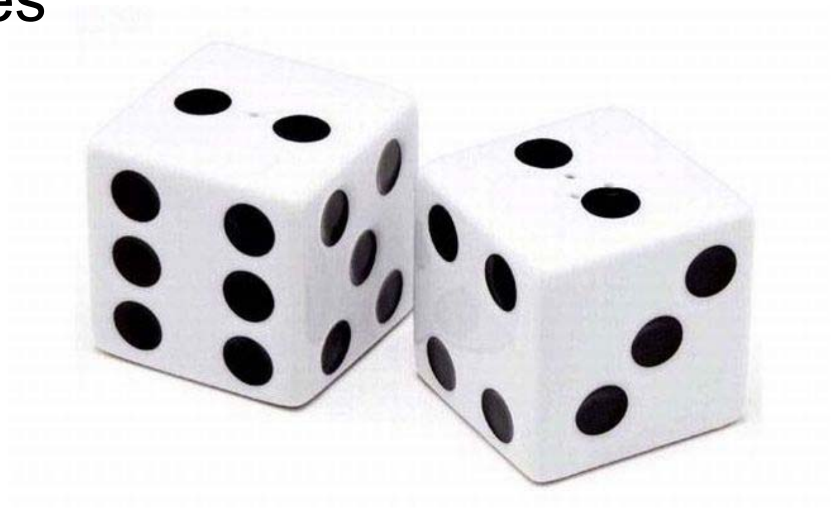
Tema 1 Conceptos preliminares

1. Introducción
2. Definición de probabilidad.
3. Variables aleatorias. Espacio muestral
4. Cálculo de probabilidades
5. Teorema de Bayes
6. Estadística bayesiana

