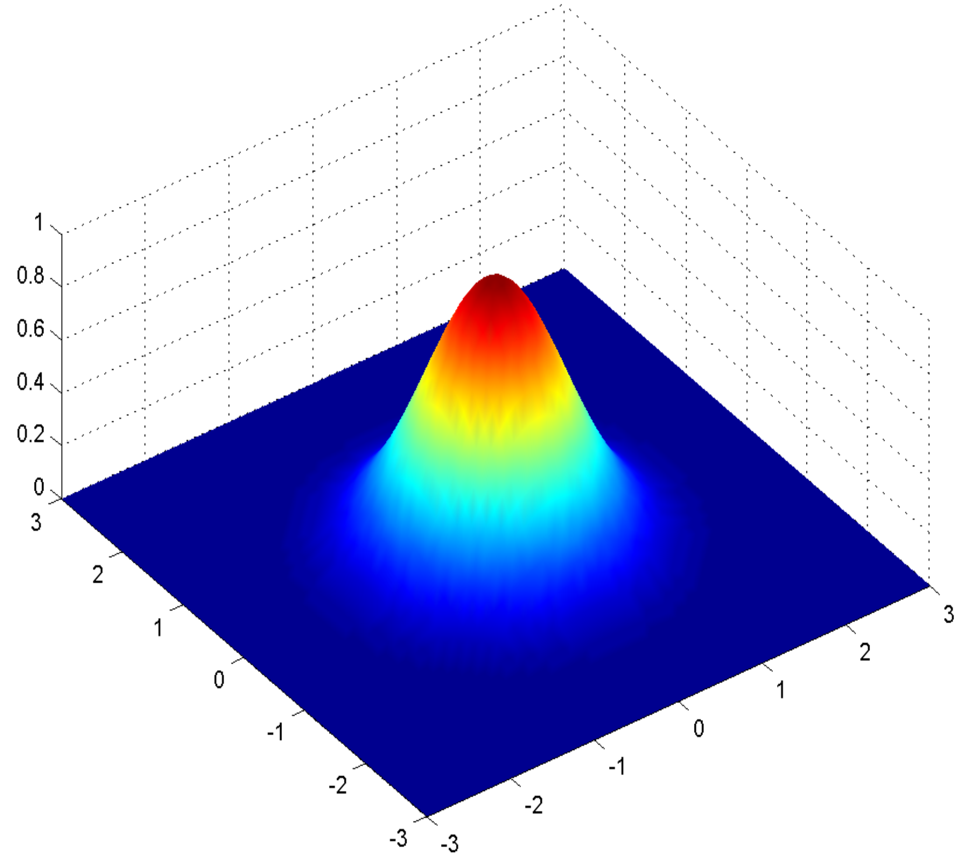
Tema 4 Distribuciones de probabilidad (I)

1. **La distribución binomial.**
2. **La distribución multinomial**
3. **La distribución de Poisson**
4. **La distribución uniforme.**
5. **La distribución exponencial.**
6. **La distribución normal.**
7. **La distribución binormal.**
8. **La distribución multinormal**
9. Distribuciones de Muestreo
    1. La distribución de chi-cuadrado
    2. La distribución t de Student
    3. La distribución F

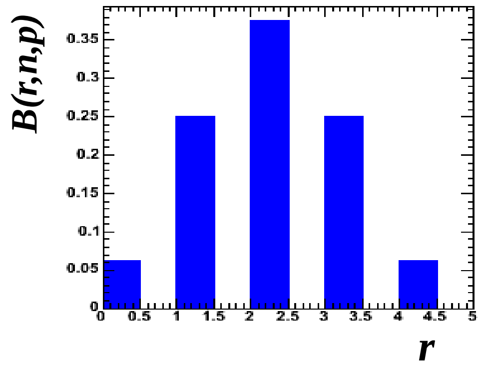


1. La distribución binomial

Estudia los sucesos en los que solo hay dos posibilidades: éxito o fracaso.

- probabilidad de éxito $\rightarrow p$
- probabilidad de fracaso $\rightarrow q = 1 - p$

Ejemplo.- Lanzamos n monedas ¿Probabilidad de que r sean cara?
p = 0.5, q = 0.5



$p=0.5$
$n=4$

La probabilidad de obtener r éxitos de un total de n intentos viene dada por:

$$B(r,n,p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \underbrace{\frac{n!}{r!(n-r)!}}_{\text{Número de permutaciones equivalentes para un resultado}} \underbrace{p^r (1-p)^{n-r}}_{\text{Probabilidad de un resultado particular, e.g.“CCXC”}}$$

Normalización

$$\sum_{r=0}^{n} B(r,n,p) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = (p+q)^n = (p+1-p)^n = 1$$

1. La distribución binomial

Valor medio.-

$$\mu = E[r] = \sum_{r=0}^{n} rB(r,n,p) = \sum_{r=0}^{n} r\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r} = np\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}p^{r-1}(1-p)^{n-r} = \begin{vmatrix} s = r-1 \\ m = n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= np\sum_{s=0}^{m}\frac{(m)!}{(s)!(m-s)!}p^s(1-p)^{m-s} = np\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}p^s(1-p)^{m-s} = np \qquad \mu = np$$

