Sorting

Pablo Castro
Algoritmos I-UNRC

Sorting

Sorting es la tarea de organizar una colección de datos según un orden dado

- Podemos realizar sorting sobre cualquier tipo con un orden: **int**, **char**, **Integer**, **Strings**, etc
- En general, el sorting acomoda los elementos de forma ascendente o descendentes.
- Es importante que los algoritmos de sorting sean **eficientes** ya que en la práctica se quiere ordenar una cantidad grande de elementos

Sorting en JAVA

En Java se utiliza la clase COMPARABLE:

- Toda clase con un orden hereda de comparable.
- Permite implementar algoritmos de sorting polimorficos.
- La clase comparable provee un método CompareTo():

CompareTo(T o): Compara el objeto actual con **o**, retorna -1,0,1 dependiendo si **o** es más grande, igual o más chico que **this,** respectivamente.

Importante…

Para analizar un algoritmo de sorting podemos tener en cuenta:

- **Eficiencia:** el tiempo de ejecución del algoritmo, en el peor caso, y también en el caso promedio.
- **Cantidad de comparaciones:** Cuantas veces comparamos para ordenar los elementos.

Las comparaciones pueden ser costosas

- **Cantidad de Intercambios:** Cuantos intercambios se realizan para ordenar

Los intercambios son constantes en JAVA

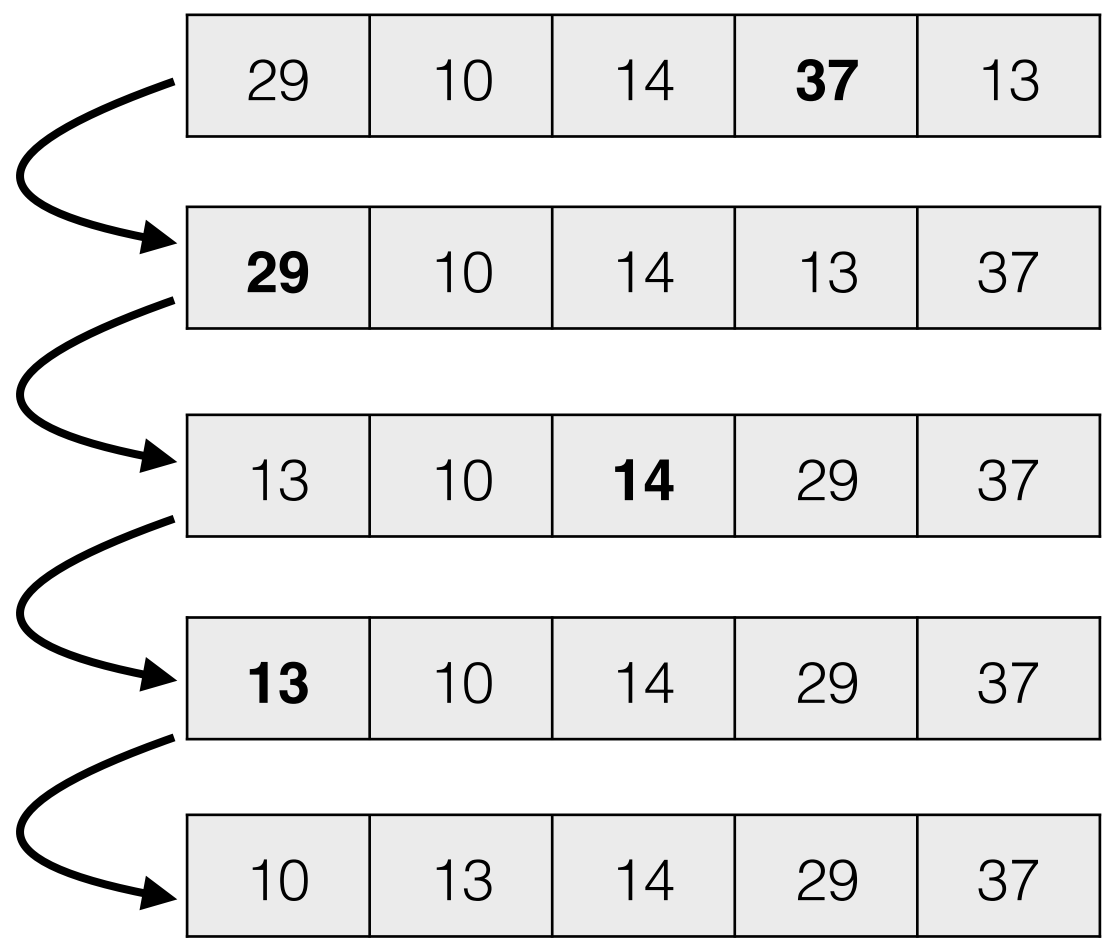
Estabilidad

Un algoritmo de sorting se dice estable si preserva el orden de los elementos con las mismas claves

