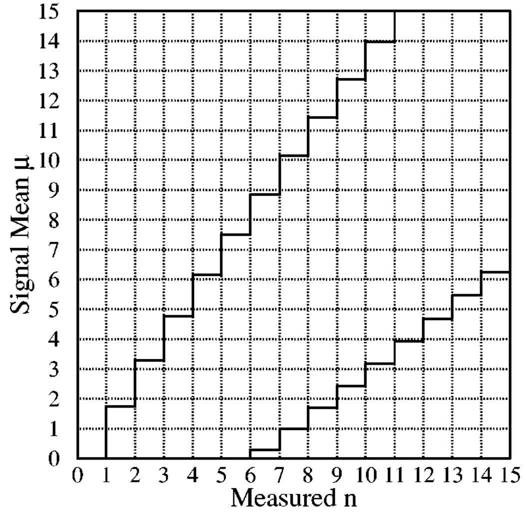
Tema 10 Intervalos de confianza (II)

1. Introducción
2. Cinturones de confianza. Método clásico
3. Límites de Confianza
4. Intervalos de confianza para estimadores gaussianos.
5. Intervalos de confianza en el método ML
6. Intervalos de confianza con varios parámetros.
7. Límites cerca de una frontera física
8. Intervalos de confianza bayesianos
9. **Intervalos de confianza de Poisson**
10. **Intervalos de Poisson con fondo**
    1. **Aproximación bayesiana**
    2. **Método de Feldman-Cousins**



9. Intervalos de confianza de Poisson

Supongamos una medida que responde a una distribución de Poisson, de media μ siendo el resultado de la misma n_{obs}

$$f(n\,|\,\mu)=\frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$$

La mejor estimación de (ML) la media vendrá dada por: $\hat{\mu}=n_{obs}$

Para calcular los cinturones de confianza y los intervalos de confianza por el método clásico basta con sustituir

$$P\left(\hat{\theta}_- \le \hat{\theta} \le \hat{\theta}_+\right)=\int_{\hat{\theta}_-}^{\hat{\theta}_+} g\left(\hat{\theta},\theta\right)d\hat{\theta}=1-\alpha-\beta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=L}^{U} P(\hat{\mu}\,|\,\mu)\ge 1-\alpha-\beta$$

Sin embargo, al sumar elementos finitos, en lugar de infinitésimos, en general, no es posible obtener de manera exacta una determinada probabilidad: $1-\alpha-\beta$

La ecuación se convierte en una desigualdad y se produce un sobre-cubrimiento o ***overcoverage***

Aún así, se puede obtener un intervalo de confianza resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\alpha=P\left(n\ge n_{obs};\mu_a\right)=\sum_{n=n_{obs}}^{\infty} f\left(n;\mu_a\right)=1-\sum_{n=0}^{n=n_{obs}-1} f\left(n;\mu_a\right)=1-\sum_{n=0}^{n=n_{obs}-1}\frac{\mu_a^n}{n!}e^{-\mu_a}$$

$$\beta=P\left(n\le n_{obs};\mu_b\right)=\sum_{n=0}^{n_{obs}} f\left(n;\mu_b\right)=\sum_{n=0}^{n_{obs}}\frac{\mu_b^n}{n!}e^{-\mu_b}$$

Las incógnitas son: μ_a y μ_b

9. Intervalos de confianza de Poisson

Haciendo uso de la relación entre la distribución de Poisson y la distribución de χ^2

$$\sum_{n=0}^{n_{obs}} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \int_{2\mu}^{\infty} f\left(\chi^2, \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right) d\chi^2 = 1 - F_{\chi^2}\left(2\mu; \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right)$$

