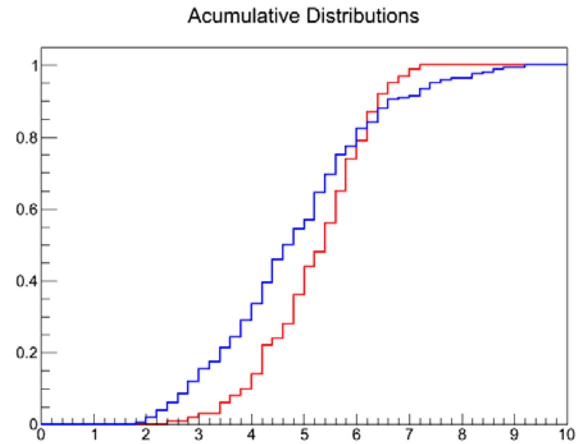
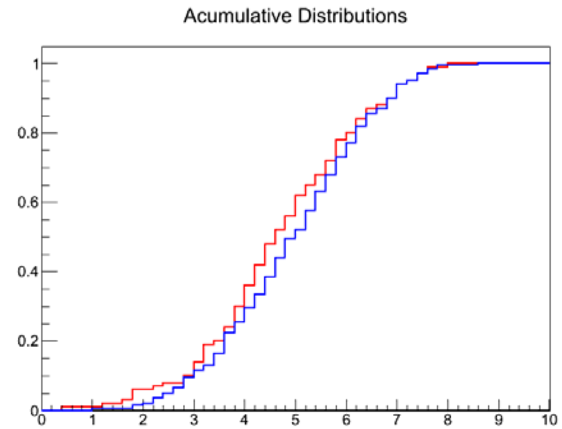
Tema 11 Test de hipótesis (II)

1. Conceptos básicos
2. Hipótesis simple. Lema de Neyman-Pearson.
3. Hipótesis compuesta.
    1. Cociente de verosimilitud.
    2. Distribución asintótica de λ
    3. Familias paramétricas diferentes
    4. Ejemplo. Búsquedas
4. **Test de paramétricos para variables normales**
5. **Test de bondad de ajuste *(Goodness-of-fit)***
    1. **Test de χ^2 de Pearson**
    2. **Test de Kolmogorov-Smirnov**
6. **Test de consistencia y aleatoriedad**
    1. **Test Run**
    2. **Test de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras**
7. **Test de independencia**





4. Tests paramétricos con variables normales

Problema de las dos muestras: ¿la muestra A es compatible con B?

El Monte Carlo describe los datos reales?
Los datos antes y después de un ***upgrade*** son **compatibles**?

Aunque ambas muestras procedan de la misma distribución, tienen fluctuaciones estadísticas

¿**Compatible**? Mismas propiedades: media, varianza, etc.

Cuanta más información tengamos más potente será el test

Supongamos que las muestras son gaussianas: Casos típicos:

- Test de media y varianza en distribuciones normales.
- Comparación de los valores medios de dos distribuciones.
- Comparación de varianzas.

En todos los casos buscamos un test estadístico (depende solo de los datos y no de los parámetros) con una distribución conocida que nos permita definir una región crítica.

- ❑ Dependiendo de si la varianza es conocida o no buscamos el estadístico adecuado.
- ❑ Fijamos la significancia del test α y buscamos los valores y la región crítica.
- ❑ Si el test cae en la región crítica rechazamos la hipótesis nula H_0

4. Tests paramétricos con variables normales

Tests "*single-sided*" y "*two sided*" en gaussianas

La región crítica se calcula a partir de la significancia α

Ejemplo $\alpha = 5\%$ ➡ $CL = 1 - \alpha = 0.95$

$$z_{1-\alpha} = F^{-1}(1-\alpha)$$

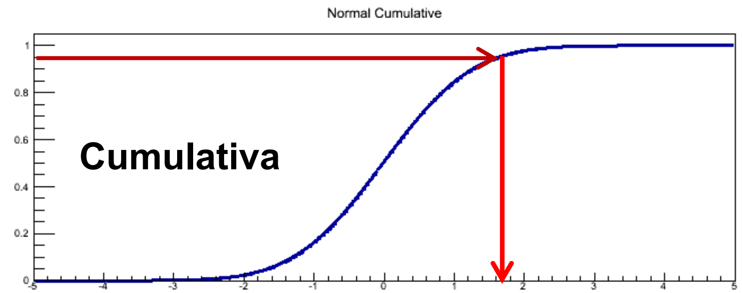
Quantil (en unidades de σ)

ROOT Function

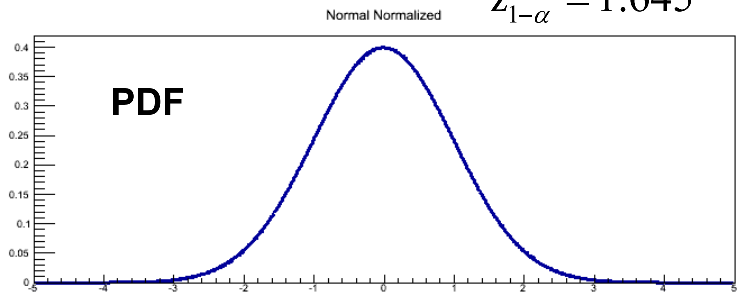
Double_t NormQuantile(Double_t p)

