Tema 6 Métodos Monte Carlo(II). Muestreo de distribuciones

1. Método de la transformación inversa.
2. Método de Box Mueller para generar números gaussianos.
3. Técnicas de rechazo.
4. Composición de variables aleatorias.
5. Muestreo de distribuciones discretas.
6. Muestreo en varias dimensiones.
    1. Ejemplos de correlaciones
    2. Transformación inversa.
    3. Distribución multi-normal

1. Método de la transformación inversa

Objetivo.- Queremos generar números aleatorios distribuidos según una función densidad de probabilidad determinada: $f(x) \quad a \le x \le b$

Supongamos que dicha pdf tiene una distribución acumulativa: $F(x); \quad F(a)=0, F(b)=1$

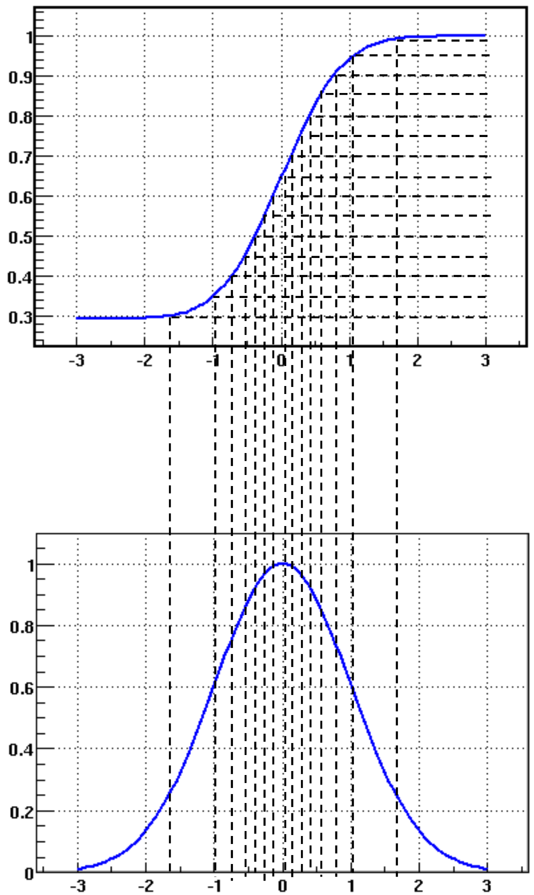
$$F(x)=\int_a^x f(x')dx'$$

Si ξ es una variable aleatoria uniforme $\xi \in [0,1]$, entonces la variable:

$$x' = F^{-1}(\xi)$$

se distribuye según la pdf $f(x)$ y su función acumulativa es $F(x)$

Función acumulativa



Función pdf

Demostración

Tenemos que demostrar que la función acumulativa de la nueva variable x' viene dada por $F(x)$

$$P(x' \le x) = P(F^{-1}(\xi) \le x) = P(\xi \le F(x)) = F(x)$$

1. Método de la transformación inversa

Otra demostración

Generamos puntos uniformemente distribuidos $\xi_i \in U\left[F(a), F(b)\right] = [\,0,1]$

y calculamos $x = F^{-1}(\xi)$ ¿Cuál es la pdf de la variable x?

Si realizamos el siguiente cambio de variable o transformación:

$$f(x)dx = g(\xi)d\xi$$

$$f(x) = g(\xi)\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right| = f(x)$$

$$\xi = F(x)$$
$$x = F^{-1}(\xi)$$
$$g(\xi) = 1$$

Distribución uniforme entre 0 y 1

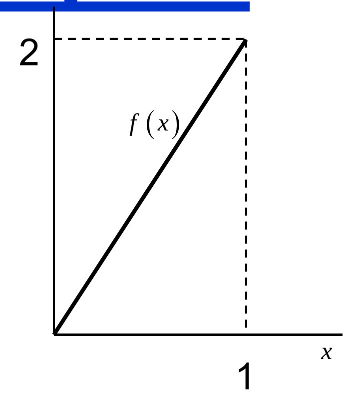
Tal y como queríamos demostrar

1. Transformación inversa. Ejemplos

1) Distribución triangular

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x 2x' dx' = x'^2 \Big|_0^x = x^2$$



