

• Otros parámetros de interés (cascada electromagnética).

- **Radio de Molière**. Es una variable de escala para el desarrollo transversal de la cascada (más imprecisa que X_0). Se define como:

$$\rho_M = E_s \frac{X_0}{\xi_c}, \text{ siendo } E_s = m_e c^2 \sqrt{4\pi / \alpha} = 21,2 \text{ MeV}$$

E_s representa una escala energética.

- **Su significado** (estadístico) es que en el cilindro de radio ρ_M queda contenido el 90% de la energía de la cascada.

- Los radios de Molière se calculan como en el caso de las longitudes de radiación X_0 , intercambiando $X_i \rightarrow \rho_i$ para mezcla de elementos o sustancias compuestas. Así, para fracciones en peso w_j se aplica

$$\frac{1}{\rho_M} = \frac{1}{E_s} \sum_j \frac{w_j \xi_{cj}}{X_{0j}} = \sum_j \frac{w_j}{\rho_{Mj}}$$

- **Ejemplo:** Radio de Molière de los **cristales de BGO**. (compuesto)

relación de masas Bismuto/Germanio/Oxígeno: 209.0/72.6/16.0

porcentaje en masas: 70.2%/24.4%/5.4%

longitudes de radiación: 6.32, 12.25, 34.24 g·cm⁻².

Las energías críticas dadas por la expresión: 7.24, 18.4, 66.0 MeV respectivamente

radios de Molière para las componentes son 18.5, 14.4, 11.0 gcm⁻² respectivamente

$$\frac{1}{\rho_M} = \left[\frac{0.702}{18.5} + \frac{0.244}{14.4} + \frac{0.054}{11.0} \right] \rightarrow \rho_M = 16.7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$$

Como la densidad promedio de estos cristales es 7.13 gcm⁻³ su $\rho_M = 23 \text{ mm}$.

Otros parámetros (cont)

- Propiedades de escala:
 - $X_0 \rightarrow A/Z^2$ (ver definición). Si suponemos A proporc a $Z \rightarrow X_0 \rightarrow 1/Z$ (en $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$)
 - $\xi_c \rightarrow 1/Z$, de la definición de energía crítica.
 - En consecuencia el **radio de Molière es aproximadamente independiente de Z** (definición, esto es lo que se busca)
 - **Ejemplo**: Para el Cu ($Z=29$) y el Pb ($Z=82$). Densidades: 8.96 y 11.35 $\text{gr}\cdot\text{cm}^{-3}$. Longitudes de radiación X_0 : 14.3 mm., y 5.6 mm., **radios de Molière: 15.2 mm., y 16.0 mm.** Respectivamente. **Muy diferente desarrollo longitudinal y muy parecido desarrollo transversal**
- **Longitud de conversión** λ_{par} : es la distancia promedio en que un fotón de alta energía produce un par de electrón-positrón: como se ha visto es constante para altas energías y equivale a

$$\lambda_{\text{par}} = \frac{9}{7} X_0$$

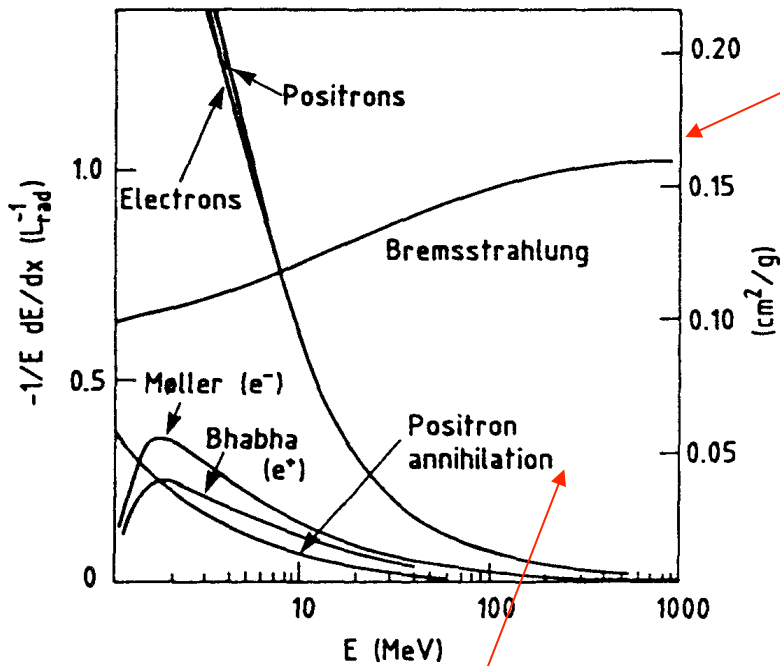
X_0 y λ_{par} gobiernan el desarrollo inicial de la cascada electromagnética (parte energética)

- **Longitud de atenuación** λ_{at} : gobierna la región final de extinción (exponencial) de la cascada electromagnética.