Varianza:

$$\sigma^2 = V[r] = np(1-p)$$

Skewness

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Kurtosis

$$\gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$$

Función característica

$$\phi(t) = \left[pe^{it} + (1-p)\right]^n$$

Ejemplo: Sucesos en un histograma:
p.- Probabilidad de caer en un determinado *bin*
q.- Probabilidad de no caer

$$V[r] = np(1-p) = n\hat{p}(1-\hat{p}) = n\frac{r}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right) = r\left(1-\frac{r}{n}\right)$$

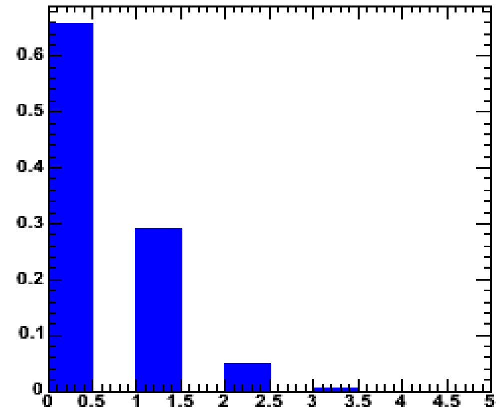
$$\sigma(r) = \sqrt{r\left(1-\frac{r}{n}\right)}$$

Si en vez de *r* utilizamos la variable *r/n:*

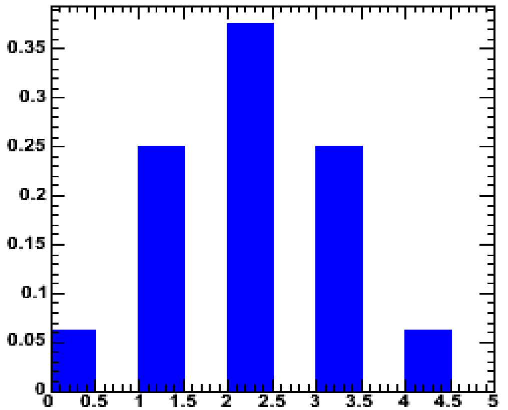
$$E\left[\frac{r}{n}\right] = \frac{1}{n}E[r] = p \quad ; \quad V\left[\frac{r}{n}\right] = \frac{1}{n^2}V[r] = \frac{p(1-p)}{n}$$

1. La distribución binomial

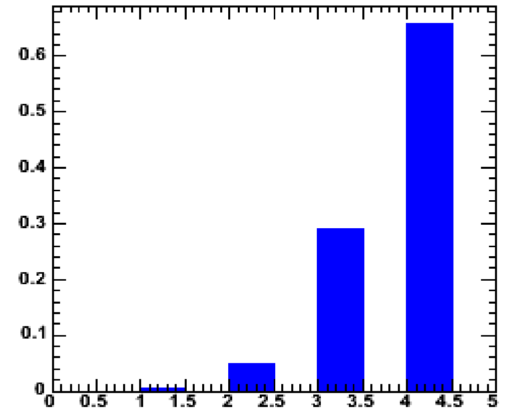
p=0.1, N=4



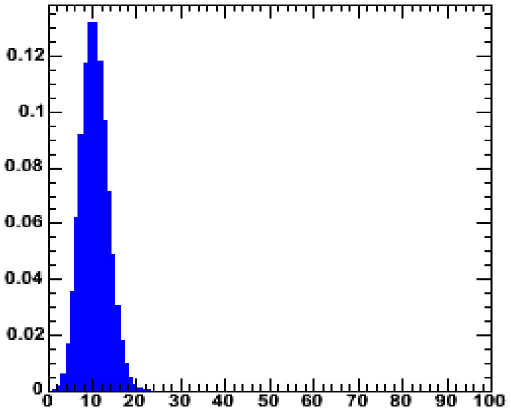
p=0.5, N=4



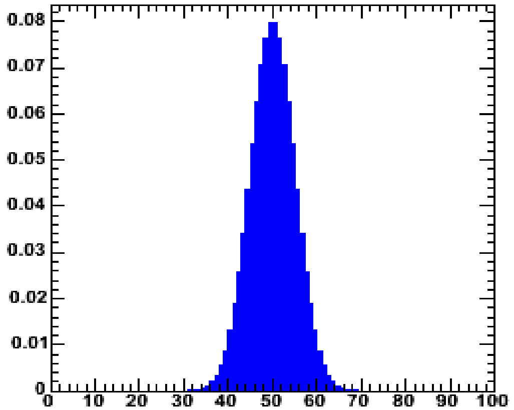
p=0.9, N=4



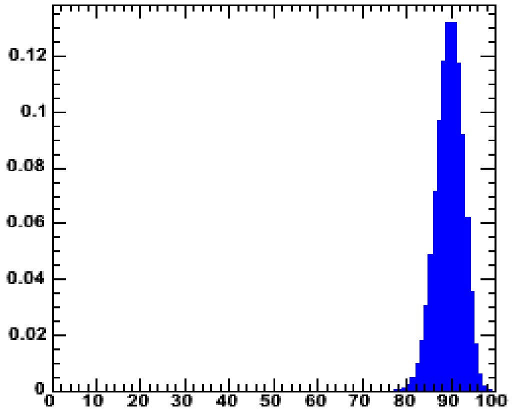
p=0.1, N=100



p=0.5, N=100



p=0.9, N=100



2. La distribución multinomial

Generalización de la distribución binomial para más de 2 resultados posibles.