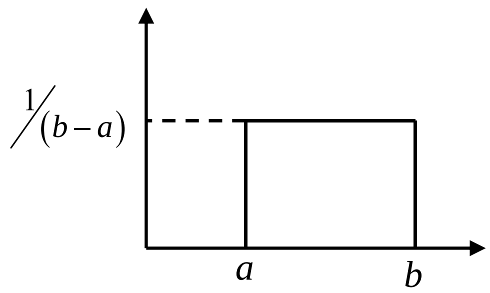
Distribución triangular

$$F(x) = \xi \rightarrow x = F^{-1}(x)$$

$$x^2 = \xi \rightarrow x = \sqrt{\xi}$$

$$x = \sqrt{\xi} \quad \xi = [0,1]$$

2) Distribución uniforme en *[a,b]*



Distribución uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{(b-a)} dx' = \frac{x'}{(b-a)}\Bigg|_a^x = \frac{(x-a)}{(b-a)}$$

$$F(x) = \xi \rightarrow x = F^{-1}(x)$$

$$\frac{x-a}{b-a} = \xi \rightarrow x = a + \xi(b-a)$$

$$x = a + \xi(b-a) \quad \xi \in [0,1]$$

1. Transformación inversa. Ejemplos

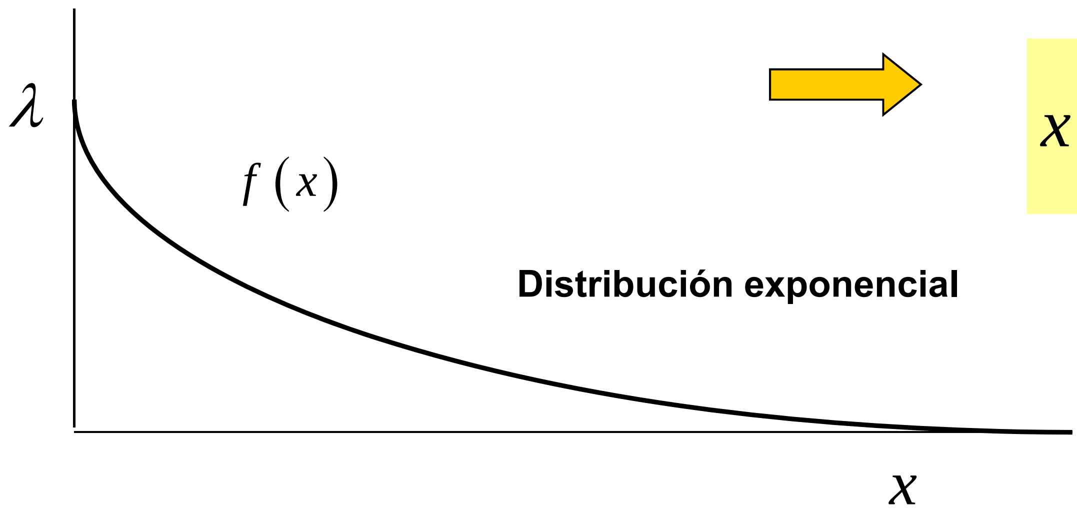
3) Distribución exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad 0 \le x \le \infty$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x'} dx' = -e^{-\lambda x'}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \xi \to x = F^{-1}(x)$$

$$1 - e^{-\lambda x} = \xi \to e^{-\lambda x} = 1 - \xi \to -\lambda x = \ln(1-\xi) \to x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\xi)$$



$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln\xi \qquad \xi = [0,1]$$

2. Método de Box-Mueller para generar números gaussianos.

Imposible utilizar el método de la transformación inversa para la distribución de Gauss:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}\mu = 0\\ \sigma = 1\end{pmatrix}} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mathrm{erf}(x)$$

Sin solución analítica

Supongamos una distribución gaussiana en dos dimensiones o binormal:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}}$$

Realizamos el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases}$$

$$g(r,\theta) = f(x_1, x_2) \cdot \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r,\theta)} \right| = f(x_1, x_2) \cdot |J|$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(r,\theta) = \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}}$$

