Tema 8.- Método de Máxima Verosimilitud

1. Supongamos que hemos realizado una serie de n medidas independientes que se distribuyen de acuerdo a una distribución de Poisson. Encontrar el estimador ML para el parámetro μ de dicha distribución:

$$P(x,\mu)=\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$$

Calcular la varianza de dicho estimador y discutir si se trata de un estimador eficiente.

2. Mediante el método de máxima verosimilitud (ML) encontrar una estimación del parámetro p de una distribución binomial.

$$P(x,p,n)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

PROBLEMAS CON ORDENADOR

(Presentar obligatoriamente al menos uno de los siguientes ejercicios)

1. Los tiempos de desintegración de una partícula inestable vienen descritos por una distribución exponencial:

$$f(t;\tau)=\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

a) Generar 50 sucesos Monte Carlo de acuerdo con dicha pdf para un valor de $\tau=1.0$ y hacer una estimación de $\hat{\tau}$ y de $\sigma(\hat{\tau})$ utilizando el método de máxima verosimilitud.

b) Utilizando un programa de minimización (MINUIT) encontrar una estimación $\hat{\tau}$ maximizando la función de verosimilitud para los sucesos Monte Carlo del apartado anterior. Proporcionar la estimación de $\sigma(\hat{\tau})$ obtenida por el programa.

c) Utilizando los mismos datos del apartado a) representar la función $\ell=\ln L$ y calcular $\sigma(\hat{\tau})$ mediante el método gráfico de disminuir la función $\ell=\ln L$ en media unidad.

d) Repetir el apartado b) 1000 veces generando muestras distintas de 50 valores y obtener las distribuciones de los valores de $\hat{\tau}$ y de $\sigma(\hat{\tau})$. Comparar la anchura muestral s (RMS) de la distribución de $\hat{\tau}$ con el valor medio de la distribución de los valores de $\sigma(\hat{\tau})$.

e) Mediante una tabla comparar los valores estimados de $\sigma(\hat{\tau})$ mediante los diferentes métodos.

f) Comprobar que la función $\ell=\ln L$ tiende a una parábola en el límite asintótico representándola para experimentos con 10, 50, 100 y 1000 sucesos.

2. **Ejemplo de máxima verosimilitud con dos parámetros (Cowan 6.8).-** Consideremos una reacción entre partículas donde cada suceso vienen caracterizado por el ángulo de *scattering*, θ, (o equivalentemente $x = \cos\theta$). Supongamos que una determinada teoría predice la siguiente distribución angular:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1+\alpha x+\beta x^2}{2+2\beta/3}$$

   a) Verificar que el factor $2+2\beta/3$ es necesario para que la distribución esté normalizada en el intervalo $[-1,1]$.
   b) Para hacer el problema más realista supongamos que las medidas solo se pueden realizar en un rango restringido dado por $[x_{\min}, x_{\max}]$. Recalcular la constante de normalización.
   c) Generar 2000 sucesos usando los valores $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$, $x_{\min} = -0.95$ y $x_{\max} = 0.95$. Obtener el histograma correspondiente a la distribución angular.
   d) Mediante un programa de minimización (MINUIT) obtener una estimación de los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ por el método de máxima verosimilitud, así como sus errores. Si el programa de minimización lo permite, obtener el contorno para una y dos sigmas.
   e) Repetir el experimento 500 veces mediante Monte Carlo, todos con 2000 sucesos, haciendo histogramas de los valores de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ así como de $\hat{\alpha}$ frente a $\hat{\beta}$.

3. **Método de máxima verosimilitud extendido (I) Estimación del número de sucesos de una resonancia (señal sobre fondo).-** Consideremos un experimento donde observamos procesos de desintegración de una partícula de masa conocida, M_0, y medimos la masa invariante M de los productos de la reacción. El número total de sucesos, N_t, contendrá, o bien sucesos de señal, *s(x)*, (gaussianos) correspondientes a las desintegraciones de la partícula, o bien sucesos de fondo, *b(x)*, (*background*) debidos a trazas mal reconstruidas y que describiremos como una exponencial:

$$f(x;\alpha) = \alpha * s(x) + (1-\alpha) * b(x)$$

Donde $\alpha = N_s/N_t$ es la probabilidad de que un suceso detectado sea de señal. Una vez realizado el experimento queremos estimar el número de sucesos señal N_s realizando un ajuste utilizando el método de máxima verosimilitud.

   a) Mediante simulación Monte Carlo generar 1000 sucesos de los cuales, los primeros 200 son gaussianos y el resto exponenciales. Utilizad los siguientes valores de los parámetros: $\mu = 5.0$, $\sigma = 0.25$ para la gaussiana de los sucesos señal y $\tau = 3.0$ para la exponencial de los sucesos de fondo. Representar los resultados en un histogramas en el intervalo [0, 10]
   b) Realizar mediante un ajuste por máxima verosimilitud (ML) una estimación del número de sucesos señal y su error.
   c) Realizar mediante el método de máxima verosimilitud extendido (EML) un ajuste estimando simultáneamente el número de sucesos señal, N_s, y el número de sucesos de fondo, N_b.
   d) Comparar y discutir los errores.
   e) Representar gráficamente los resultados.

4. **Método de máxima verosimilitud extendido (II). Ajustar una resonancia cuya normalización depende de la masa.-** Supongamos que tenemos una muestra de datos de una señal determinada μ (puede ser la masa de una partícula) cuya tasa de producción ν depende del valor de μ. Por ejemplo, la producción del quark top en el LHC, cuanto mayor sea la masa menor es la sección eficaz de producción. Supongamos que para un valor de μ = 7, la tasa de producción es de ν = 9 sucesos. Generar una muestra de datos de un experimento de este tipo del siguiente modo. Para saber el número de sucesos producidos generamos un número de acuerdo con una distribución de Poisson con valor promedio esperado ν = 9. Para cada uno de los sucesos generamos un valor de la variable *x* de acuerdo con una distribución gaussiana centrada en μ = 7 y de anchura σ = 1.
   a) Aplicar el método de máxima verosimilitud (ML) para obtener una estimación del parámetro μ.
   b) Aplicar el método de máxima verosimilitud extendido (MLE) suponiendo que la tasa de producción de sucesos depende de μ del siguiente modo:
   $$\nu = 9\exp\left[-4\left(\mu-7\right)\right]$$
   c) Comparar los errores en uno y otro caso. Para ello repetir los experimentos un número elevado de veces y obtener la distribución del parámetro μ en uno y otro caso y comparar.