- La clave es el campo o el atributo sobre el cual ordenamos.
- Hay algoritmos que son estables y otros no.
- En general cualquier algoritmo se puede hacer estable con algún costo extra: agregar más claves, etc.

Selection Sort

Idea: seleccionar el item más grande, ponerlo último; agarrar el segundo más grande, ponerlo penúltimo, etc.



Algoritmo en JAVA

```
public static void selectionSort(Comparable[] array, int n){
// last: index del ultimo elemento de la parte no ordenada
// largest: posición del elemento mas grande
    for (int last = n-1; last >= 1; last--){
   //inv: array[last..n-1] está ordenado
       int largest = indexOfLargest(array, last+1);
       swap(array, last, largest);
    }// end for
   }// end selectionSort
```

En donde:

```
private static int indexOfLargest(Comparable[] array, int n){
    int largest = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++){
        if (array[i].compareTo(array[largest]) > 0){
            largest = i;
        }
    } //end for
    return largest;
   }// end indexOfLargest
```

Tiempo de Ejecución

Veamos el tiempo de ejecución del selection:

Inicialización

For

indexOf Largest es O(i)

$$
\begin{aligned}
T_{sel}(n) &= c + \sum_{i=1}^{n-1} (c' + i) \\
&= c + (n-1) * c' + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\
&\in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

Intercambios y Comparaciones

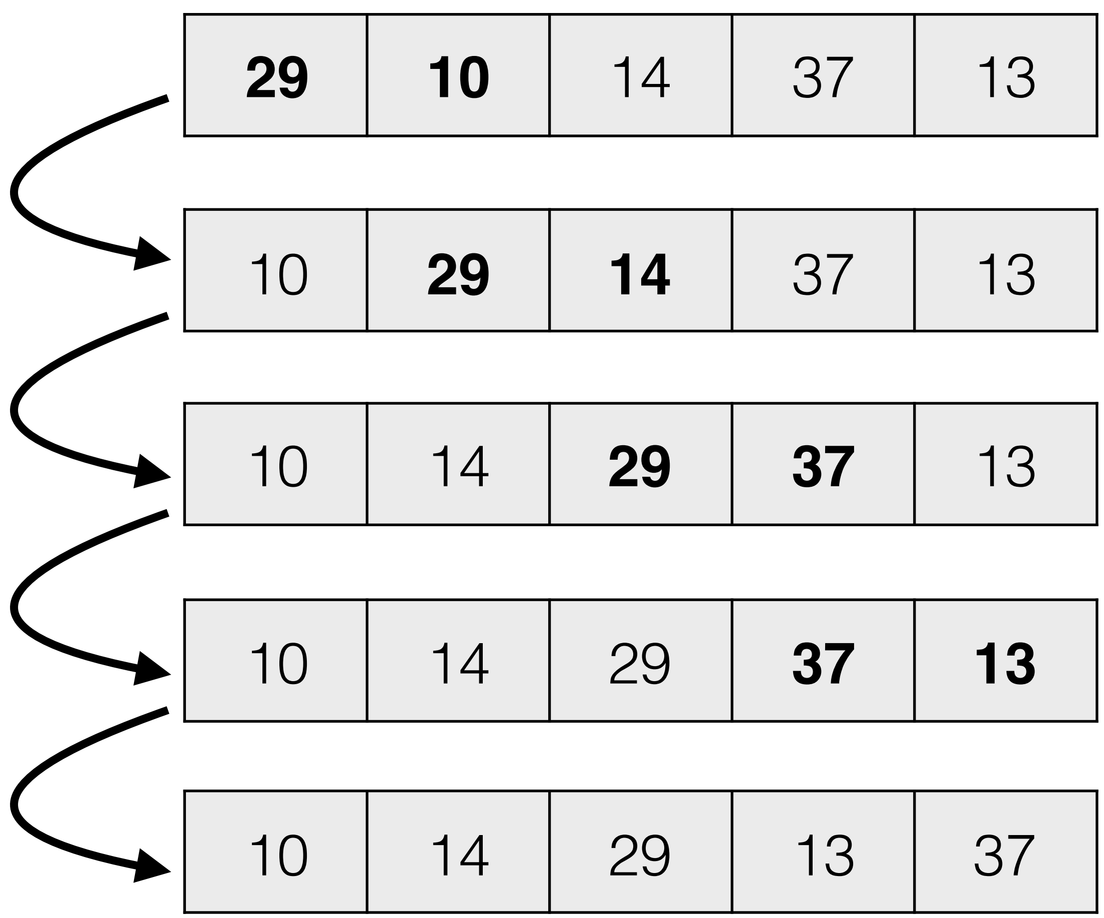
Selection Sort efectúa:

