямоугольного треугольника ABC находим $CB = BA \operatorname{tg}(\angle CAB)$ или $\Delta y = h y'(x_0)$. Учитывая, что $\Delta y = y_1 - y_0$, и заменяя производную $y'(x_0)$ на правую часть дифференциального уравнения, получаем соотношение

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0).$$

Считая теперь точку (x_1, y_1) начальной и повторяя все предыдущие рассуждения, получим значение y_2 в узле x_2 . Переход к произвольным индексам дает формулу метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k). \quad (4.2)$$

Погрешность метода Эйлера. На каждом шаге метода Эйлера допускается *локальная* погрешность по отношению к точному решению, график которого проходит через крайнюю левую точку отрезка. Геометрически локальная погрешность изображается отрезком CD на первом шаге, $C'D'$ — на втором и т. д. Кроме того, на каждом шаге, начиная со второго, накапливается *глобальная* погрешность, представляющая собой разность между численным решением и точным решением исходной начальной задачи (не локальной). Глобальная погрешность на втором шаге изображена отрезком $C'E'$ на рис. 4.1.

Локальная погрешность на каждом шаге выражается соотношением

$$\varepsilon_k^h = \frac{y''(\xi)}{2} h^2,$$

в котором $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$. Глобальная погрешность метода Эйлера $\varepsilon_{\text{гл}}^h = Ch$ в окрестности $h = 0$ ведет себя как линейная функция, и, следовательно, метод Эйлера имеет первый порядок точности относительно шага h .

Неявный метод Эйлера. Если на правой границе интервала использовать точное значение производной от решения (т. е. тангенса угла наклона касательной), то получается неявный метод Эйлера первого порядка точности:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad x_{k+1} = x_1 + h. \quad (4.3)$$

В общем случае нелинейное относительно y_{k+1} уравнение (4.3) численно решается с помощью одного из методов, описанных в разделе 2, например методом Ньютона или его модификациями.

Метод Эйлера — Коши. В данном методе на каждом интервале расчет проводится в два этапа. На первом (этап *прогноза*) определяется приближенное решение на правом конце интервала по методу Эйлера, на втором (этап *коррекции*) уточняется значение решения на правом конце с использованием полусуммы тангенсов углов наклона на концах интервала:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))}{2}, \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Этот метод имеет второй порядок точности.

Неявный метод Эйлера — Коши. Если на правой границе интервала использовать точное значение производной к решению (т. е. тангенса угла наклона касательной), то получается неявный метод Эйлера — Коши (метод трапеций) второго порядка точности:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))}{2}, \quad x_{k+1} = x_k + h. \quad (4.5)$$

Метод Эйлера — Коши с итерационной обработкой. Комбинация формул (4.3), (4.4) и (4.5) дает метод формально второго порядка точности, но более точного в смысле абсолютной величины погрешности приближенного решения, чем метод Эйлера — Коши (4.4):

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(0)} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1}^{(i)} &= y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}))}{2}, \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) правые верхние индексы в круглых скобках обозначают номер итерации, при этом начальное приближение $y_{k+1}^{(0)}$ определяется по методу Эйлера. Метод Эйлера — Коши с итерационной обработкой представляет собой реализацию метода простой итерации для решения нелинейного уравнения (4.5) в неявном методе Эйлера — Коши. Выполнять простые итерации до полной сходимости нет смысла, поэтому рекомендуется выполнять 3—4 итерации.

Первый улучшенный метод Эйлера. Данный метод использует расчет приближенного значения производной от решения в точке на се-

редине расчетного интервала. Значение производной в середине получа-
ют применением явного метода Эйлера на половинном шаге по x :

$$\begin{aligned}x_{k+1/2} &= x_k + \frac{h}{2}, & y_{k+1/2} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k), \\x_{k+1} &= x_k + h, & y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Данная модификация метода Эйлера имеет второй порядок точности.

Метод Рунге — Кутты. Все рассмотренные выше явные методы являются вариантами методов Рунге — Кутты. Семейство явных методов Рунге — Кутты p -го порядка записывается в виде совокупности формул:

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k, & y_k &= \sum_{i=1}^p c_i K_i^k, \\K_i^k &= hf(x_k + a_i h, & y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j^k), & \quad i = 2, 3, \dots, p.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Параметры a_i , b_{ij} , c_i подбираются так, чтобы значение y_{k+1} , рассчитанное по соотношению (4.8), совпадало со значением разложения в точке x_{k+1} точного решения в ряд Тейлора с погрешностью $O(h^{p+1})$.

Метод Рунге — Кутты третьего порядка точности. Один из методов Рунге — Кутты третьего порядка ($p = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $b_{21} = \frac{1}{3}$, $b_{31} = 0$, $b_{32} = \frac{2}{3}$, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{3}{4}$) имеет вид

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k, & \Delta y_k &= \frac{1}{4} (K_1^k + 3K_3^k), \\K_1^k &= hf(x_k, y_k), \\K_2^k &= hf\left(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}K_1^k\right), \\K_3^k &= hf\left(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}K_2^k\right).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Метод Рунге — Кутты четвертого порядка ($p = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 1$, $b_{21} = \frac{1}{2}$, $b_{31} = 0$, $b_{32} = \frac{1}{2}$, $b_{41} = 0$, $b_{42} = 0$, $b_{43} = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_4 = \frac{1}{6}$) является одним из самых широко используемых методов для решения задачи Коши: $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$,

$$\begin{aligned}\Delta y_k &= \frac{1}{6} (K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k), \\K_1^k &= hf(x_k, y_k), \\K_2^k &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k\right), \\K_3^k &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k\right), \\K_4^k &= hf(x_k + h, y_k + K_3^k).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Система (4.13) в более компактном виде записывается в векторной форме следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Здесь $\mathbf{y}(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ — вектор-столбец неизвестных функций, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ — вектор-функция правых частей. К векторному дифференциальному уравнению (4.14) можно применить все методы, рассмотренные выше в данном разделе (благодаря линейной структуре всех рассмотренных методов). При этом в формулах (4.2)–(4.11) все величины векторные, кроме переменной x и шага h .

Рассмотрим задачу Коши для системы двух ОДУ первого порядка, в которой уравнения записаны в развернутом виде

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Приведем формулы метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности для решения системы (4.15):

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k, & z_{k+1} &= z_k + \Delta z_k, \\ \Delta y_k &= \frac{1}{6} (K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k), & \Delta z_k &= \frac{1}{6} (L_1^k + 2L_2^k + 2L_3^k + L_4^k), \\ K_1^k &= hf(x_k, y_k, z_k), \\ L_1^k &= hg(x_k, y_k, z_k), \\ K_2^k &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k\right), \\ L_2^k &= hg\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k\right), \\ K_3^k &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k\right), \\ L_3^k &= hg\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k\right), \\ K_4^k &= hf(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k), \\ L_4^k &= hg(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Контроль правильности выбора шага h в случае использования метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности для системы (4.15) может быть организован с помощью вычисления на каждом шаге h параметров

$$\theta_1^k = \left| \frac{K_2^k - K_3^k}{K_1^k - K_2^k} \right|, \quad \theta_2^k = \left| \frac{L_2^k - L_3^k}{L_1^k - L_2^k} \right|. \quad (4.17)$$

Если величины θ_i^k , $i = 1, 2$, порядка нескольких сотых единицы, то расчет продолжается с тем же шагом, если $\theta_i^k > 0.1$, то шаг следует уменьшить, если же $\theta_i^k < 0.01$, то шаг можно увеличить.

4.1.4. Решение задачи Коши для ОДУ второго и более высоких порядков

Задача Коши для ОДУ n -го порядка ставится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} &= f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \\
 y(x_0) &= y_0, \\
 y'(x_0) &= y_{01}, \\
 y''(x_0) &= y_{02}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 y^{(n-1)}(x_0) &= y_{0(n-1)};
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

здесь $y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}$ — производная m -го порядка от решения, $m = 1, 2, \dots, n$.

Основной прием, используемый при решении задач типа (4.18), заключается в введении новых переменных и сведении задачи (4.8) для ОДУ высокого порядка к решению системы ОДУ первого порядка (4.13).

Введем новые переменные

$$\begin{aligned}
 z_1 &= y', \\
 z_2 &= y'', \\
 &\dots\dots\dots \\
 z_{n-1} &= y^{(n-1)}.
 \end{aligned}$$

С ними задачу (4.8) можно переписать в виде системы n ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases}
 y' = z_1, \\
 z_1' = z_2, \\
 z_2' = z_3, \\
 \dots\dots\dots \\
 z_{n-2}' = z_{n-1}, \\
 z_{n-1}' = f(x, y, z_1, \dots, z_{n-1});
 \end{cases}
 \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 y(x_0) &= y_0, \\
 z_1(x_0) &= y_{01}, \\
 z_2(x_0) &= y_{02}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 z_{n-1}(x_0) &= y_{0(n-1)}.
 \end{aligned}$$

Полученная система, состоящая из n ОДУ первого порядка с соответствующими начальными условиями, решается любым из описанных методов. Пусть необходимо решить задачу Коши для ОДУ второго порядка:

$$\begin{aligned}
 y'' &= f(x, y, y'), \\
 y(x_0) &= y_0, \\
 y'(x_0) &= y_{01}.
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Путем введения замены $z = y'$ приведем (4.20) к системе

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z), \end{cases} \quad (4.21)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

$$z(x_0) = y_{01},$$

которую можно решить, например, с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности (4.16).

ПРИМЕР 4.1

Явным методом Эйлера с шагом $h = 0.1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале $[0, 0.5]$. Численное решение сравнить с точным решением $y = \text{tg}(x) - x$.

РЕШЕНИЕ

Исходя из начальной точки $x_0 = 0, y_0 = 0$, рассчитаем значение y_1 в узле $x_1 = 0.1$ по формулам (4.2):

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1 \cdot (0 + 0)^2 = 0.$$

Аналогично получим решение в следующем узле $x_2 = 0.2$:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + 0.1 \cdot (0 + 0.1)^2 = 0.001.$$

Продолжим вычисления и, введя обозначения $\Delta y_k = hf(x_k, y_k)$ и $\varepsilon_k = |y_{\text{ист}}(x_k) - y_k|$, где $y_{\text{ист}}(x_k)$ — точное решение в узловых точках, получаемые результаты занесем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

	x	y	Δy_k	$y_{\text{ист}}$	ε_k
0	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.0000
1	0.100000000	0.000000000	0.001000000	0.000334672	0.3347E-03*
2	0.200000000	0.001000000	0.004040100	0.002710036	0.1710E-02
3	0.300000000	0.005040100	0.009304946	0.009336250	0.4296E-02
4	0.400000000	0.014345046	0.017168182	0.022793219	0.8448E-02
5	0.500000000	0.031513228		0.046302490	0.1479E-01

* Здесь и далее запись вида 0.3347E-03 означает $0.3347 \cdot 10^{-3}$.

Решением задачи является табличная функция — см. табл. 4.2 (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе).

Таблица 4.2

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.1000	0.20000	0.3000000	0.400000	0.500000
y_k	0.00000	0.0000	0.001000	0.0050401	0.014345	0.031513

ПРИМЕР 4.2

Решить задачу из примера 4.1 методом Эйлера — Коши (4.4).

РЕШЕНИЕ Исходя из начальных значений $x_0 = 0, y_0 = 0$, рассчитаем значение y_1 в узле $x_1 = 0.1$ по формулам (4.4):

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1 \cdot (0 + 0)^2 = 0,$$

$$f(x_1, \tilde{y}_1) = (0 + 0.1)^2 = 0.01,$$

$$y_1 = y_0 + 0.5h(f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)) = 0 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot (0 + 0.01) = 0.0005.$$

Аналогично получим решение в остальных узлах. Продолжая вычисления и вводя обозначение $\Delta y_k = 0.5h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))$, получаемые результаты занесем в табл. 4.3.

Таблица 4.3

k	x_k	y_k	\tilde{y}_k	Δy_k	$y_{\text{ист}}$	ε_k
0	0.0	0.000000000		0.000500000	0.000000000	0.000000000
1	0.1	0.000500000	0.00000	0.002535327	0.000334672	0.1653E-03
2	0.2	0.003035327	1.510025E-003	0.006778459	0.002710036	0.3253E-03
3	0.3	0.009813786	7.157661E-003	0.013594561	0.009336250	0.4775E-03
4	0.4	0.023408346	1.941224E-002	0.023615954	0.022793219	0.6151E-03
5	0.5	0.047024301	4.133581E-002		0.046302490	0.7218E-03

Решением задачи является табличная функция — см. табл. 4.4 (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе).

Таблица 4.4

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.100000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.500000
y_k	0.00000	0.000500	0.0030353	0.0098138	0.023408	0.047024

ПРИМЕР 4.3 Решить задачу из примера 4.1 первым улучшенным методом Эйлера (4.7).

РЕШЕНИЕ Стартуем из начальной точки $x_0 = 0, y_0 = 0$ и рассчитаем значение $y_{1/2}$ в узле $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.05$ по формулам (4.4):

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 0 + \frac{0.1}{2} (0 + 0)^2 = 0.$$

Затем определим величину правой части (величину производной от решения) в середине интервала $[x_0, x_1]$:

$$f(x_{1/2}, y_{1/2}) = (0 + 0.05)^2 = 0.0025.$$

Окончательно рассчитаем значение функции в узле x_1 :

$$y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}) = 0 + 0.1 \cdot 0.0025 = 0.00025.$$

Аналогично получим решение в остальных узлах. Продолжая вычисления и вводя обозначение $\Delta y_k = hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$, получаемые результаты занесем в табл. 4.5.

Таблица 4.5

k	x_k	y_k	$y_{k+1/2}$	Δy_k	$y_{\text{ит}}$	ε_k
0	0.0	0.000000000	0.000000000	0.000250000	0.000000000	0.000000000
1	0.1	0.000250000	0.0007525031	0.002272632	0.000334672	0.8467E-04
2	0.2	0.002522632	0.0045734025	0.006480762	0.002710036	0.1874E-03
3	0.3	0.009003393	0.0137775483	0.013233410	0.009336250	0.3329E-03
4	0.4	0.022236804	0.0311509998	0.023150628	0.022793219	0.5564E-03
5	0.5	0.045387432			0.046302490	0.9151E-03

Решением задачи является табличная функция — см. табл. 4.6 (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе).

