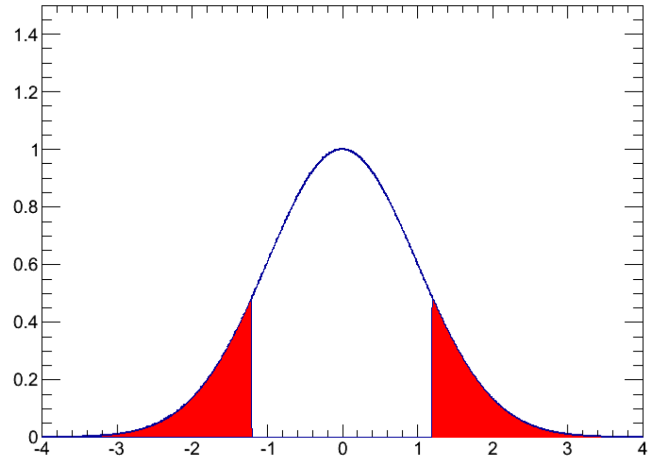
Tema 10 Intervalos de confianza (I)

1. **Introducción**
2. **Cinturones de confianza. Método clásico**
3. **Límites de Confianza**
4. **Intervalos de confianza para estimadores gaussianos.**
5. **Intervalos de confianza en el método ML**
6. **Intervalos de confianza con varios parámetros.**
7. **Límites cerca de una frontera física**
8. **Intervalos de confianza bayesianos**
9. Intervalos de confianza de Poisson
10. Intervalos de Poisson con fondo
    1. Aproximación bayesiana
    2. Método de Feldman-Cousins



1. Introducción

Los métodos estudiados hasta ahora nos permiten estimar los valores de parámetros desconocidos y calcular sus varianzas.

La varianza de un estimador es una medida de la dispersión de las estimaciones si pudiéramos repetir el experimento muchas veces todas ellas con el mismo número de medidas

Supongamos que tenemos n observaciones de la variable aleatoria x, una hipótesis para su pdf $f(x,\theta)$
A partir de la muestra de medidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenemos $\hat{\theta}$ como estimador de θ y $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ como estimador de su desviación estándar

Resultado de la medida: $\hat{\theta}_{obs} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$

Significado

Las repetidas estimaciones del parámetro realizadas todas ellas con n observaciones de la variable x se distribuyen como una pdf $g(\hat{\theta})$ centrada en el valor verdadero del parámetro θ y de anchura $\sigma_{\hat{\theta}}$ que han sido estimados como $\hat{\theta}_{obs}$ y $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$

En muchos casos, los estimadores se distribuyen con pdf $g(\hat{\theta})$ que suelen ser aproximadamente gaussianas, y la desviación estándar se suele usar como error estadístico.

Sin embargo, cuando $g(\hat{\theta})$ no es gaussiana se suele utilizar otra definición para los intervalos de confianza

2. Intervalos de confianza. Método clásico

También conocido por método ***clásico*** o ***frecuentista***. Propuesto por Neyman en 1937.

Cuando hablamos de ***"Estimación de parámetros"*** hablamos de métodos para estimar los valores de parámetros desconocidos.

En ***"Estimación de intervalos"*** lo que queremos es encontrar un intervalo o rango: $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$
Cuya probabilidad de contener al valor verdadero θ_{true} es del %CL .

Dicho intervalo se denomina intervalo de confianza con una probabilidad de contenido (***"coverage"***) o nivel de confianza (*confidence level*) del %CL.

$$P\left(\theta_a \leq \theta_{true} \leq \theta_b\right) = \%CL$$

Significado

Si repetimos el experimento muchas veces y en cada una de ellas calculamos un intervalo de confianza, $\left[\theta_a, \theta_b\right]$, el CL % de las veces el valor verdadero estará contenido en el intervalo.

Fijémonos que en un intervalo de confianza frecuentista no se afirma nada sobre el valor verdadero de θ. Para un experimento dado y su correspondiente intervalo, el valor verdadero puede o puede que no esté contenido en el intervalo. Pero si repetimos el experimento y el cálculo del intervalo muchas veces, en el CL % de los experimentos, el valor verdadero de θ estará dentro del intervalo de confianza calculado.

¡Cuidado!

Se dice que la probabilidad de que $\left[\theta_a, \theta_b\right]$ contenga al valor verdadero θ_{true} es del CL % pero no que la probabilidad de que θ_{true} esté en el intervalo $\left[\theta_a, \theta_b\right]$ es del CL %.

En estimación de intervalos, el valor verdadero θ_{true} es un valor constante pero desconocido mientras que θ_a, θ_b son funciones de variables aleatorias y por tanto variables aleatorias a su vez.

2. Intervalos de confianza. Método clásico

Supongamos que tenemos n observaciones de la variable aleatoria x, las cuales las utilizamos para evaluar el estimador $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de un parámetro θ, cuyo valor verdadero es θ_t, y que el valor observado es $\hat{\theta}_{obs}$

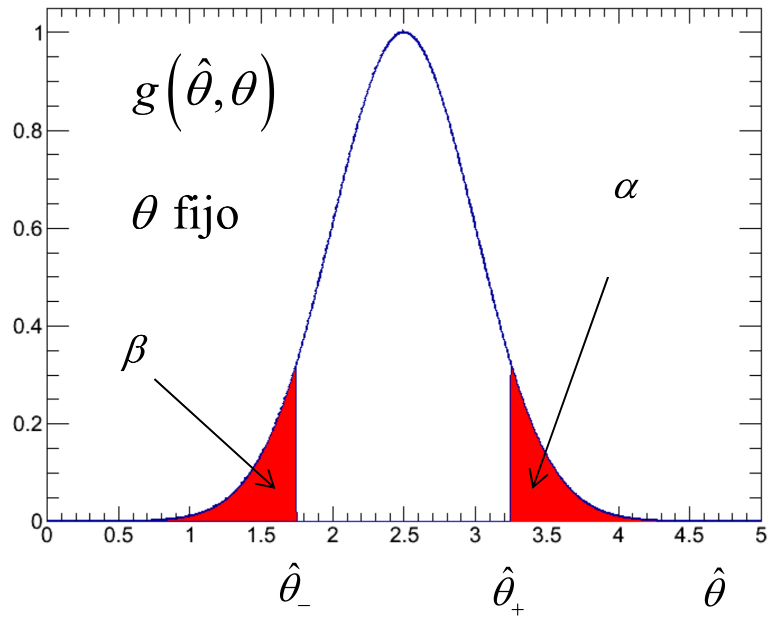
Queremos encontrar un intervalo tal que: $P(\theta_a \le \theta_t \le \theta_b) = \%CL$

Supongamos que además conocemos la pdf de $\hat{\theta}$, $g(\hat{\theta}, \theta)$ que contiene a θ como un parámetro. Es decir, no conocemos el valor verdadero de θ pero dado un valor de θ, conocemos la pdf de $\hat{\theta}$

Por tanto, para cada valor dado de θ podemos encontrar un intervalo $\left[\hat{\theta}_-, \hat{\theta}_+\right]$ tal que:

$$P\left(\hat{\theta}_- \le \hat{\theta} \le \hat{\theta}_+\right) = \int_{\hat{\theta}_-}^{\hat{\theta}_+} g\left(\hat{\theta}, \theta\right) d\hat{\theta} = 1 - \alpha - \beta$$

¿Cómo construir un intervalo de confianza en el espacio de parámetros a partir de intervalos de confianza en el espacio de estimadores?



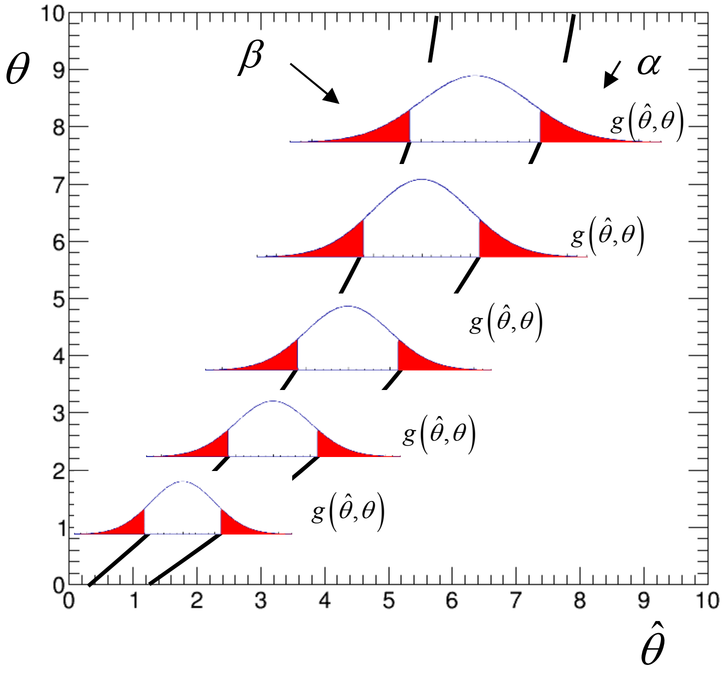
2. Intervalos de confianza. Método clásico

