Tema 4.- Distribuciones de Probabilidad.

1. Un estudiante se dispone a hacer auto-stop en un cruce donde en promedio pasa un coche por minuto. Si la probabilidad de que un conductor pare y lo lleve en coche es del 1 % ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante siga en el cruce después de que hayan pasado 60 coches? ¿Y al cabo de una hora?

2. Las distribuciones angulares suelen caracterizarse por la asimetría forward-backward F/N, donde F es en número de sucesos con $\cos\theta > 0$, B es el número de sucesos con $\cos\theta < 0$, y $N = F + B$ es el número total de sucesos. Suponemos que los sucesos son independientes y que el promedio de sucesos por unidad de tiempo es constante, tanto para los sucesos forward como backward. Claramente solo dos de las tres variables, *F, B, N,* son independientes. Podemos ver esta situación de dos maneras.
   a) El número de sucesos N se distribuye según una distribución de Poisson de media μ, los cuales se subdividen en F y $B = N - F$ siguiendo una distribución binomial, $B(F;N;p_F)$, *i.e.* las variables independientes son N y F.
   b) Los sucesos F y B se distribuyen según Poisson (con parámetros μ_F y μ_B), y el total es la suma de ambos, *i.e.*, las variables independientes son F y B.
   c) Demostrar que ambos planteamientos conducen a la misma pdf.

3. Se diseña un experimento ara medir el coeficiente de asimetría de Goldhaber:
$$\gamma \equiv \frac{F-B}{F+B} \equiv \frac{2F}{N} - 1$$
   Demostrar que:

4. Si F y B se consideran variables independientes de Poisson, la varianza de γ es aproximadamente.
$$V(\gamma) \cong \frac{4FB}{(F+B)^3}$$
   Si consideramos N fijo, con F y N ligados en una ley binomial con constante *N, p* y *q,* la varianza viene dad por la expresión exacta.
$$V(\gamma) = \frac{4pq}{N}$$
   Demostrar que ambas son equivalentes.

5. Demostrar que la media y la varianza de una distribución uniforme $f(x) = 1/(b-a)$ vienen dadas por $E[x] = (a+b)/2$ y $V(x) = (b-a)^2/12$.

6. Un haz de neutrinos se produce mediante las desintegraciones de piones $\pi \to \mu + \nu$. Si los piones tienen momento p_π, y la distancia de desintegración disponible es *l*, qué fracción de piones se convertirá en neutrinos. (Ejemplo numérico, p_π =10.0 GeV/c, l = 80 m, m_π =0.1396 GeV/c^2, $c\tau$ =7.8 m.

7. Demostrar que FWHM (full width high maximun) de una distribución norma $N(\mu,\sigma^2)$ viene dada por $2\sigma\sqrt{2\ln 2}$

8. Para la función densidad de probabilidad binormal con variables *x* e *y* y coeficiente de correlación ρ, realizar un cambio de variable *u* y *v*, de manera que la matriz de covarianza sea diagonal y demostrar que:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_x^2 \cos^2\theta - \sigma_y^2 \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \qquad \sigma_v^2 = \frac{\sigma_y^2 \cos^2\theta - \sigma_x^2 \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

donde: $\tan 2\theta = \dfrac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

Problemas con programación

1.- Tablero de Galton

En un tablero de Galton numeramos las filas de clavos horizontales como *j = 1, 2, …, n* de manera que la fila *j*-ésima tiene *j* clavos. Llamamos N_{exp} al número total de bolitas que caen en el clavo de la fila 1. Cada bola es desviada hacia la derecha con una probabilidad *p* y hacia la izquierda con una probabilidad (*1-p*). Después de caer a través de *n* filas de clavos, cada bola estará en una de las *n+1* posiciones que denotaremos por *k = 0* (a la izquierda), *1, 2, … k = n* (a la derecha). Después de realizar N_{exp} experimentos (i.e. bolitas) encontraremos *N(k)* bolas para cada valor de *k*.

Realizar un programa que simule el tablero de Galton de manera que en primer lugar pregunte al usuario los valores de $\boldsymbol{N_{exp}}$, *n* y *p*. Para cada experimento, se fija el valor de *k* a cero y se generan *n* números aleatorios r_j uniformemente distribuidos. Cada vez que $r_j < p$, lo que corresponde a una desviación a la derecha, el número *k* se incrementa en una unidad. Por cada experimento, el valor de *k* obtenido se almacena en un histograma. Finalmente se muestra el histograma.

Estudiar como se obtiene la distribución de Poisson eligiendo sucesivamente pares de números *(n,p)* como por ejemplo *(n,p) = (1,0.5)*, *(10, 0.05)*, *(100, 0.005*),… de tal manera que el producto np permanezca constante. Comprobar que en el límite $n \to \infty, p \to 0$, se obtiene la distribución de Poisson:

$$N(k) = N\frac{\lambda^k}{k!}\exp^{-\lambda} \qquad , \qquad \lambda = np$$

y comparar con las distribuciones obtenidas.

2.- (Obligatorio) Distribución binormal y correlación.

Generar 100000 sucesos de valores *(x,y)* distribuidos según una distribución binormal no correlacionada con:

$$\mu_{x_1} = 3, \qquad \sigma_{x_1} = 2, \qquad \mu_{x_2} = 3, \qquad \sigma_{x_2} = 0.5,$$

a) Representar los puntos en un histograma de dos dimensiones y calcular la matriz de covarianza y el coeficiente de correlación.
b) Contar los puntos *(x,y)* que pertenecen a sucesivas elipses cuyos semiejes vienen dados por un número entero de desviaciones típicas $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$ y comparar con los porcentajes para una distribución normal unidimensional.
c) Considerar la función *f(x,y) = 3x +5y*. Calcular la varianza de *f(x,y)* directamente usando propagación de errores y también a partir de los datos.
d) Rotar ahora los sucesos respecto al centro de la distribución, no del origen, un ángulo *θ = 30º* y repetir los pasos anteriores.
e) A partir de los datos correlacionados estimar el ángulo *θ* y los valores de las σ_u, σ_v .

3.- (Obligatorio) Distribución de chi-cuadrado

Supongamos que estamos realizando un experimento donde medimos la masa de una partícula cuyo valor teórico es de $m_{teo} = 130$ GeV. La precisión de nuestras medidas es de $\sigma_{teo} = 10$ GeV y en cada experimento realizamos 10 medidas. Construir un programa que simule dicho experimento obteniendo las 10 medidas mediante un generador de números gaussianos con media y desviación estándar $m_g = 130, \ \ \sigma_g = 10,$

Repetir el experimento 10000 veces y calcular en cada uno de ellos

a) El valor del chi-cuadrado:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{m_i - m_{teo}}{\sigma_{teo}} \right)^2$$

Almacenando los valores obtenidos en un histograma comprobar que se trata de una distribución de chi-cuadrado con 10 grados de libertad.
b) Para cada experimento calcular la probabilidad de chi-cuadrado: $P\left(\chi^2 \geq \chi_o^2\right)$ y representarla en un histograma (Ayuda.- utilizar la función TMath::Prob de ROOT). Comprobar que se trata de una función uniforme.
c) Repetir los apartados anteriores para valores diferentes de la masa teórica de la partícula, por ejemplo $m_{teo} = 145$, pero habiendo generando los valores experimentales con los valores originales. Construir los histogramas para chi2 y su probabilidad y comentar los resultados.
d) Repetir los apartados a) y b) para los siguientes casos:
   - Subestimación del error $\sigma_{teo} = 5$ GeV.
   - Sobrestimación del error $\sigma_{teo} = 15$ GeV.

Comentar los resultados.