- Sucesos clasificados por categorías o clases $A_1, A_2, \ldots, A_k$
- Probabilidad p_i de obtener un suceso en la clase A_i
- Probabilidades normalizadas

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

La probabilidad de obtener $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sucesos en las correspondientes clases viene dada por:

$$M(\overline{r}, n, \overline{p}) = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

Expresión de la distribución multinomial de la variable $\overline{r} = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ para los parámetros n y $\overline{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

Los valores de r_i no son independientes puesto que se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n$$

2. La distribución multinomial

Valor medio

$$E[r_i] = np_i$$

Varianza

$$V(r_i) = np_i(1-p_i)$$

Covarianza

$$\mathrm{cov}(r_i, r_j) = -np_i p_j$$

Correlación

$$\rho(r_i, r_j) = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

Función característica

$$\phi(t_1, t_2, \cdots, t_k) = \left(p_1 e^{it_1} + p_2 e^{it_2} + \cdots + p_k e^{it_k}\right)^n$$

Ejemplo Sucesos distribuidos en los bines de un histograma

p_i Probabilidad de que un suceso caiga en el bin *i-ésimo*

r_i Número de sucesos en el bin *i-ésimo*

$$E[r_i] = np_i \qquad V(r_i) = np_i(1-p_i)$$

Si $p_i \ll 1$ correspondiente a una distribución con muchos bines

$$V(r_i) = np_i(1-p_i) \simeq np_i = r_i \quad \Longrightarrow \quad \sigma(r_i) = \sqrt{r_i}$$

2. La distribución multinomial

Se puede considerar que el número total de sucesos n no es una cantidad fija
Supongamos que los valores de los números de sucesos en cada bin son independientes y poissonianos:

$$\sigma(r_i)=\sqrt{r_i}$$

El número total de sucesos también será una variable de Poisson $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

La pdf será entonces el producto de una Multinomial por una de Poisson: $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

$$P(r_1,r_2,\cdots,r_k;n)=M(r,n,p)P(n;\mu)=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}\frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}=$$

$$=\frac{p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}}{r_1!r_2!\cdots r_k!}\mu^{r_1+r_2+\cdots+r_k}e^{-\mu\sum_{i=1}^{k}p_i}=\left(\frac{(\mu p_1)^{r_1}}{r_1!}e^{-\mu p_1}\right)\left(\frac{(\mu p_2)^{r_2}}{r_2!}e^{-\mu p_2}\right)\cdots\left(\frac{(\mu p_k)^{r_k}}{r_k!}e^{-\mu p_k}\right)$$

La pdf es el producto de k distribuciones de Poisson de variables r_i con valor medio μp_i

Los sucesos de cada bin son variables poissonianas independientes con:

$$E[r_i]=V(r_i)=\sqrt{r_i}$$

3. La distribución de Poisson

Límite natural de la distribución binomial cuando n → ∞ y p → 0 de manera que el producto se mantiene finito $\mu = np$

$$B(r,n,p) = \binom{n}{p} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} = \left| \begin{matrix} n \to \infty \\ p \to 0 \end{matrix} \right| \simeq \frac{(pn)^r}{r!} e^{-\mu}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \simeq n^r \\ &(1-p)^{-r} \simeq 1 + rp \simeq 1 \\ &\lim_{p\to 0}(1-p)^n = \lim_{p\to 0}\left[(1-p)^{1/p}\right]^{np} = e^{-\mu} \end{aligned}\right\}$$

$$P(r,\mu) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$

Normalización

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$$

Valor medio.-

$$s = r - 1$$

$$E[r] = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} r\frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} = \mu e^{-\mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mu^s}{s!} = \mu$$

3. La distribución de Poisson

Varianza:

$$\sigma^2 = V[r] = \mu \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

¡¡¡ En la distribución de Poisson la media y la varianza coinciden !!!