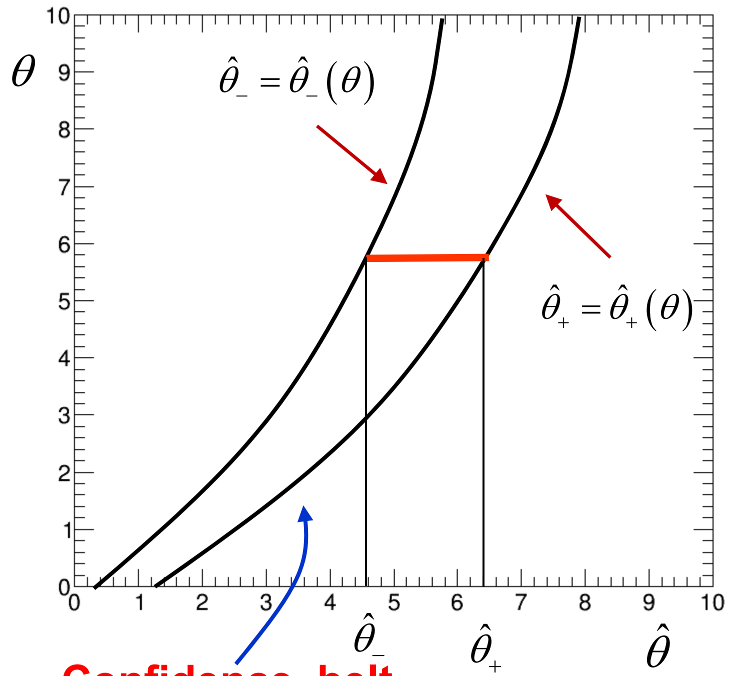
Repitiendo el cálculo del intervalo $\left[\hat{\theta}_-, \hat{\theta}_+\right]$ para cada valor del parámetro θ obtenemos los denominados cinturones de confianza construyendo las funciones:

$$\hat{\theta}_+ = \hat{\theta}_+(\theta) \quad \Rightarrow \quad P\left(\hat{\theta} \geq \hat{\theta}_+\right) = \int_{\hat{\theta}_+}^{\infty} g\left(\hat{\theta}, \theta\right) d\hat{\theta} = \alpha$$

$$\hat{\theta}_- = \hat{\theta}_-(\theta) \quad \Rightarrow \quad P\left(\hat{\theta} \leq \hat{\theta}_-\right) = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_-} g\left(\hat{\theta}, \theta\right) d\hat{\theta} = \beta$$

Intervalos que contienen el % CL de los sucesos observados para cada valor del parámetro θ





2. Intervalos de confianza. Método clásico

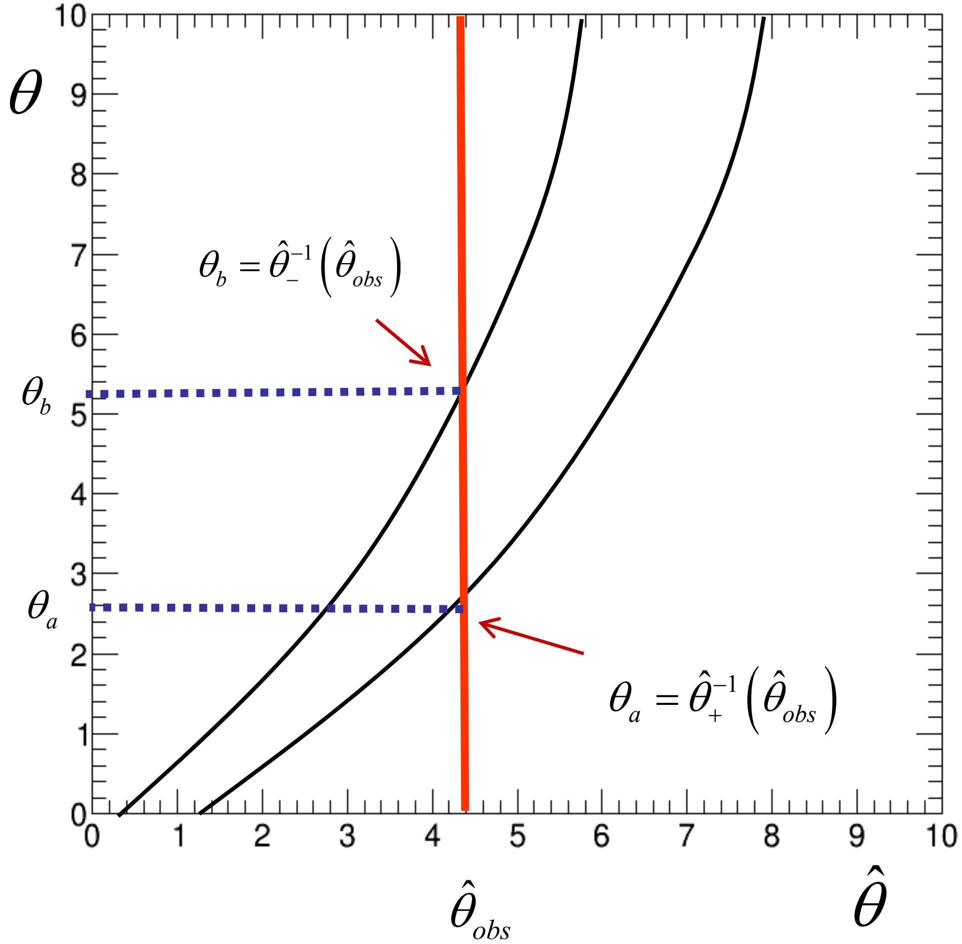
Una vez realizado el experimento y obtenido el valor del estimador observado $\hat{\theta}_{obs}$, el intervalo de confianza en el espacio de parámetros se obtiene invirtiendo las funciones anteriores para el valor observado:

$$\theta_a = \hat{\theta}_+^{-1}\left(\hat{\theta}_{obs}\right) \qquad \theta_b = \hat{\theta}_-^{-1}\left(\hat{\theta}_{obs}\right)$$

$[\theta_a, \theta_b]$

INTERVALO DE CONFIANZA

$\Rightarrow$ $[\theta_a, \theta_b]$



Independientemente de cual sea el valor verdadero, la probabilidad de que el intervalo así calculado lo contenga es siempre:

$$1-\beta-\alpha = \%CL$$

Veámoslo con un ejemplo

2. Intervalos de confianza. Método clásico

Ejemplo.

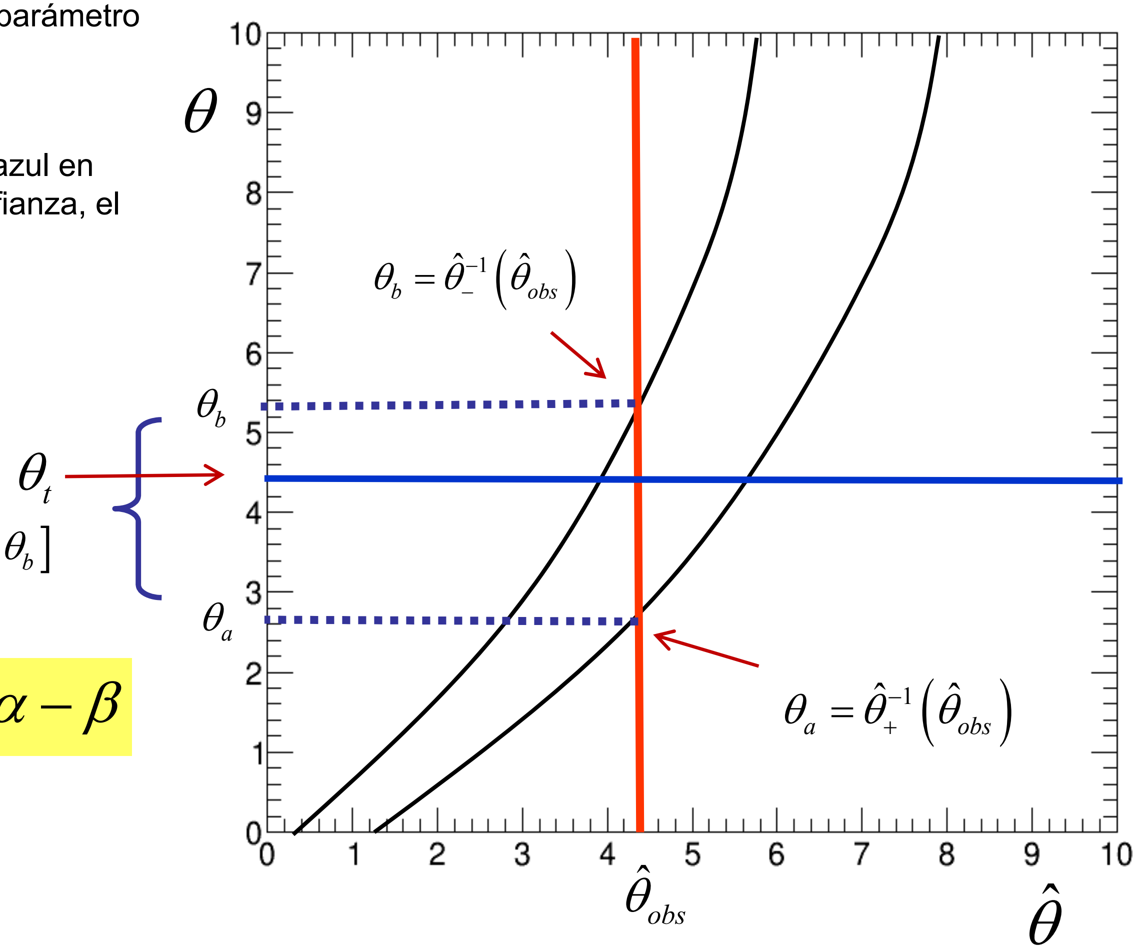
Supongamos que el valor verdadero del parámetro es el que se muestra en la figura: θ_t

