

Examen Primera Convocatoria (2-3-2015)

1. La distribución acumulativa de Weibull viene dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta} \quad 0 \leq x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

- ¿Cuál es la función densidad de probabilidad?
 - Demostrar que si x es una variable aleatoria que sigue una distribución de Weibull, entonces la variable $y = (x/\alpha)^\beta$ sigue una distribución exponencial.
 - Aplicar el método de la transformación inversa para generar números aleatorios de Weibull. Comprobar que para los valores de números aleatorios uniformes $\xi = 0$ y $\xi = 1$ se obtienen los valores extremos del dominio.
2. Queremos obtener mediante simulación Monte Carlo una muestra de sucesos distribuidos de acuerdo con la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x) = x^2 + x + \frac{5}{4} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Diseñar un algoritmo que genere dicha distribución utilizando el método de composición de variables.

3. Supongamos que hemos realizado una serie de n medidas independientes que se distribuyen de acuerdo a una distribución de Poisson. Encontrar el estimador ML para el parámetro μ de dicha distribución:

$$P(x, \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Calcular la varianza de dicho estimador y discutir si se trata de un estimador eficiente.

4. De un total de 1000 desintegraciones de una partícula inestable, 9 de ellas se observa que son al canal E .
- Calcular el límite superior al 90% CL de la probabilidad de desintegración (*branching ratio*) para este tipo de desintegraciones.
 - ¿Cómo cambia este límite si sabemos que hay que tener en cuenta un fondo de $b = 5.3$ sucesos?
 - ¿Qué límites (sin fondo y con fondo) publicaría un experimento donde no se observa ningún suceso?
5. Para comprobar la hipótesis de que la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cruz es de $p = 0.5$, frente a la hipótesis de que no lo sea, se realiza un test que consiste en realizar diez lanzamientos independientes. La hipótesis $p = 0.5$ se rechaza si se obtiene un resultado de diez caras o diez cruces.
- ¿Cuál es el nivel de significancia del test?
 - Si resulta que la probabilidad de que salga cruz es $p = 0.1$, ¿Cuál es la potencia (*power*) del test?
6. Los métodos *binned* para detectar fuentes puntuales de neutrinos cósmicos se basan en dividir el cielo observable en celdas donde la probabilidad de observar sucesos de fondo es constante. Supongamos que dividimos el cielo en 4000 celdas y contamos los sucesos observados en cada una de ellas siendo los resultados los que se muestran en la tabla:

Número de sucesos	0	1	2	3	4
Número de celdas	2758	1023	186	31	2

- Calcular el número medio de sucesos observado por celda.
- Testear la hipótesis de que los datos vienen descritos por una distribución de Poisson mediante un test de χ^2 al 1% de CL.
- Si hubiéramos encontrado una celda con 6 sucesos ¿Con qué rotundidad podríamos decir que se trata de una fuente de neutrinos cósmica?