Computes quantiles for standard normal distribution N(0, 1) at probability p

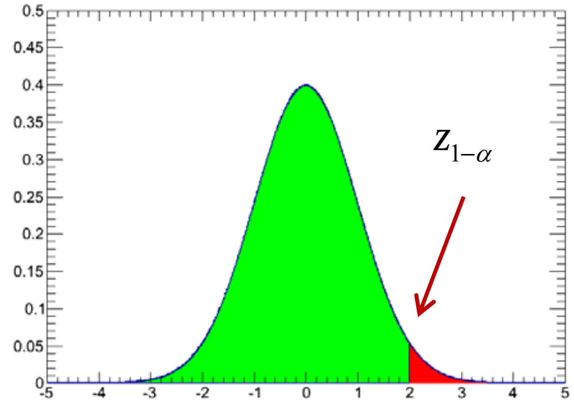
CL= 0.95



$z_{1-\alpha} = 1.645$

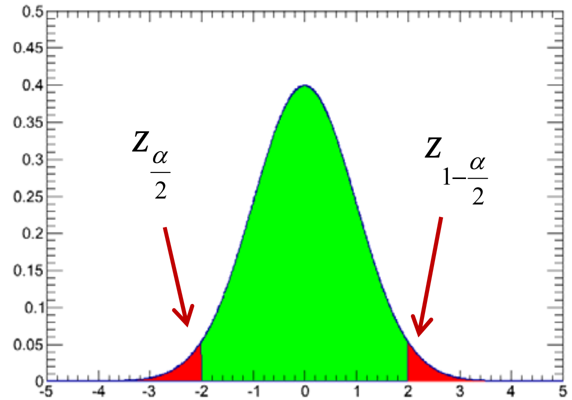


Single-sided



Región crítica $[z_{1-\alpha}, \infty)$

Double-sided



$(-\infty, z_{\alpha/2}]$ $[z_{1-\alpha/2}, +\infty)$

Región crítica

4. Tests paramétricos con variables normales

1. Test de medias y varianzas en distribuciones normales

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de medidas distribuidas según $N\left(\mu, \sigma^2\right)$

¿La muestra es compatible con un determinado valor medio y varianza?

Test de la media

Hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$ **Hipótesis alternativa H_1:** $\mu \neq \mu_0$

	Test estadístico	Distribución	Región crítica	
Si σ conocida →	$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$(-\infty, z_{\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$	Two-sided
Si σ desconocida →	$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$(-\infty, t_{\alpha/2}] \cup [t_{1-\alpha/2}, \infty)$	Two-sided

$t_{1-\alpha}$ ***Es el cuantil de la distribución t de Student*** **ROOT** Double_t StudentQuantile(Double_t p, Double_t ndf, Bool_t lower_tail = kTRUE)

Test de la varianza

Hipótesis nula H_0: $\sigma = \sigma_0$ **Hipótesis alternativa H_1:** $\sigma \neq \sigma_0$

	Test estadístico	Distribución	Región crítica	
Si μ conocida →	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$(-\infty, u_{\alpha/2}] \cup [u_{1-\alpha/2}, \infty)$	Two-sided
Si μ desconocida →	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$(-\infty, u_{\alpha/2}] \cup [u_{1-\alpha/2}, \infty)$	Two-sided

$u_{1-\alpha/2}$ ***Es el cuantil de la distribución de chi-cuadrado*** **ROOT** Double_t ChisquareQuantile(Double_t p, Double_t ndf)

4. Tests paramétricos con variables normales

2. Comparación de medias entre dos distribuciones normales

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de medidas distribuidas según $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_m$ una muestra aleatoria de medidas distribuidas según $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$

¿Ambas distribuciones tienen la misma media?

Hipótesis nula H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ **Hipótesis alternativa H_1 :** $\mu_1 \neq \mu_2$

2.1 σ₁ y σ₂ conocidas

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} \to N\left(\mu_1, \sigma_1^2/n\right) \\ \\ \bar{y} \to N\left(\mu_2, \sigma_2^2/m\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \to N(0,1) \quad \underset{\mu_1 = \mu_2}{\Rightarrow} \quad \boxed{\frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \to N(0,1)}$$

Test estadístico

4. Tests paramétricos con variables normales

2. Comparación de medias entre dos distribuciones normales

Hipótesis nula H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ **Hipótesis alternativa H_1 :** $\mu_1 \neq \mu_2$

2.2 σ1 y σ2 desconocidas pero iguales (σ1 = σ2)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} \to N\left(\mu_1, \sigma_1^2/n\right) \\ \bar{y} \to N\left(\mu_2, \sigma_2^2/m\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \to N(0,1)$$

Variables independientes

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)s_1^2/\sigma_1^2 \to \chi^2(n-1) \\ (m-1)s_2^2/\sigma_2^2 \to \chi^2(m-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(m-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \to \chi^2(n+m-2)$$

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{(n-1)s_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(m-1)s_2^2}{\sigma_2^2}\right)\Big/(n+m-2)}$$

$\boxed{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$

Tests estadísticos

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \to t(n+m-2)$$

$$S^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2\right] = \frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right]$$

$\boxed{\mu_1 = \mu_2}$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{x}-\bar{y})}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \to t(n+m-2)$$

4. Tests paramétricos con variables normales

2. Comparación de medias entre dos distribuciones normales

Hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ **Hipótesis alternativa H_1:** $\mu_1 \neq \mu_2$

2.2 σ_1 y σ_2 desconocidas pero iguales ($\sigma_1 = \sigma_2$). EJEMPLO.