Siempre que la línea roja intersecte a la azul en la zona delimitada por el cinturón de confianza, el intervalo de confianza contendrá al valor verdadero del parámetro

Pero por construcción, esto solo ocurrirá el

$1-\alpha-\beta \quad \%$

$[\theta_a, \theta_b]$



$$P\left(\theta_a \le \theta \le \theta_b\right) = 1-\alpha-\beta$$

Si el experimento se repitiera muchas veces, el intervalo $\left[\theta_a, \theta_b\right]$ incluiría al valor verdadero del parámetro θ en una fracción $1-\alpha-\beta \quad \%$ de los experimentos

2. Intervalos de confianza. Método clásico

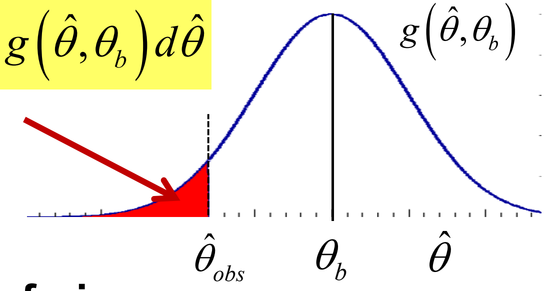
Significado de los límites

α

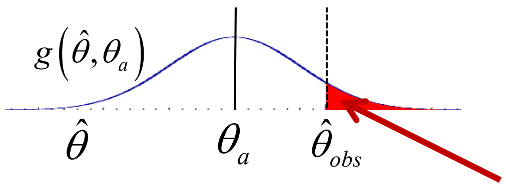
Límite superior

Por construcción el valor de θ_b representa el valor del parámetro verdadero θ para el que una fracción β de las estimaciones del $\hat{\theta}$ son menores que la observada $\hat{\theta}_{obs}$

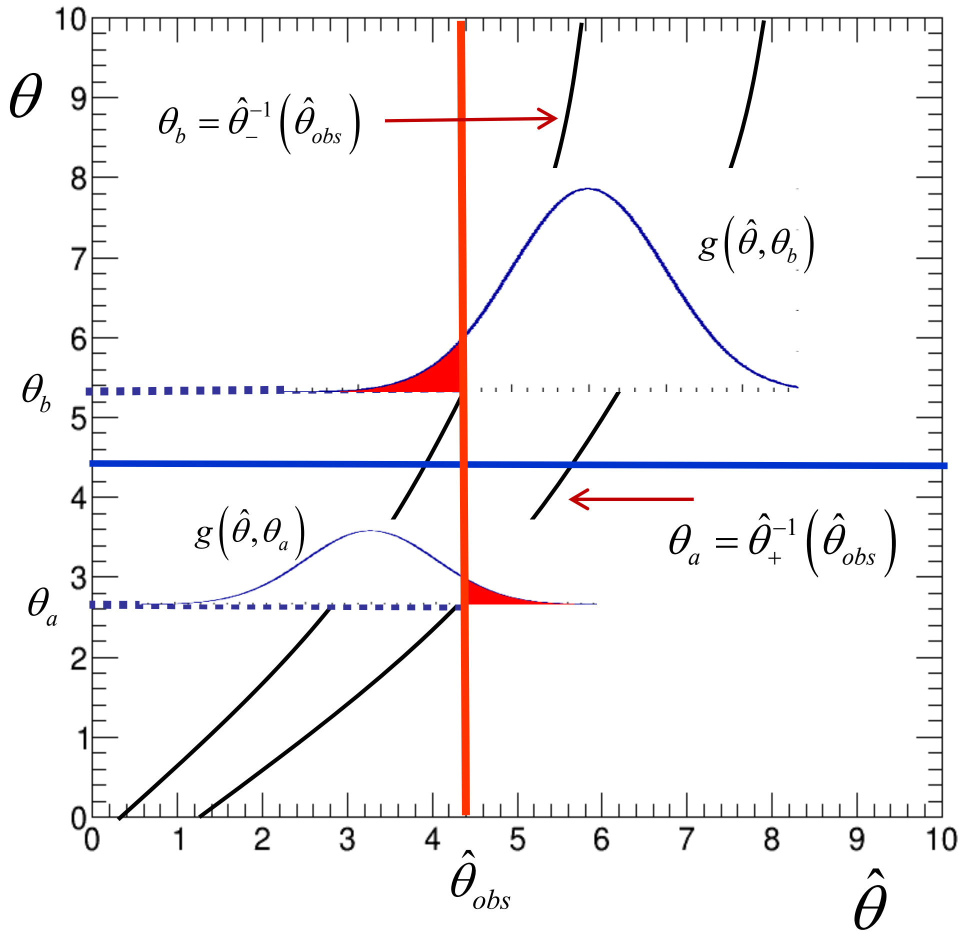
$$\beta = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{obs}} g\left(\hat{\theta},\theta_b\right) d\hat{\theta}$$



Límite inferior



$$\alpha = \int_{\hat{\theta}_{obs}}^{\infty} g\left(\hat{\theta},\theta_a\right) d\hat{\theta}$$



Por construcción el valor de θ_a representa el valor del parámetro verdadero θ para el que una fracción α de las estimaciones del $\hat{\theta}$ son mayores que la observada $\hat{\theta}_{obs}$

2. Intervalos de confianza. Método clásico

Dado un nivel de confianza (% CL) o un valor de α o de β, los intervalos así definidos no son únicos, existe muchas soluciones y por tanto una ambigüedad:

Las soluciones más utilizadas son las siguientes:

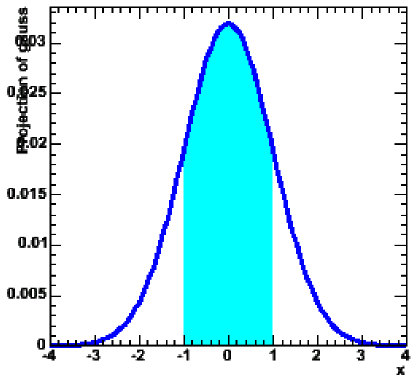
- **Intervalo simétrico:** $\theta - \theta_a = \theta_b - \theta$ son equidistantes respecto a la media.
- **Intervalo más corto**, se eligen los límites θ_a, θ_b de manera que la distancia $|\theta_b - \theta_a|$ sea la mínima posible
- **Intervalo central**, el contenido de probabilidad por arriba y por debajo del intervalo es idéntico $\alpha = \beta$

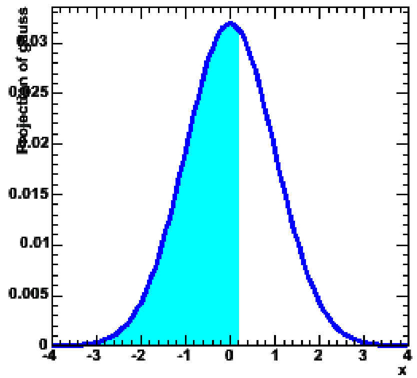
$$\alpha = \int_{\hat{\theta}_{obs}}^{\infty} g\left(\hat{\theta},\theta_a\right) d\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{obs}} g\left(\hat{\theta},\theta_b\right) d\hat{\theta} = \beta = \frac{1-CL}{2}$$

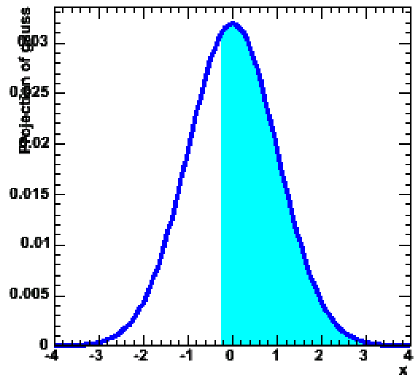
- ***One sided, upper limit*** $\theta_a = -\infty$ **o *lower limit*** $\theta_b = +\infty$

Los tres criterios coinciden para distribuciones simétricas con un solo máximo, como en el caso de las distribuciones gaussianas