Skewness

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

Se hace menos asimétrica a medida que aumenta μ

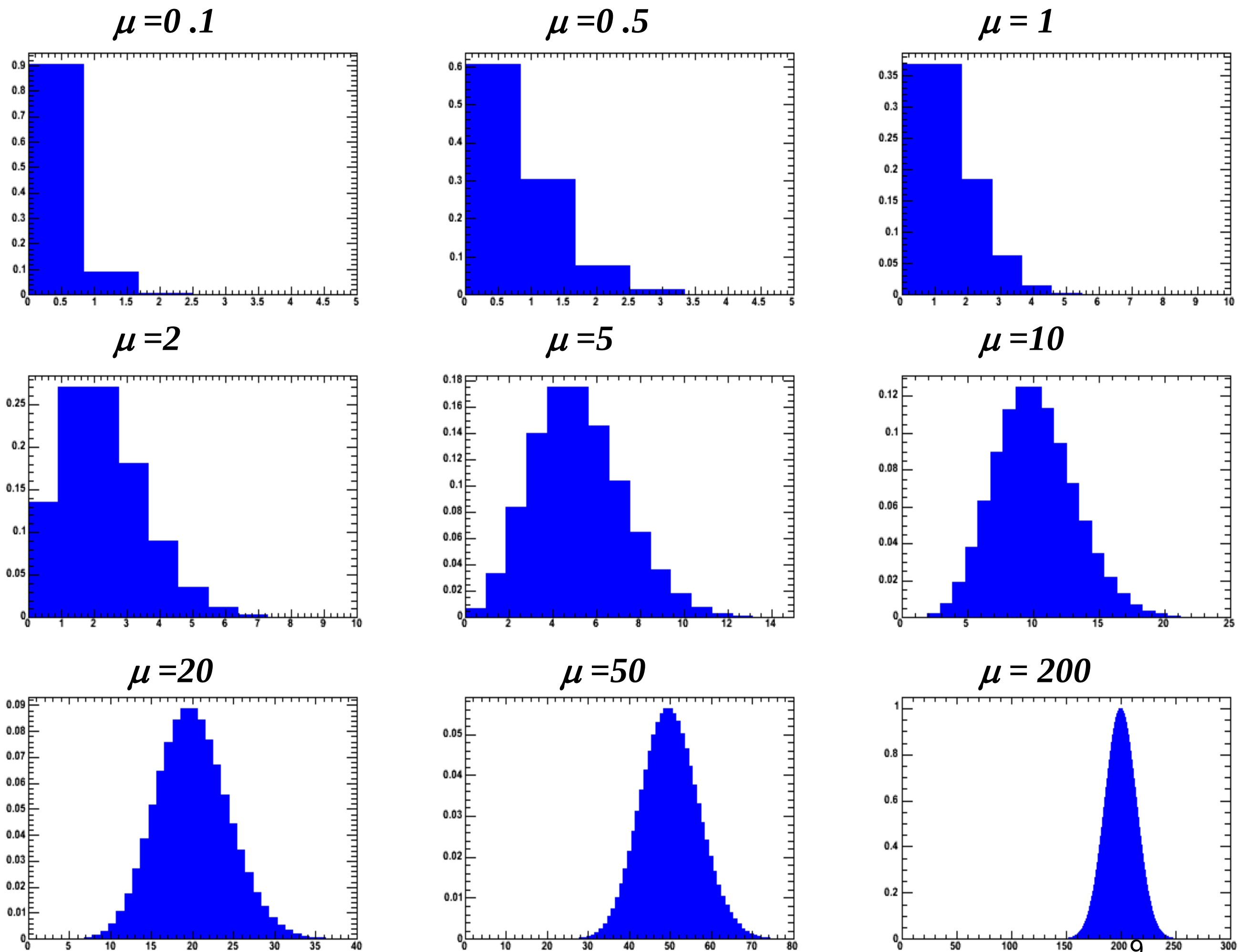
Kurtosis

$$\gamma_2 = \frac{1}{\mu}$$

Tiende a la distribución de Gauss cuando $\mu \rightarrow \infty$

Función característica

$$\phi(t) = \exp\left[\mu\left(e^{it} - 1\right)\right]$$



3. La distribución de Poisson

Supongamos un detector que registra sucesos en un intervalo t.

$\lambda \rightarrow$ Número medio de sucesos detectados por unidad de tiempo es constante.

$\lambda\Delta t \rightarrow$ Número medio de sucesos detectados en Δt

La distribución de Poisson solo es aplicable cuando se dan las siguientes hipótesis:

1. *La probabilidad de encontrar un suceso en Δt es proporcional al tamaño de Δt.*
2. *Solo puede haber un suceso como mucho en [t,t+Δt]*
3. *La detección en el intervalo [t,t+Δt] es independiente de la detección en cualquier otro intervalo.*

¿Probabilidad de detectar un suceso en [t,t+Δt]? $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t$

(Hipótesis 1 y 2)

¿Probabilidad de detectar ningún suceso en [t,t+Δt]? $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t$

¿Cuál es la probabilidad de que ocurran *r* sucesos en *t+Δt*?
$$\begin{cases} \text{1) } r \text{ en } t \text{ y } 0 \text{ en } \Delta t \\ \text{2) } r-1 \text{ en } t \text{ y } 1 \text{ en } \Delta t \end{cases}$$

$$\longleftarrow t \longrightarrow \longleftarrow \Delta t \longrightarrow$$

$$P_r(t+\Delta t) = P_r(t)P_0(\Delta t) + P_{r-1}(t)P_1(\Delta t) = P_r(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{r-1}(t)\lambda\Delta t$$