5. La cascada electromagnética.

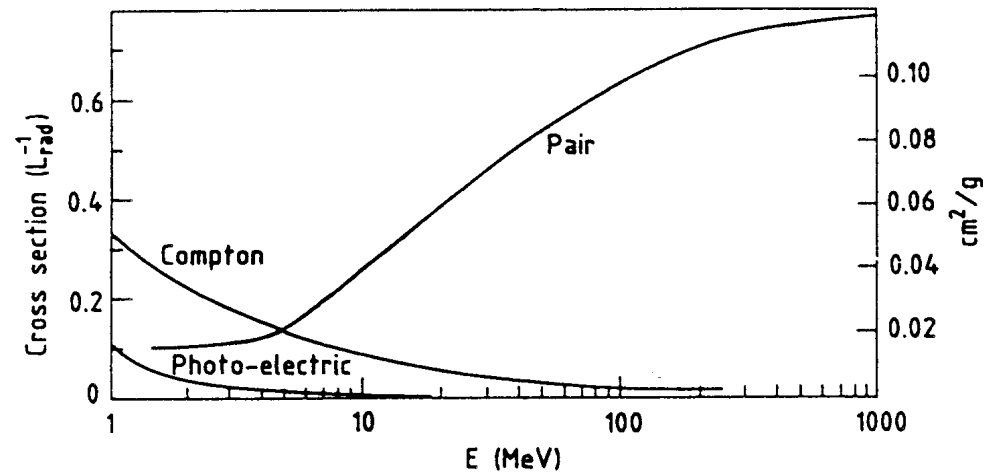
- Procesos fundamentales **a energías inferiores a 10 MeV**
 - Los fotones y electrones de unos pocos MeV de energía conforman la cola de la cascada electromagnética y tienen las mismas propiedades que los γ , e^+ , e^- de desintegraciones nucleares:
 - **originan fotopicos y picos de escape** por medio de los procesos: producción de pares, efecto Compton y efecto fotoeléctrico
 - Ejemplo: un γ de varios MeV (como el emitido por el ^{65}Ga , de 3.37 MeV) originará muy probablemente un par $e^+ e^-$ que por ionización/excitación pierden su energía \rightarrow **señal detectable**. El positrón, a través del positronio (**sistema cuasiestable formado por el e^- y e^+**) se aniquila en dos fotones de 511 KeV que por Compton y efecto fotoeléctrico transfieren su energía a electrones que por ionización/excitación pierden su energía \rightarrow **señal detectable**. La **energía incidente usada en la producción del par $e^+ e^-$, (invisible), se recupera en la desintegración del positronio.**
 - **Recordar que el haz de fotones no pierde energía al atravesar la materia, sino que se atenúa y son absorbidos. Pero vemos la señal detectable a través de sus procesos**
 - Los picos de escape y el fondo continuo típico en un detector de INa(Tl) se originan al escapar fotones (y e^\pm) del volumen sensible del detector.
 - En las figuras siguientes se observa, en función de la energía del fotón/ e^\pm la importancia relativa de los diferentes procesos.
 - El proceso **multiplicador de partículas** es importante para **energías elevadas** (lo veremos en el punto 5.1) \rightarrow **cascada electromagnética**

Proporción de energía perdida por unidad de longitud de radiación X_0 (izquierda) y por g/cm^2 (derecha) **en plomo** en función de la energía del electrón (positrón)



La pérdida de energía por Brems crece exponencialmente con la energía, lo que corresponde a una sección eficaz constante.

Recordar que el proceso de Brems y producción de pares cinemáticamente son idénticos



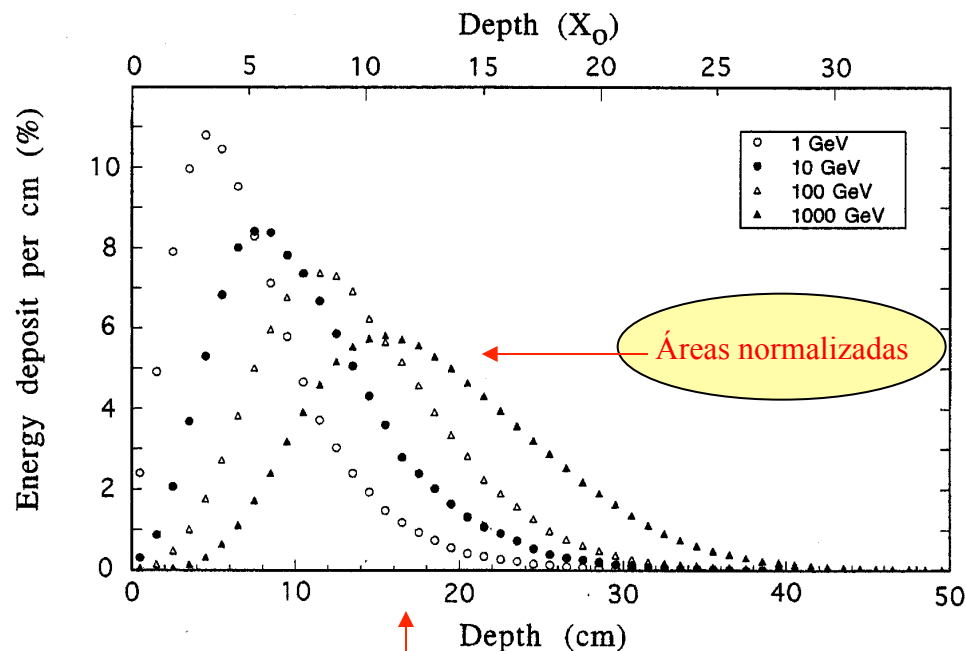
A altas energías es la radiación de brems la que domina

Sección eficaz σ de fotones en Pb en función de la energía del fotón. La intensidad de fotones en el haz se puede expresar como $I = I_0 \exp(-\sigma x)$ donde x es el recorrido en unidades de longitud de radiación.