No siempre son preferibles los intervalos simétricos







3. Límites de confianza

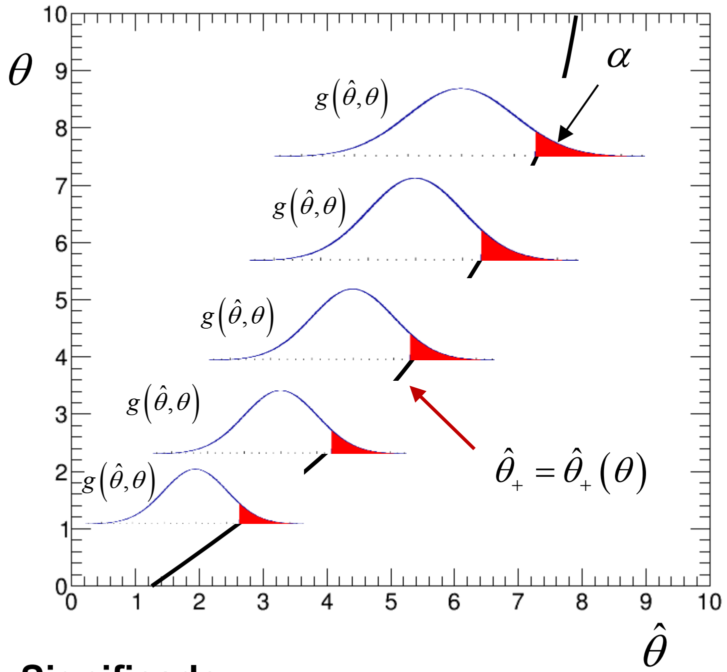
Cuando uno de los límites del intervalo de confianza es infinito: $[\theta_a, +\infty]$, $[-\infty, \theta_b]$, los valores de θ_a y θ_b se denominan límites inferior (***lower limit***) y superior (***upper limit***) respectivamente

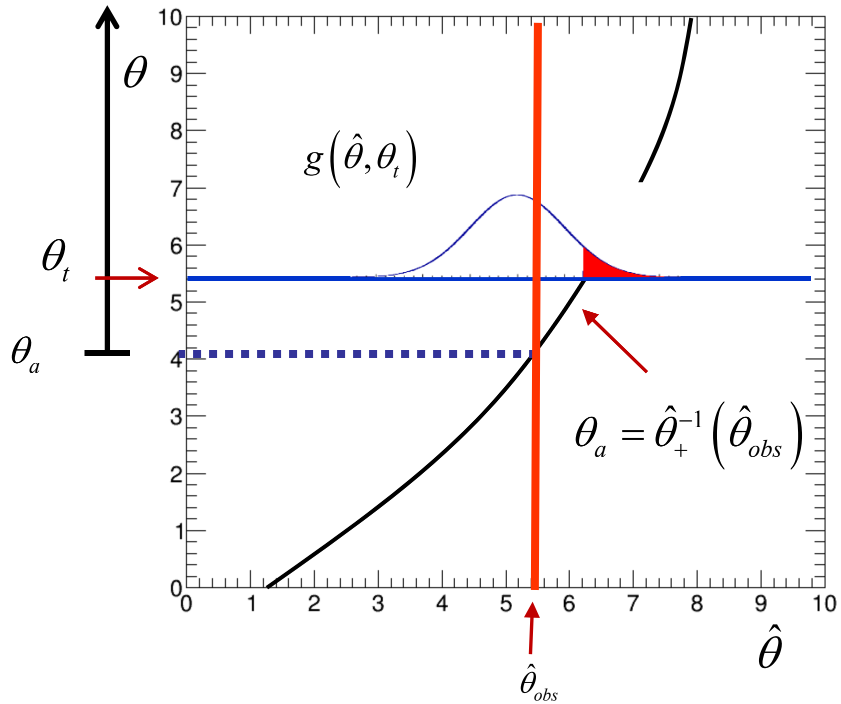
Límite inferior

Procediendo de manera análoga a la anterior, para cada valor dado de θ, obtenemos un intervalo $[-\infty, \hat{\theta}_+]$ tal que:

$$P\left(\hat{\theta} \le \hat{\theta}_+\right) = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_+} g\left(\hat{\theta}, \theta\right) d\hat{\theta} = 1 - \alpha$$

Una vez realizado el experimento y obtenido el valor del estimador observado $\hat{\theta}_{obs}$, el intervalo de confianza se obtiene invirtiendo las función anterior para el valor observado:





Significado

Si el experimento se repitiera muchas veces, el intervalo $[\theta_a, +\infty]$ incluiría al valor verdadero del parámetro θ_t en una fracción $1-\alpha$ % de los experimentos

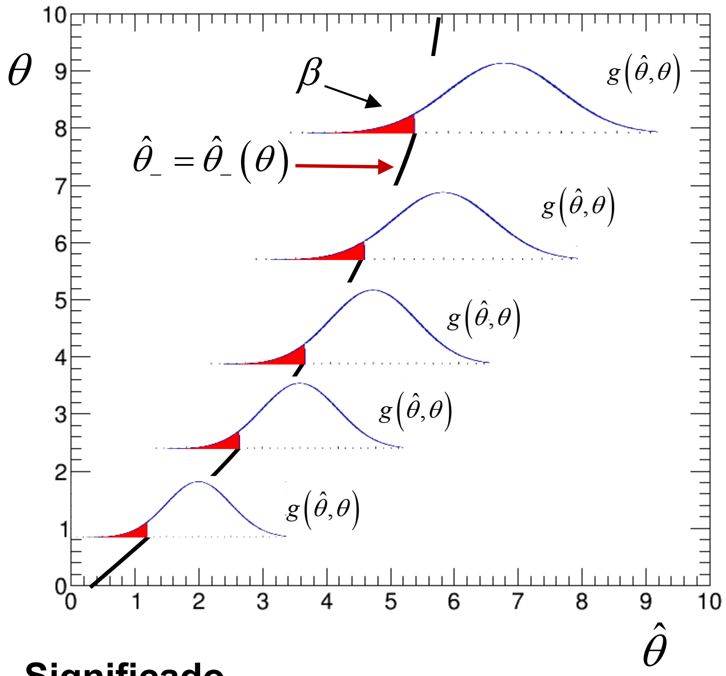
3. Límites de confianza

Cuando uno de los límites del intervalo de confianza es infinito: $[\theta_a, +\infty]$, $[-\infty, \theta_b]$, los valores de θ_a y θ_b se denominan límites inferior (***lower limit***) y superior (***upper limit***) respectivamente

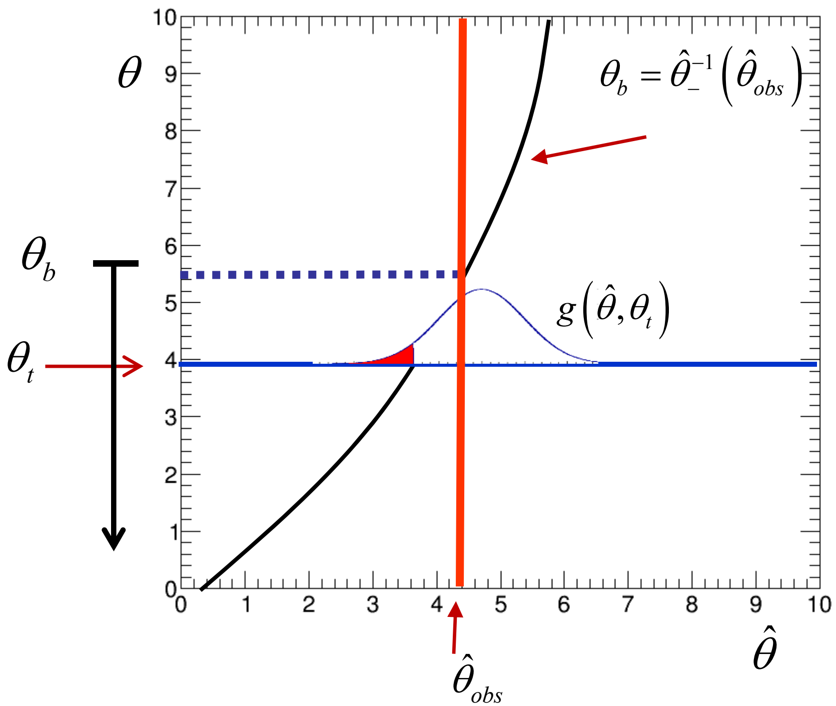
Límite superior

Procediendo de manera análoga a la anterior, para cada valor dado de θ, obtenemos un intervalo $[\hat{\theta}_-, +\infty]$ tal que:

$$P\left(\hat{\theta}_- \leq \hat{\theta}\right) = \int_{\hat{\theta}_-}^{+\infty} g\left(\hat{\theta}, \theta\right) d\hat{\theta} = 1 - \beta$$



Una vez realizado el experimento y obtenido el valor del estimador observado $\hat{\theta}_{obs}$, el intervalo de confianza se obtiene invirtiendo las función anterior para el valor observado:



Significado

Si el experimento se repitiera muchas veces, el intervalo $[-\infty, \theta_b]$ incluiría al valor verdadero del parámetro θ_t en una fracción $1-\beta$ % de los experimentos

4.- Estimadores gaussianos

Un caso muy sencillo es cuando el estimador se distribuye gaussianamente con media θ y desviación estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$.