Notas de dos grupos de estudiantes

Grupo 1	39	18	3	22	24	29	22	22	27	28	23	48
Grupo 2	42	23	36	35	38	42	33					

Grupo 1 → $n = 12 \quad \overline{x} = 25.4 \quad s_1 = 10.9$

Grupo 2 → $m = 7 \quad \overline{y} = 35.6 \quad s_2 = 6.5$

Función acumulativa de la distribución de Student

Tmath::StudentI(t,m+n-2)

$$\overline{x} - \overline{y} = 10.2$$

$$S = 9.6$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{7}} = 0.48$$

→ $$t = \frac{(\overline{x} - \overline{y})}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = 2.2$$ → Tmath::StudentI(2.2,17) = 0.98

Mayor del 95 % !!!!

Los dos grupos son diferentes al 5 % de nivel de significancia

4. Tests paramétricos con variables normales

2. Comparación de medias entre dos distribuciones normales

Hipótesis nula H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ **Hipótesis alternativa H_1 :** $\mu_1 \neq \mu_2$

2.2 σ_1 y σ_2 desconocidas y diferentes ($\sigma_1 \neq \sigma_2$)

Si las muestras son grandes podemos aproximar las varianzas poblacionales con las muestrales

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \simeq \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}}} \xrightarrow{\mu_1=\mu_2} \frac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{s_1^2/n+s_2^2/m}} \to N(0,1)$$

Test estadístico

Consistencia entre dos conjuntos de observaciones

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un conjunto de observaciones $\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_m$ otro conjunto de observaciones $\bar{y} \pm \Delta\bar{y}$

¿Los dos experimentos han medido la misma cantidad física ($\mu_1 = \mu_2$) ?

$$z = \frac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{(\Delta\bar{x})^2+(\Delta\bar{y})^2}} \to N(0,1)$$

4. Tests paramétricos con variables normales

3. Comparación de varianzas en distribuciones normales

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de medidas distribuidas según $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_m$ una muestra aleatoria de medidas distribuidas según $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$

Hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ **Hipótesis alternativa H_1:** $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

μ_1 y μ_2 desconocidas

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)s_1^2/\sigma_1^2 \to \chi^2(n-1) \\ \\ (m-1)s_2^2/\sigma_2^2 \to \chi^2(m-1)\end{array}\right\}$$

Construimos una variable de tipo F

$$\frac{\dfrac{(n-1)s_1^2/\sigma_1^2}{(n-1)}}{\dfrac{(m-1)s_2^2/\sigma_2^2}{(m-1)}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

$\boxed{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$

Test estadístico

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} \to F(n-1, m-1)$$

Tomamos como región crítica la cola superior de la distribución F apropiada

Si Hipótesis alternativa H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Tomamos como región crítica la cola inferior

Si $\mu_1 = \mu_2$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_1\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \mu_2\right)^2} \to F(n, m)$$

5. Tests de Bondad de ajuste

Hasta ahora hemos considerado tests paramétricos: ¿Los valores numéricos que gobierna la pdf son compatibles con los que define la hipótesis?

Tests más generales con hipótesis no-paramétricas

Supongamos que tenemos n medidas independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cuya pdf, $f(x)$, es desconocida. Sea $f_0(x)$ una distribución específica y particular. La hipótesis:

$$H_0 : \; f(x) = f_0(x)$$

es una hipótesis del tipo **bondad de ajuste o *goodness-of-fit***

¿Los datos son consistentes con H_0?

Necesitamos un estadístico cuya distribución, suponiendo que **H_0 sea verdad**, defina una **región crítica** y una **región de aceptancia** con probabilidades **α** y **1 – α** respectivamente.

No hay una hipótesis alternativa **H_1** definida. **H_1** es el conjunto de todas las hipótesis concebibles y diferentes de H_0. No hay una hipótesis alternativa específica.

- Test de Pearson.
- Test de Kolmogorov-Smirnov.

5.1 Tests χ^2 de Pearson

Asumimos que los datos no se han utilizado para calcular los parámetros del modelo

Supongamos que tenemos n observaciones de la variable x pertenecientes a N clases exclusivas (intervalos de un histograma) con $n_1, n_2, \ldots, n_N$ sucesos en cada clase respectivamente. La hipótesis a testear es la que especifica el contenido esperado $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ de cada clase de acuerdo a algún modelo

$$H_0 : \; n_i = \nu_i \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

El ***estadístico de Pearson*** se define como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\nu_i}$$

Si los valores $n_1, n_2, \ldots, n_N$ se distribuyen según Poisson con valores medios $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ y el número de entradas en cada *bin* no es demasiado pequeño ($n_i \geq 5$, i.e. n_i se distribuye gaussianamente) el estadístico de Pearson sigue una distribución de $\chi^2(N)$ con N grados de libertad.

