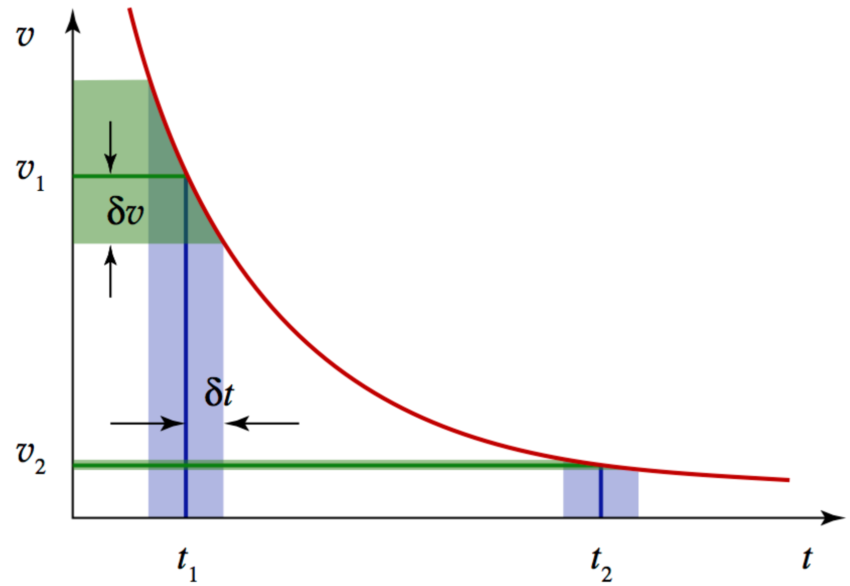
Tema 3 Propagación de errores

1. Funciones lineales de variables aleatorias.
2. Cambio de variable.
3. Propagación de errores.
4. Generalización a varias funciones.
5. Notación matricial.



1. Funciones lineales de variables aleatorias

Sea $g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ una función lineal de variables aleatorias: $g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

¿Valor esperado?

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left[x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

El valor esperado de una combinación lineal de variables aleatorias es la combinación lineal de los valores medios

¿Varianza?

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right]\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_i - \mu_i\right)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \left(x_i - \mu_i\right)^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E\left[\left(x_i - \mu_i\right)^2\right] + \sum_{i \neq j} a_i a_j E\left[\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V\left[x_i\right] + \sum_{i \neq j} a_i a_j \operatorname{cov}\left(x_i, x_j\right)$$

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j V_{ij}$$

1. Funciones lineales de v. aleatorias

Varianza de una combinación lineal

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 V_{ii}}_{} + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j V_{ij}}_{}$$

Suma de las varianzas individuales pesadas por los coeficientes al cuadrado

Suma de las covarianzas posibles entre las variables

Si las variables no están correlacionadas

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V_{ii}$$

Ejemplo

Supongamos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ variables independientes todas con la misma media y varianza: $\begin{cases}\mu_i = \mu \\ \sigma_i^2 = \sigma^2\end{cases}$

¿Valor esperado y varianza de la media?

$$E[\bar{x}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad a_i = \frac{1}{n}$$

$$V[\bar{x}] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V[x_i] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}V[x_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

2. Cambio de variable

Conocemos pdf para una determinada variable aleatoria. Si realizamos un cambio de variable ¿Cuál es la pdf de la nueva variable?

$x \to f(x)$ Cambio de variable $y = y(x)$ nueva variable aleatoria $y \to$ ¿pdf $g(y)$?

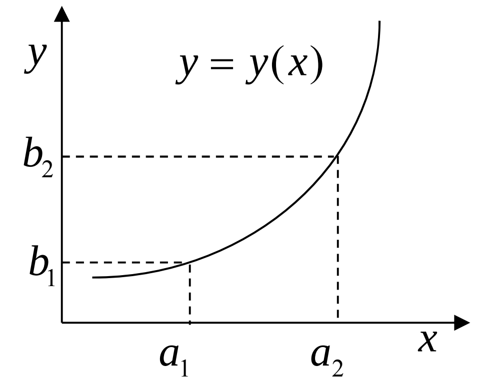
Supongamos (a_1, a_2) un intervalo de la variable x que al realizar el cambio se corresponde biunívocamente con el intervalo (b_1, b_2) de la variable y .

$$P(a) = P(b)$$

$$P[a_1 \le X \le a_2] = P[b_1 \le Y \le b_2]$$

Para un intervalo infinitesimal

$$P[x \le X \le x + dx] = P[y \le Y \le y + dy] \quad \Rightarrow \quad f(x)dx = g(y)dy$$