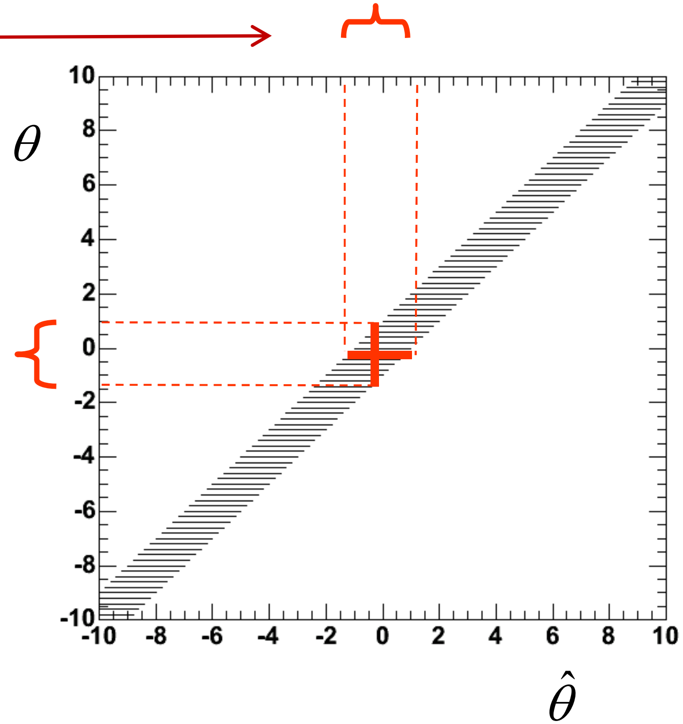
$$g\left(\hat{\theta},\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\theta}}^2}}\exp\left[\frac{\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}\right]$$

Situación muy común cuando el estimador es una combinación lineal de variables aleatorias, pues según el TLC tiende a ser gaussiano en el límite de grandes números.

Pasar de intervalos de probabilidad en el estimador, a intervalos de confianza en el parámetro es muy fácil debido a la simetría de la distribución normal.

$$P\left(\theta-\sigma_{\hat{\theta}}\leq\hat{\theta}\leq\theta+\sigma_{\hat{\theta}}\right)=\int_{\theta-\sigma_{\hat{\theta}}}^{\theta+\sigma_{\hat{\theta}}}g\left(\hat{\theta},\theta\right)d\hat{\theta}$$

$$P\left(\hat{\theta}-\sigma_{\hat{\theta}}\leq\theta\leq\hat{\theta}+\sigma_{\hat{\theta}}\right)=\int_{\hat{\theta}-\sigma_{\hat{\theta}}}^{\hat{\theta}+\sigma_{\hat{\theta}}}g\left(\hat{\theta},\theta\right)d\theta$$



Ambos intervalos son equivalentes.

Recordemos que θ no es una variable aleatoria sino una constante desconocida

4.- Estimadores gaussianos

La función acumulativa viene dada por: $G\left(\hat{\theta};\theta;\sigma_{\hat{\theta}}\right)=\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} g\left(\hat{\theta}',\theta\right)d\hat{\theta}'=\int_{-\infty}^{\hat{\theta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\theta}}^2}}\exp\left[\frac{\left(\hat{\theta}'-\theta\right)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}\right]d\hat{\theta}'$

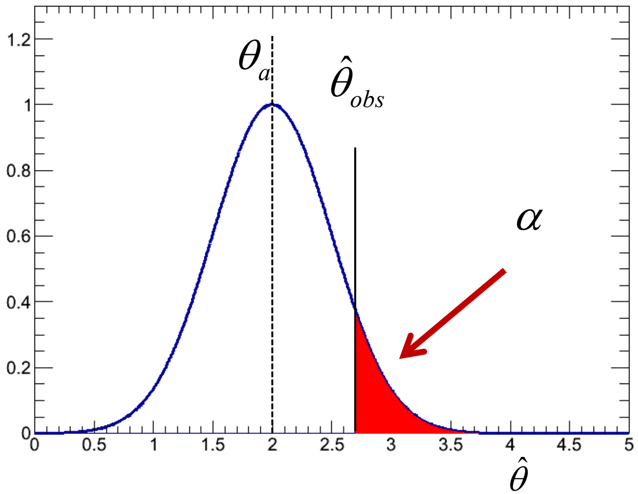
Si el resultado del experimento es $\hat{\theta}_{obs}$ y conocemos $\sigma_{\hat{\theta}}$, el intervalo de confianza se obtiene resolviendo las ecuaciones:

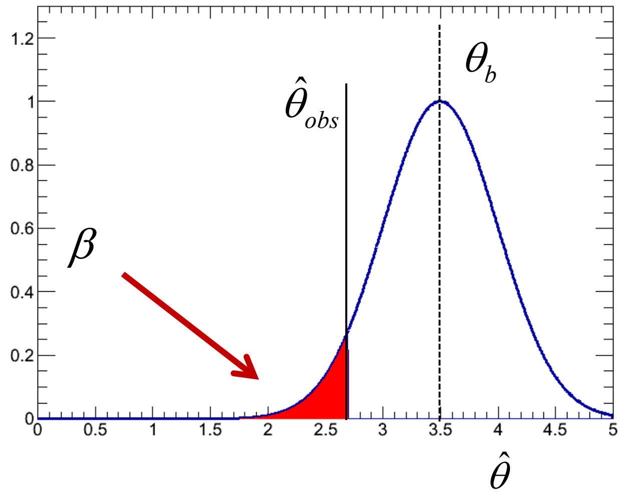
$$\alpha=1-G\left(\hat{\theta}_{obs};\theta_a;\sigma_{\hat{\theta}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{obs}-\theta_a}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right)$$

$$\theta_a=\hat{\theta}_{obs}-\sigma_{\hat{\theta}}\Phi^{-1}\left(1-\alpha\right)$$

$$\beta=G\left(\hat{\theta}_{obs};\theta_b;\sigma_{\hat{\theta}}\right)=\Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{obs}-\theta_b}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right)$$

$$\theta_b=\hat{\theta}_{obs}+\sigma_{\hat{\theta}}\Phi^{-1}\left(1-\beta\right)$$





Φ Es la función acumulativa de la distribución normal estándar $\qquad \Phi^{-1}\left(\beta\right)=-\Phi^{-1}\left(1-\beta\right)$

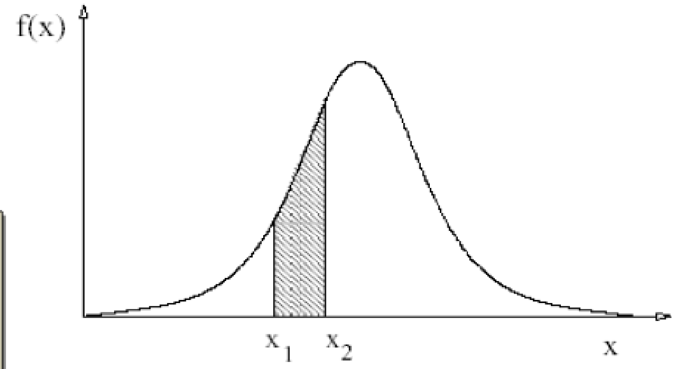
Φ^{-1} Es la función inversa, i.e., la función cuantil (distancia entre los límites θ_a y θ_b y el valor observado $\hat{\theta}_{obs}$ en unidades de desviaciones estándar

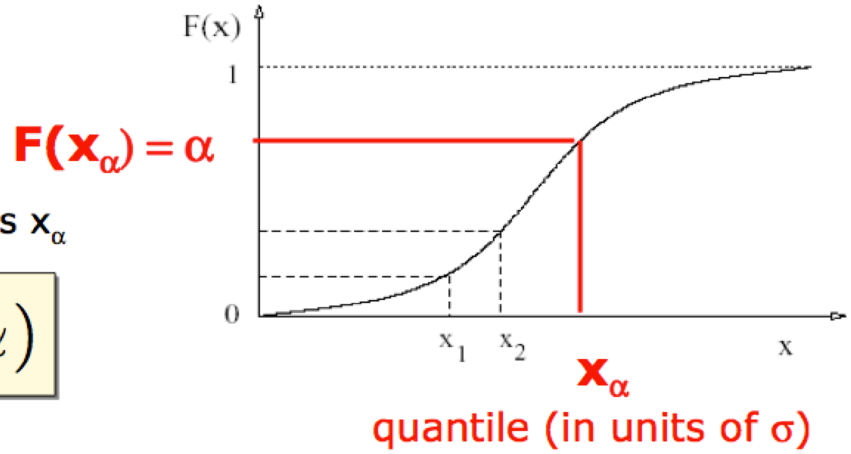
4.- Estimadores gaussianos

Cuantiles gráficamente

PDF: $$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

CDF: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\cdot dx'$$





➔ quantile of order α is x_α

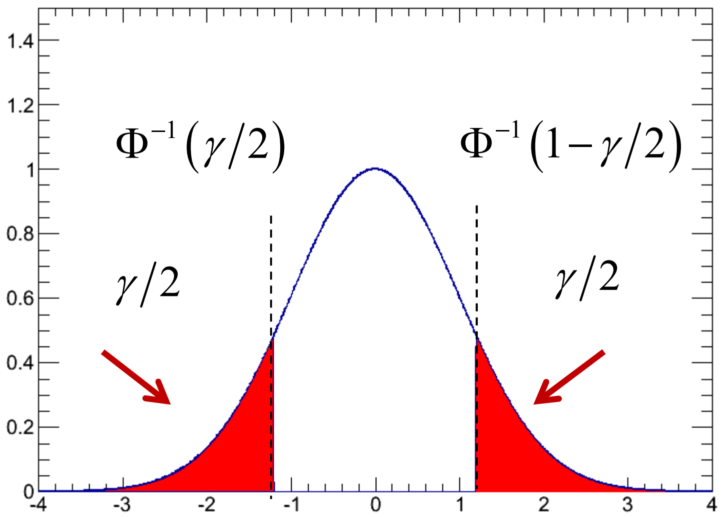
$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