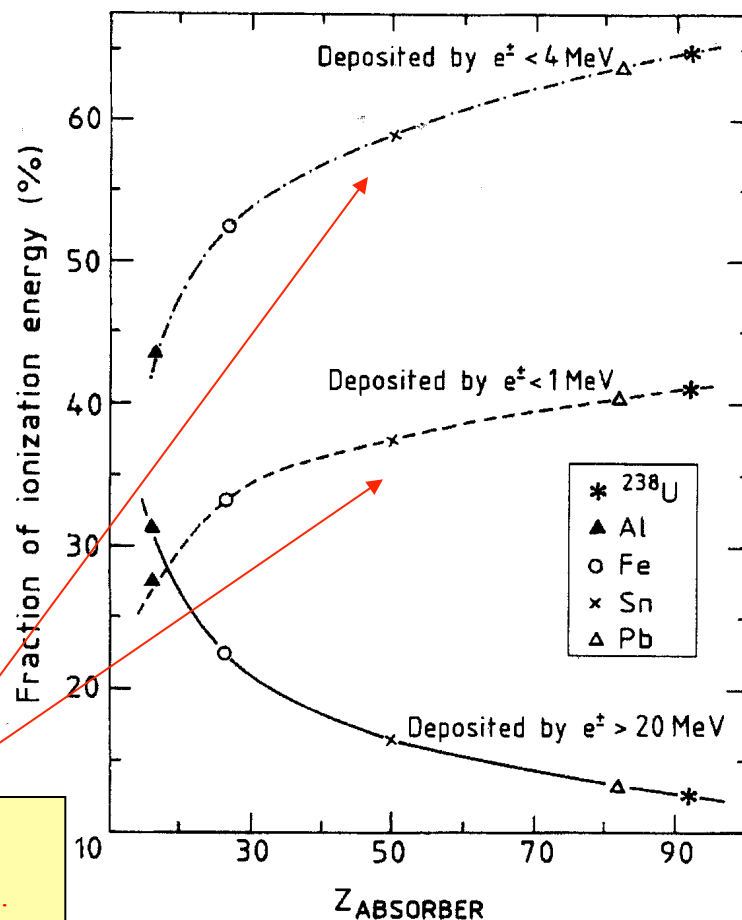
5.1 Procesos fundamentales a energías superiores a 10 MeV

- La característica de estos procesos es **la multiplicación de partículas**, a través de los dos procesos más probables a estas energías: radiación de **bremstrahlung de los electrones** y producción de pares de los fotones.
- Los procesos comentados para energías de 10 MeV intervienen también al final de la cascada (por eso decimos que conforman la cola de la cascada).
- Formación de la cascada electromagnética:
 - Un electrón primario de varios GeV puede radiar **millares de fotones** (brems), antes de detenerse en el detector.
 - la mayor parte de ellos son soft (baja energía) y son absorbidos por efecto Compton y fotoelec.
 - Los fotones de energía superior a 5-10 MeV originan en su mayoría pares $e^+ e^-$: los más energéticos radian a su vez fotones etc.
 - El resultado es una cascada compuesta por millares de partículas, la mayor parte de las cuales son de baja energía (soft) y de las cuales las partículas cargadas producen la señal detectable a través de los procesos electromagnéticos: ionización, excitación o Cerenkov.
 - Desarrollo espacial:
 - Dado que los e^\pm (\rightarrow señal) pueden considerarse **mip's** en todo su recorrido, **el desarrollo espacial de la señal se correlaciona con la multiplicidad de partículas** en el shower. La multiplicidad va creciendo con la profundidad, hasta que la energía de las partículas es insuficiente para que continúe el proceso multiplicativo. **Figura.**

- a) Energía depositada en función de la profundidad del shower para electrones de 1, 10, 100 y 1000 GeV sobre Cu, (**normalizadas** las áreas de las curvas)
- b) Composición de la energía depositada para una cascada electromagnética de una partícula de 10 GeV. Contribuciones de partículas **rápidas, medias y lentas** sobre los elementos de la tabla periódica.



A medida que aumenta la energía se desplaza el máximo a la derecha y aumenta la extensión de la cola.



Los electrones lentos (soft) contribuyen más a la cascada. El fenómeno aumenta con la Z del material, debido a la disminución de la energía crítica con Z