2. Método de Box-Mueller

$$\underbrace{g(r,\theta)\,dr\,d\theta = e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr}\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\,d\theta}$$

Aplicamos el método de la transformación inversa a cada una de las variables por separado

$$F(r) = \int_0^r r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^r = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}} = \xi_1$$

$$r = \sqrt{-2\ln(1-\xi_1)} = \sqrt{-2\ln \xi_1}$$

$$F(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{2\pi}\,d\theta = \frac{\theta}{2\pi} = \xi_2$$

$$\theta = 2\pi\xi_2$$

ALGORITMO

1. Generamos dos números aleatorios uniformes $\xi_1, \xi_2 \in U[0,1]$
2. Deshacemos el cambio de variable:

$$x_1 = r\cos\theta = \sqrt{-2\ln(\xi_1)}\cos(2\pi\xi_2)$$
$$x_2 = r\sin\theta = \sqrt{-2\ln(\xi_1)}\sin(2\pi\xi_2)$$

3. $x_1, x_2 \in N(0,1)$, son números gaussianos distribuidos según N(0,1)
4. Para una distribución normal cualquiera $y = \mu + x\sigma \quad \in N(\mu, \sigma^2)$

3. Técnicas de rechazo

- Método ideado por Von Neumann
- Idea general:
  - Seleccionamos una variable aleatoria
  - Decidimos si se acepta o no mediante un test

- Ventajas e inconvenientes:
  - La pdf no necesariamente ha de estar normalizada
  - Baja eficiencia

ALGORITMO

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a,b]$

1. Generamos dos números aleatorios uniformes

   $\xi_1, \xi_2 \in U[0,1]$

2. Obtenemos una variable uniforme en $[a,b]$:

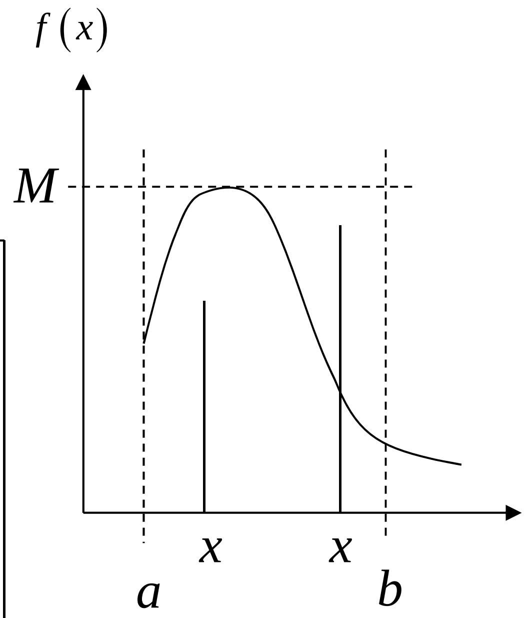
   $x = a + \xi_1 (b - a)$

3. Calculamos $f(x)$ y realizamos el siguiente test:

   $\xi_2 M \leq f(x)$

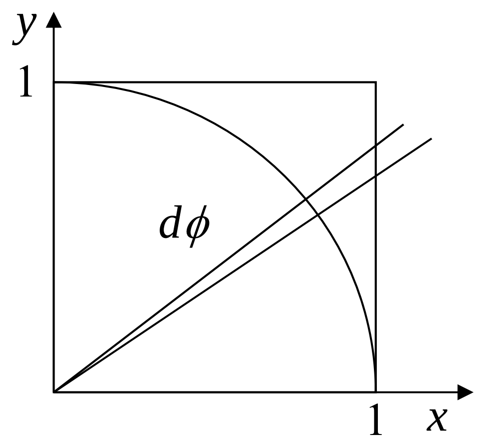
   SI → Aceptamos x

   NO → Rechazamos x



- *Elegimos puntos arbitrarios en el cuadrado definido por [a,b] y [0,M]*
- *Aceptamos los que se sitúan bajo la función*

3. Técnicas de rechazo



El método directo para generar senos y cosenos sería:

$$\phi = 2\pi\xi \qquad \xi \in U[0,1] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\sin\phi \\ \cos\phi\end{array}$$

Puede resultar más eficiente obtener los senos y cosenos directamente:

ALGORITMO

1. Generamos dos números aleatorios uniformes $\xi_1, \xi_2 \in U[0,1]$
2. Si $\xi_1^2 + \xi_2^2 > 1$ los rechazamos y repetimos
3. Si $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$ los aceptamos y calculamos:

$$\begin{cases} \sin\phi = \dfrac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \end{cases} \qquad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \begin{cases} \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \dfrac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \\ \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi = \dfrac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \end{cases} \qquad 2\phi \in [0, \pi]$$

4. Si $2\phi \in [0, 2\pi]$ generamos $\xi_3 \in U[0,1]$ para decidir el signo de senos y cosenos.

4. Composición de variables aleatorias

Suma de varias distribuciones arbitrarias

Sea $f(x) = \sum_i \alpha_i g_i(x)$ con $\alpha_i \geq 0 \quad g_i(x) \geq 0$ y $\int_\Omega f(x)\,dx = 1$

Consideremos un conjunto de funciones $h_i(x)$ y coeficientes β_i que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{ll} h_i(x) \geq 0 \quad ; & \int_\Omega h_i(x)\,dx = 1 \\ \beta_i \geq 0 \quad ; & \sum \beta_i = 1 \end{array}\right\}$$

β_i representa la probabilidad de obtener el suceso *i*-ésimo

¿Cual es la probabilidad de que la variable aleatoria $X < x$ para un tipo de suceso dado *i* = *m* ?

$$P(i = m \;\&\; X < x) = \beta_m \cdot \int_0^x h_m(t)\,dt$$

¿Cual es la probabilidad de que la variable aleatoria $X < x$ independientemente de cual sea el suceso *i* ?

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \int_0^x h_i(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot h_i(t) \right) dt$$

Si obtenemos valores de *i* de acuerdo a sus probabilidades β_i y sorteamos según $h_i(x)$ obtenemos números distribuidos de acuerdo con la función densidad de probabilidad

$$\Rightarrow \quad h(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i h_i(x)$$

4. Composición de variables aleatorias

Suma de varias distribuciones arbitrarias

$$f(x) = \sum_i \alpha_i g_i(x) \qquad \alpha_i \geq 0 \quad g_i(x) \geq 0 \quad \int_\Omega f(x)\,dx = 1$$

¿Como conseguir que la función $f(x)$ cumpla las condiciones de $h(x)$?

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\int g_i(t)dt\right]}\underbrace{\frac{g_i(x)}{\left[\int g_i(t)dt\right]}} \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i h_i(x)$$

Identificando:

$$\beta_i = \alpha_i \left[\int g_i(t)dt\right] \geq 0 \qquad h_i(x) = \frac{g_i(x)}{\left[\int g_i(t)dt\right]} \geq 0$$

Efectivamente se cumplen los requisitos de la función:

$$h_i(x) \geq 0 \quad ; \quad \int_\Omega h_i(x)\,dx = 1$$

$$\beta_i \geq 0 \quad ; \quad \sum \beta_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\int g_i(t)dt\right] = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(t)dt = \int f(t)dt = 1$$

$$\int_\Omega h_i(x)dx = \int_\Omega \frac{g_i(x)}{\left[\int g_i(t)dt\right]} dx = \frac{\int g_i(x)dx}{\int g_i(t)dt} = 1$$

4. Composición de variables aleatorias

Ejemplo

$$f(x)=\frac{3}{5}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \qquad 0<x<1 \quad \Rightarrow \quad f(x)=\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3=\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot x+\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{3}{5} \qquad g_1=1 \qquad \int_0^1 g_1(x)dx=\int_0^1 dx=1 \qquad \beta_1=\alpha_1\int_0^1 g_1(x)dx=\frac{3}{5} \qquad h_1=\frac{g_1(x)}{\int_0^1 g_1(x)dx}=1$$

$$\alpha_2=\frac{3}{5} \qquad g_2=x \qquad \int_0^1 g_2(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2} \qquad \beta_2=\alpha_2\int_0^1 g_2(x)dx=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10} \qquad h_2=\frac{g_2(x)}{\int_0^1 g_2(x)dx}=2x$$