- $3 * (n-1) \in \Theta(n)$ intercambios,
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$, comparaciones.

Selection puede ser implementado para que sea estable, la versión de más arriba no lo es.

BubbleSort

Idea: En la primera pasada comparar cada elemento con el siguiente, en caso que no estén ordenados intercambiarlos. Esto pasa el más grande al último. Se hacen N pasadas.



BubbleSort en JAVA

```
public static void bubbleSort(Comparable[] array, int n){
     boolean sorted = false;
     for (int pass = 1; (pass < n)&& !sorted; ++pass){
     // inv: array[n-pass] hasta array[n-1] está ordenado
       sorted = true;
       for (int index = 0; index < n - pass; ++index){
        // inv: para todo 0<=i<index: array[i] <= array[index]
         int nextIndex = index + 1;
         if (array[index].compareTo(array[nextIndex])>0){
           swap(array, index, nextIndex);
           sorted = false;
         } // end if
       }//end for
     }//end for
}// end bubbleSort
```

Tiempo de Ejecución

Veamos su tiempo de ejecución:

$$T_{bub}(n) = \sum_{i=1}^{n-1}(c + \sum_{j=0}^{n-i-1} c')$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} c + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} c'$$

$$= (n-1) * c + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) * c'$$

$$= (n-1) * c + c' * n^2 - c'n - c' * \frac{n^2}{2} + c' * \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$$

Intercambios y Comp.

BubbleSort efectua:

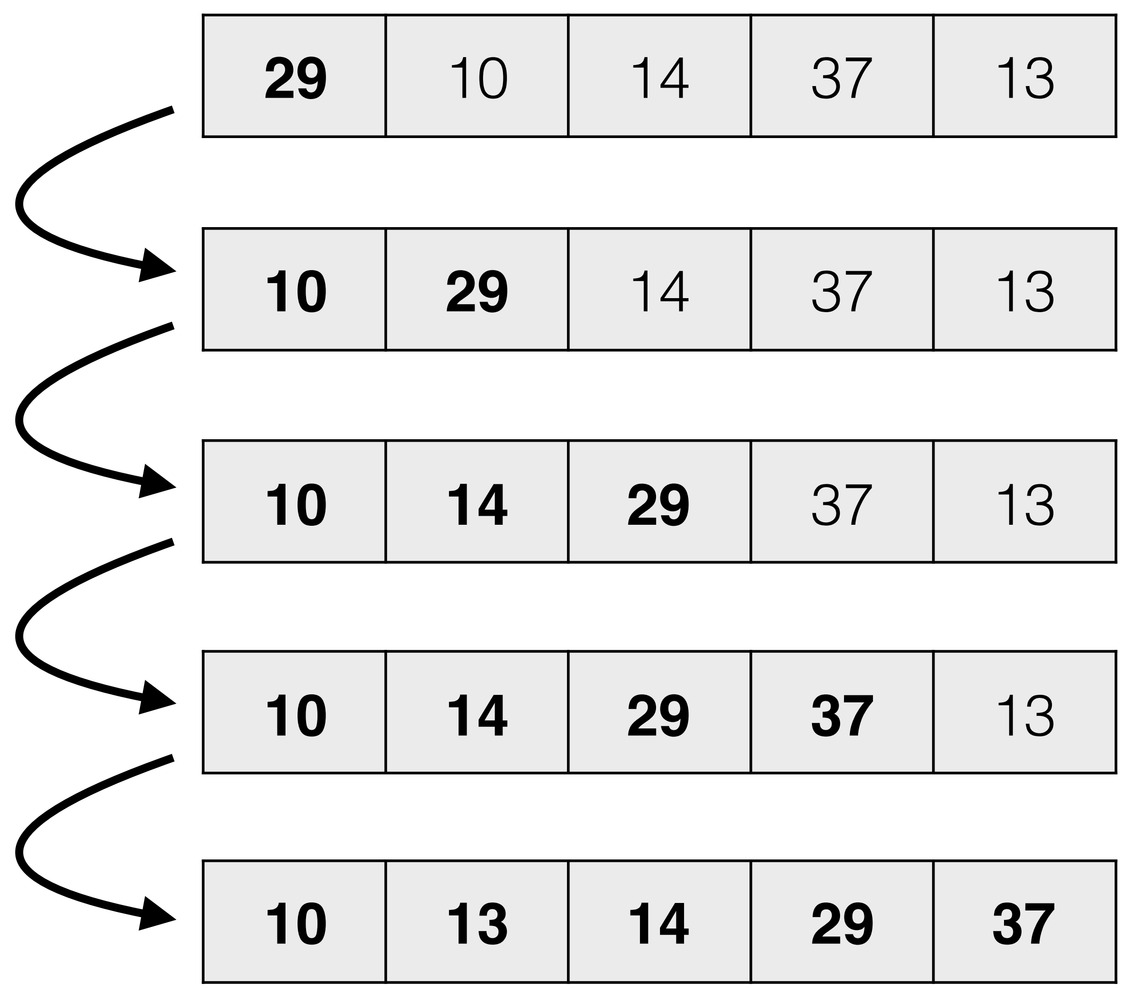
- $(n-1)+(n-2)+(n-3)+... \in \Theta(n^2)$ intercambios,
- $(n-1)+(n-2)+(n-3)+... \in \Theta(n^2)$comparaciones.