5.2 Características de la cascada electromagnética.

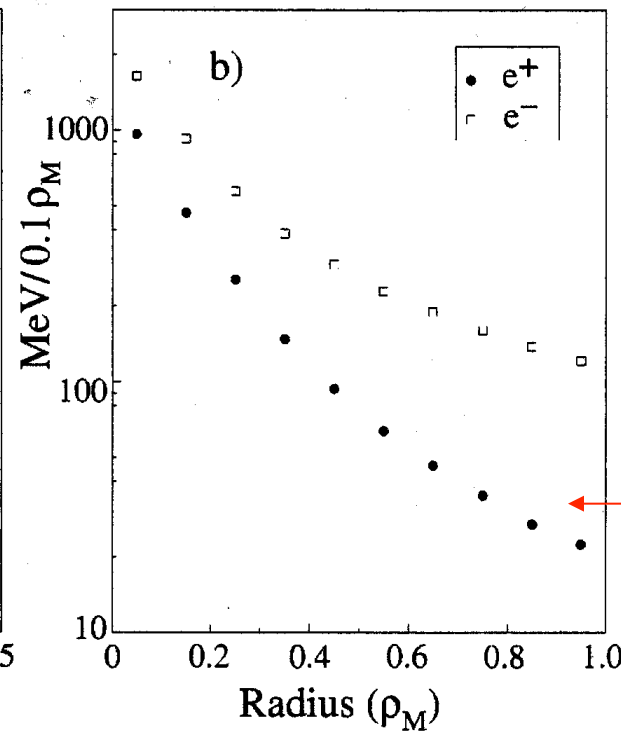
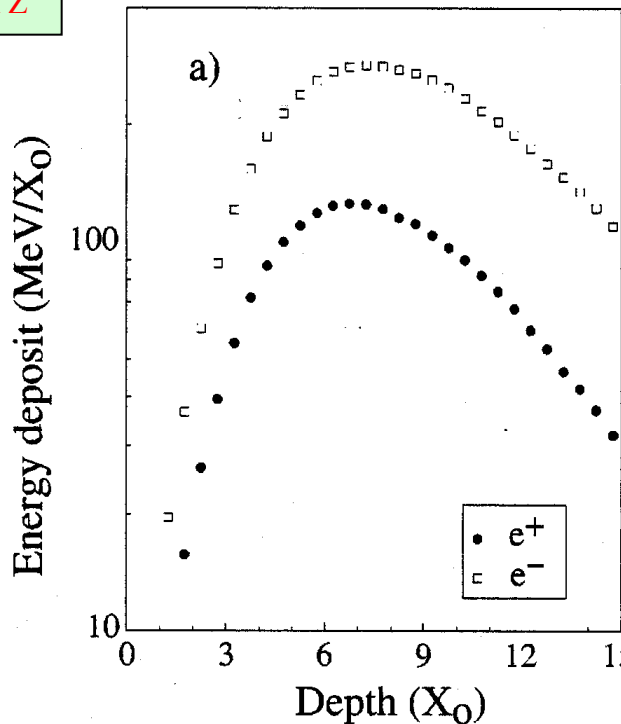
- El máximo del shower sobre el Cu (figura a) anterior) se alcanza para e^\pm de 1 GeV a **5 cm**., valor al que hay que **añadir 3.5 cm**. por cada incremento de orden de magnitud en la energía (en 10 GeV está en 8.5 cm, etc..).
- El 99% de contención de energía longitudinalmente se alcanza para espesores de Cu de 23, 28, 33 y 39 cm para 1, 10, 100 y 1000 GeV de energía inicial respectivamente. (**Se incrementa ~5 cm/orden de magnitud de E**)
- La formación de la señal se debe fundamentalmente a las partículas soft generadas. Figura b) (página anterior) + tabla (página siguiente).
 - A medida que Z crece, aumenta la contribución relativa de las partículas lentas. (efecto de la **energía crítica**: prosigue la multiplicación de secundarios hasta energías menores, figura página anterior)
 - La mayor parte de las partículas cargadas en el shower son electrones (a detrimento de positrones, debido a la desintegración del positronio) como se ve en la siguiente tabla (simulación).
 - Los electrones (dos órdenes de magnitud más numerosos) son muy abundantes en la cola de energía (por efecto fotoeléctrico y Compton que los positrones no sufren).
 - El incremento del número de positrones con la Z del absorbente se debe a que la energía crítica de estos es sensiblemente menor → prosigue la multiplicación de secundarios (materialización de pares) hasta energías menores
 - Los perfiles espaciales de deposición de energía son muy diferentes para electrones y positrones. Figura (página siguiente).

Tabla: Número promedio de positrones generados en cascadas electromagnéticas y su porcentaje de energía depositada.

Energía incidente	10 GeV		100 GeV	
Material	# e ⁺	E ⁺ /E _{tot}	# e ⁺	E ⁺ /E _{tot}
Al (Z=13)	191	26%	1750	27%
Fe (Z=26)	285	27%	2920	26%
Sn (Z=50)	427	24%	4330	25%
Pb (Z=82)	554	22%	5730	23%
U (Z=92)	612	23%	5970	23%

¿Por qué los positrones, con mayor número de trazas, contribuyen menos en la energía?

Incremento del número de positrones con Z



Los positrones transportan menos energía, al no contribuir en los procesos finales de la cola.

Los positrones contribuyen sobre todo en el core de la cascada

6. Modelo simple de Rossi-Heitler del desarrollo de una cascada

- Podemos obtener una **imagen simplista** del desarrollo de una cascada electromagnética dividiéndola en dos partes: la parte energética de **multiplicación** de partículas y la parte de **extinción** paulatina de los electrones.
- El modelo es independiente del material utilizado si se consideran las **variables de escala**: longitud de radiación X_0 , radio de Molière ρ_M , longitud de conversión λ_{par} , longitud de atenuación λ_{at} .
- El desarrollo de la cascada se parametriza sencillamente con las **hipótesis de Rossi**:
 - Tras recorrer una longitud de radiación X_0 los electrones/positrones radian por Brems un fotón **con equipartición de la energía**:

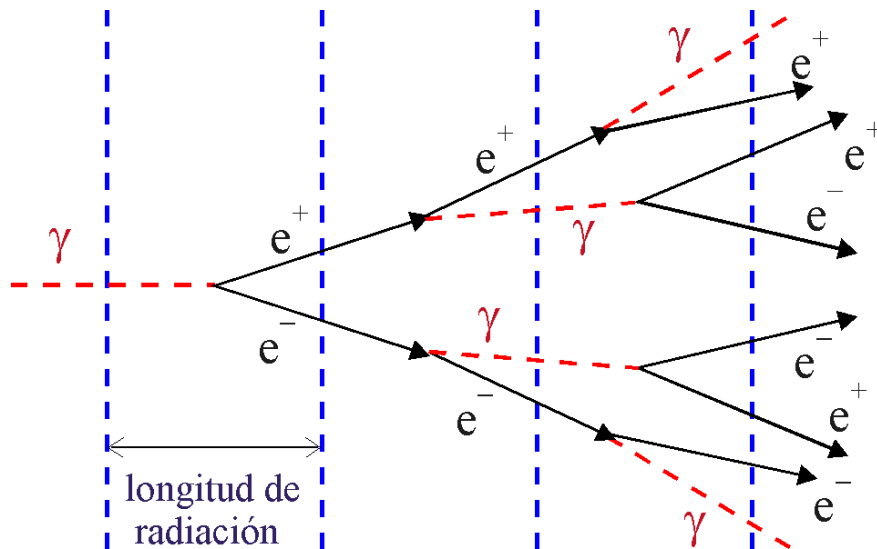
$$E_\gamma = E_{in}/2 = E_e.$$

- Los fotones energéticos se materializan en un par $e^+ e^-$ también tras recorrer una longitud de radiación X_0 ($L_{par} \approx X_0$) con equipartición de la energía:

$$E_{elec} = E_{posit} = E_\gamma/2.$$

- No se considera el efecto Compton, fotoeléctrico ni las pérdida de energía por ionización/excitación.
- Todos los electrones se detienen cuando su energía es inferior a la energía crítica ξ_c .
- La cascada se puede completar con su extinción espacial gobernada por λ_{at} .

Representación esquemática del modelo simplista de Rossi-Heitler para el desarrollo de una cascada electromagnética. Las líneas verticales azules representan longitudes de radiación.



- Tras t longitudes de radiación el modelo predice un número N de partículas

$$N = 2^t$$

la **energía de cada partícula** (hipótesis de equipartición) es

$$E = E_{in} / 2^t$$

- El número de partículas con energía superior a un determinado valor E va aumentando exponencialmente con t , desde su valor de entrada $t=0$, hasta su valor final $t=t_{máx}$.

- La profundidad $t_{máx}$ que alcanza la cascada viene dada por $t_{máx} = \ln(E_{inc}/\xi_c) / \ln 2$
- El **número máximo de partículas** presentes en la cascada es $N_{máx} = E_{inc}/\xi_c$, y cae abruptamente a cero.
- A pesar de su sencillez, el modelo explica conceptos como:
 - Punto de máximo desarrollo** de la cascada, $t_{máx}$ que crece con el $\ln E$, (lineal con orden magnitud de E).
 - Linealidad entre el número de partículas generadas en el shower y la energía incidente**
 - Aumento logarítmico de la extensión longitudinal de la cascada con la energía incidente**

Lo que hemos visto en la figura a) de la Transparencia 6

- El número de partículas con energía superior a un valor prefijado E' vale (donde $N=2^t$):

$$N(E > E') = \int_0^{t(E')} N(t) dt \approx \frac{1}{\ln 2} \frac{E_{inc}}{E'}$$

$$\int b^x dx = b^x / \ln(b)$$

$$2^t = E_{in}/E$$

Que nos dice que el espectro energético **decrece con $1/E^2$** .

Punto importante: La longitud total de trazas (cargadas, mip's) es **lineal con la energía** incidente

$$L = \frac{2}{3} \int_0^{t_{max}} N(t) dt \approx \frac{E_{inc}}{\xi_c} \quad \text{en longitudes de radiación} \rightarrow \frac{L}{t} = \frac{2}{3} \frac{1}{\ln 2} \frac{E_{inc}}{\xi_c} \approx \frac{E_{inc}}{\xi_c}$$

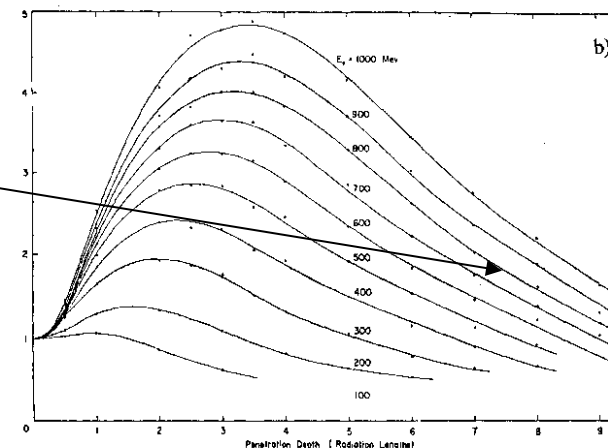
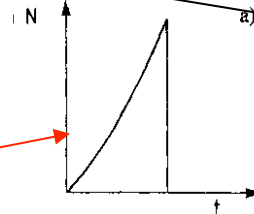
El factor 2/3 se debe a la fracción de traza cargada/neutra.

En el **modelo de Rossi** la longitud de traza total L del shower es lineal con la energía E_{inc} . Se puede así considerar que el shower está constituido por segmentos de traza (cuya suma es L), y que transportan una energía ξ_c .