Las ecuaciones anteriores quedan entonces:

$$\alpha = 1 - \sum_{n=0}^{n=n_{obs}-1} \frac{\mu_a^n}{n!} e^{-\mu_a} = 1 - \int_{2\mu_a}^{\infty} f_{\chi^2}\left(\chi^2, \nu = 2\left(n_{obs}-1+1\right)\right) d\chi^2 = 1 - \left(1 - F_{\chi^2}\left(2\mu_a; \nu = 2n_{obs}\right)\right) =$$

$$= F_{\chi^2}\left(2\mu_a; \nu = 2n_{obs}\right) \quad \Rightarrow \quad \mu_a = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}\left(\alpha; \nu = 2n_{obs}\right)$$

$$\beta = \sum_{n=0}^{n=n_{obs}} \frac{\mu_b^n}{n!} e^{-\mu_b} = 1 - F_{\chi^2}\left(2\mu_b; \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mu_b = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}\left(1-\beta; \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right)$$

Los valores de las funciones cuantiles $F_{\chi^2}^{-1}$ se pueden obtener mediante tablas o routinas del CERN

TMath::ChisquareQuantile(p,ndf)

Double_t ChisquareQuantile(Double_t p, Double_t ndf)

Evaluate the quantiles of the chi-squared probability distribution function.
Algorithm AS 91 Appl. Statist. (1975) Vol.24, P.35 implemented by Anna Kreshuk.
Incorporates the suggested changes in AS R85 (vol.40(1), pp.233-5, 1991)
Parameters:

- p - the probability value, at which the quantile is computed
- ndf - number of degrees of freedom

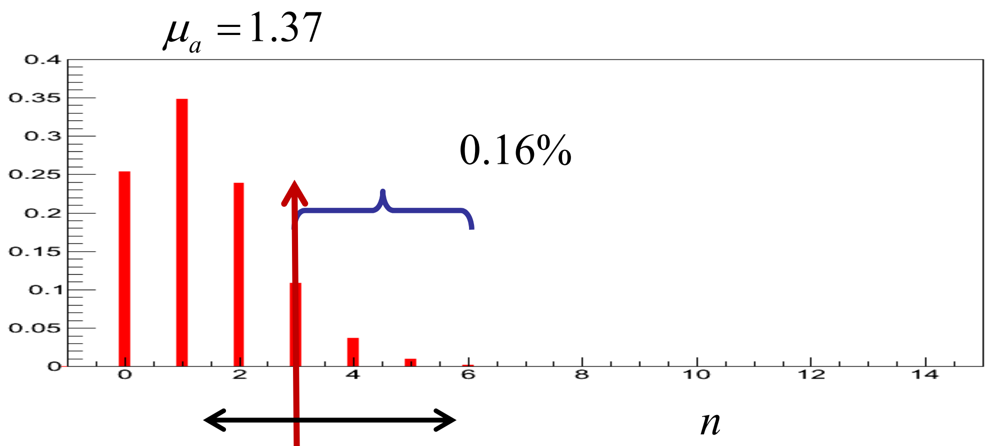
9. Intervalos de confianza de Poisson

Ejemplo

Supongamos que el resultado de nuestra medida es: $n_{obs} = 3$

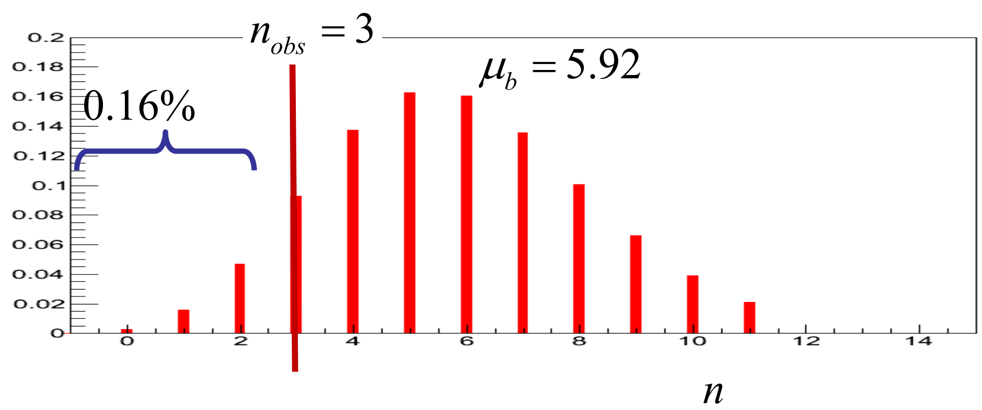
Buscamos un intervalo de confianza central tal que $\alpha = \beta = 0.16$

$$f(n \mid \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$



$$\mu_a = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}(\alpha; \nu = 2n_{obs})$$