$$\alpha_3=\frac{3}{5} \qquad g_3=\frac{x^2}{2} \qquad \int_0^1 g_3(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6} \qquad \beta_3=\alpha_3\int_0^1 g_3(x)dx=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{10} \qquad h_3=\frac{g_3(x)}{\int_0^1 g_3(x)dx}=6\frac{x^2}{2}$$

$$F_1(x)=\int_0^x h_1(t)\,dt=\int_0^x dt=x=\xi$$

$$F_2(x)=\int_0^x h_2(t)\,dt=\int_0^x 2xdt=x^2$$

$$x^2=\xi\rightarrow x=\sqrt{\xi}$$

$$F_3(x)=\int_0^x h_3(t)\,dt=\int_0^x 3x^2dt=x^3$$

$$x^3=\xi\rightarrow x=\xi^{1/3}$$

ALGORITMO

1. Generamos dos números aleatorios uniformes $\xi_1,\xi_2\in U[0,1]$
2. if $\xi_1\le\frac{6}{10} \rightarrow i=1$
   else if $\xi_1\le\frac{9}{10} \rightarrow i=2$
   else $\rightarrow i=3$
3. if $i=1\rightarrow x=\xi_2$
   else if $i=2\rightarrow x=\sqrt{\xi_2}$
   else $i=3\rightarrow x=\xi_2^{1/3}$

5. Muestreo de distribuciones discretas

X es una variable aleatoria discreta

$$P(X = x_k) = p_k \quad k = 0,1,\cdots,n \quad \sum p_k = 1$$

La función acumulativa viene dada por:

$$F_k(x) = P(x \le x_k) = \sum_{i=0}^{k} p_i$$

Algoritmo general:

1. Generamos número aleatorio uniforme $\xi \in U[0,1]$
2. Encontrar el entero *k* más pequeño que cumple:

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^{k} p_i \ge \xi \Rightarrow x_k$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} p_i < \xi \le \sum_{i=0}^{k} p_i$$

Ejemplo

1. K=0
2. S=P_0
3. Generamos $\xi \in [0,1]$
   1. Si $\xi < S \rightarrow x = x_k$
   2. K=K+1
   3. S=S+P_K

Ejemplo

1. Generamos $\xi \in [0,1]$
2. K= ξ
3. j=0
   1. K = K – P(x_j)
   2. Si K<0 → x = x_j
   3. j = j + 1

5. Muestreo de distribuciones discretas

Distribución de Poisson

$$P(k,\mu)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu};\quad k=0,1,\cdots,\infty\quad ;\ \mu>0$$

Si los sucesos se distribuyen según Poisson.

$$P(k,\mu=\lambda\Delta x)=\frac{(\lambda\Delta x)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta x}=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

Las distancias entre ellos se distribuyen según una distribución exponencial.

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$

Estrategia.- Generamos sucesos separados por distancias que se distribuyen exponencialmente con constante λ y contamos los que tienen lugar en la unidad de intervalo $\Delta x=1$

Algoritmo general:

1. Generamos un número aleatorio uniforme $\xi_1\in U[0,1]$
2. Obtenemos una variable aleatoria exponencial: $x_1=-\frac{1}{\lambda}\ln\xi_1$
3. Si $x_1>1\rightarrow$ en $\Delta x=1$ no ha habido ningún suceso $\rightarrow k=0$
4. Si $x_1<1\rightarrow$ generamos otro número exponencial: $x_2=-\frac{1}{\lambda}\ln\xi_2$
5. Si $x_1+x_2>1\rightarrow$ en $\Delta x=1$ ha habido un suceso $\rightarrow k=1$
6. Así hasta que $\sum_{i=1}^{N}x_i\le 1\le\sum_{i=1}^{N+1}x_i$ ha habido N sucesos $\rightarrow k=N$

5. Muestreo de distribuciones discretas

Distribución de Poisson

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \le 1 \le \sum_{i=1}^{N+1} x_i \quad\Rightarrow\quad \prod_{i=1}^{N} \xi_i \ge e^{-\lambda} \ge \prod_{i=1}^{N+1} \xi_i$$