Para tener una idea rápida del desarrollo de la cascada hay que considerar el desarrollo de su cola (zona de extinción, de tipo exponencial y gobernado por el parámetro λ_{at})

Número de partículas de la cascada electromagnética en función de su profundidad de penetración, medida en longitudes de radiación:

- Modelo de Rossi,
- Tratamiento completo de M.C. y sus medidas experimentales



6.1 Perfil de la cascada electromagnética: Desarrollo longitudinal

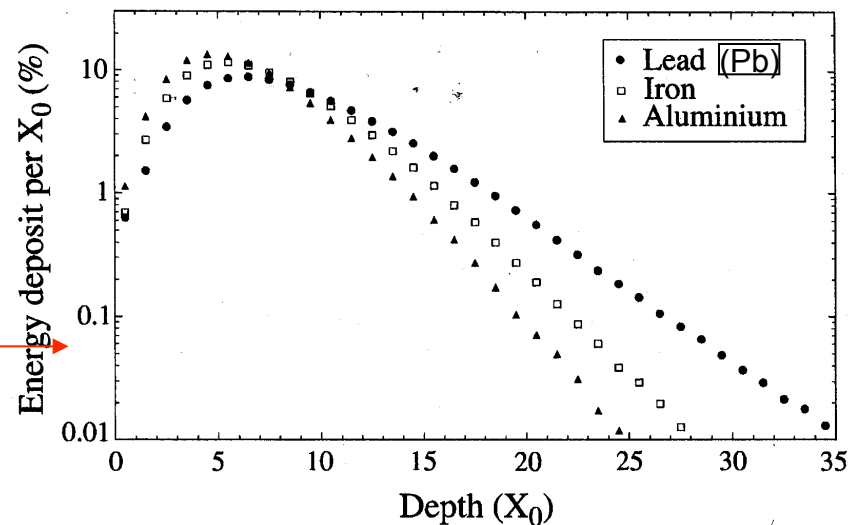
- En función de X_0 y de ρ_M los perfiles longitudinal y transversal de la cascada son independientes del material (así se definieron): las longitudes de radiación respectivas son 89 mm., 17.6 mm., y 5.6 mm.

- Las diferencias en función de Z creciente se resumen en:

- El máximo desarrollo de la cascada se desplaza a mayores profundidades (mayor número de X_0 para contener la cascada).
- La extinción se produce a mayores profundidades para absorbentes pesados

- La explicación de la primera reside en la energía crítica, de menor valor para el Pb.

La segunda se explica porque la energía crítica menor en el Pb hace que los fotones/electrones que hay en la cola (son poco energéticos) prefieran el proceso Compton y pérdidas de energía por ionización (en el ligero), frente al proceso de producción de pares y brems (de altas energías) en el (pesado). Los procesos Compton e ionización son más probables a Z bajo.



- Desarrollo de cascadas electromagnéticas inducidas por e de 10 GeV sobre material de Z baja, media y elevada en función de X_0 . Las propiedades de escala son mejor reproducidas en la zona energética que en la de extinción de la cascada.

CONCLUSIÓN:

El máximo de la cascada se alcanza antes para el ligero.
La extinción es más lenta para el pesado.

Desarrollo transversal

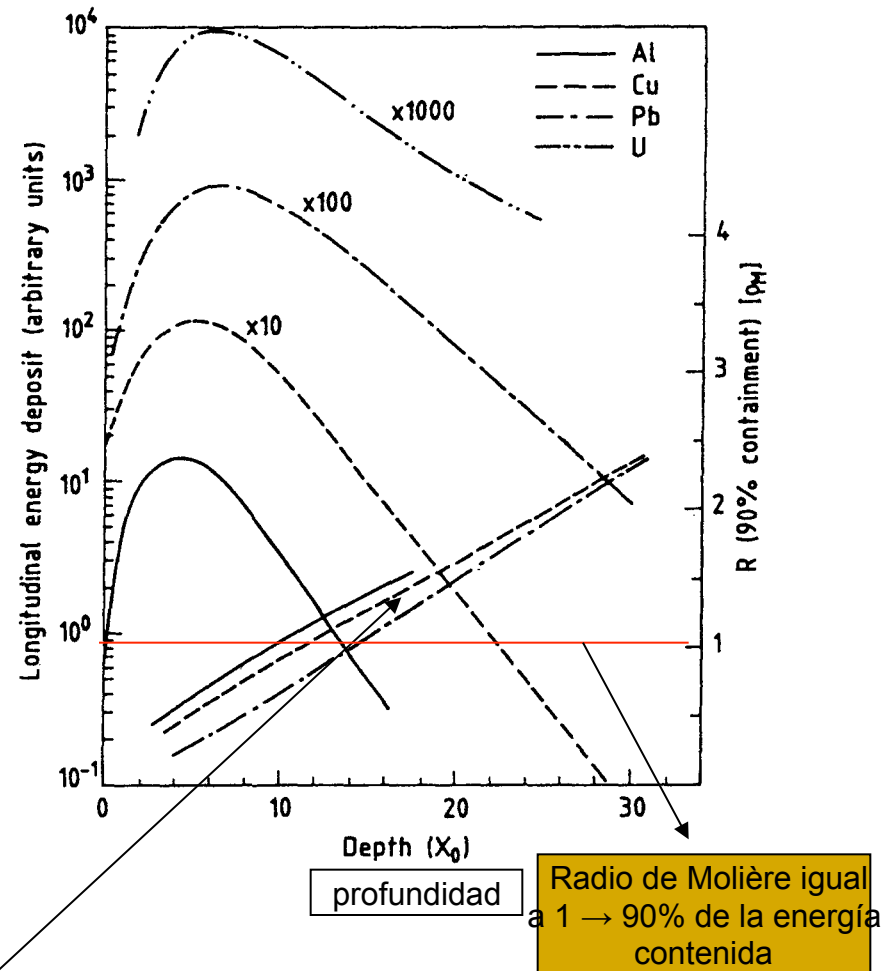
- La cascada electromagnética se va ensanchando en su progresión en el material, debido a:

- Difusión múltiple de los **electrones**/positrones
- Las partículas generadas (Compton, fotoeléctrico, pares) a pesar de ser una interacción e.m. adquieren momento transversal → desviación angular menor a altas energías

El proceso dominante es el primero en la parte energética de la cascada, y en la de extinción es el segundo.