Таблица 4.6

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.100000	0.2000000	0.3000000	0.400000	0.500000
y_k	0.00000	0.000250	0.0025226	0.0090033	0.022237	0.045387

ПРИМЕР 4.4

Решить задачу из примера 4.1 методом Рунге — Кутты четвертого порядка (4.10).

РЕШЕНИЕ

Вычислим значения вспомогательных величин:

$$K_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0.1 \cdot (0 + 0)^2 = 0;$$

$$y_0^1 = y_0 + \frac{1}{2} K_1^0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$K_2^0 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0\right) = 0.1\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.1\right)^2 = 0.00025;$$

$$y_0^2 = y_0 + \frac{1}{2} K_2^0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.00025 = 0.000125,$$

$$K_3^0 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0\right) = 0.1 \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 0.00025 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.1\right)^2 = 0.000251251;$$

$$y_0^3 = y_0 + K_3^0 = 0 + 0.000251251 = 0.000251251,$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0) = 0.1 \cdot (0 + 0.000251251 + 0 + 0.1)^2 = 0.001005031.$$

Найдем приращение функции на первом интервале

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6} (0 + 2 \cdot 0.00025 + 2 \cdot 0.000251251 + 0.001005031) = 0.000334588$$

и значение функции в первом узле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0.000334588 = 0.000334588.$$

Аналогично получим решение в остальных узлах — см. табл. 4.7.

Таблица 4.7

k/i	x_k	y_k^i	K_i^k	Δy_k	θ^k	$y_{\text{ист}}$	ε_k
0/1	0.0	0.0000000	0.000000000	0.000334589	0.005006	0.000000	0.0000000
0/2	0.05	0.0000000	0.000250000				
0/3	0.05	0.0001250	0.000251252				
0/4	0.1	0.00025125	0.001005031				
1/1	0.1	0.000334589	0.001006703	0.002375289	0.015116	0.00033467	0.8301E-07
1/2	0.15	0.000837941	0.002275208				
1/3	0.15	0.001472193	0.002294383				
1/4	0.2	0.002628972	0.004105850				
2/1	0.2	0.002709878	0.004109129	0.006626161	0.025535	0.002710036	0.1573E-06
2/2	0.25	0.004764443	0.006490492				
2/3	0.25	0.005955124	0.006551303				
2/4	0.3	0.009261181	0.009564248				
3/1	0.3	0.009336039	0.009568879	0.013456954	0.036504	0.009336250	0.2103E-06
3/2	0.35	0.014120479	0.013258372				
3/3	0.35	0.015965225	0.013393055				
3/4	0.4	0.022729094	0.017869989				
4/1	0.4	0.022792993	0.017875391	0.023509315	0.048306	0.022793219	0.2259E-06
4/2	0.45	0.031730689	0.023206446				
4/3	0.45	0.034396216	0.023463969				
4/4	0.5	0.046256962	0.029839667				
5	0.5	0.046302308				0.046302490	0.1823E-06

Решением задачи является табличная функция — см. табл. 4.8 (оставлены 7 значащих цифр в каждом числе).

Таблица 4.8

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.1000	0.200000	0.3000000	0.400000	0.500000
y_k	0.00000	0.000334589	0.002709878	0.009336039	0.02279299	0.04630231

ПРИМЕР 4.5 На интервале $[0, 1]$ с шагом $h = 0.2$ решить задачу Коши методом Рунге — Кутты четвертого порядка:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)y'' &= 2xy', \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 3.\end{aligned}$$

Численное решение сравнить с аналитическим решением

$$y_{\text{ист}}(x) = x^3 + 3x + 1.$$

РЕШЕНИЕ Аналогично (4.18)—(4.21) введением новой переменной $z = y'$ решение исходной начальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{2xz}{x^2 + 1}, \end{cases} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1, \\ z(0) &= 3. \end{aligned}$$

Данную систему решим методом Рунге — Кутты с использованием формул (4.16). Вычислим значения вспомогательных величин:

$$K_1^0 = hf(x_0, y_0, z_0) = hz_0 = 0.2 \cdot 3 = 0.6;$$

$$L_1^0 = hg(x_0, y_0, z_0) = h \frac{2x_0 z_0}{x_0^2 + 1} = 0.2 \frac{2 \cdot 0 \cdot 3}{0^2 + 1} = 0;$$

$$K_2^0 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + K_1^0, z_0 + L_1^0\right) = 0.2\left(3 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = 0.6;$$

$$L_2^0 = hg\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0, z_0 + \frac{1}{2}L_1^0\right) = 0.2 \frac{2 \cdot (0 + 0.1)(3 + (1/2) \cdot 0)}{(0 + 0.1)^2 + 1} = 0.11881188;$$

$$K_3^0 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0, z_0 + \frac{1}{2}L_2^0\right) = 0.2 \cdot \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 0.1881188\right) = 0.611881188;$$

$$L_3^0 = hg\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0, z_0 + \frac{1}{2}L_2^0\right) = 0.2 \frac{2 \cdot (0 + 0.1)(3 + (1/2) \cdot 0.11881188)}{(0 + 0.1)^2 + 1} = 0.121164592;$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0, z_0 + L_3^0) = 0.2 \cdot (3 + 0.12116459) = 0.62423292;$$

$$L_4^0 = hg(x_0 + h, y_0 + K_3^0, z_0 + L_3^0) = 0.2 \frac{2 \cdot (0 + 0.2)(3 + 0.121164592)}{(0 + 0.2)^2 + 1} = 0.240089584.$$

Найдем приращения функций на первом интервале:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \\ &= \frac{1}{6}(0.6 + 2 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.611881188 + 0.62423292) = 0.607999216, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z_0 &= \frac{1}{6}(L_1^0 + 2L_2^0 + 2L_3^0 + L_4^0) = \\ &= \frac{1}{6}(0.0 + 2 \cdot 0.11881188 + 2 \cdot 0.121164592 + 0.240089584) = 0.1200071 \end{aligned}$$

и значения функций в первом узле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.607999216 = 1.607999216,$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 3 + 0.1200071 = 3.1200071.$$

Аналогично получим решения в остальных узлах, результаты вычислений занесем в табл. 4.9.

Таблица 4.9

k	x_k	y_k	z_k	Δy_k	Δz_k	$y_{\text{ист}}$	ε_k
0	0.0	1.0000000	3.000000000	0.607999216	0.1200	1.000000000	0.00000
1	0.2	1.607999216	3.120007088	0.655995430	0.3600	1.607999216	0.784E-6
2	0.4	2.263994646	3.480019051	0.751991317	0.6000	2.263994646	0.535E-5
3	0.6	3.015985963	4.080024218	0.895987662	0.8400	3.015985963	0.140E-4
4	0.8	3.911973624	4.920018746	1.087984366	1.080	3.911973624	0.264E-4
5	1.0	4.999957990	6.000004180			5.000000000	0.420E-4

Решением задачи является табличная функция — см. табл. 4.10 (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе).

Таблица 4.10

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.200000	0.4000000	0.6000000	0.8000000	1.000000
y_k	1.0000000	1.607999216	2.263994646	3.015985963	3.911973624	4.99995799

4.1.5. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Многие процессы в живой и неживой природе описываются моделями, представленными дифференциальными уравнениями с *запаздывающими аргументами*. Наиболее часто такие модели используют при исследовании динамики развития популяций, процесса кроветворения, динамики различных автогенераторов, механизмов изменения рыночной конъюнктуры и т. п. Решение подобных уравнений обладает определенной спецификой.

Рассмотрим для простоты случай одного дифференциального уравнения с единственным запаздывающим аргументом a :

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y(x), y(x - a)), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Пусть имеется решение в точке $y_k = y(x_k)$. Опишем процедуру нахождения решения в точке $x_k = x_k + h$ модифицированным методом Эйлера (4.7) второго порядка точности. В этом методе надо использовать значение решения в точке x_k и предварительное решение в точке $x_{k+1/2} = x_k + h/2$. Соответственно от этих точек следует брать запаздывание a , т. е. необходимо найти значение решения в точках $(x_k - a)$, $(x_k + h/2 - a)$.

Для примера опишем процедуру определения значения $y(x_k - a)$. Если $(x_k - a)$ лежит левее начальной точки x_0 , то $y(x_k - a)$ определяется из начальных условий — в этом случае должно быть задано поведение решения на интервале левее точки x_0 , достаточном для определения значения в точке $(x_k - a)$. Если $(x_k - a)$ совпадает с одним из узлов правее x_0 , то $y(x_k - a)$ принимает значение функции в этом узле. Если величина $(x_k - a)$ не совпадает ни с одним узловым значением x_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, то она лежит внутри некоторого отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ и можно по значениям y в трех узлах, например в x_{j-1} , x_j , x_{j+1} , построить интерполяционный многочлен $P_2(x)$ для определения приближенного значения $y(x_k - a) \approx P_2(x_k - a)$. Таким образом, схема расчета значения решения в новой точке для системы (4.22) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{k+1/2} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k, y(x_k - a)), \\ x_{k+1} &= x_k + h, \\ x_{k+1/2} &= x_k + h/2, \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}, y(x_{k+1/2} - a)). \end{aligned} \tag{4.23}$$

ПРИМЕР 4.6

Улучшенным методом Эйлера с шагом $h = 0.1$ получить численное решение дифференциального уравнения

$$y' = A_1 y(x) \left(1 - \frac{y(x - A_2)}{A_3} \right)$$

с начальными условиями $y(0) = 2.0$ на интервале $[0, 4]$ с шагом $h = 0.4$ при $A_1 = 1.6$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 10$; здесь A_2 — константа, характеризующая запаздывание аргумента.

Данное уравнение может описывать динамику одновидовой популяции (в этом случае A_1 — коэффициент экспоненциального роста, A_3 — емкость среды обитания, A_2 — возраст производителей, x — время). Смысл модели в следующем: скорость роста популяции зависит не только от общей численности $y(x)$ в любой момент времени x , определяемой емкостью среды обитания A_3 , но и от количества взрослых особей в момент времени $(x - A_2)$. Данное уравнение может также описывать цикличность деловой активности на фондовом рынке.

РЕШЕНИЕ

Решение будем проводить с использованием формул (4.23). Значение решения в точке

$$x_0 - A_2 = 0.0 - 0.5 = -0.5$$

и во всех точках, лежащих левее точки x_0 , примем равным начальному значению $y_0 = 2.0$, т. е. $y(x_0 - A_2) = 2.0$. Определим величину функции в точке

$$x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.0 + 0.1 = 0.1$$

по методу Эйлера:

$$\begin{aligned} y_{1/2} &= y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0, y(x_0 - A_2)) = 2.0 + 0.1 \cdot 1.6 \cdot 2.0 \cdot (1.0 - 2.0/10.0) = \\ &= 2.256. \end{aligned}$$

В середине первого шага считаем значение функции с запаздывающим аргументом

$$x_0 + h/2 - A_2 = 0.0 + 0.1 - 0.5 = -0.4, \quad y(x_0 + h/2 - A_2) = 2.0$$

и затем значение решения в точке 1:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}, y(x_{1/2} - A_2)) = \\ &= 2.0 + 0.2 \cdot 1.6 \cdot 2.256 \cdot (1.0 - 2.0/10.0) = 2.577536. \end{aligned}$$

Продолжая таким образом вычисления и используя квадратичную интерполяцию (например, с помощью многочлена Лагранжа) для нахождения значения функции с запаздывающим аргументом, когда значения $(x_k - A_2)$ или $(x_k + h/2 - A_2)$ будут лежать правее, чем точка x_0 , получим решения в последующих точках. Результаты вычислений занесены в табл. 4.11, в которой для удобства использованы следующие обозначения:

$$\Delta \tilde{y}_k = \frac{h}{2} f(x_k, y_k, y(x_k - A_2)), \quad x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2}, \quad y_{k+1/2} = y_k + \Delta \tilde{y}_k,$$

$$\tilde{x}_k = x_k + h/2 - A_2, \quad \tilde{y}_k = y(x_k + h/2 - A_2), \quad \Delta y_k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \Delta \tilde{y}_k, \tilde{y}_k).$$

Таблица 4.11

k	x_k	y_k	$x_k - A_2$	$y(x_k - A_2)$	$\Delta \tilde{y}_k$	$x_{k+1/2}$	$y_{k+1/2}$	\tilde{x}_k	\tilde{y}_k	Δy_k
0	0.0	2.0	-0.5	2.0	0.256000	0.1	2.25600	-0.4	2.0	0.577536
1	0.2	2.57754	-0.3	2.0	0.329925	0.3	2.90746	-0.2	2.0	0.744310
2	0.4	3.32185	-0.1	2.0	0.425196	0.5	3.74704	0.0	2.0	0.959243
3	0.6	4.28109	0.1	2.26792	0.529627	0.7	4.81072	0.2	2.57754	1.142636
4	0.8	5.42372	0.3	2.92282	0.614154	0.9	6.03788	0.4	3.32185	1.290300
5	1.0	6.71402								

Решением задачи является табличная функция — см. табл. 4.12 (оставлены 6 значащих цифр).

Таблица 4.12

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.00000
y_k	2.0	2.57754	3.32185	4.28109	5.42372	6.71402

ЗАМЕЧАНИЕ

Как правило, в отличие от примера 4.6, в задачах с запаздывающим аргументом интересуются поведением решения на достаточно больших интервалах времени. При этом выполняется от сотен до тысяч шагов по времени, что приводит к необходимости использования компьютера.

4.1.6. Многошаговые методы. Метод Адамса

Многошаговые методы решения задачи Коши характеризуются тем, что решение в текущем узле зависит от данных не в одном предыдущем узле, как это имеет место в одношаговых методах, а в нескольких предыдущих. Многие многошаговые методы различного порядка точности можно конструировать с помощью квадратурного способа, т. е. с использованием эквивалентного интегрального уравнения.

Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) \, dx.$$

(4.24)

Если решение задачи Коши получено в узлах вплоть до k -го, то можно аппроксимировать подынтегральную функцию, например интерполяционным многочленом какой-либо степени. Вычислив интеграл от построенного многочлена на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, получим ту или иную формулу Адамса. В частности, если использовать многочлен нулевой степени (т. е. заменить подынтегральную функцию ее значением на левом конце отрезка в точке x_k), то получим явный метод Эйлера. Если проделать то же самое, но подынтегральную функцию аппроксимировать значением на правом конце в точке x_{k+1} , то получим неявный метод Эйлера.

