Tema 3.- Propagación de errores.

1.- Demostrar que si la variable x tiene como función densidad de probabilidad:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

(la pdf de la distribución normal estándar) la pdf de la variable $y = x^2$ viene dada por:

$$g(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$$

(la distribución de χ^2 con un solo grado de libertad).

2.- Medimos los valores medios de x e y con varianzas σ_x^2 y σ_y^2. La covarianza es nula. Encontrar las varianzas y covarianzas de r y θ dadas por:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

3- Medimos los valores de la masa m de un objeto y su velocidad v con varianzas σ_m^2 y σ_v^2 y suponemos que las medidas son independientes. Considera el momento $p = mv$ y la energía cinética $E = \frac{1}{2}mv^2$ del objeto y calcular la matriz de covarianzas de de las variable (p,E).

4.- Si las variables 1/p, λ, φ se han medido con errores $\Delta(1/p), \Delta\lambda, \Delta\phi$, respectivamente, y sin correlación entre ellas, cuales son los errores asociados con las cantidades derivadas:

$$p_x = p\cos\lambda\cos\phi, \quad p_y = p\cos\lambda\sin\phi, \quad p_z = p\sin\lambda$$

5- (Obligatorio) Simulación y Teoría de errores. En un experimento para determinar la estabilidad de una partícula se mide el cociente R entre dos secciones eficaces. En términos de las cantidades medidas en el experimento R puede expresarse como:

$$R = \frac{a}{\frac{d}{ke}(b-c) - 2\left(1 - \frac{kd}{e}\right)a}$$

donde a = 3.84 ± 1.33, b = 74 ± 4, c = 9.5 ± 3, d = 0.112 ± 0.009, e = 0.32 ± 0.02, k = 0.89

a) Calcular el valor de R con su error utilizando propagación de errores y suponiendo que las variables son independientes.
b) Según cálculos teóricos, la partícula objeto de este análisis es inestable si R < 0.42. ¿Qué podemos concluir del resultado anterior? Según el análisis de errores realizado ¿Qué probabilidad hay de que la partícula sea estable?
c) La fórmula de propagación de errores solo es válida para errores pequeños, sin embargo dos de las cantidades anteriores presentan errores bastante elevados. Realizar un análisis del error mediante Monte Carlo del siguiente modo: generar valores de a, b, c, d y e aleatoriamente suponiendo que son variables gaussianas y calcular el valor de R. Obtener de esta forma 10000 valores de R y construir el correspondiente histograma.
d) ¿Qué porcentaje de valores de R es superior a 0.42? ¿Podemos sacar las mismas conclusiones que con el análisis anterior?
e) Reducir los errores de a y c en un 100 % y volver a ejecutar el Monte Carlo ¿Qué conclusiones podemos extraer?