Álgebra Linear

Sérgio Luís Zani
Departamento de Matemática
ICMC – USP

Sumário

Capítulo 1

Espaços Vetoriais

1.1 Introdução e Exemplos

NEste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial que será usado em todo o decorrer do curso.

Porém, antes de apresentarmos a definição de espaço vetorial, passemos a analisar em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_n.

A soma de duas funções f e g de $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é definida como sendo a função $f + g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Note também que se $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, resultando num elemento de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

Com relação a M_n podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$, colocando $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$, que é um elemento de M_n.

Com a relação à multiplicação de $A = (a_{ij})_{n\times n}$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, é natural definirmos $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n\times n}$, o qual também pertence a M_n.

O que estes dois conjuntos acima, com estas *estruturas* de adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm comum? Vejamos:

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. se $\mathscr{O}$ representa a função nula, isto é, $\mathscr{O}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $\mathscr{O} + f = f$;
4. a função $-f$ definida por $(-f)(x) = -[f(x)]$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é tal que $f + (-f) = \mathscr{O}$;
5. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;
6. $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;
7. $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;
8. $1f = f$.

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B e C em M_n e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. se O representa a matriz nula, isto é, $O = (0)_{n\times n}$ então $O + A = A$;
4. se $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ então a matriz $-A$ definida por $-A = (-a_{i,j})_{n\times n}$ é tal que $A + (-A) = O$;
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
8. $1A = A$.

Podemos ver que tanto o conjuntos das funções definidas na reta a valores reais como o das matrizes quadradas quando munidos de somas e multiplicação por escalares adequadas apresentam *propriedades algébricas* comuns. Na verdade muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às acima.

É por isso que ao invés de estudarmos cada um separadamente estudaremos um conjunto arbitrário e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada $u, v \in V$ existe um único elemento de V associado, chamado a soma entre u e v e denotado por $u+v$, e uma multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ existe um único elemento de V associado, chamado de *produto de u pelo escalar λ* e denotado por λu.

Definição 1.1 *Diremos que um conjunto V como acima munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar é um* espaço vetorial *se para quaisquer u, v e w em V e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:*

(EV1) $u + v = v + u$ *para todo* $u, v \in V$;

(EV2) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *para todo* $u, v, w \in V$;

(EV3) *existe um elemento* $0 \in V$ *tal que* $0 + u = u$ *para todo* $u \in V$;

(EV4) *para cada* $u \in V$ *existe* $v \in V$ *tal que* $u + v = 0$;

(EV5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ *para todo* $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(EV6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *para todo* $u \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(EV7) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *para todo* $u, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(EV8) $1u = u$ *para todo* $u \in V$.

Observação 1.2 *É comum chamarmos os elementos de um espaço vetorial de vetores, independentemente da natureza dos mesmos. Também chamamos de escalares os números reais quando estes desempenham o seu papel na ação de multiplicar um vetor.*

Observação 1.3 *O elemento* 0 *na propriedade* $\mathrm{EV}3$ *é único, pois qualquer outro* $0' \in V$ *satisfazendo a mesma propriedade* $\mathrm{EV}3$ *então, pelas propriedades* $\mathrm{EV}3$ *e* $\mathrm{EV}1$ *teríamos* $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$, *isto é,* $0 = 0'$.

Observação 1.4 *Em um espaço vetorial, pela propriedade* $\mathrm{EV}4$, *para cada* $u \in V$ *existe* $v \in V$ *tal que* $u + v = 0$. *Na verdade, para cada* $u \in V$ *existe somente um elemento* $v \in V$ *com esta propriedade. De fato, dado* $u \in V$ *se* v *e* v' *em* V *são tais que* $u + v = 0$ *e* $u + v' = 0$ *então, combinando estas equações com as propriedades* $\mathrm{EV}1$,$\mathrm{EV}2$ *e* $\mathrm{EV}3$, *obtemos* $v = v+0 = v+(u+v') = (v+u)+v' = (u + v) + v' = 0 + v' = v'$, *isto é* $v = v'$. *Denotaremos* v *por* $-u$ *e* $u - v$ *por* $u + (-v)$.

Observação 1.5 *As quatro primeiras propriedades referem-se apenas à operação de adição e são conhecidas, respectivamente, por propriedade comutativa, propriedade associatividade, existência do elemento neutro e existência do elemento inverso.*

A quinta e a oitava propriedades são exclusivas da multiplicação por escalar e também podem ser chamadas de associatividade e elemento neutro da multiplicação, respectivamente.