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln \xi_i$$

ALGORITMO

1. K=0
2. SUM =0
3. WHILE (TRUE) DO
    1. Generamos exponencial X
    2. SUM = SUM + X
    3. IF (SUM < 1) THEN
          K = K + 1
       ELSE
          RETURN K
       ENDIF

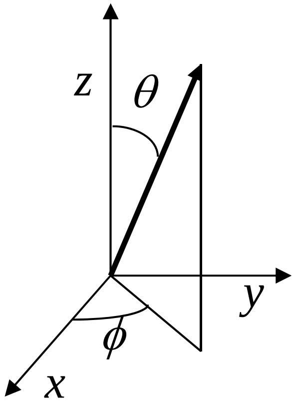
ALGORITMO

1. K=0
2. PROD = 1
3. WHILE (TRUE) DO
    1. Generamos uniforme $\xi \in U[0,1]$
    2. PROD = PROD * ξ
    3. IF (PROD > $e^{-\lambda}$) THEN
          K = K + 1
       ELSE
          RETURN K
       ENDIF

6. Muestreo en varias dimensiones

1. Ejemplo de correlaciones

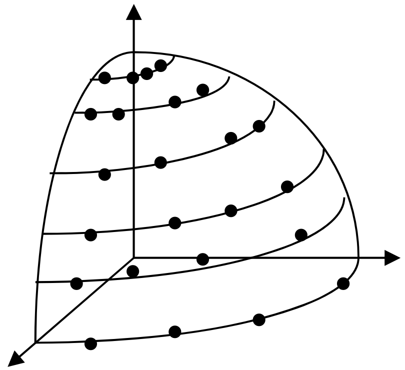
1. Generación de direcciones isótropas



$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \phi \le 2\pi$$

$$\xi_1, \xi_2 \in U[0,1] \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi \xi_1, \quad \phi = 2\pi \xi_2$$

¡¡¡ INCORRECTO !!!



¡¡ La concentración de puntos es mayor en los polos !!

La concentración de puntos ha de ser proporcional al ángulo sólido subtendido

$$f(\theta,\phi)\, d\theta d\phi \propto d\Omega$$

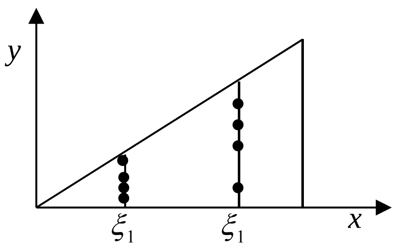
$$\int d\Omega = 4\pi$$

$$f(\theta,\phi)\, d\theta d\phi = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta \frac{1}{2\pi} d\phi$$

Generamos $\xi_1, \xi_2 \in U[0,1]$

$$\begin{cases} \int_0^{\theta} \frac{\sin\theta}{2} d\theta = \frac{1-\cos\theta}{2} = \xi_1 & \Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = 1 - 2\xi_1} \\ \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{\phi}{2\pi} = \xi_2 & \Rightarrow \quad \boxed{\phi = 2\pi\xi_2} \end{cases}$$

2. Distribución uniforme en un triangulo



¡¡¡ INCORRECTO !!!

$$\xi_1 \in U[0,1] \qquad \xi_2 \in U[0,\xi_1]$$

Demasiados puntos cerca el origen

Solución

$$\xi_1, \xi_2 \in U[0,1]$$

$$\text{Si} \quad \xi_1 \le \xi_2 \rightarrow x = \xi_1; y = \xi_2$$

$$\text{Si} \quad \xi_1 \ge \xi_2 \rightarrow x = \xi_2; y = \xi_1$$

6. Muestreo en varias dimensiones

2. Transformación inversa en n dimensiones

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *un vector aleatorio que queremos generar a partir de su distribución acumulativa* $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad \xi_1 \in U[0,1]$$

VARIABLES INDEPENDIENTES

$x_1, x_2, \cdots, x_n$

independientes

$$\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_i &= F_i^{-1}(\xi_i) \\ i &= 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

VARIABLES DEPENDIENTES

Funciones densidad de probabilidad marginal

$$f_1(x_1) = \int f(\overline{x})\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$f_{12}(x_1, x_2) = \int f(\overline{x})\, dx_3 \cdots dx_n$$

$$\vdots$$

$$f_{12\cdots n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \int f(\overline{x})\, dx_n$$