Метод Адамса. При использовании интерполяционного многочлена третьей степени, построенного по значениям подынтегральной функции в последних четырех узлах, получим метод Адамса четвертого порядка точности:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} \left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3} \right),$$

(4.25)

где f_k — значение подынтегральной функции в узле x_k . Метод Адамса (4.25), как и все многошаговые методы, не является самостартующим, т. е. для того, чтобы использовать метод Адамса, необходимо иметь решения в первых четырех узлах. В узле x_0 решение y_0 известно из начальных условий, а в других трех узлах x_1, x_2, x_3 решения y_1, y_2, y_3 можно получить с помощью подходящего одношагового метода, например метода Рунге — Кутты четвертого порядка (4.10).

Метод Адамса — Бэшфорта — Моултона. Данный метод типа *предиктор — корректор* позволяет повысить точность вычислений метода Адамса за счет двойного вычисления значения функции $f(x, y)$ при определении y_{k+1} на каждом новом шаге по x .

■ **Этап предиктор.** Аналогично методу Адамса по значениям в узлах $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$ рассчитывается «предварительное» значение решения в узле x_{k+1} :

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}). \quad (4.26)$$

С помощью полученного значения \tilde{y}_{k+1} рассчитывается *предварительное* значение функции $f_{k+1} = f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$ в новой точке.

■ **Этап корректор.** На корректирующем этапе по методу Адамса четвертого порядка по значениям в узлах $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ рассчитывается *окончательное* значение решения в узле x_{k+1} :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}). \quad (4.27)$$

ПРИМЕР 4.7

Методом Адамса с шагом $h = 0.1$ получить численное решение дифференциального уравнения

$$y' = (y + x)^2$$

с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале $[0, 1.0]$. Численное решение сравнить с точным решением $y = \operatorname{tg}(x) - x$.

РЕШЕНИЕ

Данная задача на первой половине интервала совпадает с задачей из примера 4.4. Поэтому для нахождения решения в первых узлах будем использовать результаты решения этой задачи методом Рунге — Кутты четвертого порядка (4.10), приведенные в примере 4.4. Решением задачи является табличная функция, располагающаяся во втором и третьем столбцах табл. 4.13, в пятом столбце приведено точное решение и в последнем — погрешность численного решения.

Таблица 4.13

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{\text{ист}}$	ε_k
0	0.0	0.0000000	0.000000000	0.000000	0.0000000
1	0.1	0.000334589	0.010067030	0.00033467	0.8301E-07
2	0.2	0.002709878	0.041091295	0.002710036	0.1573E-06
3	0.3	0.009336039	0.095688785	0.009336250	0.2103E-06
4	0.4	0.022715110	0.178688064	0.022793219	0.781090E-04
5	0.5	0.046098359	0.298223418	0.046302490	0.204131E-03
6	0.6	0.083724841	0.467479658	0.084136808	0.411968E-03
7	0.7	0.141501753	0.708125200	0.142288380	0.786628E-03
8	0.8	0.228133669	1.057058842	0.229638557	0.150489E-02
9	0.9	0.357181945	1.580506443	0.360158218	0.297627E-02
10	1.0	0.551159854	2.406096892	0.557407725	0.624787E-02

ПРИМЕР 4.8 Методом Адамса — Бэшфортса — Моултона с шагом $h = 0.1$ получить численное решение начальной задачи из примера 4.7.

РЕШЕНИЕ Как и в предыдущем примере, в первых трех узлах после начального решение получаем методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Начиная с четвертого узла ($k = 4$), на каждом шаге в расчетах значений y_{k+1} используем соотношения (4.26), (4.27). Решением задачи является табличная функция, располагающаяся во втором и четвертом столбцах табл. 4.14, в шестом столбце приведено точное решение и в последнем — погрешность численного решения. Решение, полученное методом Адамса — Бэшфортса — Моултона, несколько точнее, чем решение методом Адамса.

Таблица 4.14

k	x_k	\tilde{y}_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{\text{ист}}$	ε_k
0	0.0	—	0.0000000	0.000000000	0.000000	0.0000000
1	0.1	—	0.000334589	0.010067030	0.00033467	0.8301E-07
2	0.2	—	0.002709878	0.041091295	0.002710036	0.1573E-06
3	0.3	—	0.009336039	0.095688785	0.009336250	0.2103E-06
4	0.4	0.022715110	0.02279808	0.17875822	0.022793219	0.4863E-05
5	0.5	0.046197407	0.04631491	0.29845998	0.046302490	0.1242E-04
6	0.6	0.083978353	0.08416105	0.46807634	0.084136808	0.2424E-04
7	0.7	0.142027364	0.142331883	0.70952300	0.142288380	0.4350E-04
8	0.8	0.229171282	0.229714203	1.06031134	0.229638557	0.7565E-04
9	0.9	0.359247335	0.360288001	1.58832585	0.360158218	0.1298E-03
10	1.0	0.555451403	0.557625580	2.42619745	0.557407725	0.2179E-03

4.2. Численные методы решения
краевой задачи для обыкновенных
дифференциальных уравнений

Примером краевой задачи является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4.28}$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка $[a, b]$,

$$\begin{aligned} y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Следует найти такое решение $y(x)$ на этом отрезке, которое принимает на концах отрезка значения y_a, y_b . Если функция $f(x, y, y')$ линейна по аргументам y, y' , то задача (4.28), (4.29) — линейная краевая задача, в противном случае — нелинейная.

Кроме граничных условий (4.29), называемых граничными условиями первого рода, используются еще условия на производные от решения на концах — граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} y'(a) &= \hat{y}_a, \\ y'(b) &= \hat{y}_b \end{aligned} \tag{4.30}$$

или линейная комбинация решений и производных — граничные условия третьего рода:

$$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = \hat{y}_a, \\ \delta y(b) + \gamma y'(b) = \hat{y}_b, \end{cases} \quad (4.31)$$

где $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ — числа такие, что $|\alpha| + |\beta| \neq 0, |\delta| + |\gamma| \neq 0$. Возможно на разных концах отрезка использовать условия различных типов.

Здесь рассматриваются два приближенных метода решения краевой задачи:

- ☐ метод стрельбы (пристрелки);
- ☐ конечно-разностный метод.

4.2.1. Метод стрельбы

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи.

Пусть необходимо решить краевую задачу (4.28), (4.29) на отрезке $[a, b]$. Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с уравнением (4.28) и с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0, \\ y'(a) &= \eta, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где η — некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = a$.

Положим сначала некоторое начальное значение параметру $\eta = \eta_0$, после чего решим каким-либо методом задачу Коши (4.28), (4.32). Пусть $y = y(x, y_0, \eta_0)$ — решение этой задачи на интервале $[a, b]$. Тогда, сравнивая значение функции $y(b, y_0, \eta_0)$ со значением y_1 на правом конце отрезка, можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению в левом конце отрезка. Решая задачу Коши для нового значения $\eta = \eta_1$, получим другое решение со значением $y(b, y_0, \eta_1)$ на правом конце. Таким образом, значение решения на правом конце $y(b, y_0, \eta)$ будет являться функцией одной переменной η .

Задачу можно сформулировать следующим образом: требуется найти значение переменной η^* такое, чтобы решение $y(b, y_0, \eta^*)$ на правом конце отрезка совпало со значением y_1 из (4.29). Другими словами, решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\eta) = 0, \quad (4.33)$$

в котором $\Phi(\eta) = y(b, y_0, \eta) - y_1$.

Уравнение (4.33) является *алгоритмическим* уравнением, так как левая часть его задается с помощью алгоритма численного решения соответствующей задачи Коши. Но методы решения уравнения (4.33) аналогичны методам решения нелинейных уравнений, изложенным в разделе 2. Отметим, что поскольку невозможно вычислить производную функции $\Phi(\eta)$, вместо метода Ньютона следует использовать метод секущих, в котором производная от функции заменена ее разностным аналогом. Данный разностный ана-

лог легко вычисляется по двум приближениям, например η_j и η_{j+1} . Следующее значение искомого корня определяется с помощью соотношения

$$\eta_{j+2} = \eta_{j+1} - \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\Phi(\eta_{j+1}) - \Phi(\eta_j)} \Phi(\eta_{j+1}). \quad (4.34)$$

Итерации по формуле (4.34) выполняются до удовлетворения заданной точности.

ПРИМЕР 4.9

Методом стрельбы решить краевую задачу

$$y'' = e^x + \sin y$$

с граничными условиями первого рода на отрезке $[0, 1]$:

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

РЕШЕНИЕ

Заменой переменных $z = y'$ сведем дифференциальное уравнение второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = e^x + \sin y. \end{cases}$$

Задачу Коши для системы с начальными условиями на левом конце $y(0) = 1, y'(0) = \eta$ будем решать методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с шагом $h = 0.1$ до удовлетворения на правом конце условия

$$|y(1.0, 1.0, \eta_k) - 2.0| = |\Phi(\eta_k)| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 0.0001$ и $y(1.0, 1.0, \eta_k)$ — значение решения задачи Коши на правом конце отрезка при $b = 1.0, y(0) = y_0 = 1.0, \eta_k$ — значение первой производной к решению на левом конце отрезка на k -й итерации.

Примем в качестве первых двух значений параметра η следующие: $\eta_0 = 1.0, \eta_1 = 0.8$. Дважды решив задачу Коши с этими параметрами методом Рунге — Кутты с шагом $h = 0.1$, получим два решения:

$$y(1.0, 1.0, \eta_0) = 3.168894836, \quad y(1.0, 1.0, \eta_1) = 2.97483325.$$

Вычислим новое приближение параметра η по формуле (4.34):

$$\eta_2 = 0.8 - \frac{0.8 - 1.0}{2.97483325 - 3.168894836} (2.97483325 - 2.0) = -0.204663797.$$

Решая задачу Коши с параметром η_2 , получим решение $y(1.0, 1.0, \eta_2) = 1.953759449$ и т. д.:

$$\begin{aligned} \eta_3 &= -0.204663797 - \frac{-0.204663797 - 0.8}{1.953759449 - 2.97483325} (1.953759449 - 2.0) = \\ &= -0.159166393; \end{aligned}$$

$$y(1.0, 1.0, \eta_3) = 2.001790565; \quad |\Phi(\eta_3)| = 0.001790565 \geq \varepsilon;$$

$$\begin{aligned} \eta_4 &= -0.159166393 - \frac{-0.159166393 - (-0.204663797)}{2.001790565 - 1.953759449} (2.001790565 - 2.0) = \\ &= -0.160862503; \end{aligned}$$

$$y(1.0, 1.0, \eta_4) = 2.000003115; \quad |\Phi(\eta_4)| = 0.000003115 \leq \varepsilon.$$

Вычисления заносим в табл. 4.15.

чим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\begin{cases} (-2 + h^2 q(x_1))y_1 + \left(1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right)y_2 = h^2 f(x_1) - \left(1 - \frac{p(x_1)h}{2}\right)y_a, \\ \left(1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{k-1} + (-2 + h^2 q(x_k))y_k + \left(1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{k+1} = h^2 f(x_k), \\ \left(1 - \frac{p(x_{N-1})h}{2}\right)y_{N-1} + (-2 + h^2 q(x_{N-1}))y_{N-1} = \\ = h^2 f(x_{N-1}) - \left(1 + \frac{p(x_{N-1})h}{2}\right)y_b, \end{cases} \quad k = 2, \dots, N-2. \quad (4.39)$$

Для системы (4.39) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k) < 0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\begin{cases} |-2 + h^2 q(x_k)| > \left|1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right|, \\ |-2 + h^2 q(x_k)| > \left|1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right| + \left|1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right|, \quad k = 2, \dots, N-2, \\ |-2 + h^2 q(x_{N-1})| > \left|1 - \frac{p(x_{N-1})h}{2}\right|, \end{cases} \quad (4.40)$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого или второго порядков.

$$\begin{cases} y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \\ y'_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + O(h), \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\begin{cases} y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2), \\ y'_N = \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} + O(h^2). \end{cases} \quad (4.42)$$

В случае использования формул (4.41) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трехдиагональная структура матрицы коэффициентов. При использовании формул (4.42) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трехдиагональная.

ПРИМЕР 4.10

Решить краевую задачу с шагом $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y'' - xy' - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(1) + 2y(1) = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Здесь

$$p(x) = x, \quad q(x) = -1, \quad f(x) = 0, \quad N = 5,$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.4, \quad x_3 = 0.6, \quad x_4 = 0.8, \quad x_5 = 1.0.$$

Во всех внутренних узлах отрезка $[0, 1]$ после замены производных их разностными аналогами получим

$$(1 - 0.1x_k)y_{k-1} + (-2.04)y_k + (1 + 0.1x_k)y_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

На левой границе $y_0 = 1$, на правой границе аппроксимируем производную односторонней разностью первого порядка:

$$\frac{y_5 - y_4}{0.2} + 2y_5 = 0.$$

С помощью группировки слагаемых, приведения подобных членов и подстановки значений x_k и с учетом граничного условия $y_0 = 1$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -2.04y_1 + 1.02y_2 & = -0.98, \\ 0.96y_1 - 2.04y_2 + 1.04y_3 & = 0, \\ 0.94y_2 - 2.04y_3 + 1.06y_4 & = 0, \\ 0.92y_3 - 2.04y_4 + 1.08y_5 & = 0, \\ y_4 - 1.4y_5 & = 0. \end{cases}$$

В данной трехдиагональной системе выполнено условие преобладания диагональных элементов и можно использовать метод прогонки (раздел 1.1.2). В результате решения системы методом прогонки получим следующие значения:

$$y_5 = 0.2233205, \quad y_4 = 0.31265, \quad y_3 = 0.43111, \quad y_2 = 0.58303, \quad y_1 = 0.77191.$$

Решением краевой задачи является табличная функция, приведенная в табл. 4.17.

Таблица 4.17

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_k	1.0	0.77191	0.58303	0.43111	0.31265	0.22332

ЗАДАЧИ

- 4.1.** Решить задачу Коши методом по выбору преподавателя для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка на указанном отрезке с заданным шагом h . Полученное численное решение сравнить с точным. Определить погрешность решения.