Para la distribución normal estándar $F = \Phi$ $F^{-1} = \Phi^{-1}$

Φ^{-1} Es la función inversa, i.e., la función cuantil (distancia entre los límites θ_a y θ_b y el valor observado $\hat{\theta}_{obs}$ en unidades de desviaciones estándar

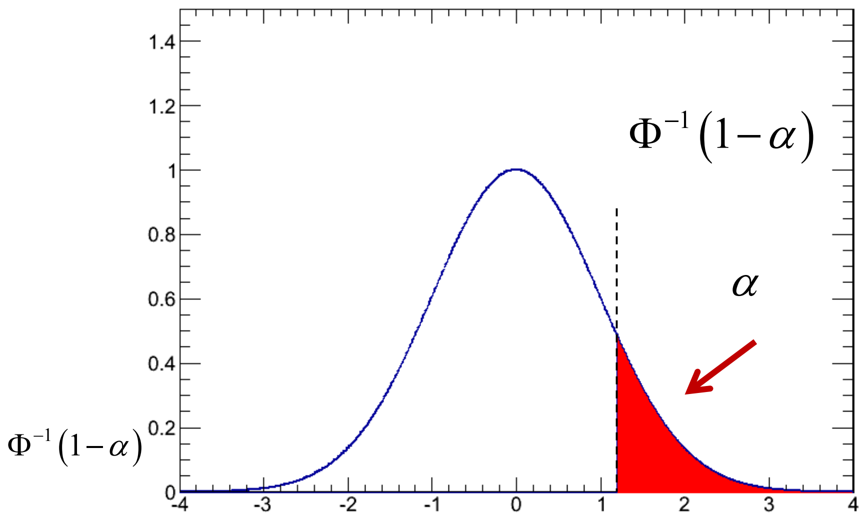
4.- Estimadores gaussianos

Intervalos centrales (*two-sided*)



$$\alpha = \beta = \gamma/2$$

Intervalos laterales (*One-sided*)



$\Phi^{-1}(1-\gamma/2)$	$(1-\gamma)$	$(1-\gamma)$	$\Phi^{-1}(1-\gamma/2)$
1	0.6827	0.9	1.645
2	0.9544	0.95	1.960
3	0.9973	0.99	2.576

$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	$(1-\alpha)$	$(1-\alpha)$	$\Phi^{-1}(1-\alpha)$
1	0.8413	0.9	1.282
2	0.9772	0.95	1.645
3	0.9987	0.99	2.326

5. Intervalos de confianza a partir de la likelihood

Supongamos un estimador ML $\hat{\theta}$ de un parámetro θ. En el límite de grandes muestras, la función de verosimilitud tiende a una distribución gaussiana centrada en el estimador ML $\hat{\theta}$:

$$L(\theta) = L_{\max} \exp\left[-\frac{\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2} \right] \quad \Rightarrow \quad \ln L(\theta) = \ln L_{\max} - \frac{\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}$$

Si $\theta = \hat{\theta} \pm N\sigma_{\hat{\theta}}$

$$L\left(\hat{\theta} \pm N\sigma_{\hat{\theta}}\right) = L_{\max} \exp\left[-\frac{\left(\hat{\theta} \pm N\sigma_{\hat{\theta}} - \hat{\theta}\right)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2} \right] = L_{\max}\, e^{-\frac{N^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln L\left(\hat{\theta} \pm N\sigma_{\hat{\theta}}\right) = \ln L_{\max} - \frac{N^2}{2} = \ln L_{\max} - A}$$

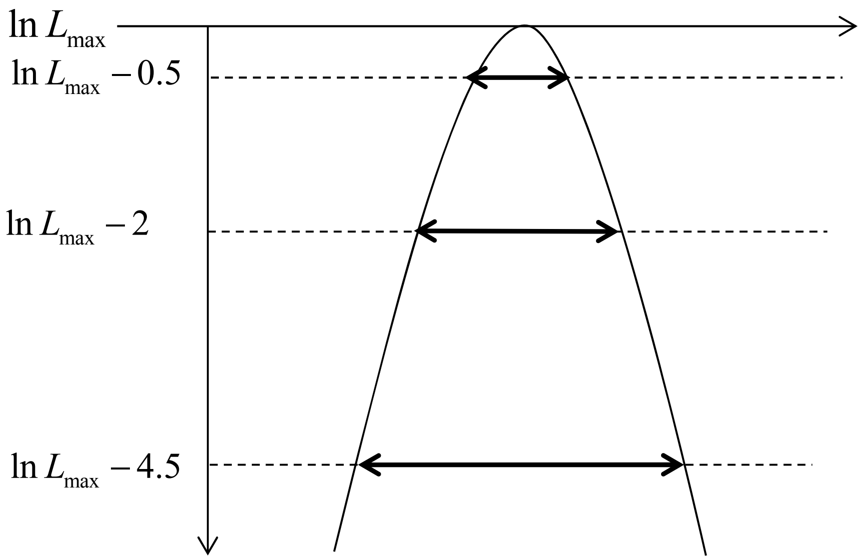
El intervalo se obtiene interseccionando la parábola $\ln L(\theta)$ por una línea recta a una distancia A por debajo del máximo $\ln L_{\max}$

$N = 1 \rightarrow A = 0.5 \rightarrow 68.3\ \%$

$N = 2 \rightarrow A = 2.0 \rightarrow 95.4\ \%$

$N = 3 \rightarrow A = 4.5 \rightarrow 99.7\ \%$

$$[\theta_a, \theta_b] = \left[\hat{\theta} - N\sigma_{\hat{\theta}}, \hat{\theta} + N\sigma_{\hat{\theta}}\right]$$

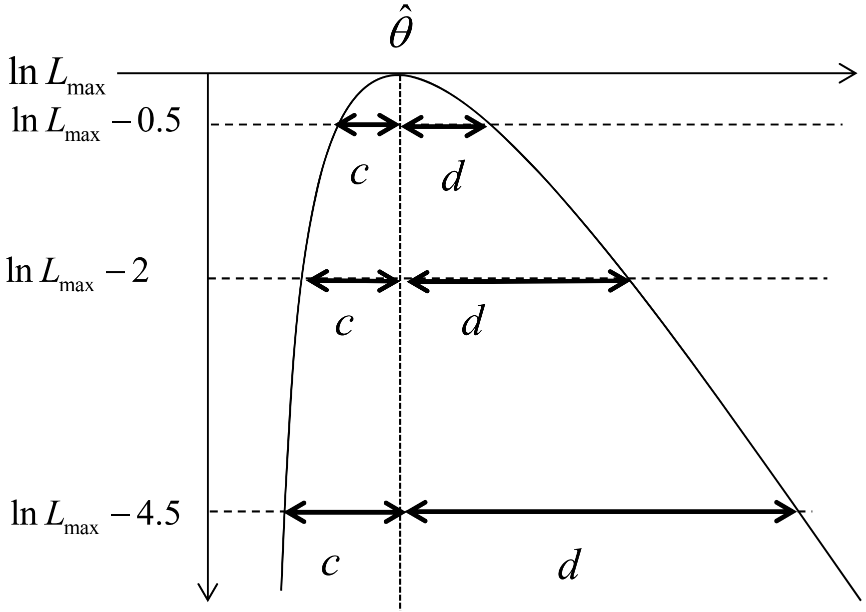


5. Intervalos de confianza a partir de la likelihood

Incluso si la *likelihood* no es gaussiana, el intervalo de confianza se puede aproximar por:

$$\ln L\left(\hat{\theta}_{-c}^{+d}\right) = \ln L_{\max} - \frac{N^2}{2} = \ln L_{\max} - A$$

$$[\theta_a, \theta_b] = \left[\hat{\theta} - c, \hat{\theta} + d\right]$$



En el caso de ajustes por mínimos cuadrados con errores gaussianos

$$\left.\begin{aligned} \ln L(\theta) &= -\frac{\chi^2}{2} \\ \ln L(\theta) &= \ln L_{\max} - \frac{N^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi^2\left(\hat{\theta}_{-c}^{+d}\right) = \chi^2_{\min} + N^2 = \chi^2_{\min} + a$$

$N = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow 68.3\ \%$

$N = 2 \rightarrow a = 4 \rightarrow 95.4\ \%$

$N = 3 \rightarrow a = 9 \rightarrow 99.7\ \%$

La correspondencia con el método clásico solo es exacta en el límite de grandes muestras.