(Hipótesis 3)

$$\Delta t \rightarrow dt$$

$$\frac{dP_r(t)}{dt} = \frac{P_r(t+dt) - P_r(t)}{dt} = -\lambda P_r(t) + \lambda P_{r-1}(t) = \lambda\left[P_{r-1}(t) - P_r(t)\right]$$

Ecuación diferencial cuya solución es:

$$P_r(t) = \frac{(\lambda t)^r}{r!}e^{-\lambda t} = \frac{\mu^r}{r!}e^{-\mu}$$

3. La distribución de Poisson

La suma de variables aleatorias que se distribuyen según Poisson es también una variable aleatoria que se distribuye según Poisson.

Ejemplo fuente radiactiva con fondo

Fuente radiactiva → emite λ_X partículas por unidad de tiempo $\mu_X = \lambda_X t$

Fondo radiactivo → emite λ_b partículas por unidad de tiempo $\mu_b = \lambda_b t$

$$P(r;\mu_X;\mu_b) = \sum_{r_b=0}^{r} P_X(r-r_b;\mu_X)P_b(r_b;\mu_B) = \sum_{r_b=0}^{r}\left[\frac{1}{(r-r_b)!}(\mu_X)^{r-r_b}e^{-\mu_X}\right]\left[\frac{1}{(r_b)!}(\mu_b)^{r_b}e^{-\mu_b}\right] =$$

$$= \frac{e^{-\mu_X}e^{-\mu_b}}{r!}\sum_{r_b=0}^{r}\frac{r!}{r_b!(r-r_b)!}(\mu_X)^{r-r_b}(\mu_b)^{r_b} = \frac{e^{-(\mu_X+\mu_b)}}{r!}\sum_{r_b=0}^{r}\binom{r}{r_b}(\mu_X)^{r-r_b}(\mu_b)^{r_b}$$

$$= e^{-(\mu_X+\mu_b)}\frac{(\mu_X+\mu_b)^r}{r!}$$

***Ley de adición de variables poissonianas**.- La suma de cualquier número de variables de Poisson independientes es una nueva variable de Poisson con valor medio igual a la suma de los valores medios de cada variable*

4. La distribución uniforme

La distribución uniforme describe una variable aleatoria para la cual, la densidad de probabilidad es constante

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \le x \le b$$
$$f(x) = 0, \qquad \text{otros valores}$$

Función cumulativa

$$F(x) = \int_a^x f\left(x'\right)dx' = \int_a^x \frac{1}{(b-a)}dx' = \frac{(x-a)}{(b-a)}; \quad a \le x \le b$$

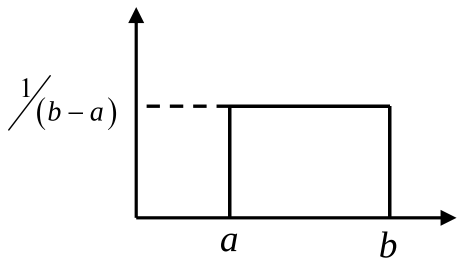
Valor esperado

$$E[x] = \int_a^b x f(x)dx = \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(a+b)}{2}$$

Varianza

$$V[x] = E\left[x^2\right] - E[x]^2 = \int_a^b \left(x - E[x]\right)^2 f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$$



Distribución uniforme

Skewness

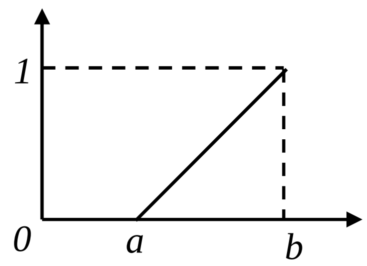
$$\gamma_1 = 0$$

Kurtosis

$$\gamma_2 = -1.2$$

Función característica

$$\phi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

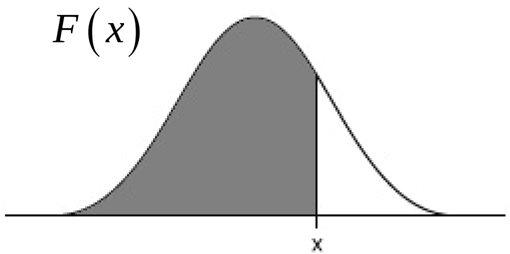


Función cumulativa

4. La distribución uniforme

Cualquier distribución de variable continua se puede transformar en una distribución uniforme a partir de la función acumulativa:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\left(x'\right) dx'$$



Mediante el siguiente cambio de variable: $u = F(x)$

La pdf de la nueva variable u viene dada por:

$$g(u) = f(x)\left|\frac{dx}{du}\right| = \frac{f(x)}{\left|\frac{du}{dx}\right|} = \frac{f(x)}{\left|\frac{dF(x)}{dx}\right|} = \frac{f(x)}{|f(x)|} = 1 \qquad 0 \le u \le 1$$