№	Задача Коши	Точное решение
1	$y' = -y + e^x,$ $y(0) = 1.5,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \frac{e^x}{2} + e^{-x}$
2	$y' = -2xy + xe^{-x^2},$ $y(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \frac{e^{-x^2}x^2}{2}$
3	$y' = -y^2 - \frac{1}{x^4},$ $y(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = -\frac{x - \operatorname{tg}\left(\frac{-1+x}{x}\right)}{x^2}$
4	$y' = -y \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(2x),$ $y(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$
5	$y' = \frac{-3yx + 8y - x^2}{x^2 - 5x + 6},$ $y(0) = -1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \frac{-(1/4)x^4 + (2/3)x^3 + 12}{(x-2)^2(x-3)}$
6	$y' = -y \operatorname{tg} x + \sin 2x,$ $y(0) = -1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = -2 \cos^2 x + \cos x$
7	$y' = \frac{(x-1)y}{x^2},$ $y(1) = e,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = xe^{1/x}$
8	$y' = y \sin x - \cos x \sin x,$ $y(0) = 0.367879,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \cos x - 1 + e^{-\cos x}$
9	$y' = \frac{y^2 + x^2y}{x^3},$ $y(1) = 0.5,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{x^2}{1+x}$
10	$y' = (y+x)^2,$ $y(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \operatorname{tg} x - x$
11	$y' = 2 \frac{x^2 - xy}{x^2 + 1},$ $y(1) = 0.6666667,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{2}{3} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)$
12	$y' = \frac{y^2 + yx}{x^2},$ $y(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = -\frac{x}{\ln x - 1}$

Продолжение таблицы

№	Задача Коши	Точное решение
13	$y' = x^2(y^2 + 1),$ $y(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{3} x^3 \right)$
14	$y' = -\frac{1}{2} \frac{y}{x} + x^2,$ $y(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{2}{7} x^3 + \frac{5}{7\sqrt{x}}$
15	$y' = \frac{y}{x^2} + e^{x-1/x},$ $y(1) = 1.367879,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = e^{-1/x}(e^x + 1)$
16	$y' = e^{x-y} + e^x,$ $y(0) = 0.541325,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \ln(-1 + e^e x)$
17	$y' = (-y + x \sin x)/x,$ $y(1) = 0.3011687 = \sin 1 - \cos 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{\sin x - x \cos x}{x}$
18	$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x },$ $y(2) = -0.733026,$ $x \in [2, 3], h = 0.1$	$y = x \ln \ln x $
19	$y' = \frac{y}{x} + x^2 \sin x,$ $y(1) = 1.3011687 = \sin 1 - \cos 1 + 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x \sin x - x^2 \cos x + x$
20	$y' = \frac{-yx + x(x^2 + 1)}{x^2 + 1},$ $y(0) = 1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{x^2 + 1}}$
21	$y' = -\frac{y}{x} - x^2,$ $y(1) = 0.75,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{-\frac{1}{4}x^4 + 1}{x}$
22	$y' = \frac{1 - yx}{x^2 + 1},$ $y(1) = 0.623225,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}$
23	$y' = -y^2 + \frac{y}{x},$ $y(1) = 2/3,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = 2 \frac{x}{x^2 + 2}$
24	$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1,$ $y(1) = 0,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = -\frac{x \ln x}{\ln x + 1}$
25	$y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x},$ $y(1) = 0.5,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{1}{\ln x + 1 + x}$

Окончание таблицы

№	Задача Коши	Точное решение
26	$y' = \frac{y(2y \ln x - 1)}{x},$ $y(1) = 0.333333333,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{1}{2(\ln x + 1) + x}$
27	$y' = \frac{y^2 + xy}{x^2},$ $y(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = -\frac{x}{\ln x - 1}$
28	$y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} + 1,$ $y(1) = -0.541325,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x \left(\ln \left(-\frac{x}{-1 + x/e} \right) - 1 \right)$
29	$y' = \frac{y \ln y}{x},$ $y(1) = e,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = e^x$
30	$y' = \frac{y(\ln(xy) - 1)}{x},$ $y(1) = e,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{1}{x} e^x$

4.2. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на указанном отрезке с заданным шагом h . Полученное численное решение сравнить с точным. Определить погрешность решения.

№	Задача Коши	Точное решение
1	$y'' + y - \sin 3x = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \cos x + \frac{11}{8} \sin x - \frac{\sin 3x}{8}$
2	$y'' + y - 2 \cos x = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = x \sin x + \cos x$
3	$y'' - 2y - 4x^2 e^{x^2} = 0,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = e^{x^2} + e^{x\sqrt{2}} + e^{-x\sqrt{2}}$
4	$x^2 y'' - x(x^2 - 1)y' - (x^2 + 1)y = 0,$ $y(1) = 1 + e^{1/2},$ $y'(1) = 2e^{1/2} - 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{1}{x} (1 + e^{x^2/2})$
5	$y'' - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{x}{\cos x}$

Продолжение таблицы

№	Задача Коши	Точное решение
6	$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = (1 + x)e^{-x^2}$
7	$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = (1 + x)e^{x^2}$
8	$y'' - 4xy' + (4x^2 - 3)y - e^{x^2} = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = (e^x + e^{-x} - 1)e^{x^2}$
9	$y'' - \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)y' + \left(\frac{1}{4x^2}\right)(x + x^{1/2} - 8)y = 0,$ $y(1) = 2e,$ $y'(1) = 2e,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)e^{x^{1/2}}$
10	$y'' + y' \operatorname{tg}(x) + y \cos^2 x = 0,$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \cos(\sin x) + \sin(\cos x)$
11	$y'' + y' \operatorname{tg} x - y \cos^2 x = 0,$ $y(0) = 2,$ $y'(0) = 0,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = e^{\sin x} + e^{-\sin x}$
12	$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = x - x^2 + 1$
13	$y'' - 2(\operatorname{tg} x)y' + 3y = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 2,$ $x \in [0, 1], h = 0.1$	$y = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos x}$
14	$y'' + 2y' \operatorname{ctg} x + 3y = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{-0.9783 \cos 2x + 0.4776 \sin 2x}{\sin x}$
15	$xy'' + y' = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = 1 + \ln x $
16	$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0,$ $y(2) = 7,$ $y'(2) = 5,$ $x \in [2, 3], h = 0.1$	$y = x^2 + x + 1$

Продолжение таблицы

№	Задача Коши	Точное решение
17	$xy'' - (x+1)y' + y = 0,$ $y(1) = 2 + e,$ $y'(1) = 1 + e,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x + 1 + e^x$
18	$y'' - \frac{x+1}{x}y' - 2\frac{x-1}{x}y = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{e^{2x}}{3e^2} + \frac{(3x+1)e^{-x}}{3e}$
19	$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = (\cos 2 - \sin 2) \cos(2x^{1/2}) +$ $+ (\cos 2 + \sin 2) \sin(2x^{1/2})$
20	$x(x-1)y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{4}y = 0,$ $y(2) = \sqrt{2},$ $y'(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2},$ $x \in [2, 3], h = 0.1$	$y = x ^{3/2}$
21	$x^2y'' - 12y = 0,$ $y(1) = 2,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x^4 + x^{-3}$
22	$x^2y'' + (x^2 - 2)y = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 0,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \sin(x-1) + \frac{1}{x} \cos(x-1)$
23	$x^2y'' + xy' - y - 3x^2 = 0,$ $y(1) = 3,$ $y'(1) = 2,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x^2 + x + \frac{1}{x}$
24	$x^2y'' + (x+1)y' - y = 0,$ $y(1) = 2 + e,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x + 1 + xe^{1/x}$
25	$(x-2)^2y'' - (x-2)y' - 3y = 0,$ $y(3) = 2,$ $y'(3) = 2,$ $x \in [3, 4], h = 0.1$	$y = (x-2)^3 + \frac{1}{x-2}$
26	$x^4y'' + 2x^3y' + y = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = (\sin 1 + \cos 1) \cos \frac{1}{x} +$ $+ (\sin 1 - \cos 1) \sin \frac{1}{x}$
27	$x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0,$ $y(\pi/2) = \pi/2,$ $y'(\pi/2) = 1 - \pi/2,$ $x \in [\pi/2, \pi/2 + 1], h = 0.1$	$y = x \cos x + x \sin x$

Окончание таблицы

№	Задача Коши	Точное решение
28	$x^2 y'' - 3xy' + 4y - 5x = 0,$ $y(1) = 6,$ $y'(1) = 8,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = 5x + x^2 + x^2 \ln x $
29	$x^2 y'' - 3xy' - 5y - x^2 \ln x = 0,$ $y(1) = 1,$ $y'(1) = 1,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = \frac{19}{54} x^5 + \frac{35}{54} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x^2}{9} \ln x $
30	$x^2(x+1)y'' - x(2x+1)y' + (2x+1)y = 0,$ $y(1) = 2,$ $y'(1) = 4,$ $x \in [1, 2], h = 0.1$	$y = x^2 + x + x \ln x$

4.3. Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом на отрезке $[0, 1]$ с заданным шагом $h = 0.1$ улучшенным методом Эйлера.

№	Уравнения	A_1	A_2	A_3	A_4	$y(x_0)$	$z(x_0)$
1	$y' = \frac{A_1 \cdot y + A_2 \cdot y(x - A_3)}{1 + (y(x + A_3))^{A_4}}$	0.1	0.2	0.27	10	1.1	—
2		0.1	0.3	0.17	5	1.2	—
3		0.15	0.2	0.15	10	1.3	—
4		0.15	0.3	0.25	5	1.4	—
5		0.1	0.2	0.22	10	1.5	—
6	$y' = y(x) \cdot (A_1 + 3 \cdot (A_2 \cdot y(x - A_4) - y(x - A_3)) / (1 - A_2))$	3	0.125	0.125	0.5	1.6	—
7		4	0.125	0.15	0.6	1.7	—
8		3.5	0.15	0.125	0.7	1.8	—
9		2.5	0.15	0.15	0.45	1.9	—
10		5	0.15	0.125	0.68	2.0	—
11	$y' = A_2 - A_1 \cdot y(x) - y^2(x - A_3)$	1	1	0.11	—	0.05	—
12		1.2	2	0.13	—	0.1	—
13		1.5	1.5	0.21	—	0.2	—
14		1.3	2	0.23	—	0.3	—
15		1.1	1	0.25	—	0.4	—
16	$y' = -A_1 \cdot y(x) + A_2 \cdot \{1 - \sin [y(x - A_3)]\}$	1	0.75	0.41	—	1	—
17		1	0.5	0.32	—	1.5	—
18		1.5	0.3	0.24	—	2	—
19		1.8	0.9	0.18	—	2.5	—
20		1.2	0.1	0.25	—	3	—
21	$y' = A_1 \cdot y(x) \cdot (1 - y(x - A_2) / A_3)$	1.25	0.15	10	—	1.4	—
22		1.5	0.25	1	—	2.4	—
23		2.0	0.27	100	—	3.4	—
24		1.6	0.32	10	—	4.4	—
25		1.8	0.17	1	—	5.4	—
26	$y' = y(x) \cdot [2 - 2 \cdot y(x - A_1) - z(x)]$ $z' = z(x) \cdot [2 - 2 \cdot z(x - A_2) - y(x)]$	0.35	0.35	—	—	1.0	1.0
27		0.25	0.35	—	—	2.0	1.0
28		0.35	0.25	—	—	1.0	2.0
29		0.23	0.4	—	—	2.0	2.0
30		0.4	0.24	—	—	2.0	0.5

4.4. Решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на указанном отрезке методом стрельбы и конечно-разностным методом.

№	Краевая задача	Точное решение
1	$xy'' + 2y' - xy = 0,$ $y'(1) = 0,$ $1.5y(2) + y'(2) = e^2$	$y(x) = \frac{e^x}{x}$
2	$xy'' + 2y' - xy = 0,$ $y'(1) = e^{-1},$ $y(2) = 0.5e^{-2}$	$y(x) = \frac{e^{-x}}{x}$
3	$x^2(x+1)y'' - 2y = 0,$ $y'(1) = -1,$ $2y(2) - 4y'(2) = 4$	$y(x) = \frac{1}{x} + 1$
4	$x^2(x+1)y'' - 2y = 0,$ $y(1) = 1 + 4 \ln 2,$ $y(2) = -1 + 3 \ln 2$	$y(x) = -1 + \frac{2}{x} + \frac{2(x+1)}{x} \ln x+1 $
5	$y'' - \frac{2}{\cos^2 x} y = 0,$ $y'(0) = 1,$ $y'(\frac{\pi}{4}) = 1$	$y(x) = \operatorname{tg} x$
6	$y'' - 2(1 + (\operatorname{tg} x)^2)y = 0,$ $y(0) = 0,$ $y(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$y(x) = -\operatorname{tg} x$
7	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0,$ $y(0) = -1,$ $y'(1) + 2y(1) = 3$	$y(x) = x + e - 2x$
8	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0,$ $y'(-2) + 2y(-2) = -9,$ $y'(0) = 1$	$y(x) = 3x + e - 2x$
9	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$ $y'(0) = 1,$ $y'(1) - 2y(1) = 0$	$y(x) = e^x(x^2 + 1)$
10	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$ $y'(1) = 3e,$ $y'(2) - 2y(2) = 0$	$y(x) = e^x x^2$
11	$x(x-1)y'' - xy' + y = 0,$ $y'(1) = 2,$ $2y'(2) - y(2) = 1$	$y(x) = 1 + x + x \ln x $
12	$x(x-1)y'' - xy' + y = 0,$ $y'(1) = 3,$ $y(3) - 3y'(3) = -4$	$y(x) = 2 + x + 2x \ln x $
13	$(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0,$ $y'(0) = \frac{3}{4},$ $y'(1) = \frac{e^2(e+2)}{(e+1)^2}$	$y(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$
14	$(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0,$ $y'(0) = 1,$ $y'(1) - y(1) = 1$	$y(x) = e^x - 1$
15	$x^2 \ln xy'' - xy' + y = 0,$ $y'(-1) = 0,$ $y'(1) - y(1) = 0$	$y(x) = 1 + x + \ln x$