TMath::ChisquareQuantile(0.16,6)/2= 1.37



$$\mu_b = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}(1-\beta; \nu = 2(n_{obs}+1))$$

TMath::ChisquareQuantile(0.84,8)/2= 5.92

Método clásico: $[\mu_a, \mu_b] = [1.37, 5.92]$

$$\mu = 3^{+2.92}_{-1.63}$$

Si hubiéramos utilizado aprox. Gaussiana: $\mu = 3 \pm \sqrt{3} = 3 \pm 1.73$

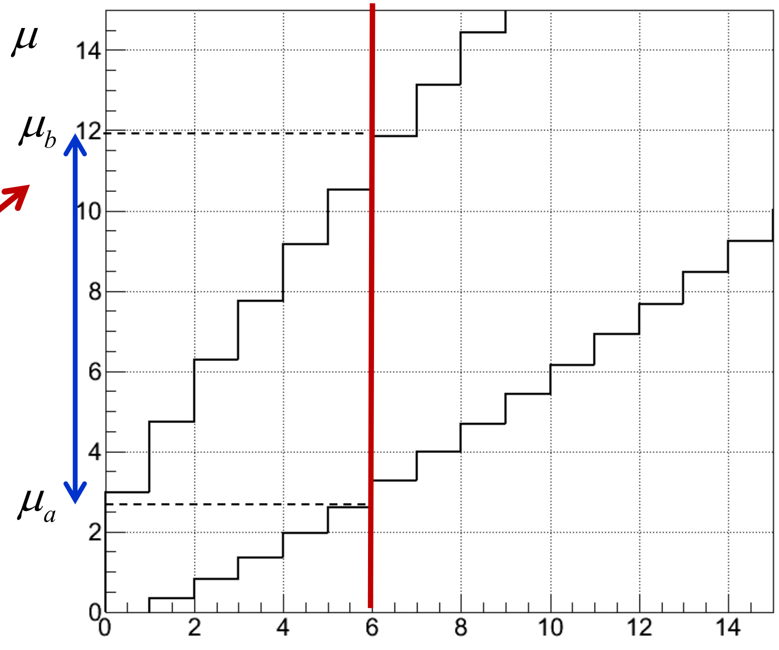
9. Intervalos de confianza de Poisson

Ejemplo de Límites de Poisson

Valores de los límites superior e inferior para distintos valores de sucesos observados, n_{obs} en una distribución de Poisson

n_{obs}	Lower limit			Upper Limit		
	α = 0.1	α = 0.05	α =0.01	β = 0.1	β = 0.05	β = 0.01
0	-			2.30	3.00	4.61
1	0.105	0.051	0.010	3.89	4.74	6.64
2	0.532	0.355	0.149	5.32	6.30	8.41
3	1.10	0.818	0.436	6.68	7.75	10.04
4	1.74	1.37	0.823	7.99	9.15	11.60
5	2.43	1.97	1.28	9.27	10.51	13.11
6	3.15	2.61	1.79	10.53	11.84	14.57
7	3.89	3.29	2.33	11.77	13.15	16.00
8	4.66	3.98	2.91	12.99	14.43	17.40
9	5.43	4.70	3.51	14.21	15.71	18.78
10	6.22	5.43	4.13	15.41	16.96	20.14