Funciones densidad condicional

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f_{12}(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

$$f(x_3 \mid x_1, x_2) = \frac{f_{123}(x_1, x_2, x_3)}{f_{12}(x_1, x_2)}$$

$$\vdots$$

$$f(x_n \mid x_1, \cdots, x_{n-1}) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{f_{12\cdots n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})}$$

6. Muestreo en varias dimensiones

2. Transformación inversa en n dimensiones

Con lo que la función $f(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ la podemos escribir como el producto de las funciones:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= f_1(x_1)\cdot f(x_2\,|\,x_1)\cdot f(x_3\,|\,x_1,x_2)\cdots f(x_n\,|\,x_1,\cdots,x_{n-1})=$$

$$= f_1(x_1)\cdot\frac{f_{12}(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}\cdot\frac{f_{123}(x_1,x_2,x_3)}{f_{12}(x_1,x_2)}\cdots\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{f_{12\cdots n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})}$$

Las funciones si son ahora independientes y podemos aplicar el método de la transformación inversa

ALGORITMO

1. Se generan $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in U[0,1]$
2. Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$F_1(x_1)=\xi_1$$

$$F_2(x_2\,|\,x_1)=\xi_2$$

$$\vdots$$

$$F_n(x_n\,|\,x_1,\cdots,x_{n-1})=\xi_n$$

Cuidado la numeración de las variables es arbitraria e influye en la complejidad del sistema

Ejemplo

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}6x_1 & x_1+x_2\le 1;\ \ x_1>0,x_2>0\\ 0 & \text{otros casos}\end{cases}$$

$$f(x_1,x_2)= f_2(x_2)\cdot f(x_1\,|\,x_2)$$

$$f_2(x_2)=\int_0^{1-x_2}dx_1\,f(x_1,x_2)=3(1-x_2)^2$$

$$f(x_1\,|\,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_2(x_2)}=\frac{2x_1}{(1-x_2)^2}$$

$$F_2(x_2)=1-(1-x_2)^3=\xi_1$$

$$F_2(x_1\,|\,x_2)=x_1^2(1-x_2)^{-2}=\xi_2$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\xi_1^{1/3}\xi_2^{1/2}\\ x_2=1-\xi_1^{1/3}\end{cases}$$

6. Muestreo en varias dimensiones

3. Distribución multi-normal

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |V|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{\mu})^T V^{-1} (\overline{x}-\overline{\mu}) \right]$$

$$\overline{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

$$\overline{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$$

Matriz de covarianza

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_n\sigma_1 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de covarianza V es simétrica y definida positiva

Aplicamos la descomposición de Choleski a la matriz de covarianza V

$$V = CC^T$$

Cambio de variable:

$$\overline{x} = C\overline{z} + \overline{\mu} \rightarrow \begin{cases} \overline{x} - \overline{\mu} = C\overline{z} \\ C^{-1}(\overline{x} - \overline{\mu}) = \overline{z} \end{cases}$$

Con lo cual:

$$(\overline{x}-\overline{\mu})^T V^{-1} (\overline{x}-\overline{\mu}) = (\overline{x}-\overline{\mu})^T (CC^T)^{-1} (\overline{x}-\overline{\mu}) =$$

$$= (C\overline{z})^T (CC^T)^{-1} (C\overline{z}) = (C\overline{z})^T (C^T)^{-1} C^{-1} (C\overline{z})$$

$$= \overline{z}^T \overline{z}$$

$$\overline{z} = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$$

Vector normal con media cero y matriz de covarianza la matriz unidad

Descomposición de Choleski

(matrices simétricas y definidas positivas)

Descomposición de una matriz como producto de una matriz triangular por su traspuesta:

$$V = CC^T$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad c_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} c_{jk}}{\left[\sigma_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2 \right]^{1/2}}$$

ALGORITMO

1. Calcular la matriz C según la expresión anterior
2. Generar $\overline{z} = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ a partir de $N(0,1)$
3. Realizar en cambio $\overline{x} = C\overline{z} + \overline{\mu}$