Окончание таблицы

№	Краевая задача	Точное решение
16	$y'' - \operatorname{tg} xy' + 2y = 0,$ $y(0) = 2,$ $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.5 - 0.5 \cdot \ln 3$	$y(x) = \sin x + 2 - \sin x \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)$
17	$(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0,$ $y'(0) = 0,$ $y'(1) + y(1) = -0.75$	$y(x) = x - 3 + \frac{1}{x + 1}$
18	$xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0,$ $y'(0) = 4,$ $y'(1) - 2y(1) = -9e^{-1}$	$y(x) = e^{2x} + (3x + 1)e^{-x}$
19	$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0,$ $y'(0) = 1,$ $4y(2) - y'(2) = 23e^{-4}$	$y(x) = (1 + x)e^{-x^2}$
20	$xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0,$ $y'(0) = 4,$ $y'(1) - 2y(1) = -4$	$y(x) = 2x + 1 + e^{2x}$
21	$x(2x + 1)y'' + 2(x + 1)y' - 2y = 0,$ $y'(1) = 0,$ $y(3) - y'(3) = \frac{31}{9}$	$y(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$
22	$x(x + 4)y'' - (2x + 4)y' + 2y = 0,$ $y'(0) = 1,$ $y(2) - y'(2) = 3$	$y(x) = x^2 + x + 2$
23	$x(x^2 + 6)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0,$ $y'(0) = 0,$ $y(4) - y'(4) = 26$	$y(x) = x^3 + x^2 + 2$
24	$(x^2 + 1)y'' - 2y = 0,$ $y'(0) = 2,$ $y(1) = 3 + \frac{\pi}{2}$	$y(x) = x^2 + x + 1 + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} (x)$
25	$2x(x + 2)y'' + (2 - x)y' + y = 0,$ $y'(1) = \frac{3}{2},$ $y'(4) + y(4) = \frac{21}{4}$	$y(x) = \sqrt{ x } + x - 2$
26	$x(x + 1)y'' + (x + 2)y' - y = x + \frac{1}{x},$ $y'(1) = \frac{3}{2},$ $4y'(2) + y(2) = 13 + 4 \ln 2$	$y(x) = x + \frac{7}{2} + \frac{1}{x} + \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \ln x $
27	$(2x + 1)y'' + (2x - 1)y' - 2y = x^2 + x,$ $y'(0) = 1,$ $y'(1) + y(1) = 5$	$y(x) = 2x - 1 + e^{-x} + \frac{x^2 + 1}{2}$
28	$xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0,$ $y'(0) = 2,$ $y(1) = e^2$	$y(x) = e^{2x}$
29	$(x^2 - 1)y'' + (x - 3)y' - y = 0,$ $y(0) = -18,$ $y(3) = 0$	$y(x) = 6x - 18$
30	$(x^2 + 1)y'' - 2y = 0,$ $y'(0) = 0,$ $y(2) - y'(2) = 1$	$y(x) = x^2 + 1$

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В настоящем разделе рассматривается метод конечных разностей, который является одним из наиболее распространенных численных методов решения уравнений с частными производными — уравнений математической физики.

5.1. Численное решение уравнений параболического типа. Понятие о методе конечных разностей. Основные определения и конечно-разностные схемы

5.1.1 Постановка задач для уравнений параболического типа

Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности (диффузии). В одномерном по пространству случае однородное (без источников энергии) уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения искомой функции $u(x, t)$ в виде

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad t > 0; \quad (5.2)$$

$$u(l, t) = \varphi_l(t), \quad t > 0, \quad (5.3)$$

т. е. *граничные условия первого рода*, и, кроме того, заданы *начальные условия* при $t = 0$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.4)$$

то задачу (5.1)—(5.4) называют *первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности* (5.1).

В терминах теории теплообмена функция $u(x, t)$ выражает распределение температуры в пространственно-временной области

$$\Omega \times T = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq t \leq T\},$$

a^2 — коэффициент температуропроводности, а (5.2), (5.3) с помощью функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$ задают температуру на границах $x = 0$ и $x = l$.

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varphi_0(t), \quad t > 0; \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varphi_l(t), \quad t > 0, \quad (5.6)$$

т. е. *граничные условия второго рода*, то задачу (5.1), (5.5), (5.6), (5.4) называют *второй начально-краевой задачей для уравнения*

теплопроводности (5.1). В терминах теории теплообмена на границах в этом случае заданы тепловые потоки.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной

$$\alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad t > 0; \quad (5.7)$$

$$\gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), \quad t > 0, \quad (5.8)$$

т. е. *граничные условия третьего рода*, то задачу (5.1), (5.7), (5.8), (5.4) называют *третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности* (5.1). В терминах теории теплообмена граничные условия (5.7), (5.8) задают теплообмен между газообразной или жидкой средой и границами расчетной области с неизвестными температурами $u(0, t)$, $u(l, t)$.

Для *пространственных задач* теплопроводности первая начально-краевая задача в области $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), & M(x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0; \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} u(M, t) = \varphi(M, t), & M(x, y, z) \in \Gamma, \quad t > 0; \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} u(M, 0) = \psi(M), & M(x, y, z) \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Аналогично ставятся вторая и третья начально-краевые задачи для пространственного уравнения задачи (5.9)—(5.11).

На практике часто ставятся начально-краевые задачи теплопроводности со смешанными краевыми условиями, когда на границах задаются граничные условия различных родов.

5.1.2. Понятие о методе конечных разностей.

Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа

Основные определения, связанные с методом конечных разностей, рассмотрим на примере конечно-разностного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (5.1)—(5.4).

Нанесем на пространственно-временную область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ конечно-разностную сетку $\omega_{h\tau}$

$$\omega_{h\tau} = \{x_j = jh, j = 0, 1, \dots, N; \quad (5.12) \\ t^k = k\tau, k = 0, 1, \dots, K\}$$

с пространственным шагом $h = l/N$ и шагом по времени $\tau = T/K$ (рис. 5.1).

Введем два временных слоя: нижний $t^k = k\tau$, на котором распределение искомой функции $u(x_j, t^k)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, известно (при $k = 0$ распределение оп-

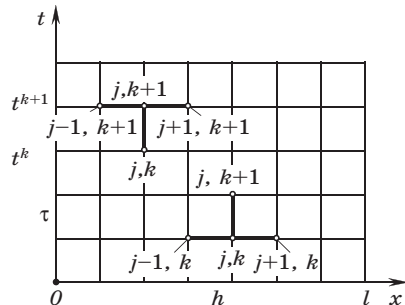


Рис. 5.1

ределяется начальным условием (5.4) вида $u(x_j, t^0) = \psi(x_j)$ и верхний временной слой $t^{k+1} = (k+1)\tau$, на котором распределение искомой функции $u(x_j, t^{k+1})$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, подлежит определению.

Сеточной функцией задачи (5.1)—(5.4), имеющей обозначение u_j^k , назовем однозначное отображение целых аргументов j, k в значения функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$.

На сетке (5.12) введем сеточные функции u_j^k, u_j^{k+1} , первая из которых известна, вторая — подлежит определению. Для ее определения в задаче (5.1)—(5.4) заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы отношением конечных разностей (см. раздел 3) и получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau), \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2). \quad (5.14)$$

Подставляя (5.13), (5.14) в задачу (5.1)—(5.4), получим *явную конечно-разностную схему* для этой задачи в форме

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \\ k &= 0, 1, \dots, K-1, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^k &= \varphi_0(t^k), \quad u_N^k = \varphi_l(t^k), \quad u_j^0 = \psi(x_j), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, K, \quad j = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где для каждого j -го уравнения все значения сеточной функции известны, за исключением одного — u_j^{k+1} , которое может быть определено *явно* из соотношений (5.15). В соотношения (5.15) краевые условия ($j = 0, j = N$) входят при значениях $j = 1$ и $j = N - 1$, а начальное условие — при $k = 0$.

Если в (5.14) дифференциальный оператор по пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (5.16)$$

то после подстановки (5.13), (5.16) в задачу (5.1)—(5.4) получим *неявную конечно-разностную схему* для этой задачи

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \\ k &= 0, 1, \dots, K-1, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^{k+1} &= \varphi_0(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}), \quad u_j^0 = \psi(x_j), \\ k &= 0, 1, \dots, K-1, \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Теперь сеточную функцию u_j^{k+1} на верхнем временном слое можно получить из решения системы линейных алгебраических уравнений (5.17)

с трехдиагональной матрицей. Эта система в форме, пригодной для использования метода прогонки, имеет вид

$$\begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, & j = 1 \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, & j = 2, \dots, N-2, \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, & j = N-1, \end{cases}$$

где $a_1 = 0$, $a_j = \sigma$, $j = 1, \dots, N-1$; $b_j = -(1 + 2\sigma)$, $j = 1, \dots, N-1$; $c_j = \sigma$, $j = 1, \dots, N-1$, $c_{N-1} = 0$; $d_j = -u_j^k$, $j = 2, \dots, N-2$; $d_1 = -(u_1^k + \sigma\varphi_0(t^{k+1}))$; $d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\varphi_l(t^{k+1}))$; $\sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}$.

Шаблоном конечно-разностной схемы называют ее геометрическую интерпретацию на конечно-разностной сетке.

На рис. 5.2 приведены шаблоны для явной (5.15) и неявной (5.17) конечно-разностных схем при аппроксимации задачи (5.1)–(5.4).

Явная конечно-разностная схема (5.15), записанная в форме

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}, \\ j = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

обладает тем *достоинством*, что решение на верхнем временном слое t^{k+1} получается сразу (без решения системы линейных алгебраических уравнений) по значениям сеточных функций на нижнем временном слое t^k , где решение известно. При $k = 0$ значения сеточной функции формируются из начального условия (5.4). Но эта же схема обладает существенным *недостатком*, поскольку она является условно устойчивой с условием

$\sigma = \frac{a^2\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, накладываемым на сеточные характеристики τ и h .

С другой стороны, неявная конечно-разностная схема (5.17), записанная в форме

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.19)$$

приводит к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений, но зато эта схема абсолютно устойчива.

Проанализируем схемы (5.18), (5.19). Пусть точное решение, которое не известно, возрастает по времени, т. е. $u_j^{k+1} > u_j^k$. Тогда, в соответствии с явной схемой (5.18), разностное решение будет заниженным по сравнению с точным, так как u_j^{k+1} определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени. Для неявной схемы (5.19) на *возрастающем* решении, наоборот, решение завышено по сравнению с точным, поскольку оно определяется по значениям сеточной функции на верхнем временном слое. На *убывающем* решении картина изменяется противоположным

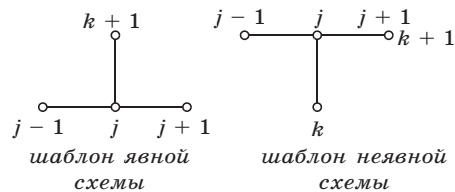


Рис. 5.2

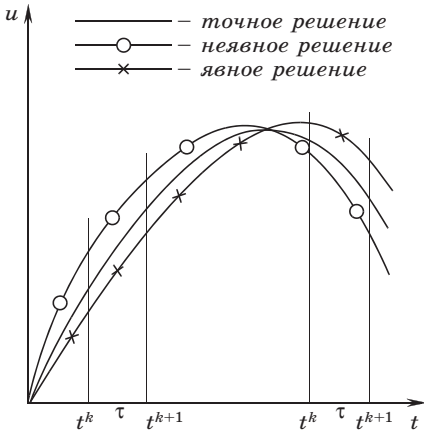


Рис. 5.3

нии сеточных характеристик τ и h к нулю, решения по явной и неявной схемам стремятся к точному решению с разных сторон.

Рассмотрим неявно-явную схему с весами для простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1 - \theta)a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \tag{5.20}$$

где θ — вес неявной части конечно-разностной схемы, $(1 - \theta)$ — вес явной части, причем $0 \leq \theta \leq 1$. При $\theta = 1$ имеем полностью неявную схему, при $\theta = 0$ — полностью явную схему и при $\theta = 1/2$ — схему Кранка — Николсона.

Для схемы Кранка — Николсона порядок аппроксимации составляет $O(\tau^2 + h^2)$, что на один порядок по времени выше по сравнению с обычными явной или неявной схемами. Неявно-явная схема с весами (5.20) абсолютно устойчива при $1/2 \leq \theta \leq 1$ и условно устойчива с условием $\sigma \leq 1/2$ при $0 \leq \theta < 1/2$. Таким образом, получаем следующий вывод.

Схема Кранка — Николсона (5.20) при $\theta = 1/2$ абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственной переменной x .

5.1.3. Аппроксимация граничных условий, содержащих производные

В задачах математической физики вообще и в задачах теплопроводности в частности граничные условия первого рода аппроксимируются точно в узлах на границе расчетной области. Граничные условия второго и третьего рода отличаются тем, что в них присутствует производная первого порядка искомой функции по пространственной переменной. Поэтому для замыкания конечно-разностной схемы необходима их аппроксимация. Простейшим вариантом является аппроксимация производных направленными разностями первого порядка:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h).$$

Тогда в общем случае граничных условий третьего рода (5.7), (5.8) уравнения, связывающие значения искомой функции в двух крайних узлах разностной сетки, выглядят следующим образом:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}) + O(h),$$

$$\gamma \frac{u_{N-1}^{k+1} - u_N^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}) + O(h).$$

Дополняя полученными уравнениями явную конечно-разностную аппроксимацию во внутренних узлах, получим явную разностную схему для третьей начально-краевой задачи (5.1), (5.4), (5.7), (5.8):

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

$$\gamma \frac{u_{N-1}^{k+1} - u_N^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}), \quad j = 1, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, K-1.$$

В результате алгоритм перехода на новый временной слой t^{k+1} с использованием явной схемы можно представить в следующем виде:

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2},$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta - \alpha/h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h},$$

$$u_N^{k+1} = \frac{\gamma/h}{\delta + \gamma/h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Здесь сначала рассчитываются значения искомой функции во всех внутренних узлах на новом временном слое, а затем определяются значения на границах.

При использовании неявной конечно-разностной схемы получаем разностный аналог дифференциальной задачи:

$$b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0,$$

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j,$$

$$a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} = d_N, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

где

$$b_0 = \beta - \frac{\alpha}{h}, \quad c_0 = \frac{\alpha}{h}, \quad d_0 = \varphi_0(t^{k+1}),$$

$$a_N = -\frac{\gamma}{h}, \quad b_N = \delta + \frac{\gamma}{h}, \quad d_N = \varphi_l(t^{k+1}),$$

$$a_j = \sigma, \quad b_j = -(1 + 2\sigma), \quad c_j = \sigma, \quad d_j = -u_j^k, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}.$$

В результате для получения решения на новом временном слое t^{k+1} решается система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Аналогичная картина имеет место и при использовании неявно-явной схемы с весами.

Принципиальной особенностью рассмотренного подхода является первый порядок аппроксимации граничных условий. Это означает, что порядок аппроксимации в граничных узлах ниже порядка аппроксимации во внутренних узлах расчетной области.