A sexta e a sétima propriedades relacionam as duas operações e são ambas conhecidas por distributividade.

Observação 1.6 *A rigor, a definição de espaço vetorial que demos acima se refere a espaços vetoriais* reais *visto que estamos permitindo que os escalares sejam apenas números reais. A noção de espaço vetorial* complexo pode ser feita naturalmente a partir da definição acima com as devidas mudanças. Mais precisamente, pedimos que seja satisfeitas as propriedades $\mathrm{EV}1$ a $\mathrm{EV}4$ e $\mathrm{EV}8$ enquanto que as propriedades $\mathrm{EV}5$ a $\mathrm{EV}7$ devem valer para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. No entanto, embora importante, não usaremos o conceito de espaço vetorial complexo.

Um outro exemplo de espaço vetorial, além dos dois apresentados no início do texto, é o conjunto dos vetores como apresentados em Geometria Analítica munido da adição e da multiplicação por escalar. Dessa forma, o adjetivo vetorial utilizado na definição acima deve ser entendido de uma forma mais ampla, sendo uma referência aos elementos de V independentemente de serem ou não vetores.

Talvez o exemplo mais simples de espaço vetorial seja o conjunto dos números reais com a adição e multiplicação usuais. Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos transformar o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais, $\mathbb{R}^n$, em um espaço vetorial definindo a adição de duas n-uplas ordenadas, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, adicionando-se coordenada a coordenada, isto é,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e o produto de uma n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

É uma rotina bem simples verificar que desse modo $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial. Deixamos como exercício esta tarefa.

Verifique também que os seguintes exemplos são espaços vetoriais.

1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $V = \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Definimos a adição e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

   - Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ são elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ então

     $$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$

   - Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ é um elemento de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

     $$\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n.$$

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathscr{F}(A; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : A \to \mathbb{R}$. Se $f, g \in \mathscr{F}(A; \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ defina $f + g : A \to \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $x \in A$. Então, $\mathscr{F}(A; \mathbb{R})$ com esta adição e produto por escalar é um espaço vetorial.

3. O conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$). Notação: $C(I;\mathbb{R})$.

4. O conjunto das funções com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, (k é fixo) definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$). Notação: $C^k(I;\mathbb{R})$.

5. O conjunto das funções com todas as derivadas contínuas definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$). Notação: $C^\infty(I;\mathbb{R})$.

6. O conjunto das matrizes m por n com coeficientes reais: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ munido de operações análogas àquelas definidas em $M_n(\mathbb{R})$.

Os espaços vetoriais acima envolvem operações com as quais você já deve estar familiarizado. O próximo exemplo é um pouco mais sofisticado do que os anteriores e por isso mostraremos as oito propriedades. Como conjunto tomaremos $V = (0,\infty)$, o semi-eixo positivo da reta real. Este conjunto quando munido às operações usuais de soma e multiplicação não é um espaço vetorial, visto que não possui *elemento neutro* para a adição. No entanto, se para $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definirmos a soma entre x e y por $x \boxplus y = xy$, (o produto usual entre x e y) e o produto de x pelo escalar λ como $\lambda \boxdot x = x^\lambda$, então V se torna um espaço vetorial. De fato, verifiquemos uma a uma as oito propriedades:

1. $x, y \in V$ temos $x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x$ para quaisquer $x, y \in V$;

2. $x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \boxplus y)z = (x \boxplus y) \boxplus z$ para quaisquer $x, y, z \in V$

3. se $x \in V$ então, como $1 \in V$, temos $1 \boxplus x = 1x = x$; observe que neste caso, 1 é o elemento neutro da *adição*, o qual denotaremos por $\mathfrak{o}$;

4. se $x \in V$, isto é, $x > 0$, então $x^{-1} \in V$ e $x \boxplus x^{-1} = xx^{-1} = 1 = \mathfrak{o}$;

5. $\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) = \lambda \boxdot x^\mu = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \boxdot x$ para quaisquer $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

6. $(\lambda+\mu)\boxdot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda \boxplus x^\mu = (\lambda\boxdot x)\boxplus(\mu\boxdot x)$ para quaisquer $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

7. $\lambda \boxdot (x \boxplus y) = \lambda \boxdot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$ para quaisquer $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

8. $1 \boxdot x = x^1 = x$ para qualquer $x \in V$.