Especialmente útil para:

- La generación de números aleatorios por Monte Carlo
- Test de hipótesis mediante la distribución de chi-cuadrado

5. La distribución exponencial

La distribución exponencial viene dada por:

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad 0 \le x \le \infty$$

La variable aleatoria siempre es positiva

Función cumulativa

$$F(x) = \int_0^x f\left(x'\right) dx' = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x'} dx' = -e^{-\lambda x'}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Valor esperado

$$E[x] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

$$V[x] = E\left[x^2\right] - E[x]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Skewness

$$\gamma_1 = 2$$

Kurtosis

$$\gamma_2 = 6$$

Función característica

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

Relación con la distribución de Poisson

Supongamos un experimento de contaje de sucesos que se distribuyen según Poisson, y que el primero de ellos tiene lugar en el intervalo $[t,t+dt]$,i.e.:

- Ha habido 0 sucesos hasta t
- Ha habido un suceso en $[t,t+dt]$,

$$\left.\begin{aligned} P_0(t) &= \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \\ P_1(dt) &= \lambda dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P_0(t) P_1(dt) = e^{-\lambda t} \lambda dt = \lambda e^{-\lambda t} dt = f(t) dt$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

"La distribución de las distancias entre sucesos consecutivos de Poisson es una distribución exponencial"

6. La distribución normal o de Gauss

Es la distribución de probabilidad más importante en el análisis de datos.
Distribución de los errores experimentales (Teorema del límite central).

$$N\left(x,\mu,\sigma^2\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

Valor esperado

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x N(x,\mu,\sigma)dx = \mu$$

Varianza

$$V[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 N(x,\mu,\sigma)dx = \sigma^2$$

Skewness **Kurtosis**

$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = 0$$

Función característica

$$\phi(t) = \exp\left[it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$$

La distribución normal estándar

Cambio de variable $\longrightarrow$ $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ $\qquad g(y)dy = f(x)dx$

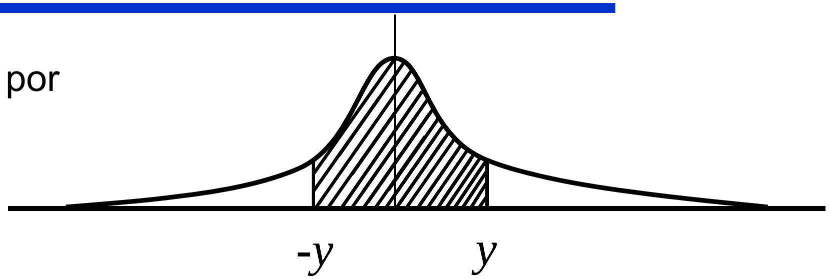
$$g(y) = \frac{f(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = \sigma f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$N\left(y,0,1\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Distribución normal de valor medio 0 y desviación típica 1

6. La distribución normal estándar

La distribución normal estándar acumulativa viene dada por



$$G(y)=\int_{-\infty}^{y} N\left(y'\right)dy' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{y'^2}{2}}dy'$$

Función tabulada que nos permite calcular contenidos de probabilidad de un intervalo dado

$$P(a\le x\le b)=P(x\le b)-P(x\le a)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma})-P(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{a-\mu}{\sigma})=$$

$$=\int_{-\infty}^{(b-\mu)/\sigma} g(y')dy'-\int_{-\infty}^{(a-\mu)/\sigma} g(y')dy'=G(\frac{b-\mu}{\sigma})-G(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

La probabilidad para diferentes σ:

$$G(-y)=1-G(y)$$

$$P(\mu-\sigma\le x\le\mu+\sigma)=2G(1)-1=0.6827$$

$$P(\mu-2\sigma\le x\le\mu+2\sigma)=2G(2)-1=0.9545$$

$$P(\mu-3\sigma\le x\le\mu+3\sigma)=2G(3)-1=0.9973$$

La probabilidad para diferentes σ:

$$P(\mu-1.645\sigma\le x\le\mu+1.645\sigma)=0.90$$

$$P(\mu-1.960\sigma\le x\le\mu+1.960\sigma)=0.95$$

$$P(\mu-2.576\sigma\le x\le\mu+2.576\sigma)=0.99$$

$$P(\mu-3.29\sigma\le x\le\mu+3.29\sigma)=0.999$$

La función cumulativa de la distribución normal está relacionada con la función error

$$G(z)=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right];\quad z>0$$

$$G(z)=\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right];\quad z<0$$

$$\mathrm{erf}\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx$$

6. La distribución normal estándar

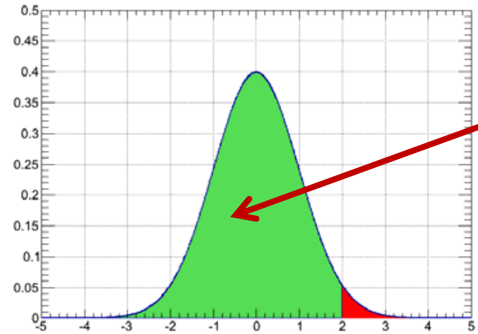
ROOT Functions

Double_t p = TMath::Freq (Double_t z) → Equivale a: $G(z) = \int_{-\infty}^{z} N\left(z'\right) dz' = p$