При этом глобальный порядок аппроксимации во всей расчетной области равен *наименьшему* относительно всех узлов сетки порядку аппроксимации.

Одним из способов повышения порядка аппроксимации граничных условий является использование формул численного дифференцирования второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t^{k+1}) = \frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t^{k+1}) = \frac{-u_{N-2}^{k+1} + 4u_{N-1}^{k+1} - 3u_N^{k+1}}{2h} + O(h^2).$$

В случае явной схемы алгоритм вычисления решения на новом временном слое при такой аппроксимации граничных условий не приобретает принципиальных изменений. Если же используется неявная схема, то получающаяся при этом система линейных алгебраических уравнений теряет трехдиагональный вид (первое и последнее уравнение содержат три неизвестных). Этот недостаток легко устраним, так как путем линейной комбинации первого уравнения со вторым (последнего с предпоследним) можно добиться исключения третьего неизвестного из соответствующего уравнения. Однако при этом возможно нарушение диагонального преобладания матрицы и, следовательно, нарушение условий применимости метода прогонки.

Более эффективным является подход, позволяющий повысить порядок аппроксимации граничных условий без увеличения числа узлов в аппроксимационных соотношениях. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 5.1

Решить третью начально-краевую задачу для параболического уравнения, содержащего как конвективные члены (пропорциональные производной $\partial u / \partial x$), так и источниковые члены, содержащие искомую функцию $u(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + gu, & 0 < x < l, t > 0; \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), & t > 0; \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), & t > 0; \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (5.24)$$

РЕШЕНИЕ

Во внутренних узлах конечно-разностной сетки неявная конечно-разностная схема для уравнения (5.21) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} &= \frac{a^2}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + \\ &+ \frac{b}{2h} (u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}) + gu_j^{k+1} + O(\tau + h^2), \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Если производные первого порядка в граничных условиях (5.22) и (5.23) аппроксимировать по схеме

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h),$$

то граничные условия аппроксимируются с первым порядком, и глобальный порядок будет равен первому порядку несмотря на то, что во всех остальных узлах порядок аппроксимации по пространственным переменным равен двум. Для сохранения порядка аппроксимации, равного двум, в граничных узлах разложим на точном решении значение u_1^{k+1} в окрестности точки $x = 0$ в ряд Тейлора по переменной x до третьей производной включительно, а u_{N-1}^{k+1} — в аналогичный ряд в окрестности точки $x = l$. Тогда в предположении, что функция $u(x, t)$ в граничных узлах имеет первые производные по времени и вторые — по x , получим

$$u_1^{k+1} = u(0 + h, t^{k+1}) = u_0^{k+1} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{k+1} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3), \quad (5.26)$$

$$u_{N-1}^{k+1} = u(l - h, t^{k+1}) = u_N^{k+1} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^{k+1} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (5.27)$$

Подставим сюда значения второй производной в граничных узлах, полученные из дифференциального уравнения (5.21):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{j=0, N}^{k+1} = \left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{a^2} u \right) \Big|_{j=0, N}^{k+1},$$

и найдем из полученных выражений (5.26), (5.27) значения первой производной $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j=0, N}^{k+1}$ в граничных узлах с порядком $O(\tau + h^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{k+1} &= \frac{2a^2}{h(2a^2 - bh)} \cdot (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) - \frac{h}{2a^2 - bh} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^{k+1} + \\ &\quad + \frac{gh}{2a^2 - bh} \cdot u_0^{k+1} + O(h^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^{k+1} &= \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)} \cdot (u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) + \frac{h}{2a^2 + bh} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_N^{k+1} - \\ &\quad - \frac{gh}{2a^2 + bh} \cdot u_N^{k+1} + O(h^2). \end{aligned}$$

Подставляя $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{k+1}$ в (5.22), а $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_N^{k+1}$ в (5.23) и аппроксимируя полученные соотношения в соответствующих граничных узлах, отмечая при этом, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^{k+1} = (u_0^{k+1} - u_0^k)/\tau + O(\tau), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_N^{k+1} = (u_N^{k+1} - u_N^k)/\tau + O(\tau),$$

получим алгебраические уравнения для граничных узлов, в каждом из которых два неизвестных:

$$\begin{aligned} b_0 \cdot u_0^{k+1} + c_0 \cdot u_1^{k+1} &= d_0, \\ a_0 = 0, b_0 &= \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh - \frac{\beta}{\alpha} (2a^2 - bh), \quad c_0 = -\frac{2a^2}{h}, \\ d_0 &= \frac{h}{\tau} u_0^k - \varphi_0(t^{k+1}) \frac{2a^2 - bh}{a}, \\ a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} &= d_N, \\ a_N &= -\frac{2a^2}{h}, \quad b_N = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh + \frac{\delta}{\gamma} (2a^2 + bh), \\ c_n = 0, d_N &= \frac{h}{\tau} u_N^k + \varphi_l(t^{k+1}) \frac{2a^2 + bh}{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Таким образом, (5.28) — конечно-разностная аппроксимация граничного условия третьего рода (5.22) на левой границе $x = 0$, а (5.29) — конечно-разностная аппроксимация граничного условия третьего рода (5.23) на правой границе $x = l$, сохраняющие тот же порядок аппроксимации, что и аппроксимация (5.25) дифференциального уравнения (5.21).

Приписывая к граничным конечно-разностным уравнениям (5.28), (5.29), каждое из которых содержит два значения сеточной функции, алгебраические уравнения (5.25), записанные в виде

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N-1;$$

$$a_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h}\right); \quad b_j = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{\tau} - g; \quad c_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b}{2h}\right); \quad d_j = \frac{1}{\tau} \cdot u_j^k, \quad (5.30)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решаемую методом прогонки ($a_0 = 0$, $c_N = 0$):

$$A_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}}, \quad B_j = \frac{d_j - a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}}, \quad j = 0, \dots, N; \quad (5.31)$$

$$u_N^{k+1} = B_N,$$

$$u_j^{k+1} = A_j u_{j+1}^{k+1} + B_j, \quad j = N-1, \dots, 0. \quad (5.32)$$

Изложенный метод аппроксимации краевых условий, содержащих производные по пространственным переменным, не только повышает порядок аппроксимации, но и сохраняет консервативность конечно-разностной схемы. Это означает, что в конечно-разностной аппроксимации соблюдаются законы сохранения, на основе которых выведены дифференциальные соотношения задачи (5.21)–(5.24). Аналогичный подход можно осуществить в краевых задачах для дифференциальных уравнений любых типов.

5.2. Метод конечных разностей для решения уравнений гиперболического типа

5.2.1. Постановка задач для уравнений гиперболического типа

Классическим примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение, которое в области $0 < x < l$, $t > 0$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Данное уравнение описывает, в частности, процесс малых поперечных колебаний струны. В этом случае $u(x, t)$ — поперечные перемещения

струны, a — скорость распространения малых возмущений в материале, из которого изготовлена струна.

Если концы струны движутся по заданным законам, т. е. на концах заданы перемещения или значения искомой функции, то *первая начально-краевая задача* для волнового уравнения имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \end{cases} \quad (5.33)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad t > 0; \quad (5.34)$$

$$u(l, t) = \varphi_l(t), \quad t > 0; \quad (5.35)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.37)$$

причем если концы струны жестко закреплены, то $\varphi_0(t) = \varphi_l(t) = 0$. Как видно, в задачах для волнового уравнения, кроме начального распределения искомой функции, задается еще распределение начальной скорости перемещения.

Если на концах струны заданы значения силы, которая пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной (т. е. на концах заданы значения первых производных по переменной x), то ставится *вторая начально-краевая задача* для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varphi_0(t), \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varphi_l(t), \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

В условиях, когда концы струны свободны, $\varphi_0(t) = \varphi_l(t) = 0$.

В условиях, когда концы закреплены *упруго*, т. е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, ставится *третья начально-краевая задача* для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \end{cases}$$

$$\alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad t > 0;$$

$$\gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Аналогично ставятся двумерные и трехмерные начально-краевые задачи для двумерного и трехмерного волновых уравнений.

5.2.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения (5.33)—(5.37). На пространственно-временной сетке (5.12) будем аппроксимировать дифференциальное уравнение (5.33) одной из следующих конечно-разностных схем:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2),$$

$$j = 1, \dots, N - 1; k = 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

с шаблоном, приведенным на рис. 5.4, а, и

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2),$$

$$j = 1, \dots, N - 1; k = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

с шаблоном на рис. 5.4, б.

Схема (5.38) является *явной*. С ее помощью, поскольку значения сеточных функции u_j^{k-1} , u_j^k и на нижних временных слоях должны быть известны, решение u_j^{k+1} , $j = 1, \dots, N - 1$, $k = 1, 2, \dots$, определяется сразу. В соответствии с шаблоном для этой схемы порядок аппроксимации равен двум, как по пространственной, так и по временной переменной. При этом явная конечно-разностная схема (5.38) для волнового уравнения условно устойчива с условием $\sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} < 1$, накладываемым на сеточные характеристики τ и h .

Схема (5.39) является *неявной* и обладает абсолютной устойчивостью. Ее можно свести к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решаемой методом прогонки.

В обеих схемах необходимо знать значения u_j^{k-1} , u_j^k , $j = 1, \dots, N - 1$, $k = 1, 2, \dots$, на нижних временных слоях. Для $k = 1$ это делается следующим образом:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (5.40)$$

где $\psi_1(x)$ — функция из начального условия (5.36). Для определения u_j^1 можно воспользоваться простейшей аппроксимацией второго начального условия (5.37):

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_2(x_j).$$

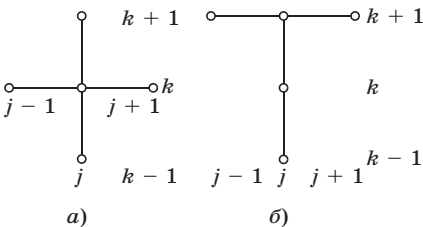


Рис. 5.4

Отсюда для искомых значений u_j^1 получаем выражение

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

Недостатком такого подхода является первый порядок аппроксимации второго начального условия. Для повышения порядка аппроксимации воспользуемся следующей процеду-

рой. Разложим u_j^1 в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности $t = 0$:

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^0 \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3). \quad (5.41)$$

Для определения второй производной в выражении (5.41) воспользуемся исходным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^0 = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^0 = a^2 \psi_1''(x_j).$$

В результате получим искомую сеточную функцию u_j^1 со вторым порядком точности:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2 \psi_1''(x_j) \frac{\tau^2}{2}.$$

После определения из начальных условий значений сеточных функций u_j^0 , u_j^1 на двух первых временных слоях вычислительный процесс продолжается согласно схемам (5.38) или (5.39). При этом аппроксимация краевых условий (5.34) и (5.35) производится аналогично тому, как это описывалось выше для уравнений параболического типа. Для иллюстрации этого этапа рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 5.2

Выписать явную конечно-разностную схему для третьей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), & t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), & t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Аппроксимируем дифференциальное уравнение по шаблону рис. 5.4, б:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + b \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} + cu_j^k + f_j^k, \\ f_j^k = f(x_j, t^k), \quad j = 1, \dots, N-1; \quad k = 1, 2, \dots$$

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком точности:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}), \quad \gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}).$$

В результате переход на новый временной слой представляется следующим алгоритмом:

$$u_j^{k+1} = u_{j+1}^k \left(\frac{a^2 \tau^2}{h^2} + b \frac{\tau^2}{2h} \right) + u_j^k \left(-2 \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + 2 + c \tau^2 \right) + \\ + u_{j-1}^k \left(\frac{a^2 \tau^2}{h^2} - b \frac{\tau^2}{2h} \right) - u_j^{k-1} + \tau^2 f_j^k, \\ u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta - \alpha/h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h}, \quad u_N^{k+1} = \frac{\gamma/h}{\delta + \gamma/h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}.$$

Таким образом, сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних узлах на новом временном слое, после чего из аппроксимации граничных условий находятся значения функции u в крайних узлах.

Для окончательного замыкания вычислительного процесса определим, исходя из начальных условий, значения искомой функции на двух первых временных слоях t^0, t^1 . В начальный момент времени значения u_j определяются точно:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j).$$

Если воспользоваться аппроксимацией первого порядка по времени, то, как было показано, получим

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

Для повышения порядка аппроксимации разложим u_j^1 в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности $t = 0$:

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^0 \tau + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3),$$

где, согласно исходному уравнению,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^0 + b \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^0 + c u_j^k + f_j^k = a^2 \psi_1''(x_j) + b \psi_1'(x_j) + c \psi_1(x_j) + f_j^k.$$

Окончательно получаем

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + \left(a^2 \psi_1''(x_j) + b \psi_1'(x_j) + c \psi_1(x_j) + f_j^k \right) \frac{\tau^2}{2}.$$

5.3. Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа

5.3.1. Постановка задач для уравнений эллиптического типа

Классическими примерами уравнений эллиптического типа являются *уравнение Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

и *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Здесь функция $u(x, y)$ имеет различный физический смысл. Это может быть стационарное, т. е. не зависящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т. п.

Если на границе Γ расчетной области $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ задана искомая функция, то соответствующая *первая краевая задача для уравнения Лапласа* или *Пуассона* называется *задачей Дирихле*:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.43)$$

Если на границе Γ задается нормальная производная искомой функции, то соответствующая *вторая краевая задача* называется *задачей Неймана для уравнения Лапласа* или *Пуассона*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n}|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.45)$$

Здесь n — направление внешней к границе Γ нормали.

Более приемлемой является координатная форма краевого условия (5.45):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, i) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{n}, j) = \varphi(x, y),$$

где $\cos(\hat{n}, i)$, $\cos(\hat{n}, j)$ — направляющие косинусы внешнего вектора единичной нормали к границе Γ , i и j — орты базисных векторов.

Наконец, *третья краевая задача для уравнения Пуассона (Лапласа)* имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n}|_{\Gamma} + \alpha u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

5.3.2. Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим краевую задачу для уравнений Пуассона или Лапласа (5.42), (5.43) в прямоугольнике $x \in [0, l_1]$, $y \in [0, l_2]$, на который наложим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, N_1; y_j = jh_2, j = 0, 1, \dots, N_2\}. \quad (5.46)$$

Введем сеточную функцию u_{ij} , $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$ и на сетке (5.46) аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме:

$$\frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h_1^2} + \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = f(x_i, y_j),$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1. \quad (5.47)$$

Схема (5.47) на шаблоне, показанном на рис. 5.5, имеет второй порядок по переменным x и y , поскольку шаблон центрально симметричен.