Cinturón de confianza para un 90 % CL con intervalos de confianza centrales



$n_{obs} = 6$

Ejemplo: supongamos que obtenemos $n_{obs} = 6$ $[\mu_a, \mu_b] = [2.61, 11.84]$

9. Intervalos de confianza de Poisson

La desigualdad en las ecuaciones:

$$\alpha = P(n \geq n_{obs}; \mu_a) \qquad \beta = P(n \leq n_{obs}; \mu_b)$$

$$\Rightarrow \quad P(\mu \geq \mu_a) \geq 1-\alpha \qquad P(\mu \leq \mu_b) \geq 1-\beta$$

$$\Rightarrow \quad P(\mu_a \leq \mu \leq \mu_b) \geq 1-\alpha-\beta$$

Los intervalos de confianza que se obtienen son conservativamente más grandes (***overcoverage***)

Un caso particularmente interesante es cuando el resultado de la medida es nulo: $n_{obs} = 0$

Límite inferior

El límite inferior no se puede calcular puesto que $\alpha = 1$ independientemente del valor de μ_a

$$\alpha = P(n \geq n_{obs}; \mu_a) = P(n \geq 0; \mu_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_a^n}{n!} e^{-\mu_a} = 1$$

Límite superior

El límite superior se obtiene fácilmente sin más que resolver:

$$\beta = P(n \leq n_{obs}; \mu_b) = P(n \leq 0; \mu_b) = \sum_{n=0}^{n_{obs}=0} \frac{\mu_b^n}{n!} e^{-\mu_b} = e^{-\mu_b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_b = -\ln \beta}$$

Estamos a un nivel de confianza $(1-\beta)\%$ de que $\mu_{true} < \mu_b$ lo cual se cumplirá en el $(1-\beta)\%$ de los casos.

Ejemplo $(1-\beta) = 95\%$ $\Rightarrow$ $\mu_b = -\ln \beta = -\ln 0.05 = 3$

9. Intervalos de Poisson con fondo

En la mayoría de los casos los valores observados son la suma de fondo más señal: $n = n_s + n_b$

Tanto el fondo como la señal son variables de Poisson con medias $\mu_s,\ \mu_b$ respectivamente.

Supongamos que el fondo, μ_b , es conocido de antemano, mientras que de la señal solo sabemos que $\mu_s \geq 0$

Como la suma de variables de Poisson es una variable de Poisson: $f(n;\mu_s,\mu_b) = \frac{(\mu_s+\mu_b)^n}{n!} e^{-(\mu_s+\mu_b)}$

El estimador ML para μ_s: $\Rightarrow$ $\hat{\mu}_s = n - \mu_b$

Las ecuaciones para determinar los intervalos de confianza vienen dados por:

$$\alpha = P\left(n \geq n_{obs}; \mu_s^{lo}\right) = \sum_{n \geq n_{obs}}^{\infty} \frac{\left(\mu_s^{lo} + \mu_b\right)^n}{n!} e^{-\left(\mu_s^{lo}+\mu_b\right)}$$

$$\beta = P\left(n \leq n_{obs}; \mu_s^{up}\right) = \sum_{n \leq n_{obs}} \frac{\left(\mu_s^{up} + \mu_b\right)^n}{n!} e^{-\left(\mu_s^{up}+\mu_b\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_s^{lo} = \mu_s^{lo}(\text{sin fondo}) - \mu_b \\ \mu_s^{up} = \mu_s^{up}(\text{sin fondo}) - \mu_b \end{cases}$$

Ecuaciones que pueden resolverse numéricamente y cuya solución está relacionada con la solución sin fondo

El problema surge cuando el número de sucesos observado es similar al fondo

9. Intervalos de Poisson con fondo

Soluciones con fondo:

Cuantíl de la distribución de χ^2

$$\mu_s^{lo} = \mu_s^{lo}(\text{sin fondo}) - \mu_b = \frac{1}{2}F_{\chi^2}^{-1}\left(\alpha; \nu = 2n_{obs}\right) - \mu_b$$

$$\mu_s^{up} = \mu_s^{up}(\text{sin fondo}) - \mu_b = \frac{1}{2}F_{\chi^2}^{-1}\left(1-\beta; \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right) - \mu_b$$

Soluciones sin fondo:

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_s^{lo}(\text{sin fondo}) = \frac{1}{2}F_{\chi^2}^{-1}\left(\alpha; \nu = 2n_{obs}\right) \\ \mu_s^{up}(\text{sin fondo}) = \frac{1}{2}F_{\chi^2}^{-1}\left(1-\beta; \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right) \end{array}\right.$$

Un número bajo de sucesos observados, n_{obs}, puede dar lugar a límites superiores (***upper limit***) negativos!!!