El número total de entradas $n_{tot} = \sum_{i=1}^{N} n_i$ es también de Poisson, con valor esperado: $\nu_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$

El test de Pearson mide entonces:

- el acuerdo con el número total de datos
- la forma de la distribución de la variable x

Si n_{tot} fijo: ➡ Los n_i siguen entonces una distribución multinomial con probabilidades $p_i = \nu_i / n_{tot}$

El test de Pearson mide entonces solo la forma de la distribución de la variable x ➡

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - p_i n_{tot})^2}{p_i n_{tot}}$$

➡ $\chi^2(N-1)$

En el límite de grandes números

5.1 Tests χ^2 de Pearson

En el límite de grandes números el test de Pearson tiene a una distribución de: $\chi^2(n_d)$

El número de grados de libertad es el número de bines menos las ligaduras $n_d = N - m$

Si la hipótesis *H0* es correcta , el test de Pearson se comporta como una distribución de χ^2

El ***P-value*** se calcula como: $P = \int_{\chi^2_{obs}}^{\infty} f(\chi^2; n_d)\, d\chi^2$

Como el valor esperado de χ^2 es igual al número de grados de libertad, el cociente $\chi^2/n_d \simeq 1$ se considera también una medida del acuerdo entre datos e hipótesis pero ***cuidado*** !!

Ejemplo $\chi^2 = 15 \;;\; n_d = 10 \;\to P = 0.13$ $\chi^2 = 150 \;;\; n_d = 100 \;\to P = 0.0009$!!

Si no estamos en el límite de grandes números, poca estadística,
(bines con menos de 5 entradas)

La distribución del estadístico se calcula mediante Monte Carlo generando números poissonianos para cada *bin* a partir de los valores esperados ν_i y calculando el valor de χ^2

Influencia del tamaño del bin

- En muestras pequeñas, diferentes tamaños de bin, $\rightarrow$ diferentes ***P-values***
- Suficientemente grande para contener al menos 5 entradas.
- La información se pierde con bines demasiado anchos
- Si la distribución del estadístico se calcula por Monte Carlo, el mínimo de entradas se relaja

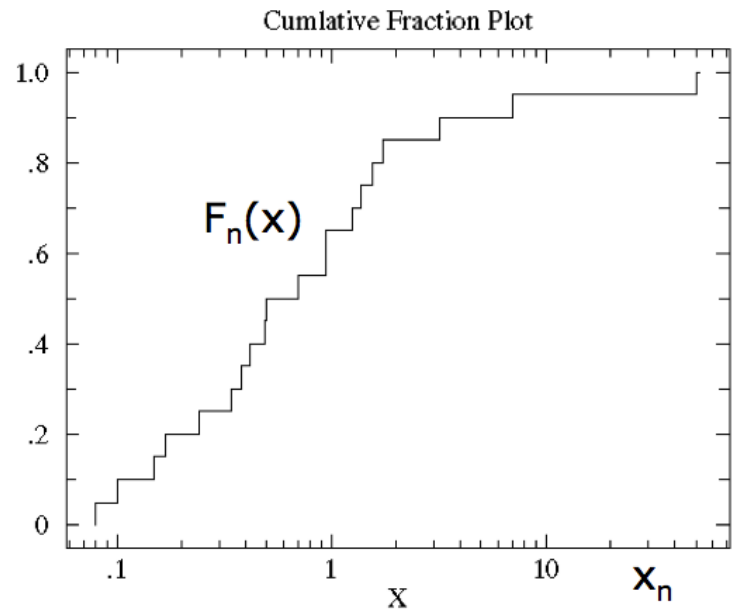
5.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

- Test alternativo al test de χ^2 de Pearson.
- Útil para muestras pequeñas sin datos suficientes para hacer *binning* .
- Método *unbinned*, no se pierde información.
- Solo se puede aplicar cuando la pdf está fijada de antemano (no es el resultado de un ajuste)

Dada la pdf correspondiente a la hipótesis H_0, construimos la función acumulativa F(x)
Tomamos una muestra de datos de tamaño n y los ordenamos $X_1 < X_2 < \cdots < X_n$
Su función acumulativa empírica será:

$$F_n(x) = \frac{1}{N}(\#\text{Observaciones } X_i \le x)$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_1 \\ \dfrac{i}{n} & X_i \le x \le X_{i+1} \\ 1 & x > X_n \end{cases} \Rightarrow F_n(x_i) = \frac{i}{n}$$



El método consiste en buscar la diferencia máxima entre la función empírica $F_n(x)$ y la función acumulativa correspondiente a la hipótesis nula $F_0(x)$ para todos valores de X_i :

5.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Construimos el estadístico definido como: $D_n = \max\left\{\left|F_n(x) - F_0(x)\right|\right\}$