Además:

- Produce más intercambios que el selection sort.
- Es un algoritmo estable.
- En la práctica no se usa, es uno de los algoritmos más ineficientes

Insertion Sort

Idea: Es el método que usamos cuando jugamos a las cartas. Agarramos un número lo ponemos en su posición, y repetimos.



Insertion en JAVA

```
public static void insertionSort (Comparable [] array , int n){
    for ( int unsorted = 1; unsorted < n; unsorted++){
    // array [0.. unsorted -1] esta ordenado
    Comparable nextItem = array [ unsorted ];
    int loc = unsorted ;
    while ((loc > 0) && (array[loc-1].compareTo(nextItem) > 0)){
        array[loc] = array[loc-1];
        loc--;
    }//end while
    array [ loc ] = nextItem ;
    }//end for
}//end insertionSort
```

Tiempo de Ejecución

Analicemos el tiempo de ejecución:

$$T_{ins}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} c$$

$$= c * \sum_{i=1}^{n-1} i$$

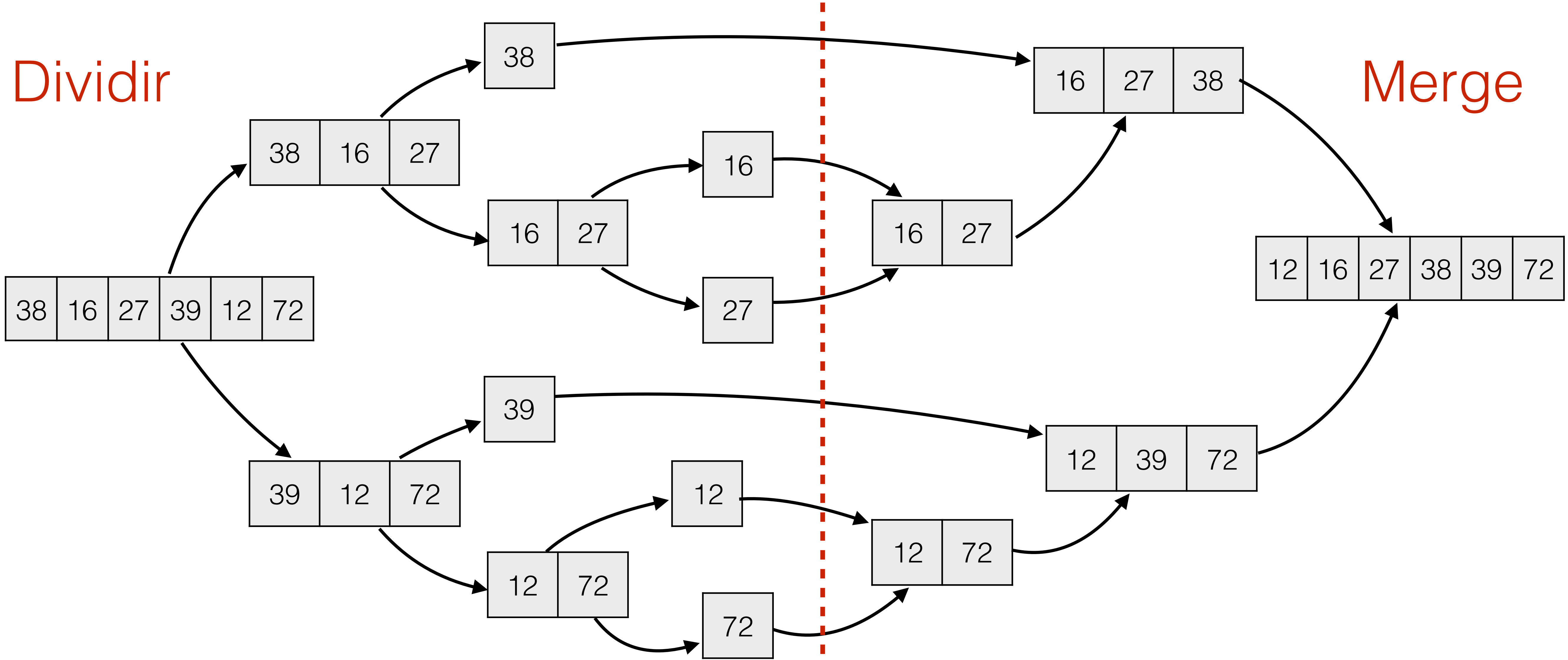
$$= c * \frac{n^2}{2} - c * \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$$

- En el mejor caso es $\Theta(n)$
- La cantidad de comparaciones es: $\Theta(n^2)$
- La cantidad de intercambios: $\Theta(n^2)$
- Insertion Sort es **estable**

Es muy ineficiente para ser usado en la practica.

Mergesort

Idea: Dividimos el arreglo a la mitad y ordenamos recursivamente luego mezclamos las partes (Divide and Conquer)



MergeSort en JAVA

```
// mergeSort: implementa el algoritmo MergeSort
   // pre: 0 <= begin <= end <= array.lenght
   // post: ordena array.
   private static void mergeSort(Comparable[] array, int begin, int end){
    if (begin < end){
        int mid = (begin + end)/2;