Система линейных алгебраических уравнений (5.47) имеет пятидиагональный вид: каждое уравнение содержит пять неизвестных и при соответствующей нумерации переменных матрица имеет ленточную структуру. Решать ее можно различными методами линей-

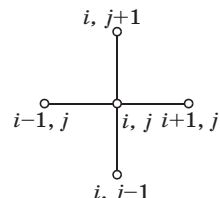


Рис. 5.5

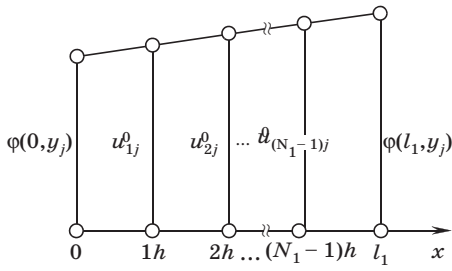


Рис. 5.6

ной алгебры, например итерационными методами, методом матричной прогонки и т. п.

Рассмотрим *разностно-итерационный метод Либмана* численного решения задачи Дирихле (5.42), (5.43). Для простоты изложения этого метода примем $h_1 = h_2 = h$, тогда из схемы (5.47) получим

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 \cdot f_{i,j}],$$

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad (5.48)$$

где k — номер итерации.

На каждой координатной линии, например $y_j = \text{const}$, $j = 1, \dots, N_2 - 1$, с помощью линейной интерполяции граничных значений $\phi(x, y)$, иллюстрируемой рис. 5.6, определим значения $u_{i,j}^{(0)}$ на нулевой итерации. Эти значения подставим в (5.48) и получим распределение $u_{i,j}^{(1)}$ на первой итерации:

$$u_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)} + u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)} - h^2 \cdot f_{i,j}],$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1.$$

Это распределение $u_{i,j}^{(1)}$ снова подставим в (5.48), чтобы получить распределение $u_{i,j}^{(2)}$ и т. д. Процесс Либмана прекращается, когда

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad \|u^{(k)}\| = \max_{i,j} |u_{i,j}^{(k)}|,$$

где ε — наперед заданная погрешность.

При решении задач с граничными условиями второго и третьего рода наряду с аппроксимацией дифференциального уравнения производится также аппроксимация граничных условий. Этот вопрос подробно рассмотрен в разделе 5.1.3. Здесь в качестве примера приведем разностную схему, аппроксимирующую третью краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

ПРИМЕР 5.3

Решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2); \\ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \beta_1 u(0, y) = \varphi_1(y), \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l_1, y) + \beta_2 u(l_1, y) = \varphi_2(y), \\ \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + \beta_3 u(x, 0) = \varphi_3(y), \\ \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, l_2) + \beta_4 u(x, l_2) = \varphi_4(y). \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Как и ранее, в прямоугольнике $x \in [0, l_1]$, $y \in [0, l_2]$ построим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \quad y_j = jh_2, \quad j = 0, 1, \dots, N_2\}.$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах по рассмотренной центрально-разностной схеме:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j),$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1.$$

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком с помощью направленных разностей:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h_1} + \beta_1 u_{0j} = \varphi_1(y_j), & j = 1, \dots, N_2 - 1, \\ \alpha_2 \frac{u_{N_1j} - u_{N_1-1,j}}{h_1} + \beta_2 u_{N,j} = \varphi_2(y_j), & j = 1, \dots, N_2 - 1, \\ \alpha_3 \frac{u_{i1} - u_{i0}}{h_2} + \beta_3 u_{i0} = \varphi_3(x_i), & i = 1, \dots, N_1 - 1, \\ \alpha_4 \frac{u_{iN_2} - u_{iN_2-1}}{h_2} + \beta_4 u_{iN_1} = \varphi_4(x_i), & i = 1, \dots, N_1 - 1. \end{array} \right.$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений, содержащая $[(N_1 + 1)(N_2 + 1) - 4]$ уравнений относительно неизвестных u_{ij} , $i = 0, \dots, N_1$, $j = 0, \dots, N_2$, при этом угловые узлы с координатами $(0, 0)$, $(0, N_2)$, $(N_1, 0)$, (N_1, N_2) в вычислениях не участвуют. Как и в случае граничных условий первого рода, она имеет пятидиагональный вид и может быть решена, например, итерационным методом Либмана.

ЗАМЕЧАНИЕ

Метод простых итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим. С более эффективными методами решения таких систем можно познакомиться, например, в монографии [8].

5.4. Метод конечных разностей решения многомерных задач математической физики. Методы расщепления

При численном решении многомерных задач математической физики исключительно важным является вопрос об *экономичности* используемых методов.

Конечно-разностную схему называют экономичной, если число выполняемых операций (операций типа умножения) пропорционально числу узлов сетки.

В настоящее время известно значительное количество экономичных разностных схем численного решения многомерных задач математической физики, основанных на *расщеплении* пространственных диффе-

ренциальных операторов по координатным направлениям и использования метода скалярной прогонки вдоль этих направлений.

Из экономичных конечно-разностных схем, получивших наибольшее распространение, в данном разделе рассматриваются схемы методов *переменных направлений* и *дробных шагов*. Будем называть их общим термином — *методы расщепления*.

Рассмотрим эти методы на примере задачи для двумерного уравнения параболического типа в прямоугольнике со сторонами l_1, l_2 и граничными условиями первого рода.

Для пространственно-временной области $\bar{G}_T = \bar{G} \times [0, T], t \in [0, T], \bar{G} = G + \Gamma, G = l_1 \times l_2$ рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2), \quad t > 0; \quad (5.49)$$

$$u(x, 0, t) = \varphi_1(x, t), \quad x \in [0, l_1], \quad t > 0; \quad (5.50)$$

$$u(x, l_2, t) = \varphi_2(x, t), \quad x \in [0, l_1], \quad t > 0; \quad (5.51)$$

$$u(0, y, t) = \varphi_3(y, t), \quad y \in [0, l_2], \quad t > 0; \quad (5.52)$$

$$u(l_1, y, t) = \varphi_4(y, t), \quad y \in [0, l_2], \quad t > 0; \quad (5.53)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad x \in [0, l_1], \quad y \in [0, l_2]. \quad (5.54)$$

Введем пространственно-временную сетку с шагами h_1, h_2, τ соответственно по переменным x, y, t :

$$\omega_{h_1 h_2}^\tau = \{x_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, I; x_j = jh_2, j = 0, 1, \dots, J; t^k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (5.55)$$

и на этой сетке будем аппроксимировать дифференциальную задачу (5.49)—(5.54) методом конечных разностей.

5.4.1. Метод переменных направлений

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени разбивается на несколько шагов, число которых равно числу независимых пространственных переменных (в двумерном случае — на два). На каждом дробном временном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а остальные — явно. На следующем дробном шаге другой дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные — явно и т. д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для задачи (5.49)—(5.54) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} &= \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \\ &+ \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k) + f_{ij}^{k+1/2}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} &= \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \\ &+ \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}) + f_{ij}^{k+1/2}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В подсхеме (5.56) на первом дробном шаге оператор ad_2/dx_2 аппроксимируется неявно, а оператор ad_2/dy_2 — явно (в результате весь конечно-разностный оператор по переменной y переходит в правые части, поскольку u_{ij}^k известно). С помощью скалярных прогонок в количестве, равном числу $(J - 1)$, в направлении переменной x получаем распределение сеточной функции $u_{ij}^{k+1/2}$, $i = 1, \dots, I - 1$, $j = 1, \dots, J - 1$ на первом временном полуслое $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$.

В подсхеме (5.57) оператор $a\partial^2/\partial y^2$ аппроксимируется неявно на верхнем временном слое $t^{k+1} = (k + 1)\tau$, а оператор $a\partial^2/\partial y^2$ — явно в момент времени $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$. С помощью скалярных прогонок в направлении переменной y в количестве, равном числу $(I - 1)$, получаем распределение сеточной функции $u_{ij}^{k+1/2}$, $i = 1, \dots, I - 1$, $j = 1, \dots, J - 1$ на втором полуслое. Шаблон схемы МПН представлен на рис. 5.7.

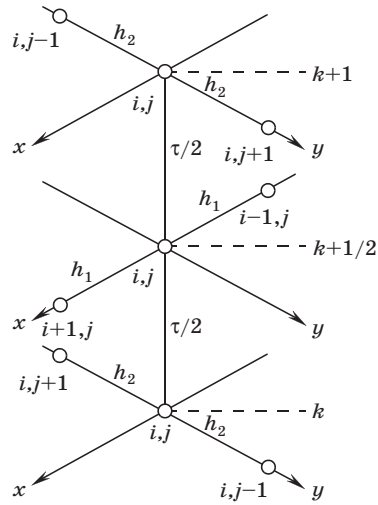


Рис. 5.7

Можно показать, что в двумерном случае схема МПН абсолютно устойчива. К *достоинствам* метода переменных направлений можно отнести высокую точность, поскольку метод имеет второй порядок точности по времени. К *недостаткам* можно отнести условную устойчивость при числе пространственных переменных больше двух. Кроме этого, МПН условно устойчив в задачах со смешанными производными уже в двумерном случае.

5.4.2. Метод дробных шагов

В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанных производных. Он обладает довольно значительным запасом устойчивости и в задачах со смешанными производными.

Для задачи (5.49)–(5.54) схема МДШ имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}) + \frac{f_{ij}^k}{2}, \quad (5.58)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \frac{a}{h_2^2} (u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) + \frac{f_{ij}^{k+1}}{2}. \quad (5.59)$$

С помощью чисто неявной подсхемы (5.58) осуществляются скалярные прогонок в направлении оси x в количестве, равном $(J - 1)$, в результате чего получается сеточная функция $u_{ij}^{k+1/2}$. На втором дробном шаге по времени с помощью подсхемы (5.59) осуществляются скалярные прогонок в направлении оси y в количестве, равном $(I - 1)$, в результате чего

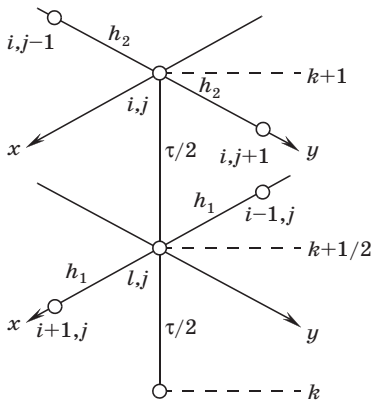


Рис. 5.8

получается сеточная функция u_{ij}^{k+1} . Шаблон схемы МДШ приведен на рис. 5.8.

Схема МДШ имеет порядок сходимости $O(\tau + h^2)$, т. е. первый порядок по времени и второй — по переменным x и y .

В литературе МДШ называют также методом *покоординатного расщепления* и *локально-одномерным* методом.

К *достоинствам* схемы МДШ можно отнести простоту в алгоритмизации и программировании и абсолютную устойчивость с большим запасом устойчивости даже для задач, содержащих смешанные производные. В то же время *недостатки* МДШ следующие: на каждом дробном

шаге достигается частичная аппроксимация (полная аппроксимация достигается на последнем дробном шаге, т. е. имеет место суммарная аппроксимация), схема имеет первый порядок точности по времени.

5.4.3. Методы расщепления численного решения эллиптических задач

Для стационарных многомерных задач математической физики искомая функция в задаче (5.49)—(5.54) не зависит от времени и, следовательно, уравнение (5.49) становится уравнением эллиптического типа (нет производной $\partial u / \partial t$), т. е. уравнением Лапласа или Пуассона, а поскольку и начальное условие (5.54) отсутствует, рассмотренные выше методы приходится несколько видоизменить. Однако если при решении задач для уравнений Лапласа или Пуассона используется метод установления, то стационарное уравнение трансформируется в нестационарное уравнение (5.49), являющееся уже уравнением параболического типа, с введением однородного начального условия (5.54), т. е. $\psi(x, y) \equiv 0$. В этом случае все выше рассмотренные методы применяются без изменения.

Методы расщепления напрямую можно применять также и к решению стационарных задач, заменив номер временного слоя номером итерации. В качестве начального приближения на нулевой итерации можно использовать линейную интерполяцию краевых условий так, как это делалось в разностно-итерационном методе Либмана (см. разд. 5.3).

5.5. Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач

К основным понятиям, связанным с методом конечных разностей, относятся аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости. Определим каждое из этих понятий.

5.5.1. Аппроксимация и порядок аппроксимации

Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме

$$LU = f,$$

где L — дифференциальный оператор. В качестве L могут выбираться, например, такие операторы, как

диффузионный

$$\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

волновой

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

лапласиан

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

U — искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче; f — входные данные, т. е. начальные и краевые условия, правые части и т. п. Операторная форма $(LU)_h = f_h$ описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма $L_h U_h = f_h$ описывает конечно-разностную схему на точном решении U , т. е. если в конечно-разностной схеме вместо сеточных значений сеточной функции подставлены точные (неизвестные) значения искомой функции. Для перечисленных дифференциальных операторов L конечно-разностные операторы L_h имеют вид

$$\frac{\Delta}{\tau} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2},$$

$$\frac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2},$$

$$\frac{\Delta^2}{h_1^2} + \frac{\Delta^2}{h_2^2},$$

где Δ — конечно-разностный оператор, например,

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i,$$

$$\Delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}.$$

Наконец, операторная форма конечно-разностной схемы имеет вид

$$L_h u_h = f_h. \quad (5.60)$$

Отметим, что помимо аппроксимации основного дифференциального уравнения конечно-разностная схема содержит также аппроксимации начальных и краевых условий.

Введем норму сеточной функции, например, с помощью выражения

$$\|u^k\| = \max_j |u_j^k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.61)$$

Конечно-разностная схема (5.60) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении, если какая-либо норма разности $(LU)_h$ и $L_h U_h$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$:

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0. \quad (5.62)$$

Конечно-разностная схема (5.60) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении с порядком p по времени и порядком q по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $\|(LU)_h - L_h U_h\|$ удовлетворяет равенству

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| = O(\tau^p + h^q). \quad (5.63)$$

Таким образом, если конечно-разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу, то речь идет о *близости* дифференциального и конечно-разностного операторов в узлах сетки.