$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{f(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$$

Valores absolutos para asegurar dependencia no negativa

Si no es biunívoca y hay varios segmentos $\Rightarrow$

$$g(y) = \sum f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Si tenemos varias variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\left|\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}\right| = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)|J|$$

Jacobiano de la transformación $\Rightarrow$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}\right| \equiv \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}\right|$$

3. Propagación de errores

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ variables aleatorias y una función que depende de las mismas:

$$y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y(\overline{x})$$

¿Cual es la varianza de la nueva variable y ?

$$¿V(y)?$$

- Supongamos conocida la matriz de covarianza $V(\overline{x})$
- Realizamos un desarrollo en serie de Taylor en torno a los valores medios $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$
- Supongamos que las cantidades $(x_i - \mu_i)$ son lo suficientemente pequeñas como para despreciar órdenes superiores

$$y(\overline{x}) = y(\overline{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i) \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}} + \cdots$$

$$\cancel{(x_i - \mu_i)^2}$$

Valor esperado

$$E\left[y(\overline{x})\right] = E\left[y(\overline{\mu})\right] + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)\right] + \cdots \simeq$$

$$\simeq y(\overline{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}} (\mu_i - \mu_i) = y(\overline{\mu})$$

$$\Rightarrow \quad E\left[y(\overline{x})\right] \simeq y(\overline{\mu})$$

El valor esperado de una función de variables aleatorias es la función de los valores esperados de las variables aleatorias en el límite de incrementos pequeños $(x_i - \mu_i) \to 0$

3. Propagación de errores

Varianza

$$V\left[y(\overline{x})\right] = E\left[\left(y(\overline{x}) - E\left[y(\overline{x})\right]\right)^2\right] = E\left[\left(y(\overline{x}) - y(\overline{\mu})\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i)\left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}}\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}}\left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\overline{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}}\left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\overline{\mu}} V_{ij}\left[\overline{x}\right]$$

Ley de propagación de errores

$$V\left[y(\overline{x})\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}}\left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\overline{\mu}} V_{ij}\left[\overline{x}\right]$$

Si las variables son independientes, las covarianzas se anulan:

$$V\left[y(\overline{x})\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 V_{ii}\left[\overline{x}\right]$$

Notación desviación estándar

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_i) + 2\sum_{i>j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}\operatorname{cov}(x_i, x_j)$$

Variables independientes

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_i)$$

¡Se trata de una aproximación, pues despreciamos términos superiores!

Ejemplos

$$y = f(x_1, x_2) \Rightarrow \sigma_y^2$$

$$y = ax_1 \pm bx_2 \longrightarrow \sigma_y^2 = a^2\sigma_{x_1}^2 + b^2\sigma_{x_2}^2 \pm 2ab\,\mathrm{cov}(x_1, x_2)$$

$$y = \pm a x_1 x_2 \longrightarrow \frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{x_2^2} + 2\frac{\mathrm{cov}(x_1, x_2)}{x_1 x_2}$$

$$y = \pm a\frac{x_1}{x_2} \longrightarrow \frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{x_2^2} - 2\frac{\mathrm{cov}(x_1, x_2)}{x_1 x_2}$$

$$y = ax^{\pm b} \longrightarrow \frac{\sigma_y}{y} = b\frac{\sigma_x}{x}$$

$$y = ae^{\pm bx} \longrightarrow \frac{\sigma_y}{y} = b\sigma_x$$

$$y = a\ln(\pm bx) \longrightarrow \sigma_y = a\frac{\sigma_x}{x}$$

4. Generalización

Supongamos que tenemos *m* funciones dependientes de *n* variables aleatorias $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$y_k = y_k\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = y_k\left(\overline{x}\right) \qquad k = 1, \cdots, m$$

- Suponemos conocida la matriz de covarianza $V\left(\overline{x}\right)$
- Para cada función y_k realizamos un desarrollo en serie de Taylor en torno a $\overline{\mu} = \left(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\right)$
- Supongamos las cantidades $\left(x_i - \mu_i\right)$ suficientemente pequeñas → despreciamos órdenes superiores

$$y_k\left(\overline{x}\right) = y_k\left(\overline{\mu}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_i\right)\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}} + \cdots \qquad k = 1, \cdots, m \qquad \cancel{\left(x_i - \mu_i\right)^2}$$