        mergeSort(array, begin, mid);//ordena la primera mitad
        mergeSort(array, mid+1, end);//ordena la segunda mitad
        merge(array, begin, mid, end);//mezcla las mitades ordenadas
    }
   }
```

El merge se puede implementar utilizando un arreglo auxiliar

Tiempo de Ejecución

Analicemos su tiempo de ejecución en el peor caso:

- Merge se puede implementar en $\Theta(n)$
- Su ecuación de recurrencia viene dada por:

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

Llamadas recursivas

$$T(n) = 2 * T(\frac{n}{2}) + n$$

Merge

Tiempo del MergeSort

Hagamos sustituciones:

$$
\begin{aligned}
& 2 * T(\frac{n}{2}) + n \\
& = 2 * [2 * T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2}] + n \\
& = 2 * [2 * [2 * T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4}] + \frac{n}{2}] + n \\
& = \dots
\end{aligned}
$$

En i sustituciones nos da: $2^i T(\frac{n}{2^i}) + i * n$

Obtenemos que: $T(\frac{n}{2^i}) = 1$ cuando: $\frac{n}{2^i} = 1$ Es decir: $i = log_2 n$

Reemplazando: $2^{log_2 n} + 1 + n * log_2 n = n + n * log_2 n \in \Theta(n * log_2 n)$

Mergesort

- Es un algoritmo estable (bien implementado).
- La cantidad de comparaciones es: $O(n * log\ n)$
- La cantidad de intercambios es: $O(n * log\ n)$

Para entradas pequeñas la recursión hace que no se comporte tan bien.

QuickSort

La idea del quicksort es la siguiente:

- Elegir un pivot (elemento del arreglo).
- Ordenar todos los menores o iguales al pivot antes que el,
- Ordenar todos los mayores o iguales después de el
- En ese momento el pivot queda en el lugar que va, se llama recursivamente con la parte a la izq. del pivot y la parte a la derecha.