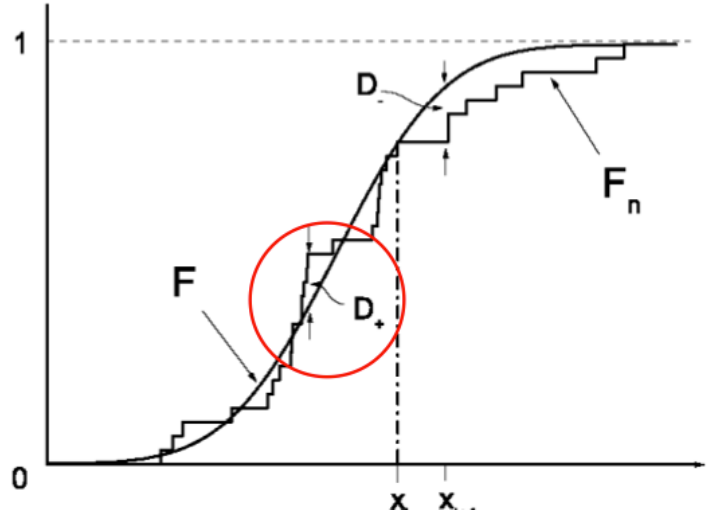
Máxima diferencia vertical entre ambas distribuciones

Formulaciones alternativas

$$d = \sqrt{n} \cdot D_n$$

$$D_n^+ = \max\left\{F_n(x) - F_0(x)\right\}$$

$$D_n^- = \max\left\{F_0(x) - F_n(x)\right\}$$



¿Las medidas son compatibles con la función acumulativa?

Pequeños valores de d significa mayor acuerdo
Si d (o D) es mayor que un valor crítico dado (tablas)

→ ***Rechazar hipótesis H_0***

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}D_n < z\right) = 1 - 2\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2r^2z^2}$$

ROOT Function

Double_t KolmogorovProb(Double_t z)

Calculates the Kolmogorov distribution function,

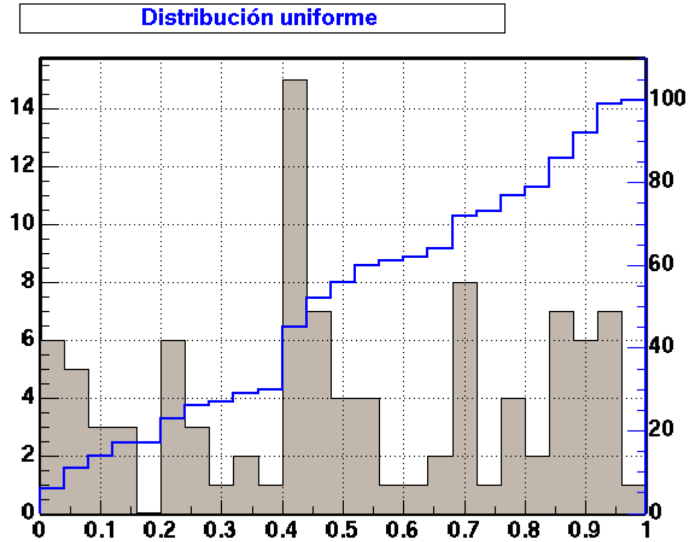
$$P(z) = 2\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2r^2z^2}$$

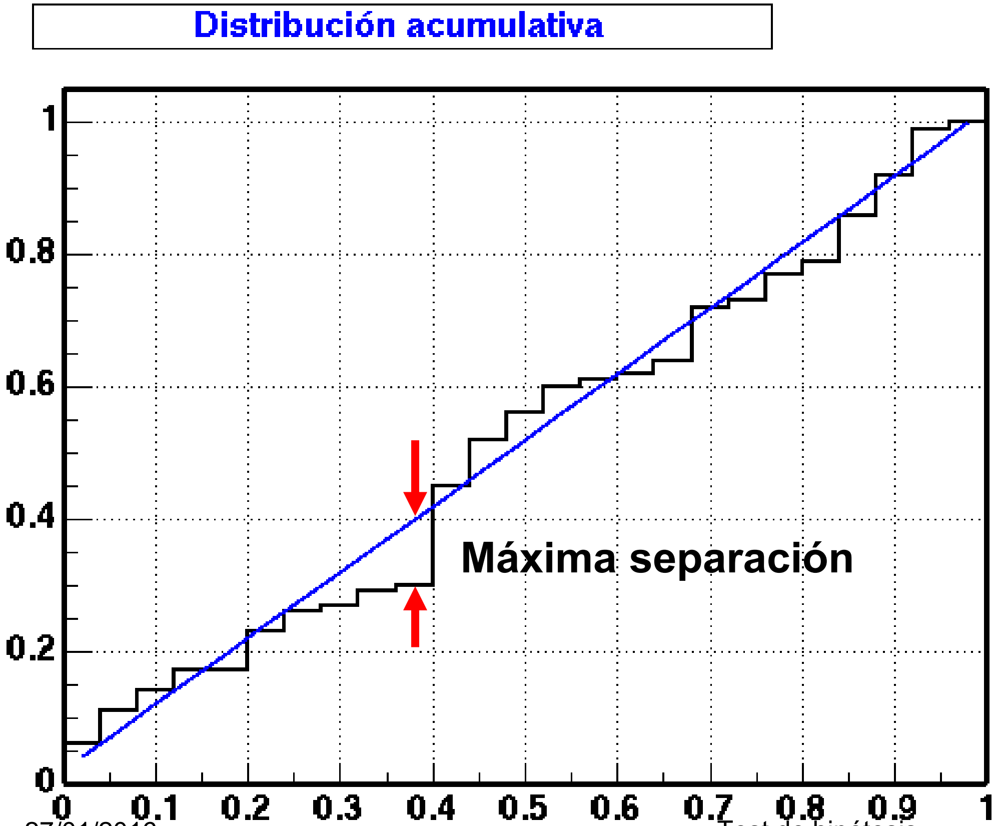
which gives the probability that Kolmogorov's test statistic will exceed the value z assuming the null hypothesis.