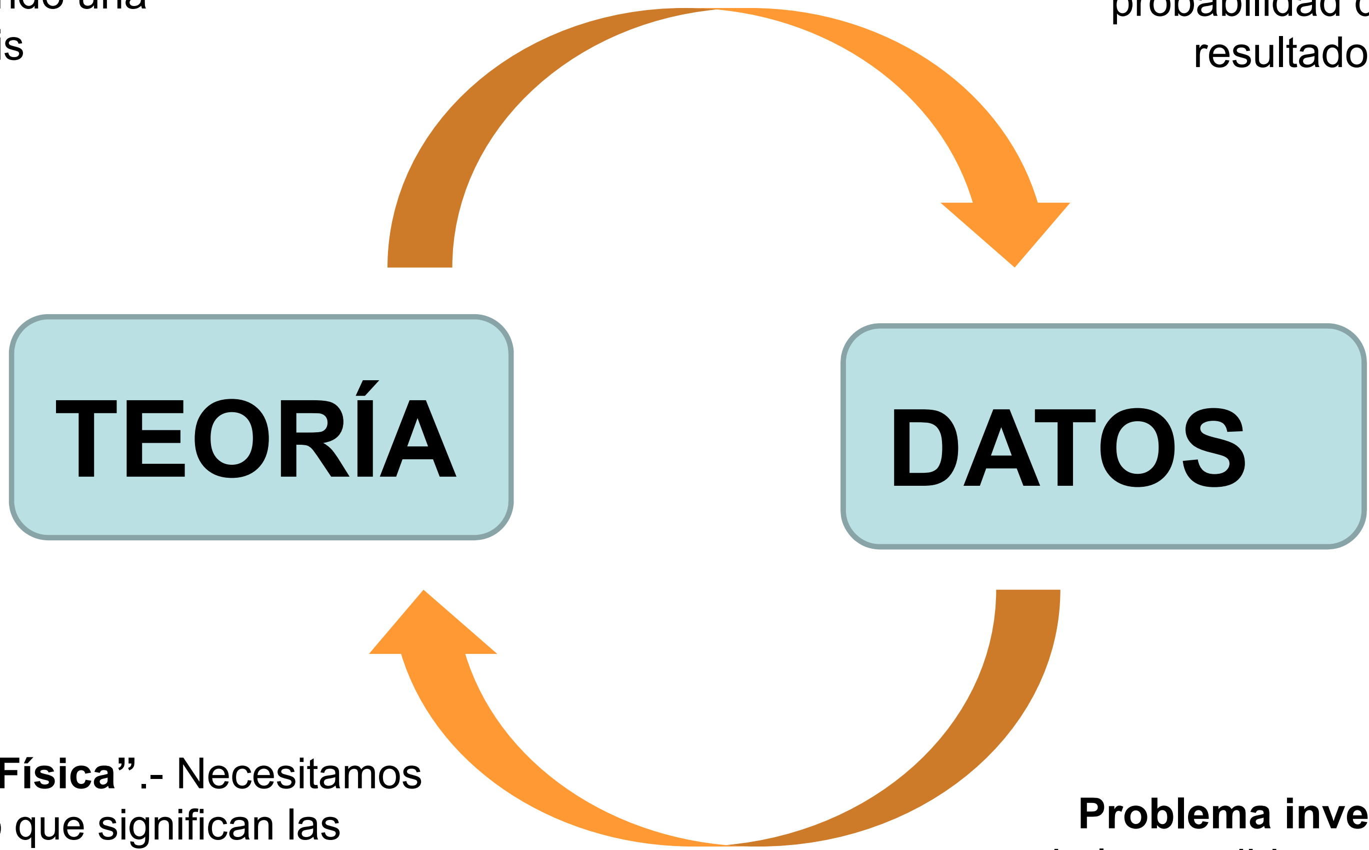


1. Introducción

Calcular la probabilidad de obtener un resultado asumiendo una hipótesis

Probabilidad

“**Estudiar Física**”.- Dado un problema definido, cuál es la probabilidad de obtener un resultado determinado



“**Hacer Física**”.- Necesitamos saber lo que significan las medidas, para lo cual necesitamos Estadística

Estadística

Problema inverso.- A partir de las medidas o datos, inferir algo sobre las leyes físicas

2. Definición de probabilidad

Definición basada en el límite de la frecuencia $\rightarrow$ Observamos sucesos de diferente tipo, de los que *n* son de tipo X. Si el total de sucesos observados es *N*, la probabilidad de que un suceso sea de tipo X viene dada por:

$$P(X) = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

- Definición empírica, basada en la experiencia (aproximación frecuentista).
- El experimento debe ser repetible, bajo idénticas condiciones.
- La probabilidad depende no solo del experimento sino del conjunto total de repeticiones.
- Irrealizable, puesto que *($N \rightarrow \infty$).*

Definición moderna o axiomática.- Si definimos *Ω* el conjunto de todos los posibles resultados de los sucesos elementales X_i (sucesos exclusivos). La probabilidad de que suceda X_i tiene las siguientes propiedades:

a) $P(X_i) \geq 0 \qquad X_i \in \Omega$

b) $P(X_i \text{ ó } X_j) = P(X_i) + P(X_j)$

c) $\sum P(X_i) = 1$

A partir de tres axiomas podemos derivar y calcular la probabilidad de cualquier suceso.

3. Variables aleatorias

Variable aleatoria.- Variable de la cual desconocemos o ignoramos el valor que tomará como resultado de una acción.

Espacio muestral.- Conjunto exhaustivo de todos los resultados posibles.

Variables aleatorias discretas
- Conjunto discreto de valores.
- Ejemplo: lanzamiento de un dado.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Variables aleatorias continuas.-
- Ω es un intervalo o conjunto de intervalos.
- Ejemplo: posiciones *(x,y)* de un proyectil al caer.

$$\Omega = \{(x,y)\}$$

Desconocemos el valor que tomará la variable X pero sabemos la probabilidad de obtener un valor dado:

Variables discretas

Cada resultado X_i tiene asociada una probabilidad $P(X_i) = P_i$

La suma de todas las probabilidades de todos los casos posibles debe ser la unidad

$$\sum P(X_i) = 1$$

Variables continuas

Puede tomar cualquier valor comprendido en un intervalo. Número infinito de valores posibles.

La probabilidad de obtener un valor comprendido en el intervalo $(x, x+dx)$ viene dada por:

$$P(x \le X \le x+dx) = f(x)dx$$

Probabilidad de obtener un valor en el intervalo (a,b)

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ se denomina **función densidad de probabilidad** y tiene dimensiones de probabilidad por unidad de intervalo

Condición de normalización

$$\int_\Omega f(x)dx = 1$$

4. Cálculo de probabilidades

Supongamos que A y B son dos conjuntos no exclusivos de sucesos X_i de modo que

$P(A) =$ probabilidad de que ocurra un $X_i \in A$

$P(B) =$ probabilidad de que ocurra un $X_i \in B$

Ley de adición de probabilidades

$$P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Si A y B son mutuamente excluyentes:

$$P(A \text{ ó } B) = P(A) + P(B)$$

Si se trata de conjuntos exclusivos y exhaustivos:

$$P(A_1 \text{ ó } A_2 \cdots \text{ ó } A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