QuickSort en JAVA

Elegir el primer elemento como pivot funciona aceptablemente si el arreglo es aleatorio, sino se debe elegir una posición aleatoria

```java
public static void quickSort(Comparable[] array, int begin, int end){
   if (begin < end){
    // Calculo la particion
    int p = partition(array, begin, end);
    // ordeno la parte izq
    quickSort(array, begin, p);
    // ordeno la parte derecha
    quickSort(array, p+1, end);
   }
}
```

```java
private static int partition(Comparable[] array, int begin, int end){
    Comparable pivot = array[begin]; //Implementar otras opciones!
    int i = begin - 1;
    int j = end + 1;
    while (i < j) {
        //invariante:
        //para k < = i : a[k] <= pivot y para k >= j : pivot <= a[k]
        do j--; while (array[j].compareTo(pivot) > 0);
        do i++; while (array[i].compareTo(pivot) < 0);
        if (i < j) {swap(array, i, j);}
    }
    return j;
   }
```

Tiempo de Ejecución

En el peor caso de elección del pivot, la cantidad de elementos se decrementa por uno, es decir:

Siempre se elige el elemento más chico o más grande como pivot.

tiempo del partition

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = c + T(n-1) + n$$

Llamada recursiva

Es decir, tenemos: $T(n) \in O(n^2)$

Tiempo en Caso Promedio

En caso promedio tenemos que tomar todas las posibles elecciones del pivot, dividido la longitud de la lista:

$$T(0) = 1$$
$$T(1) = 1$$
$$T(n) = c + \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + T(n-i) + n$$

Si resolvemos esta ecuación nos da: $T(n) \in O(n * log\ n)$

Observaciones

- En la practica el QuickSort se comporta mejor que otros algoritmos de sorting.
- El partition no necesita espacio extra.
- No es un algoritmo estable (depende de la implementación del partition).
- El peor caso tiene pocas probabilidades de suceder!

Cota inferior para Algoritmos de Sorting

Tenemos el siguiente resultado para algoritmo de sorting:

Teorema: Cualquier algoritmo de sorting que utilice comparaciones para ordenar es $\Omega(n * log\ n)$

Sin embargo, existen algoritmos que utilizan información extra para ordenar, por ejemplo:

- El mayor número que puede aparecer,
- La cantidad de dígitos que pueden tener los números a ordenar.

Counting Sort

Idea: Para cada i determinamos el número de j's menores a él en el arreglo, y acomodamos a i en el lugar que va. Necesitamos usar arreglos adicionales para esto.

```
public static void countingSort(int [] array , int n, int k){
int[] b=new int[n];
int[] c = new int[k];
for (int i = 0; i < n; i++){
//contamos la cantidad de elementos iguales a array [ i ]
    c[array[i]] = c[array[i]] + 1;
}
for (int i = 1; i < k; i++){
//contamos la cantidad de elementos iguales o menores a array [ i ]
    c[i] = c[i] + c[i-1];
}
// ponemos cada elemento array [ i ] en su lugar
for (int j = n-1; i == 0; j--){
    b[c[array[j]] - 1] = array[j]; c[array[j]] = c[array[j]] - 1;
}

}
```

Ejemplo:

Veamos un ejemplo:

Arreglo Inicial:

3	6	4	1	3	4	1	4

Contamos:

0	2	0	2	3	0	1

Arreglo auxiliar c

Acomodamos:

0	2	2	4	7	7	8

Ponemos cada elemento en su lugar:

1	1	3	3	4	4	4	6

Arreglo b

Tiempo de Ejecución

Veamos el tiempo de ejecución:

Contar menores o iguales

$$T(n) = n + n + k \in \Theta(n)$$

Poner los elementos en su lugar

Contar repetidos

Si el k es muy grande, el algoritmo es ineficiente!

Radix Sort

Idea: También se utiliza para las cartas, primero se ordenan por número y después por palo. Hacemos lo mismo pero por dígito.

Usando un Algoritmo Estable

Arreglo Inicial:

25	57	48	37	12	92	86	33

Ordeno por último digito:

	12,92	33		25	86	57,37	48		

Acomodo:

12	92	33	25	86	57	37	28

Ordeno por primer digito:

12	25,28	33	37	57			86	92	

Acomodo:

12	25	28	33	37	57	86	92