Términos:

- **Densidad de energía**: energía por unidad de volumen en función de su distancia radial al eje de simetría → los denominamos **perfiles laterales**.
- **Perfiles radiales** o distribuciones radiales de energía: representan la **energía contenida** en un corte de radio definido alrededor del eje de simetría.

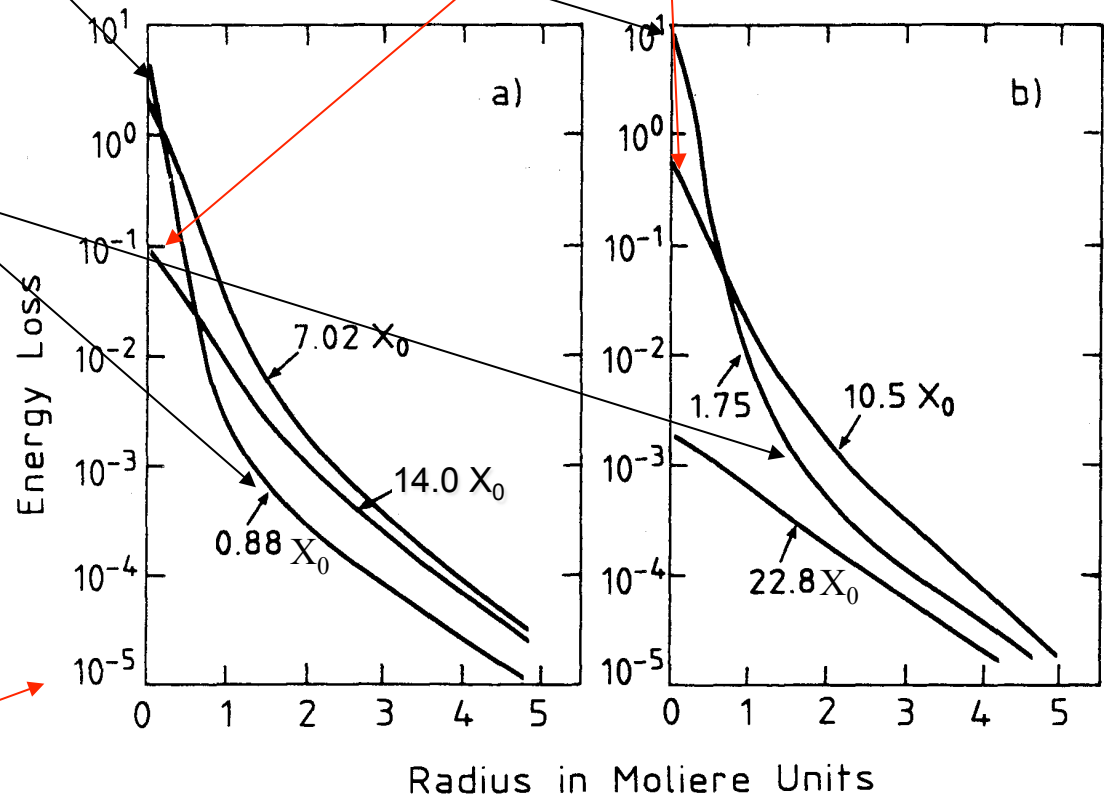


En la figura se observa las propiedades geométricas de la cascada de un electrón de 6 GeV sobre diferentes materiales, usando las variables de escala X_0 y ρ_m y en función de su profundidad. A la izquierda (con factores de escala) el desarrollo longitudinal, ya comentado. A la derecha, en unidades del radio de Molière, la distancia radial que contiene el 90% de la energía (→ **aumento radial progresivo** del core de la cascada en su desarrollo, la casca se va expandiendo transversalmente conforme se va desarrollando)

La figura muestra la distribución lateral de energía depositada por un electrón de 1 GeV a varias profundidades de su desarrollo sobre Pb. Se observa la existencia de un core pronunciado, con elevada densidad de energía, rodeado de un halo extenso (con varios órdenes de magnitud de menor densidad de energía).