6. Intervalos de confianza para varios parámetros

Cuando tenemos varios parámetros $\overline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ lo lógico sería encontrar un intervalo de confianza n-dimensional $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ construido de manera que la probabilidad.

$$a_i < \theta_i < b_i \quad \forall i$$

sea la misma simultáneamente para todos los parámetros. ➡ Muy difícil computacionalmente.

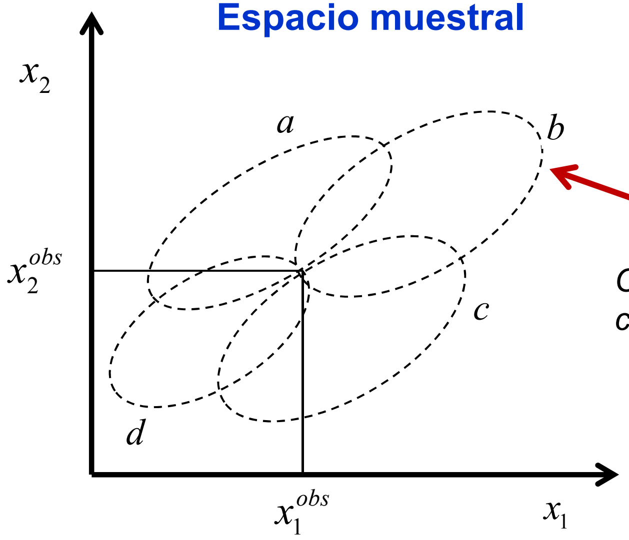
Resulta más sencillo construir una región en el espacio de parámetros de manera que el vector de parámetros verdadero $\overline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ esté contenido en dicha región con una probabilidad dada.

Dicha región no será de la forma $a_i < \theta_i < b_i \quad i = 1, \ldots, n$ sino mucho más complicada tendiendo a un hiperelipsoide n-dimensional a medida que nos acercamos al límite de grandes números.

6. Intervalos de confianza para varios parámetros

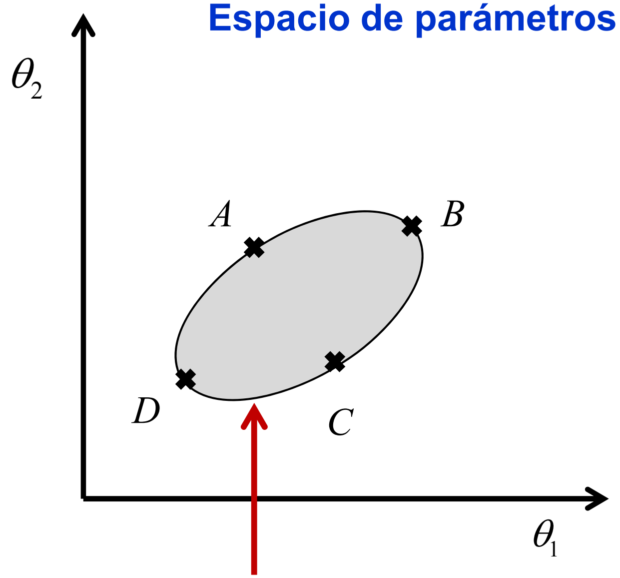
Supongamos un espacio de parámetros bidimensional (θ_1, θ_2) y un estadístico consistente en un vector (x_1, x_2)

Espacio muestral



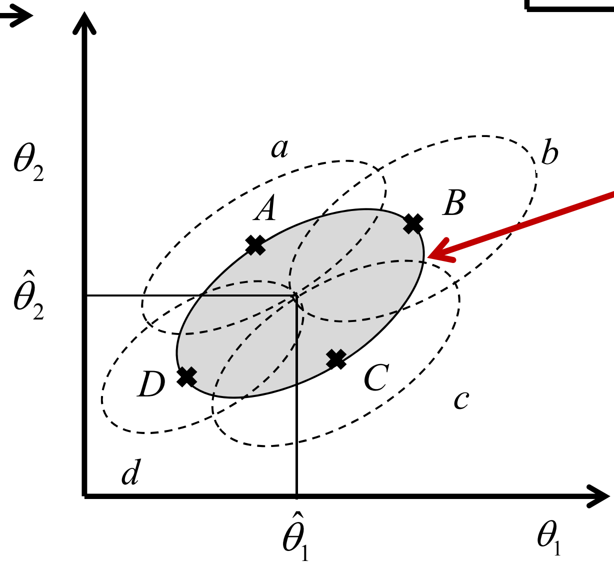
Contorno de probabilidad con probabilidad α

Espacio de parámetros



Todos los valores de los parámetros contenidos en la región de confianza contienen el valor medido en su propio contorno de probabilidad

La región de confianza así construida contendrá los parámetros verdaderos el α de las veces



Región de confianza

Curva que conecta todos los puntos en el espacio de parámetros cuyos contornos de probabilidad en el espacio muestral pasan por el punto medido

6. Intervalos de confianza para varios parámetros

En el límite de grandes números, los estimadores se distribuyen gaussianamente:

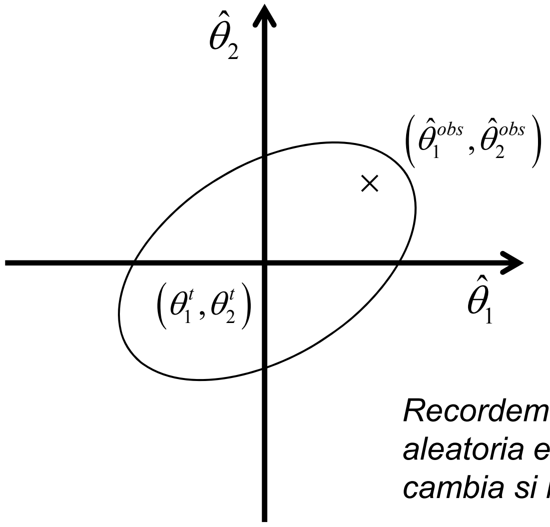
$$g\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|V|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}Q\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)\right] \quad \text{con} \quad Q\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)=\left(\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta}\right)^T V^{-1}\left(\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta}\right)$$

$Q\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)$ se distribuye como una distribución de $\chi^2(n)$ con n grados de libertad

Contornos de valor constante en $g\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)$ corresponden a valores constantes en $Q\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)$

Se trata de elipses o hiper-elipsoides (más de dos dimensiones) en el espacio de estimadores centradas en el valor del parámetro verdadero

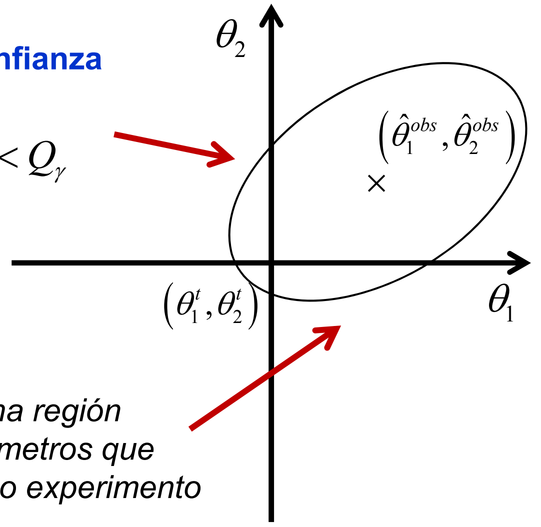
Espacio de estimadores



Espacio de parámetros

Región de confianza

$$Q\left(\hat{\vec{\theta}},\vec{\theta}\right)<Q_\gamma$$



Recordemos que se trata de una región aleatoria en el espacio de parámetros que cambia si repetimos la medida o experimento

6. Intervalos de confianza para varios parámetros

La probabilidad de que la estimación obtenida $\left(\hat{\theta}_1^{obs}, \hat{\theta}_2^{obs}\right)$ esté a una determinada distancia del valor verdadero del parámetro $\left(\theta_1^t, \theta_2^t\right)$ es equivalente entonces a: $Q\left(\hat{\overline{\theta}}, \overline{\theta}\right) < Q_\gamma$

Como $Q\left(\hat{\overline{\theta}}, \overline{\theta}\right)$ se distribuye como una distribución de $\chi^2(n)$ con n grados de libertad

$$P\left(Q\left(\hat{\overline{\theta}}, \overline{\theta}\right) < Q_\gamma\right) = \int_0^{Q_\gamma} f\left(\chi^2; n\right) d\chi^2$$

El valor de Q_γ se elige de manera que corresponda con una probabilidad dada

$$\int_0^{Q_\gamma} f\left(\chi^2; n\right) d\chi^2 = 1 - \gamma \quad \Rightarrow \quad Q_\gamma = F^{-1}\left(1-\gamma; n\right)$$

Q_γ	$1-\gamma$				
	n=1	*n=2*	*n=3*	*n=4*	*n=5*
1.0	0.683	0.393	0.199	0.090	0.037
2.0	0.843	0.632	0.428	0.264	0.151
4.0	0.954	0.865	0.739	0.594	0.451
9.0	0.997	0.989	0.971	0.939	0.891

Valores del nivel de confianza para diferentes valores de Q_γ y diferentes valores de *n = 1, 2, 3, 4, 5*

$1-\gamma$	Q_γ				
	n=1	*n=2*	*n=3*	*n=4*	*n=5*
0.683	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89
0.90	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24
0.95	3.84	5.99	7.82	9.49	11.1
0.99	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1

Valores del cuantil Q_γ para diferentes valores de nivel de confianza para diferentes valores de *n = 1, 2, 3, 4, 5*

7. Límites cerca de una frontera física

Muchas veces el objetivo de un experimento es buscar un nuevo fenómeno o efecto, cuya existencia implica que un determinado parámetro es diferente cero:

- Medida de la masa del neutrino.
- Búsqueda de materia oscura.
- Búsqueda de partículas supersimétricas, etc.

