Tema 6.- Métodos Monte Carlo

1. **La aguja del conde de Bufón.**

   En 1777, el conde de Bufón encontró una relación entre el número π y la probabilidad de que una aguja de longitud *l*, lanzada sobre una superficie plana en la que se han trazado una serie de líneas paralelas separadas una distancia *d*, cruzara una de estas líneas.

   Demostrar analíticamente que la probabilidad vienen dada por:

$$P = \frac{2l}{\pi d}$$

   Programar el método de Bufón para la determinación del número π. ¿Cuántos lanzamientos son necesarios para determinar π con un error de una milésima?

2. Consideremos algunos ejemplos de generadores congruentes de la forma:

$$X_{n+1} = (a \cdot X_n + c) \mod m$$

   Construir la secuencia hasta completar periodo para los siguientes valores:

   a) $m = 31, c = 0, a = 7, X_0 = 1$.
   b) $m = 31, c = 0, a = 3, X_0 = 1$.
   c) $m = 32, c = 1, a = 5, X_0 = 1$.

   Verificar que los casos **b)** y **c)** del ejercicio anterior satisfacen las condiciones de máximo periodo que vienen dadas por:

   1) Caso $c = 0$
      i. *m* es un número primo.
      ii. Para todos los divisores primos, *p*, de (*m* - *1*), se cumple que $a^{(m-1)/p} \bmod m \neq 1$
   2) Caso $c \neq 0$
      i. *c* y *m* son primos entre si.
      ii. $(a-1)/p$ es un entero para cada divisor primo, *p*, de *m*.
      iii. Si *m* es múltiplo de 4 entonces (*a* - *1*) debe ser divisible por 4.

   Representar gráficamente en un plano todos los puntos definidos por las coordenadas $(\xi_i, \xi_{i+1}), i = 0, 1, \cdots$ para los apartados **b)** y **c)** ¿Es lo que cabría esperar de un generador aleatorio?

3. Obtener tres números aleatorios de una distribución uniforme de manera que $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$. Tomar entonces el valor central ξ_2 y construir un histograma con 10000 entradas. Comprobar empíricamente y demostrar analíticamente que dicha variable se distribuye según la función densidad de probabilidad $f(x) = 6x(1-x)$ en el dominio $[0,1]$

4. Mediante el método de composición de variables generar una muestra de sucesos Monte Carlo para cada uno de los siguientes casos:

a. $f(x) = 1 + (1-x)^4 \qquad 0 \leq x \leq 1$

b. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad 0 \leq x \leq 1$

Diseñar el algoritmo y comprobarlo mediante un programa con el ordenador.

5. Desintegración nuclear a diferentes canales (Obligatorio) El núcleo atómico $^{226}\mathrm{Am}$ que tiene un periodo de semi-desintegración de $T_{1/2} = 29$ h, se desintegra mediante emisión beta un 83 % de las veces y mediante captura electrónica un 17 %:

a) Obtener las vidas medias parciales de cada canal de desintegración: τ_A, τ_B.

b) Simular la desintegración del núcleo generando dos variables exponenciales aleatorias t_A, t_B de acuerdo con las distribuciones de cada canal de desintegración:

$$\frac{1}{\tau_A}\exp\left(-\frac{t}{\tau_A}\right) \quad ; \quad \frac{1}{\tau_B}\exp\left(-\frac{t}{\tau_B}\right)$$

y obtener el espectro de la variable $t = \min\{t_A, t_B\}$.

c) Mediante un ajuste comprobar que dicho espectro corresponde a una distribución exponencial de la forma:

$$\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

donde τ es la vida media del $^{226}\mathrm{Am}$.

d) Contar las veces que se produce en el Monte Carlo cada modo de desintegración y calcular los porcentajes correspondientes comparándolos con los *branching ratios* de cada canal.

e) Demostrar analíticamente que la variable aleatoria definida como $t = \min\{t_1, t_2\}$ donde t_1 y t_2 son dos variables exponenciales distribuidas según $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}$ y $\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}$ respectivamente, se distribuye también como exponencialmente como $\lambda\, e^{-\lambda t}$. Encontrar una expresión de λ en términos de λ_1 y λ_2