Valor esperado

$$E\left[y_k\left(\overline{x}\right)\right] = E\left[y_k\left(\overline{\mu}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}} E\left[\left(x_i - \mu_i\right)\right] + \cdots = y_k\left(\overline{\mu}\right) \qquad k = 1, \cdots, m$$

$$\boxed{E\left[y_k\left(\overline{x}\right)\right] = y_k\left(\overline{\mu}\right)}$$

4. Generalización a varias funciones

Varianza

Definimos la covarianza entre y_k e y_l como:

$$V_{kl}(\bar{y}) = E\left[\left(y_k(\bar{x}) - E\left[y_k(\bar{x})\right]\right)\left(y_l(\bar{x}) - E\left[y_l(\bar{x})\right]\right)\right] = E\left[\left(y_k(\bar{x}) - y_k(\bar{\mu})\right)\left(y_l(\bar{x}) - y_l(\bar{\mu})\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i)\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\bar{\mu}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu_j)\left.\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right|_{\bar{\mu}}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\bar{\mu}}\left.\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right|_{\bar{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\bar{\mu}}\left.\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right|_{\bar{\mu}} V_{ij}(\bar{x})$$

Fórmula general de propagación de errores

$$V_{kl}\left[y(\bar{x})\right] \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\bar{\mu}}\left.\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right|_{\bar{\mu}} V_{ij}\left[\bar{x}\right]$$

Base para el cálculo de errores en Física

Los errores de las variables y_k son los términos diagonales de la matriz $V(\bar{y})$

$$V_{kk}\left[y(\bar{x})\right] \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\bar{\mu}}\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right|_{\bar{\mu}} V_{ij}\left[\bar{x}\right]$$

Si las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son independientes

$$V_{kk}\left[\bar{y}\right] \simeq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)^2 V_{ii}(\bar{x})$$

$$\sigma_k^2(\bar{y}) \simeq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2(x_i)$$

Aunque las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ no estén correlacionadas las nuevas variables $y_1, y_2, \cdots, y_m$ pueden estarlo

5. Notación Matricial

Para cada una de las funciones y_k tenemos:

$$y_k(\overline{x}) = y_k(\overline{\mu}) + \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\right|_{\overline{\mu}} (x_1 - \mu_1) + \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_2}\right|_{\overline{\mu}} (x_2 - \mu_2) + \cdots + \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_n}\right|_{\overline{\mu}} (x_n - \mu_n) + \text{órdenes superiores}$$

$$k = 1, \cdots, m$$

Matricialmente:

$$\overline{y}(\overline{x}) = \overline{y}(\overline{\mu}) + S(\overline{x} - \overline{\mu}) + \text{órdenes superiores}$$

Donde la matriz S viene dada por

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{\overline{\mu}} & \left.\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right|_{\overline{\mu}} & \cdots & \left.\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right|_{\overline{\mu}} \\ \left.\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right|_{\overline{\mu}} & \left.\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right|_{\overline{\mu}} & \cdots & \left.\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\right|_{\overline{\mu}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\right|_{\overline{\mu}} & \left.\frac{\partial y_m}{\partial x_2}\right|_{\overline{\mu}} & \cdots & \left.\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\right|_{\overline{\mu}} \end{pmatrix}$$

5. Notación matricial

La matriz de covarianza de y vendra dada por:

$$V(\overline{y}) = E\left[\left(\overline{y}(\overline{x}) - E\left[\overline{y}(\overline{x})\right]\right)\left(\overline{y}(\overline{x}) - E\left[\overline{y}(\overline{x})\right]\right)^T\right] =$$

$$= E\left[\left(\overline{y}(\overline{x}) - \overline{y}(\overline{\mu})\right)\left(\overline{y}(\overline{x}) - \overline{y}(\overline{\mu})\right)^T\right] =$$

$$= E\left[\left(S(\overline{x} - \overline{\mu})\right)\left(S(\overline{x} - \overline{\mu})\right)^T\right] =$$

$$= E\left[S(\overline{x} - \overline{\mu})(\overline{x} - \overline{\mu})^T S^T\right] =$$

$$= SE\left[(\overline{x} - \overline{\mu})(\overline{x} - \overline{\mu})^T\right] S^T$$

$$= SV(\overline{x}) S^T$$

$$\boxed{V[\overline{y}] = SV[\overline{x}]S^T} \Longleftarrow \boxed{V_{kl}\left[y(\overline{x})\right] \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{\overline{\mu}} \left.\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right|_{\overline{\mu}} V_{ij}[\overline{x}]}$$

Ley de propagación de errores