Si los datos dan un valor del parámetro significativamente diferente de cero, el nuevo efecto se considera descubierto, **parámetro e intervalo de confianza** se dan como resultado.

Si los datos dan un valor del parámetro compatible con cero, el resultado suele ser un **límite superior**

Las dificultades surgen cuando nos encontramos cerca de una región excluida:

Ejemplo:

$$\widehat{m^2} = E^2 - p^2 \quad \Longrightarrow$$

Los errores en la medida de E^2 y p^2 pueden dar lugar a valores negativos de m^2 !!!

¿Cómo poner un límite cuando la estimación está muy cerca de una región de exclusión?

7. Límites cerca de una frontera física

Supongamos dos variables gaussianas y un estimador : $\hat{\theta} = x - y$

$$\left.\begin{array}{l} x \to N\left(\mu_x, \sigma_x^2\right) \\ y \to N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right) \end{array}\right\} \hat{\theta} = x - y \to N\left(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)$$

El límite superior vendrá dado por: $\beta = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{obs}} g\left(\hat{\theta}, \theta_{up}\right) d\hat{\theta} = G\left(\hat{\theta}_{obs}; \theta_{up}; \sigma_{\hat{\theta}}\right) = \Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{obs} - \theta_{up}}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right)$

Por ejemplo para un nivel de confianza del 95 %, $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ $\theta_{up} = \hat{\theta}_{obs} + \sigma_{\hat{\theta}} \Phi^{-1}(1-\beta)$

El intervalo $\left(-\infty, \theta_{up}\right]$,se construye de manera que contenga el valor verdadero con una probabilidad del 95 %

Supongamos que: $\left.\begin{array}{l} \sigma_{\hat{\theta}} = 1.0 \\ \hat{\theta}_{óbs} = -2.0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_{up} = \hat{\theta}_{obs} + \sigma_{\hat{\theta}} \Phi^{-1}(1-\beta) = -2 + 1 \times 1.645 = -0.355$!!!!

No solo la estimación es negativa sino que el propio límite superior es inferior a cero !!!!!

No obstante, es importante dar el resultado real de la estimación $\hat{\theta}_{obs} \pm \sigma_{\hat{\theta}}$ para evitar sesgos al promediar con otros experimentos.

Posibles soluciones:

- Aumentar el nivel de confianza hasta entrar en la región permitida: $\Phi^{-1}(0.99) = 2.326$

  Drawback: Límite superior inferior a la resolución intrínseca del experimento $\theta_{up} = 0.326 < \sigma_{\hat{\theta}}$!!!

- Mover el resultado a un valor no nulo: $\theta_{up} = \max\left(\hat{\theta}_{obs}, 0\right) + \sigma_{\hat{\theta}} \Phi^{-1}(1-\beta)$

  Drawback: Se pierde la interpretación clásica del recubrimiento del parámetro verdadero para una probabilidad dada

8. Intervalos de confianza bayesianos

Tratamiento bayesiano de los intervalos de confianza

- Los parámetros se consideran variables aleatorias!
- El teorema de Bayes relaciona los datos con la teoría o modelo

$$P(\text{modelo}|\text{data}) = \frac{P(\text{data}|\text{modelo}) \cdot P(\text{modelo})}{P(\text{data})}$$

La probabilidad condicional se identifica con la verosimilitud

$$L(\bar{x}|\theta)$$

$$f(a|\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}|a)\,g(a)}{h(\bar{x})}$$

Densidad de probabilidad a priori de la observación x (¡antes del experimento!)

Densidad de probabilidad h(x) es independiente de "a" (puede eliminarse por normalización

Intervalos basados en la probabilidad ***a posteriori*** de Bayes

$$p(\theta|\bar{x}) = \frac{L(\bar{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int L(\bar{x}|\theta')\pi(\theta')\,d\theta'}$$

$L(\bar{x}|\theta)$ *Función de likelihood*

$\pi(\theta)$ *Probabilidad "**a priori**"*

El intervalo de confianza $[a,b]$ se obtendría de solucionar:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{a} p(\theta|\bar{x})\,d\theta \qquad \beta = \int_{b}^{\infty} p(\theta|\bar{x})\,d\theta$$

Receta.- Dada una probabilidad "a posteriori" p(θlx) buscamos un intervalo [a,b] para el que la integral sea CL

Si $\alpha = \beta$ intervalo central de probabilidad $1-\alpha-\beta$

Sea este intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ tal que:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta|\bar{x})\,d\theta = 1-\alpha-\beta$$

8. Intervalos de confianza bayesianos

La ventaja de los intervalos bayesianos es que podemos incorporar el conocimiento ***a priori***
i.e. $\theta > 0$ puede incorporarse fácilmente fijando $\pi(\theta)=0$ en la región excluida:

Cálculo del "upper limit"

$$1-\beta = \int_{-\infty}^{\theta_{up}} p(\theta|\bar{x})\,d\theta = \frac{\int_{-\infty}^{\theta_{up}} L(\bar{x}|\theta)\pi(\theta)\,d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} L(\bar{x}|\theta)\pi(\theta)\,d\theta}$$

*Densidad **a priori** uniforme*

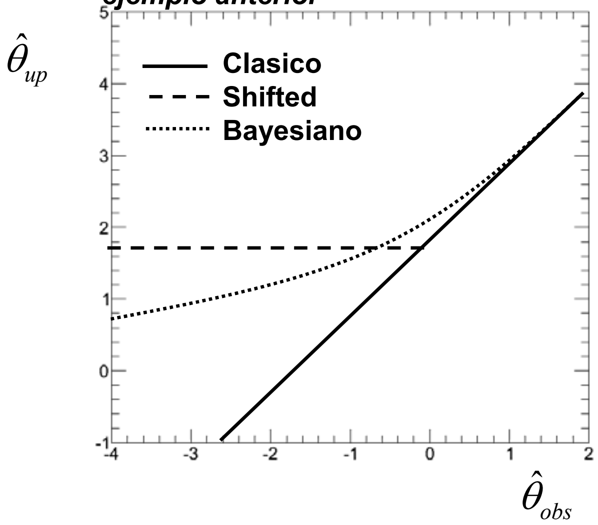
con $\pi(\theta)=\begin{cases} 0 & \theta<0 \\ 1 & \theta\geq 1 \end{cases}$

Problema conceptual:
*No hay una manera única de especificar la densidad de probabilidad **a priori***

*Densidad **a priori** logarítmica*

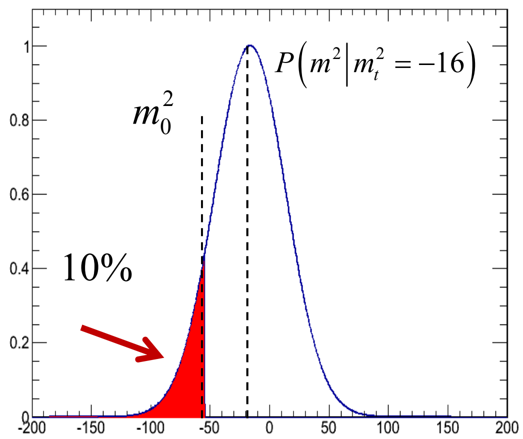
$$\pi(\theta)=\begin{cases} 0 & \theta<0 \\ \frac{1}{\theta} & \theta\geq 1 \end{cases}$$

Límites superiores al 95 % CL del ejemplo anterior



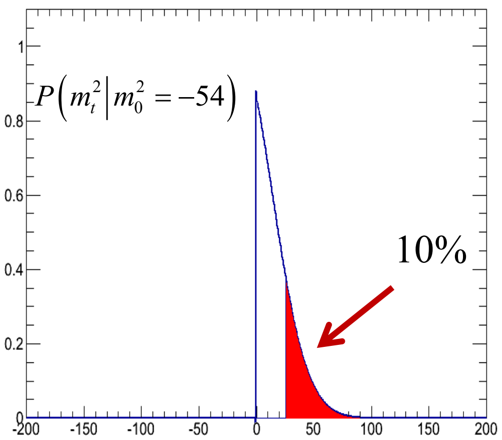
Ejemplo Promedio masa² del neutrino $m^2 = -54 \pm 30\ \text{eV}^2$

Método clásico 90 % CL



$m^2 < -16\ \text{eV}^2$!!

Método bayesiano 90 % CL



$m^2 < 26.6\ \text{eV}^2$