Ejemplo.- Supongamos que no observamos ningún suceso y esperamos un fondo de 2.5

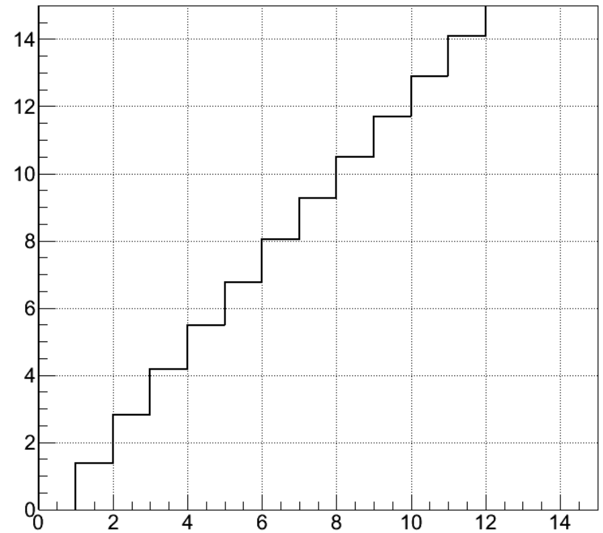
$$\mu_b = 2.5 \qquad n_{obs} = 0 \qquad (1-\beta) = 90\%$$

$$\mu_s^{up} = \frac{1}{2}F_{\chi^2}^{-1}\left(1-\beta; \nu = 2\left(n_{obs}+1\right)\right) - \mu_b =$$

$$= \frac{1}{2}F_{\chi^2}^{-1}\left(0.9; \nu = 2\right) - 2.5 = -0.197 < 0 \text{ !!}$$

TMath::ChisquareQuantile(0.9,2)=4.605

90% CL Upper limit para un fondo b = 2.5 sucesos



9. Intervalos de Poisson con fondo

¿Qué diría un físico?

Ya sabíamos que $\mu_s > 0$ antes de hacer el experimento, no podemos decir que el resultado de un experimento tan caro es un límite superior negativo!

¿Qué diría un estadístico?

El intervalo de confianza se diseña para que el 90% de las veces contenga al valor verdadero. Claramente esta medida no ha sido una de esas veces

El intervalo de confianza está estadísticamente bien definido pero su interpretación física no tiene sentido

No es un caso infrecuente cuando estamos cerca de una frontera física

Físico

¿Si subimos al 95% de CL?

$$\mu_s^{up} = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}(0.95; \nu = 2) - 2.5 = 0.496$$

Mejor todavía: si CL = 0.917923 obtenemos $\mu_{up} = 10^{-4}$!

Posibles soluciones

- **Aproximación bayesiana.- Introducir conocimiento previo en las "priors"**
- **Principio de ordenación basado en el cociente de verosimilitudes (Feldman & Cousins)**

9.1 Aproximación bayesiana

La estadística bayesiana parte de una pdf "***a priori***" $\pi(\mu_s)$ que refleja el ***grado de creencia*** que tenemos acerca de μ_s antes de realizar el experimento

Función de verosimilitud

$$L(n_{obs}|\mu_s) = \frac{(\mu_s + \mu_b)^{n_{obs}}}{n_{obs}!} e^{-(\mu_s+\mu_b)}$$

El teorema de Bayes nos dice como tener en cuenta ese conocimiento previo, a priori:

$$p(\mu_s|n_{obs}) = \frac{L(n_{obs}|\mu_s)\pi(\mu_s)}{\int L(n_{obs}|\mu_s^{'})\pi(\mu_s^{'})d\mu_s^{'}} \propto L(n_{obs}|\mu_s)\pi(\mu_s)$$