5.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Ejemplo

Generamos 100 números aleatorios uniformes





$$D_n = \max\left|F_n(x) - F_0(x)\right| = 0.1$$

$$q = \sqrt{n} \cdot D_n = 1.0$$

Kolmogorov probability:

$$P\left(d > d_{obs}\right) = 0.27$$

6. Tests de consistencia y aleatoriedad

Queremos asegurar que las muestras son aleatorias, sin efectos sistemáticos (sesgo).

- Condiciones en la adquisición de datos constante en el tiempo.
- Mismas condiciones experimentales.
- Muestras procedentes de dos detectores diferentes.
- Dos laboratorios diferentes.

Test de consistencia → **Evitar efectos sistemáticos**

No siempre las distribuciones son normales (Tests de distribuciones gaussianas)

Tests distribution-free

Ninguna hipótesis sobre la forma de la distribución. La cuestión es: **¿Son iguales? ¿Son compatibles?**

- Tests válidos independientemente de la distribución.
- Distribución del estadístico determinada por permutaciones o argumentos combinatorios.
- En general, menos eficientes que test gaussianos.

Hipótesis nula: "se trata de la misma distribución"

$$H_0 : \; f_1(x) = f_2(x)$$

6.1 Test Run

El test de χ^2 de Pearson está basado en el tamaño de las desviaciones pero no tiene en cuenta el signo de la desviación.

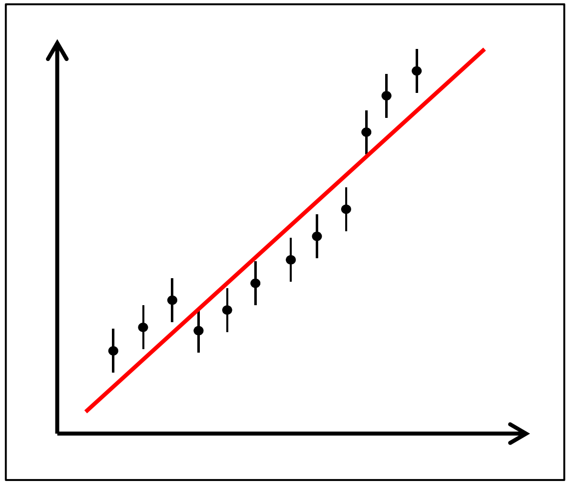
Un test que utiliza el signo de la desviación es un **Run test.**

Idea básica: comparar las medidas respecto a un valor y asignar un signo.

Se define un ***run*** como una secuencia de puntos del mismo signo. Ejemplo:

A → signo positivo
B → signo negativo

AAABBBBBBAAA



Si **H0** es correcta

- Probabilidad de obtener *A* = Probabilidad de obtener *B*
- Esperamos un número elevado de *runes* muy cortos

Sea k_A el número de desviaciones positivas
Sea k_B el número de desviaciones negativas

Número total de medidas $k = k_A + k_B$

¿Probabilidad de obtener r runs?

6.1 Test Run

Dados k_A, k_B el número total de ordenaciones posibles es: $\begin{pmatrix} k \\ k_A \end{pmatrix}$

Problema combinatorio: La probabilidad de obtener r runes es:

$$P(r) = \frac{2\begin{pmatrix} k_A - 1 \\ r/2 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_B - 1 \\ r/2 - 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} k \\ k_A \end{pmatrix}} \quad \text{si r par} \qquad P(r) = \frac{\begin{pmatrix} k_A - 1 \\ (r-3)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_B - 1 \\ (r-1)/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_A - 1 \\ (r-1)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_B - 1 \\ (r-3)/2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} k \\ k_A \end{pmatrix}} \quad \text{si r impar}$$

Valor esperado

$$E[r] = 1 + \frac{2k_A k_B}{k}$$

Varianza

$$V(r) = \frac{2k_A k_B (2k_A k_B - k)}{k^2 (k-1)}$$

La región crítica se define para valores muy bajos de $r < r_\alpha$

Para grandes muestras $k_A, k_B \sim 10$ *aproximación normal*

Ejemplo

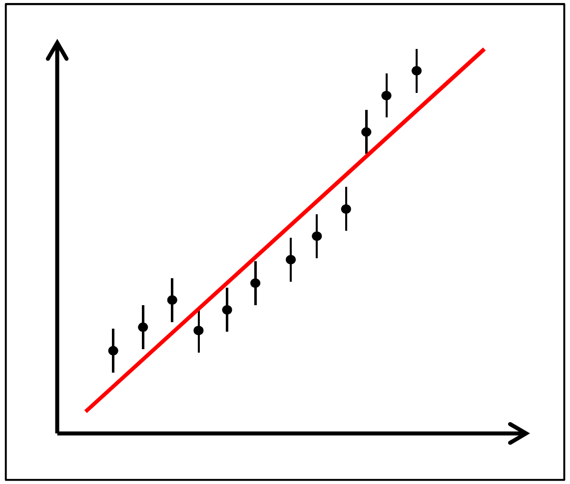
$k_A = k_B = 6 \qquad r = 3$ ➡ $P(1) + P(2) + P(3) = 1.5\%$

$E[r] = 7$

$V(r) = 2.727 \Rightarrow \sigma = 1.65$

Aproximación normal

$$z = \frac{r - E[r]}{\sqrt{V(r)}} = 2.42\sigma \Rightarrow 0.8\%$$



AAABBBBBBAAA

6.1 Test Run

Problema de las dos muestras

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dos series de observaciones ordenadas en orden ascendente

Mezcladas en una sola serie ordenada $y_1, x_1, y_2, y_3, x_2, x_3, y_4, y_5, \ldots,$ ➡ *BABBAABB,…*

Cada secuencia de medidas de la misma muestra define un ***run***.