5.5.2. Устойчивость

Пусть в конечно-разностной схеме (5.60) входные данные f_h получили возмущения и стали равными \tilde{f}_h . Тогда сеточная функция u_h также получит возмущение и станет равной \tilde{u}_h .

Конечно-разностная схема (5.60) устойчива по входным данным, если найдется ограниченная константа K , не зависящая от сеточных характеристик τ , h и входных данных f_n , такая, что выполняется неравенство

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|. \quad (5.64)$$

Таким образом, понятие устойчивости интерпретируется следующим образом: конечно-разностная схема устойчива, если для малых возмущений входных данных (начально-краевых условий и правых частей) конечно-разностная схема обеспечивает малые возмущения сеточной функции u_h , т. е. решение с помощью конечно-разностной схемы находится под контролем входных данных.

Если входные данные f_h содержат только начальные условия, или только краевые условия, или только правые части, то говорят об *устойчивости* соответственно по *начальным условиям*, по *краевым условиям* или по *правым частям*.

Конечно-разностная схема (5.60) *абсолютно (безусловно) устойчива*, если неравенство (5.64) выполняется при любых значениях сеточных характеристик τ и h , т. е. на шаги сетки не накладывается никаких ограничений.

Конечно-разностная схема (5.60) *условно устойчива*, если неравенство (5.64) выполняется для сеточных характеристик τ и h , на которые накладываются определенные ограничения.

5.5.3. Сходимость и порядок сходимости

Решение u_h , полученное с помощью конечно-разностной схемы (5.60), сходится к точному решению U , если какая-либо норма разности $\|U - u_h\|$ стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик τ , h

$$\|U - u_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0. \quad (5.65)$$

Конечно-разностная схема (5.60) имеет p -й порядок сходимости (порядок точности) по времени и q -й порядок сходимости по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $\|U - u_h\|$ удовлетворяет равенству

$$\|U - u_h\| = O(\tau^p + h^q). \quad (5.66)$$

Таким образом, порядок сходимости (порядок точности) характеризует близость конечно-разностного и точного (неизвестного) решения.

При численном решении задач математической физики в общем случае необходимо исследовать и аппроксимацию, и устойчивость, и сходимость. Однако следующая теорема утверждает, что достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость, и, в случае положительного ответа, сходимость будет обеспечена.

ТЕОРЕМА эквивалентности

Если конечно-разностная схема (5.60) аппроксимирует на точном решении дифференциальную задачу с p -м порядком по времени и q -м порядком по пространственной переменной и эта схема устойчива, то решение с помощью этой конечно-разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с p -м порядком по времени и q -м порядком по пространственной переменной.

ЗАДАЧИ

Решение предлагаемых задач связано с достаточно большим объемом вычислительной работы и требует использования компьютерной техники. Предполагается, что читатель владеет навыками программирования и будет разрабатывать свое собственное программное обеспечение. Ряд задач содержит параметры a, b, c , которые наряду с сеточными параметрами следует задавать во входном потоке. Такой подход дает возможность проведения параметрического анализа. Для всех задач приводятся точные аналитические решения, что, с одной стороны, является эффективным средством тестирования разработанного читателем программного обеспечения, а с другой — позволяет оценить и проанализировать погрешность численного решения.

- 5.1.** Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка — Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin(2\pi x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-4\pi^2 at) \sin(2\pi x)$.

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad u(x, 0) = x + \sin(\pi x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = x + \exp(-\pi^2 at) \sin(\pi x)$.

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0,$

$$u(0, t) = \exp(-at), \quad u(\pi, t) = -\exp(-at), \quad u(x, 0) = \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \cos x$.

4. $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0,$

$$u_x(0, t) = \exp(-at), \quad u_x(\pi, t) = -\exp(-at), \quad u(x, 0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \sin x$.

5. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x),$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - \exp(-\pi^2 t)) \sin(\pi x)$.

$$6. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x (\cos t + \sin t),$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad u_x(\pi/2, t) = -\sin t, \quad u(x, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin t \cos x$.

$$7. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0.5 \exp(-0.5t) \cos x,$$

$$u_x(0, t) = \exp(-0.5t), \quad u_x(\pi, t) = -\exp(-0.5t), \quad u(x, 0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-0.5t) \sin x$.

$$8. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \quad a > 0, \quad c < 0,$$

$$u_x(0, t) = \exp((c-a)t), \quad u(\pi/2, t) = \exp((c-a)t), \quad u(x, 0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp((c-a)t) \sin x$.

$$9. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = \exp(-at) (\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = \exp(-at) (\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x, 0) = \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-at) \cos(x + bt)$.

$$10. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0.$$

$$u_x(0, t) + u(0, t) = \exp((c-a)t) (\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi, t) + u(\pi, t) = -\exp((c-a)t) (\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x, 0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp((c-a)t) \sin(x + bt)$.

5.2. Используя явную схему *крест* и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0, t) = -\sin(at),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$u(\pi, t) = \sin(at),$$

$$u_t(x, 0) = -a \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin(x - at)$.

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x + \cos x,$$

$$u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = -a(\sin x + \cos x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin(x - at) + \cos(x + at)$.

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \sin(2t), & u(x, 0) &= 0, \\ u(\pi, t) &= -\sin(2t), & u_t(x, 0) &= 2 \cos x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \cos x \sin(2t)$.

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u,$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - 2u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= \exp(2x), \\ u_x(1, t) - 2u(1, t) &= 0, & u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(2x) \cos t$.

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= 0, \\ u(\pi, t) &= 0, & u_t(x, 0) &= \exp(-x) \sin x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = 0.5 \exp(-x) \sin x \sin(2t)$.

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2u,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \cos(2t), & u(x, 0) &= \exp(-x) \cos x, \\ u(\pi/2, t) &= 0, & u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-x) \cos x \cos(2t)$.

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \exp(-t) \cos(2t), & u(x, 0) &= \exp(-x) \cos x, \\ u(\pi/2, t) &= 0, & u_t(x, 0) &= -\exp(-x) \cos x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t - x) \cos x \cos(2t)$.

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= 0, \\ u(\pi, t) &= 0, & u_t(x, 0) &= 2 \exp(-x) \sin x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t - x) \sin x \sin(2t)$.

$$9. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + \sin x \exp(-t),$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \exp(-t), & u(x, 0) &= \cos x, \\ u(\pi, t) &= -\exp(-t), & u_t(x, 0) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t) \cos x$.

$$10. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t),$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \exp(-t), & u(x, 0) &= \sin x, \\ u_x(\pi, t) &= -\exp(-t), & u_t(x, 0) &= -\sin x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t) \sin x$.

5.3. Используя центрально-разностную схему и метод Либмана, решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= y, & u(x, 0) &= x, \\ u(1, y) &= 1 + y, & u(x, 1) &= 1 + x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = x + y$.

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= 0, & u_y(x, 0) &= 0, \\ u(1, y) &= 1 - y^2, & u(x, 1) &= x^2 - 1. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = x^2 - y^2$.

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \cos y, & u_y(x, 0) &= 0, \\ u(1, y) &= e \cos y, & u_y(x, \pi/2) &= -\exp(x). \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(x) \cos y$.

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= \exp(y), & u(x, 0) &= \sin x, \\ u_x(\pi, y) &= -\exp(y), & u(x, 1) &= e \sin x. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \sin x \exp(y)$.

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u,$$

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= \cos y, & u(x, 0) &= x, \\ u_x(1, y) - u(1, y) &= 0, & u(x, \pi/2) &= 0. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = x \cos y$.

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u,$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u_y(x, 0) &= \sin x, \\ u(\pi/2, y) &= y, & u_y(x, 1) - u(x, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = y \sin x$.

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2u,$$

$$u(0, y) = \cos y,$$

$$u(x, 0) = \cos x,$$

$$u(\pi/2, y) = 0,$$

$$u(x, \pi/2) = 0.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = \cos x \cos y.$$

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0, y) = \cos y,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u(\pi/2, y) = 0,$$

$$u(x, \pi/2) = 0.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = \exp(-x) \cos x \cos y.$$

$$9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u,$$

$$u(0, y) = \exp(-y) \cos y,$$

$$u(x, 0) = \cos x,$$

$$u(\pi/2, y) = 0,$$

$$u(x, \pi/2) = 0.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = \exp(-y) \cos x \cos y.$$

$$10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$$

$$u(0, y) = \exp(-y) \cos y,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u(\pi/2, y) = 0,$$

$$u(x, \pi/2) = 0.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = \exp(-x - y) \cos x \cos y.$$

5.4. Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y .

$$1. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at],$$

$$u(\pi, y, t) = (-1)^{\mu_1} \cos(\mu_2 y) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at],$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at],$$

$$u(x, \pi, t) = (-1)^{\mu_1} \cos(\mu_1 x) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at],$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

$$a) \mu_1 = 1, \mu_2 = 1$$

$$б) \mu_1 = 2, \mu_2 = 1;$$

$$в) \mu_1 = 1, \mu_2 = 2.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at].$$

$$2. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at],$$

$$u((\pi/2)\mu_1, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at],$$

$$u(x, (\pi/2), \mu_2, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

$$a) \mu_1 = 1, \mu_2 = 1$$

$$б) \mu_1 = 2, \mu_2 = 1$$

$$в) \mu_1 = 1, \mu_2 = 2.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp[-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at].$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \operatorname{ch}(y) \exp(-3at),$$

$$u(\pi/4, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = (5/4) \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \operatorname{ch}(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \operatorname{ch}(y) \exp(-3at)$.

$$4. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \operatorname{ch}(y) \exp(-3at),$$

$$u(\pi/2, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, \ln 2, t) = (3/4) \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \operatorname{ch}(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \operatorname{ch}(y) \exp(-3at)$.

$$5. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \operatorname{sh}(y) \exp(-3at),$$

$$u(\pi/2, y, t) = -\operatorname{sh}(y) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = (3/4) \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \operatorname{sh}(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \operatorname{sh}(y) \exp(-3at)$.

$$6. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \operatorname{sh}(y) \exp(-3at),$$

$$u_x(\pi/4, y, t) = -2 \operatorname{sh}(y) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = (3/4) \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \operatorname{sh}(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \operatorname{sh}(y) \exp(-3at)$.

$$7. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = y \cos t,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) = x \cos t,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy \cos t$.

$$8. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) - u_x(1, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) - u_y(x, 1, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy \cos t$.

$$9. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y [\mu \cos \mu t + (a + b) \sin \mu t],$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(\pi/2, y, t) = \sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

$$\text{а) } a = 1, b = 1, \mu = 1;$$

$$\text{б) } a = 2, b = 1, \mu = 1;$$

$$\text{в) } a = 1, b = 2, \mu = 1;$$

$$\text{г) } a = 1, b = 1, \mu = 2.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

$$10. \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y [\mu \cos \mu t + (a + b) \sin \mu t],$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u_x(\pi, y, t) = -\sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

$$\text{а) } a = 1, b = 1, \mu = 1$$

$$\text{б) } a = 2, b = 1, \mu = 1;$$

$$\text{в) } a = 1, b = 2, \mu = 1;$$

$$\text{г) } a = 1, b = 1, \mu = 2.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

■ ЛИТЕРАТУРА

1. *Пирумов У. Г.* Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов. — 3-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2004. — 224 с.
2. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — 266 с.
3. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. — 664 с.
4. Сборник задач по методам вычислений: Учеб. пособие для вузов / Под ред. П. И. Монастырного. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.
5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
6. *Косарев В. И.* 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс): Учеб. пособие для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — 224 с.
7. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. — М.: Мир, 1998. — 575 с.
8. *Дж. Деммель.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. — М.: Мир, 2001. — 430 с.

■ СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1 Численные методы линейной алгебры	
1.1. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	4
1.1.1. Метод Гаусса	4
1.1.2. Метод прогонки	11
1.1.3. Нормы векторов и матриц	13
1.1.4. Итерационные методы решения СЛАУ	16
1.2. Численные методы решения задач на собственные значения и собственные векторы матриц	20
1.2.1. Основные определения и спектральные свойства матриц	20
1.2.2. Метод вращений Якоби численного решения задач на собственные значения и собственные векторы матриц	22
1.2.3. Частичная проблема собственных значений и собственных векторов матрицы. Степенной метод	25
1.2.4. <i>QR</i> -алгоритм нахождения собственных значений матриц	26
ЗАДАЧИ	32
ОТВЕТЫ	39
2 Нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений	
2.1. Решение нелинейных уравнений	42
2.2. Решение систем нелинейных уравнений	46
ЗАДАЧИ	53
ОТВЕТЫ	55
3 Приближение функций. Численное дифференцирование и интегрирование	
3.1. Интерполяция	56
3.2. Метод наименьших квадратов	62
3.3. Численное дифференцирование	64
3.4. Численное интегрирование	66
ЗАДАЧИ	69
ОТВЕТЫ	81
4 Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	
4.1. Численные методы решения задачи Коши	84
4.1.1. Задача Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения	84
4.1.2. Одношаговые методы	84
4.1.3. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений	88
4.1.4. Решение задачи Коши для ОДУ второго и более высоких порядков	90
4.1.5. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	96
4.1.6. Многошаговые методы. Метод Адамса	98

4.2.	Численные методы решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	100
4.2.1.	Метод стрельбы	101
4.2.2.	Конечно-разностный метод решения краевой задачи	103
ЗАДАЧИ	106
5	Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными	
5.1.	Численное решение уравнений параболического типа. Понятие о методе конечных разностей. Основные определения и конечно-разностные схемы	114
5.1.1.	Постановка задач для уравнений параболического типа	114
5.1.2.	Понятие о методе конечных разностей. Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа	115
5.1.3.	Аппроксимация граничных условий, содержащих производные	118
5.2.	Метод конечных разностей для решения уравнений гиперболического типа	122
5.2.1.	Постановка задач для уравнений гиперболического типа	122
5.2.2.	Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа	124
5.3.	Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа	126
5.3.1.	Постановка задач для уравнений эллиптического типа.	126
5.3.2.	Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений эллиптического типа	127
5.4.	Метод конечных разностей решения многомерных задач математической физики. Методы расщепления	129
5.4.1.	Метод переменных направлений	130
5.4.2.	Метод дробных шагов	131
5.4.3.	Методы расщепления численного решения эллиптических задач	132
5.5.	Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач	132
5.5.1.	Аппроксимация и порядок аппроксимации	132
5.5.2.	Устойчивость	133
5.5.3.	Сходимость и порядок сходимости	134
ЗАДАЧИ	135
Литература	142