Integramos la probabilidad "***a posteriori***" $p(\mu_s|n_{obs})$ hasta conseguir el intervalo de confianza deseado:

Por ejemplo el límite superior al 95% de CL

$$\int_{-\infty}^{\mu_s^{up}} p(\mu_s|n_{obs})\,d\mu_s = 0.95$$

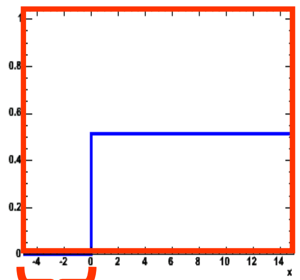
Se resuelve numéricamente para obtener el límite superior μ_s^{up}

9.1 Aproximación bayesiana

El hecho de que $\mu_s \geq 0$ se puede tener en cuenta en la pdf "a priori" $\pi(\mu_s) = \begin{cases} 1 & \mu_s \geq 0 \\ 0 & \mu_s < 0 \end{cases}$

Creencía de que μs debe ser > 0

$\pi(\mu_s)$

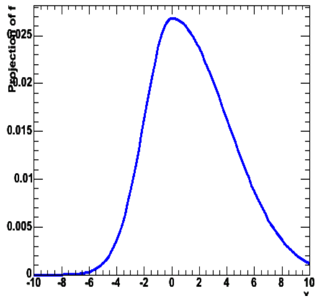


Valores negativos prohibidos

X

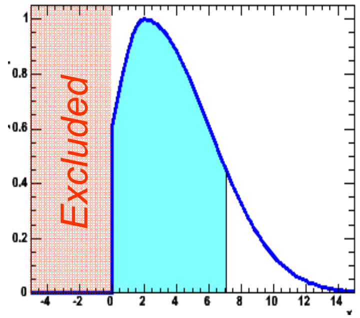
Medida de μs

$L(n_{obs}|\mu_s)$



=

Probabilidad a posteriori en μs es el producto de la medida por la probabilidad "a priori"



$p(\mu_s|n_{obs})$

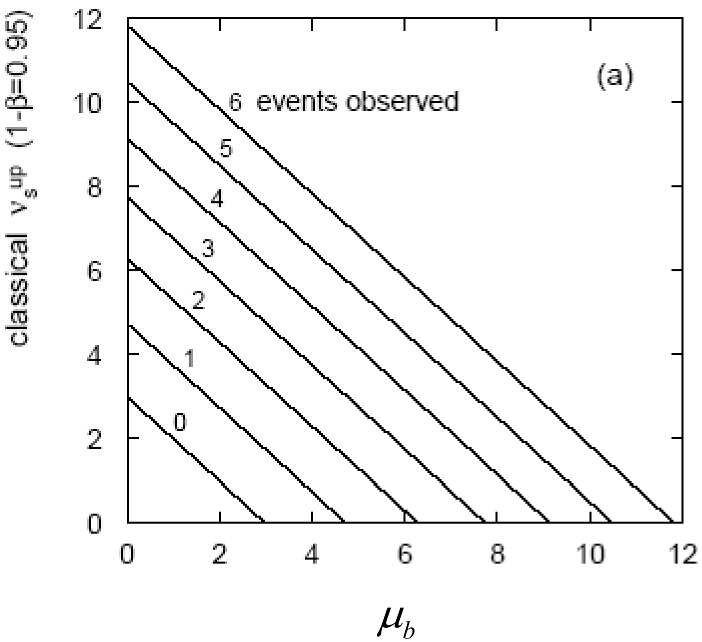
Intervalo bayesiano es diferente al frecuentista y tiene en cuenta el conocimiento previo

Problema:
Las probabilidades a priori no son invariantes bajo cambios de variable