Double_t z = TMath::NormQuantile (Double_t p) → Equivale a su inversa: $G^{-1}(p) = z$

P(2sided) = 2P(1sided)-1

z (σ)	P (1-sided)	P (2-sided)
1.0	0.841	0.683
2.0	0.977	0.955
3.0	0.999	0.997
1.281	0.9	0.8
1.645	0.95	0.9
2.326	0.99	0.98

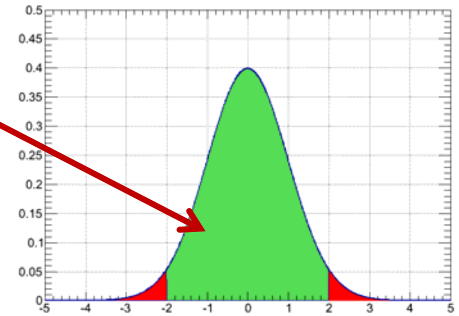


P(1sided)

$2\sigma \Rightarrow p = 0.977$

P(2sided)

$2\sigma \Rightarrow p = 0.955$



6. La distribución normal o de Gauss

Teorema de adición de variables normales

Una combinación lineal de variables aleatorias distribuidas normalmente, es también una variable aleatoria distribuida normalmente

A) Producto por una constante

Si $x \to N(\mu,\sigma^2)$ ¿$y = ax$? siendo a una constante. (Cambio de variable) $y = ax$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ g(y)dy = f(x)dx \end{array} \right\} \Rightarrow g(y) = \frac{f(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(y-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} = N\left(a\mu, a^2\sigma^2\right)$$

Luego ax se distribuye como una gaussiana de media $a\mu$ y varianza $(a\sigma)^2$

B) Suma de dos variables

Si $x \to N(\mu_x,\sigma_x^2)$, $y \to N(\mu_y,\sigma_y^2)$ ambas independientes ¿$z = x + y$?

x,y variables aleatorias independientes

$$\phi_z(t) = E\left[e^{itz}\right] = E\left[e^{it(x+y)}\right] = E\left[e^{itx} \cdot e^{ity}\right] = \int e^{itx} \cdot e^{ity} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int e^{itx} \cdot e^{ity} f_x(x) f_y(y)dxdy = \int e^{itx} f_x(x)dx \int e^{ity} f_y(y)dy = \phi_x(t)\phi_y(t)$$

$$\phi_z(t) = \phi_x(t)\phi_y(t) = e^{i\mu_x t - \frac{1}{2}\sigma_x^2 t^2} e^{i\mu_y t - \frac{1}{2}\sigma_y^2 t^2} = e^{i(\mu_x+\mu_y)t - \frac{1}{2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)t^2} = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$z \to N(\mu,\sigma^2) \quad \mu = \mu_x + \mu_y ; \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

6. La distribución normal o de Gauss

C) Combinación lineal de dos variables

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } x_1 \to N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ \text{Si } x_2 \to N(\mu_2, \sigma_2^2)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{¿}x = a_1 x_1 + a_2 x_2\text{? siendo } a_1 \text{ y } a_2 \text{ constantes.}$$

Trivial A),B)

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \to N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_x^2 + a_2^2\sigma_y^2)$$

D) Caso general

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

tal que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son variables aleatorias e independientes distribuidas normalmente

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \to N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ x_2 \to N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ \quad\cdots \\ x_n \to N(\mu_n, \sigma_n^2) \end{array}\right\} x \to N(\mu, \sigma^2) \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} \mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \\ \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \end{array}\right.$$

7. La distribución binormal

La distribución normal en dos dimensiones o distribución binormal viene dada por:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q}{2}}$$

con $$Q=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]$$

Función característica

$$\Phi(t_1,t_2)=\exp\left[it_1\mu_1+it_2\mu_2+\frac{1}{2}\left[(it_1)^2\sigma_1^2+(it_2)^2\sigma_2^2+(it_1)(it_2)2\rho\sigma_1\sigma_2\right]\right]$$

$$E[x_1]=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial(it_1)}\right|_{t_1=t_2=0}=\mu_1$$

$$E\left[x_1^2\right]=\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial(it_1)^2}\right|_{t_1=t_2=0}=\mu_1^2+\sigma_1^2$$

$$E[x_1x_2]=\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial(it_1)\partial(it_2)}\right|_{t_1=t_2=0}=\mu_1\mu_2+\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{E[x_1x_2]-E[x_1]E[x_2]}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{\mu_1\mu_2+\rho\sigma_1\sigma_2-\mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