Problema equivalente cambiando: $n = k_A,\ m = k_B$

$$P(r = 2k) = \frac{2\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}} \qquad P(r = 2k-1) = \frac{\binom{n-1}{k-2}\binom{m-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-2}}{\binom{n+m}{n}}$$

Valor esperado

$$E[r] = 1 + \frac{2mn}{m+n}$$

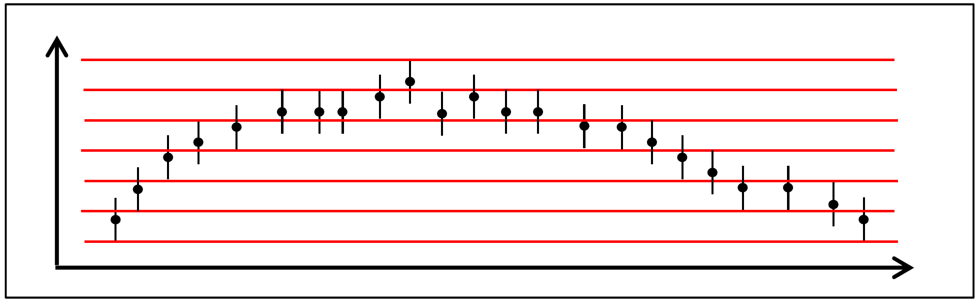
Varianza

$$V(r) = \frac{2nm(2mn - m - n)}{(n+m)^2(m+n-1)}$$

Test de aleatoriedad

- Si aleatorias la ordenación no es relevante.
- Muestras tomadas en diferentes periodos
- Evolución temporal de una muestra
- Si comparamos con la mediana esperamos $n = m$

$$E[r] = n+1 \qquad V(r) = \frac{n(n-1)}{(2n-1)}$$

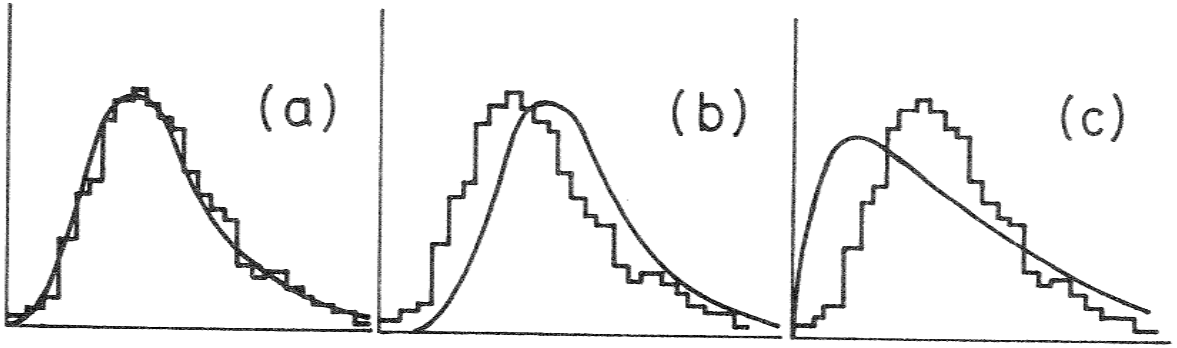


6.1 Test Run

Test Run combinado con test de Pearson

El test de χ^2 de Pearson → desviaciones al cuadrado, ➡ **Insensible al *"pattern"* de signos**

Test Run como como complemento al test test de χ^2 de Pearson



Ejemplo

Test de Pearson

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{24} \frac{(n_i - f_i)^2}{f_i} = 30.6$$