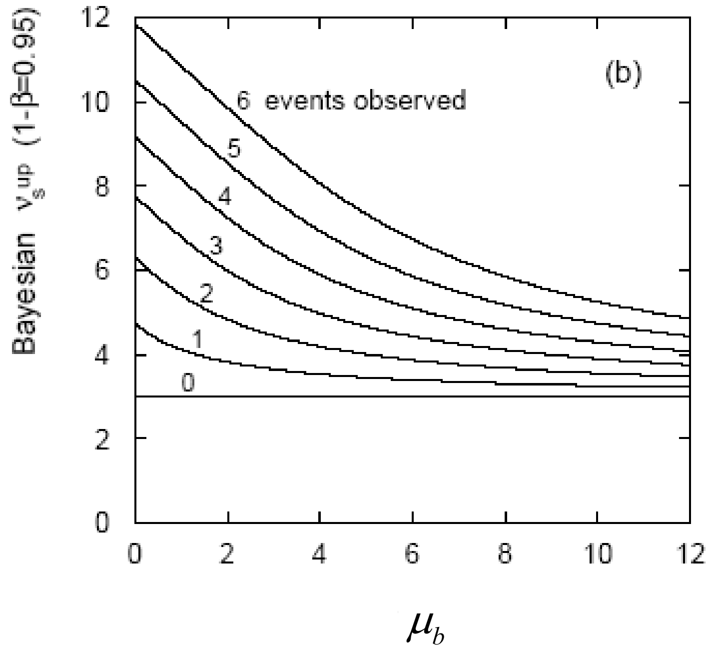
9.1 Aproximación bayesiana

APROXIMACIÓN BAYESIANA

Límites superiores
“Método clásico”



Límites superiores
“Método bayesiano”



- Para $\mu_b = 0$, límites superiores bayesianos con prior constantes coinciden con el método clásico
- Para $\mu_b > 0$, los límites bayesianos siempre son mayores (“conservadores”)
- Nunca son negativos
- Si n = 0 no dependen del fondo

9. Método de Feldman-Cousins

Principio de ordenación cociente de verosimilitudes

"A unified approach to the Classical Statistical Analysis of Small Signals", **Gary J Feldman and Robert D Cousins, Phys. Rev. D 57, 3873 (1998)**

Método para construir intervalos de confianza frecuentistas apropiados en presencia de fronteras

Supongamos un experimento donde observamos n sucesos consistentes en sucesos señal con media μ y sucesos de fondo con media b

$$P(n|\mu) = \frac{(\mu+b)^n}{n!} e^{-(\mu+b)}$$

Para un fondo dado b, definimos el cociente de probabilidades:

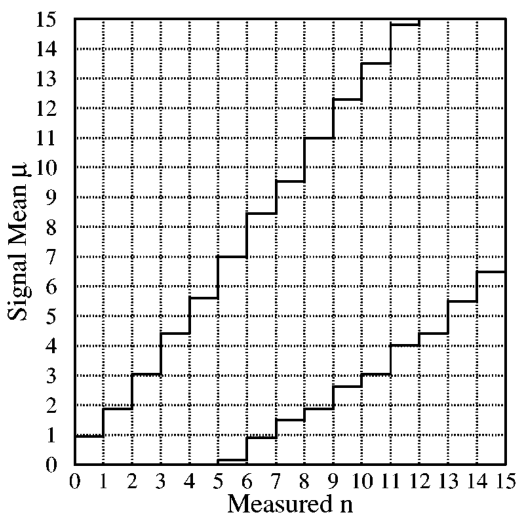
$$R = \frac{P(n|\mu,b)}{P(n|\mu_{best},b)}$$

Donde μ_{best} es el valor de μ, físicamente permitido (no negativo en este caso), que maximiza $P(n|s,b)$

$$s_{best} = \max\{0, n-b\}$$

Cinturón de confianza: Para cada valor de μ, los valores de *n* se van añadiendo a la región de aceptancia en orden decreciente del cociente de probabilidades R

"Feldman Cousins", 90%CL b=3



"Método clásico", 90%CL b=3