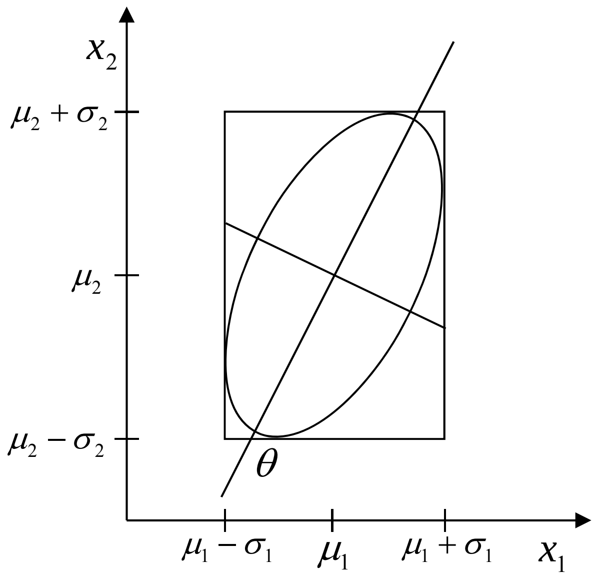
Si ρ=0 → la pdf y la función característica factorizan:

$$f(x_1,x_2)=\left[\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}\right]\left[\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}\right]$$

$$\Phi(t_1,t_2)=\exp\left[it_1\mu_1+\frac{1}{2}(it_1)^2\sigma_1^2\right]\exp\left[it_2\mu_2+\frac{1}{2}(it_2)^2\sigma_2^2\right]$$

7. La distribución binormal

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{Q}{2}}$$



$$Q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]$$

Contornos de densidad de probabilidad constante se obtienen fijando el exponente a una constante

Cuando $Q=1$ los valores extremos de la elipse son $\mu_1 \pm \sigma_1$ y $\mu_2 \pm \sigma_2$

Como la matriz de covarianza es simétrica existe una transformación unitaria que la diagonaliza

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nueva matriz de covarianza $\rightarrow$ UVU^T

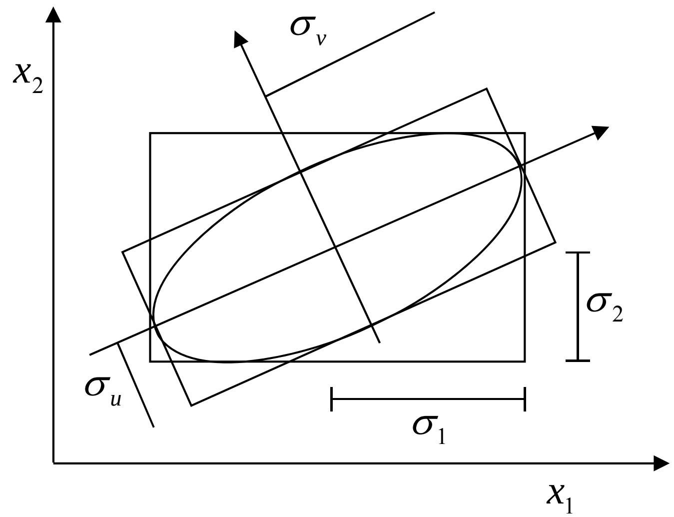
$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_1^2\cos^2\theta - \sigma_2^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma_2^2\cos^2\theta - \sigma_1^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_u^2\cos^2\theta + \sigma_v^2\sin^2\theta$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_v^2\cos^2\theta + \sigma_u^2\sin^2\theta$$

$$\rho = \sin\theta\cos\theta\frac{\sigma_u^2 - \sigma_v^2}{\sigma_1\sigma_2}$$



Si ρ es grande (elipse fina) conocer σ_1,σ_2 no da una visión realista de lo cerca que está x,y de μ_1,μ_2

8. La distribución multinormal

La distribución normal en n dimensiones o distribución multinormal viene dada por:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Ce^{-\frac{Q}{2}}$$

con $Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}\right)$

Forma compacta:

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |V|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{\mu})^T V^{-1} (\overline{x}-\overline{\mu})}$$

Con
$$\begin{cases} \overline{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ \overline{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\} \\ V \text{ matriz de covarianza} \\ |V| \neq 0, \quad V, V^{-1} \text{ definidas positivas} \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_n\sigma_1 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Función característica

$$\Phi(\overline{t}) = \exp\left[(i\overline{t})^T \overline{\mu} + \frac{1}{2}(i\overline{t})^T V (i\overline{t})\right]$$

$$E[x_r] = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial (it_r)}\right|_{\overline{t}=0} = \mu_r$$

$$E[x_r x_s] = \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (it_r)\partial (it_s)}\right|_{\overline{t}=0} = \mu_r\mu_s + \rho\sigma_r\sigma_s,$$

$$r, s = 1, 2, \cdots, n$$

Si V es diagonal → las variables no están correlacionadas (ρ=0) → No hay términos de mezcla en el exponente y la pdf se puede factorizar en *n* pdfs unidimensionales → las variables son independientes:

$$f(\overline{x}) = \left[\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}\right]\left[\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}\right]\cdots\left[\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\right]$$

Las variables de una distribución multinormal son independientes si y solo si la matriz de covarianza es diagonal