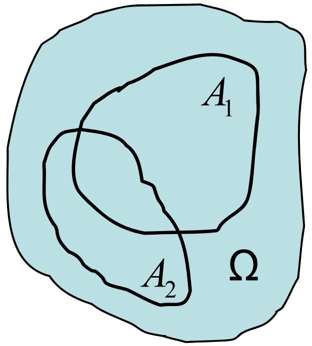
Probabilidad condicional $P(A|B)$

se define como la probabilidad de que suceda A sabiendo de antemano que sucede B

$$P(A \text{ y } B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Análogamente

$$P(A \text{ y } B) = P(B|A) \cdot P(A)$$



Independencia Los conjuntos A y B se dice que son independientes si la probabilidad condicional de B relativa a A es igual a la probabilidad de B.

$P(B|A) = P(B)$ Probabilidad de que ocurra B no depende de A

$P(A|B) = P(A)$ Probabilidad de que ocurra A no depende de B

Si A y B son independientes:

$$P(A \text{ y } B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ley de multiplicación de sucesos independientes

5. Teorema de Bayes

El teorema de Bayes relaciona las probabilidades condicionales $P(A|B)$ y $P(B|A)$
Para dos conjuntos A y B de sucesos X_i el teorema de Bayes afirma que:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} =$$

Mas generalmente:

Si $\Omega = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ conjuntos exclusivos y exhaustivos de sucesos:

$$\left.\begin{array}{l} P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} \\ P(B) = \sum_j P(B|A_j) \cdot P(A_j) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

O bien, si $\Omega = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ $\Rightarrow$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

6. Estadística bayesiana

Si en vez de sucesos hablamos de hipótesis, el significado del teorema da lugar a la estadística bayesiana

Teorema de Bayes $P(A|B)P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Interpretamos *A* como una teoría o hipótesis, y *B* como un resultado de un experimento

$$P(\text{teoría}|\text{resultado})P(\text{resultado}) = P(\text{resultado}|\text{teoría}) \cdot P(\text{teoría})$$

$$P(\text{teoría}|\text{resultado}) = \frac{P(\text{resultado}|\text{teoría}) \cdot P(\text{teoría})}{P(\text{resultado})}$$

Interpretación:

$P(\text{teoría})$	Credibilidad en la teoría antes de realizar el experimento, ***"a priori"***.
$P(\text{resultado}\|\text{teoría})$	Probabilidad de obtener el resultado si la teoría es cierta.
$P(\text{resultado})$	Probabilidad de obtener el resultado dado independientemente de si la teoría es cierta o no
$P(\text{teoría}\|\text{resultado})$	Credibilidad en la teoría después de realizar el experimento y obtener el resultado dado, ***"a posteriori"***.

Aplicamos el teorema de Bayes para calcular la probabilidad a posteriori → **Inferencia bayesiana**

Problema.- ¿Cómo se calculan las probabilidades a priori? Controversia.

6. Estadística bayesiana

Supongamos que queremos determinar un parámetro θ_i, mediante un experimento cuyo resultado es X:

$P(\theta_i)$ Probabilidad ***"a priori"*** de la hipótesis.¿Qué sabemos de la hipótesis θ_i antes de realizar la medida?

$P(\theta_i|X)$ Probabilidad ***"a posteriori".*** Si el resultado de la medida es X, ¿Probabilidad de que la hipótesis sea θ_i?

$P(X|\theta_i)$ ***Verosimilitud*** (likelihood) del resultado o medida X. *Si la hipótesis* θ_i es correcta ¿Probabilidad de obtener X al medir?

¿Cómo se calculan las probabilidades a priori $P(\theta_i)$?

$$P(\theta_i|X) = \frac{P(X|\theta_i)\cdot P(\theta_i)}{\sum_j P(X|\theta_j)\cdot P(\theta_j)}$$

*Establecer la probabilidad **a priori** es claramente **subjetivo** y poco "**científico**".*

Postulado de Bayes.- Si no sabemos nada sobre $P(\theta_i)$ suponemos todos los valores de θ equiprobables

Objeciones:

- Si no sabemos nada sobre $P(\theta_i)$ ¿Cómo sabemos que $P(\theta_i)$ es constante?
- Diferentes valores de $P_{\text{prior}}(\theta_i)$ proporcionan resultados diferentes de $P_{\text{posterior}}(\theta_i)$
- Si no sabemos nada de $P(\theta_i)$ tampoco de $P(\theta_i^2), P(1/\theta_i)$ o $P(\sqrt{\theta_i})$. Tomando cualquiera de ellos

como constante tendríamos un resultado diferente para $P(\theta_i)$.