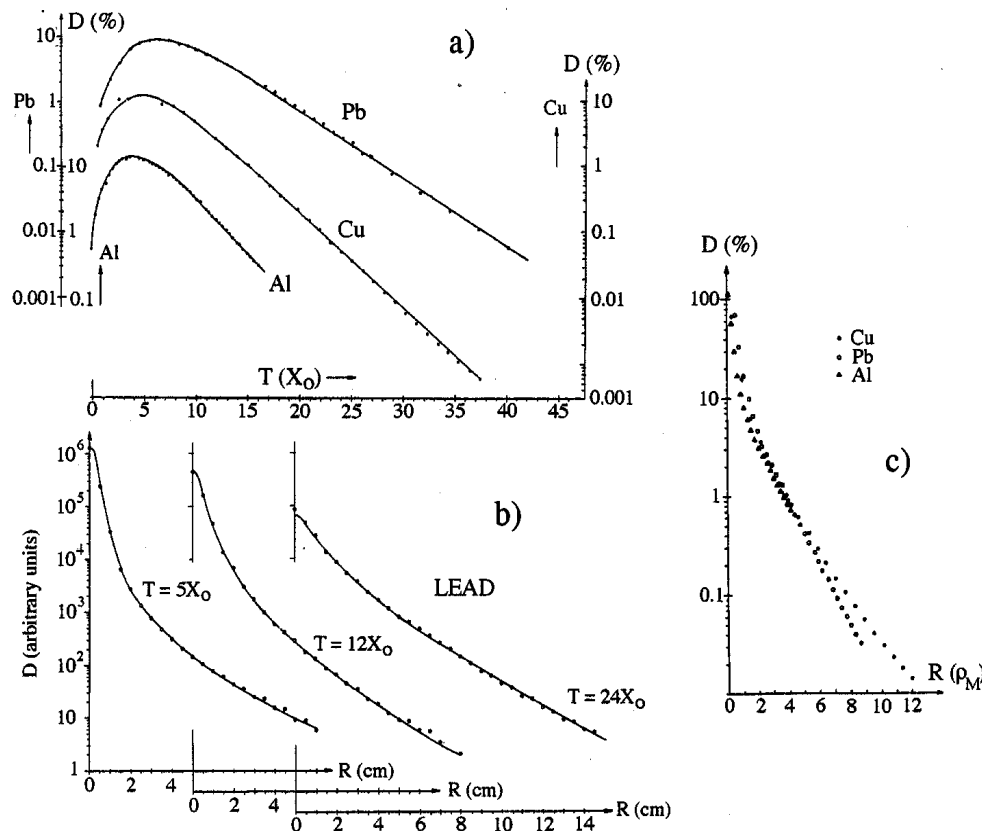
El **core** domina en las primeras longitudes de radiación para desaparecer tras el máximo desarrollo de la cascada. La cola se extiende radialmente dominada por el efecto 2 (página anterior). Ambas componentes exhiben un comportamiento aproximadamente exponencial decreciente

Perfiles Radiales



Resultados experimentales:

Hasta ahora los datos presentados son el resultado de simulación EGS4 (figuras anteriores). Bathow et al., insertan cristales dosimétricos de fosfato de plata a diferentes profundidades en el absorbente (Al/Cu/Pb), irradiado con un fino haz de electrones de 6 GeV. La distribución de energía es lineal con la dosis .



- Se usan las variable de escala X_0 y ρ_M
- En a) se presentan los **perfiles longitudinales** de deposición de energía, de acuerdo con lo visto (ver figura en página 13).
- En b) se presentan los **perfiles laterales**, a tres profundidades, mostrando la existencia de dos tipos de contribución: core y halo (ver figura en página 14).
- En c) se muestran los perfiles laterales sobre cada material, **integrados** sobre toda la profundidad del shower.

6.2 Parametrizaciones (entre datos simulados y experimentales).

- **Desarrollo máximo del shower**, para una partícula incidente de energía E, es:

$$t_{\max} \text{ (en unidades de } t) = 1.0 \ln \frac{E}{E_c} \begin{cases} -0.5 & \text{para } e^\pm \\ +0.5 & \text{para } \gamma \end{cases}$$

- **Profundidad que contiene el 95%** de la energía depositada

$$L_{0.95}(X_0) = t_{\max} + 0.08Z + 9.6$$

$$L_{0.95}(X_0) = t_{\max} + 4\lambda_{\text{at}}$$

- **Radio que contiene el 90% / 95% de la energía lateral del shower**

$$R(90\%) = \rho_M \approx 7 \frac{A}{Z} \quad R(95\%) = 2\rho_M \approx 14 \frac{A}{Z}$$

- Aproximaciones

Son de utilidad para cálculos rápidos las aproximaciones siguientes:

$X_0 \approx 180 \cdot \frac{A}{Z^2} \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right)$	$\rho_M \approx 7 \frac{A}{Z} \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right)$	$\xi_c \approx \frac{580}{Z} \text{ MeV}$
---	--	---

Que se deducen de las expresiones iniciales y ponen de manifiesto las propiedades de dependencia con el número atómico Z del elemento.

- La longitud de atenuación caracteriza la extinción de la cascada en la cola y toma valores típicos de 3 a 4.5 longitudes de radiación. Se pueden ajustar de los datos experimentales y simulados.

Parametrización en PDG 2010 (pag 240)

- Usamos variables de escala definiendo $t=x/X_0$ $y=E/\xi_{cr}$, se obtiene (ajuste, ver figura) que el perfil longitudinal promedio de las cascadas electromagnéticas viene descrito por la función gamma, en la forma:

$$\frac{dE}{dt} = E_0 b \frac{(bt)^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)} \rightarrow$$

$$t_{m\acute{a}x} = \frac{(a-1)}{b} = 1.0 (\ln y + C_j) \quad \text{siendo } j = e, \gamma$$

donde la constante $C_e = -0.5$ y $C_\gamma = +0.5$

- Se observa en la figura (abajo) que el parámetro b depende tanto de Z como de la energía incidente. Una buena aproximación es **$b \approx 0.5$** .
- **Figura superior:** Fracción de energía depositada por unidad de longitud de radiación, ajustada mediante una función Gamma. Los círculos (cuadrados) muestran el número de e (γ) con energía superior a 1.5 MeV que cruzan cada plano medio de longitud de radiación. Simulación EGS4 de una cascada en Fe inducida por e de 30 GeV.
- **Figura inferior:** Valores ajustados del factor de escala b para diferentes elementos y energías incidentes.
- **Uso** de la parametrización: se obtiene **b** y **a**.