$$P\left(\chi^2;23\right) = 0.14$$

Compatible

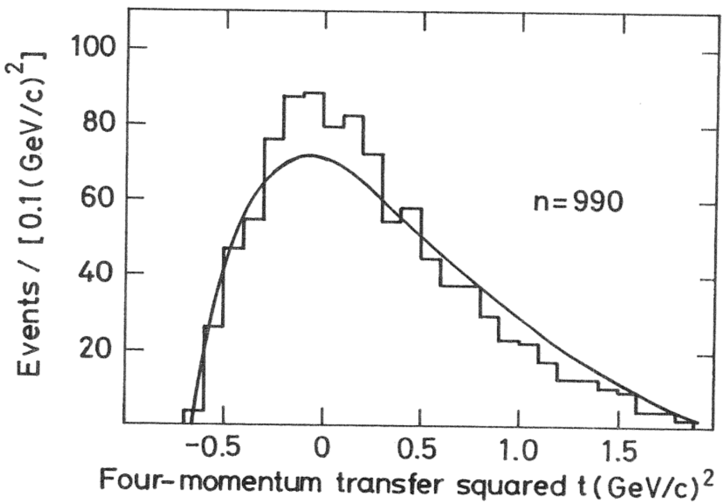
Run Test

7 bines ↑ 17 bines ↓

$k_A = 7;\ k_B = 17 \qquad r = 5$

$$P(r \le 5) = 0.0034$$

Hipótesis rechazable



6.2 Test de K-S para dos muestras

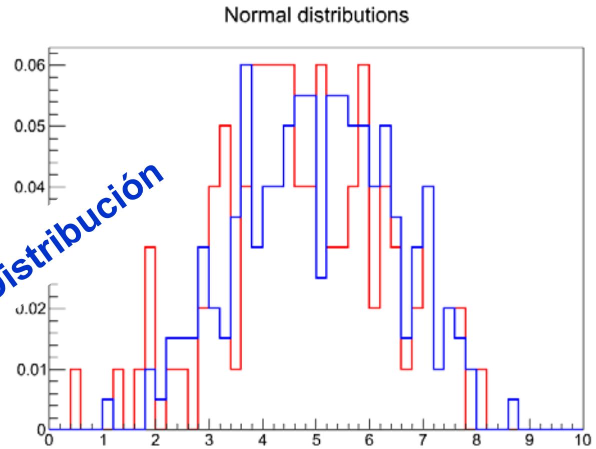
Test completamente general para comparar dos muestras:

¿Son compatibles? ¿Proceden de la misma distribución pdf?

Se comparan las dos distribuciones acumulativas $F_n(x)$ $F_m(x)$

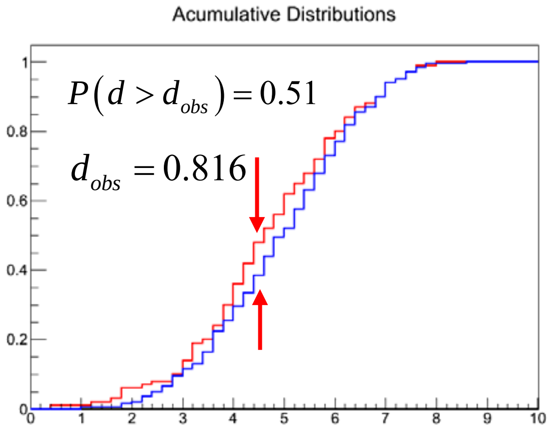
se calcula: $D = \max\left\{\left|F_n(x) - F_m(x)\right|\right\}$ y el estadístico de KS $d = D^* \sqrt{\frac{mn}{(m+n)}}$

Misma Distribución

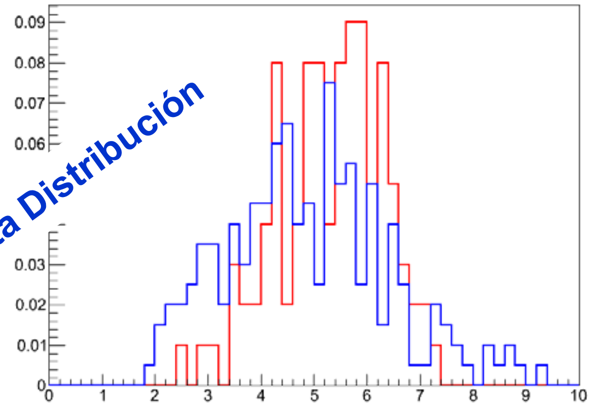


$\mu = 5$
$\sigma = 1.5$
$n = 200$

$\mu = 5$
$\sigma = 1.5$
$n = 100$

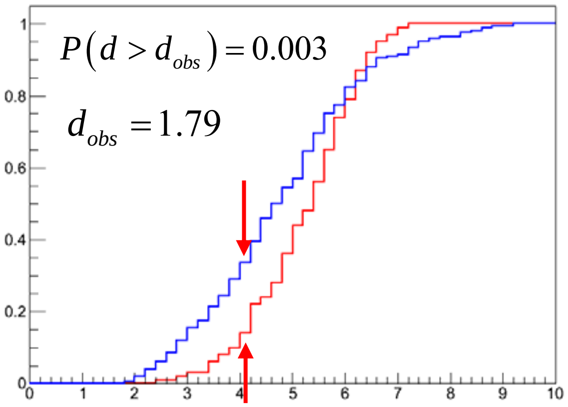


Distinta Distribución



$\mu = 5$
$\sigma = 1.5$
$n = 200$

$\mu = 5.5$
$\sigma = 1.$
$n = 100$



7. Test de independencia

Tenemos un conjunto de observaciones (x_i, y_i) cuya pdf viene dada por $f(x,y)$

Probabilidades marginales → $h(y) = \int f(x,y)\,dx \qquad g(y) = \int f(x,y)\,dy$

¿Las variables son independientes? ***H0*** $f(x,y) = g(x)h(y)$

Utilizar el coeficiente de correlación como test estadístico →

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i]E[y_i] = nE[x]E[y]$$

Valor esperado $E[r] = 0$

Varianza $V(r) = \frac{1}{n-1}$

→ Se puede demostrar que en el límite de grandes números la variable:

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

sigue una distribución de Student con $n-2$ grados de libertad

H0 se rechaza para valores muy grandes de t