Ex. 1.7 *Considere $V = (0, \infty)$ com a adição usual $+$ de números reais (faz sentido pois a soma de dois números reais positivos resulta em um número positivo) e o produto por escalar $\boxdot$ como acima. Mostre que isto não é um espaço vetorial.*

1.2 Propriedades

Das oito propriedades que definem um espaço vetorial podemos concluir várias outras. Listaremos algumas destas propriedades na seguinte

Proposição 1.8 *Seja V um espaço vetorial. Temos*

1. *Se $u + w = v + w$ então $u = v$.*

2. *Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda 0 = 0$.*

3. *Para qualquer $u \in V$, $0u = 0$.*

4. *Se $\lambda u = 0$ então $\lambda = 0$ ou $u = 0$.*

5. *Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u)$.*

6. *Para qualquer $u \in V$, $-(-u) = u$.*

7. *Se $u, v \in V$ então existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.*

Prova:

1. Pelas propriedades EV3, EV4 e EV2 temos que

$$u = u + 0 = u + (w + (-w)) = (u + w) + (-w)$$

$$= (v + w) + (-w) = v + (w + (-w)) = v + 0 = v.$$

2. Pelas propriedades EV3 e EV7 temos $0 + \lambda 0 = \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$. Pelo item anterior, $\lambda 0 = 0$.

3. Pelas propriedades EV3 e EV6 temos $0 + 0u = 0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. O resultado segue do item 1.

4. Se $\lambda \neq 0$ então pelas propriedades EV8 e EV5 e pelo item 2 desta proposição, $u = 1u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0 = 0$.

5. Utilizando a propriedade EV6 e o item 3 desta proposição, obtemos $\lambda u + (-\lambda)u = (\lambda + (-\lambda))u = 0u = 0$. Pela observação 1.4, $-(\lambda u) = (-\lambda)u$. Analogamente, utilizando-se a propriedade EV7, mostra-se que $-(\lambda u) = \lambda(-u)$.

   A prova dos outros resultados é deixada como exercício.

∎

Ex. Resolvido 1.9 *Seja V um espaço vetorial. Mostre que se $V \neq \{0\}$ então V tem infinitos elementos.*

Resolução: Note que se encontrarmos uma função $f : \mathbb{R} \to V$ que seja injetora então V terá infinitos elementos, pois para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ corresponderá um elemento distinto $f(\lambda)$ de V.

Tome $v \in V$, $v \neq 0$. Defina $f : \mathbb{R} \to V$ por $f(\lambda) = \lambda v$. Para mostrar que f é injetora, tomemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $f(\lambda) = f(\mu)$. Devemos mostrar que $\lambda = \mu$. Como $\lambda v = f(\lambda) = f(\mu) = \mu v$, obtemos $\lambda v - (\mu v) = 0$. Pelo item 4 da proposição 1.8 temos $0 = \lambda v - (\mu v) = \lambda v + (-\mu)v = (\lambda - \mu)v$. Como $v \neq 0$, pelo item 3 da mesma proposição, segue que $\lambda - \mu = 0$, isto é, $\lambda = \mu$. □

1.3 Exercícios

Ex. 1.10 *Verifique se em cada um dos itens o conjunto V com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

1. $V = \mathbb{R}^3, (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2); \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
2. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, operações usuais de M_2.
3. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - 2y = 0\}$, operações usuais de $\mathbb{R}^2$.
4. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(-x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}\}$, operações usuais de funções.
5. $V = \mathscr{P}(\mathbb{R}) = \{\text{polinômios com coeficientes reais}\}$, operações usuais de funções.
6. $V = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1), \alpha(x, y) = (3\alpha x, -\alpha x.)$
7. $V = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.
8. $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; y = x, z = w^2\}$, operações usuais de $\mathbb{R}^4$.
9. $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2), \alpha(x, y) = (\alpha x, y^\alpha)$, onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ex. 1.11 *Termine a demonstração da proposição 1.8.*

Capítulo 2

Subespaços Vetoriais

2.1 Introdução e Exemplos

Muitas vezes nos depararemos com certos subconjuntos de um espaço vetorial que possuem a propriedade de que a soma de dois de seus elementos é um elemento do próprio subconjunto bem como quando multiplicamos um elemento do subconjunto por um escalar, o resultado continua pertencendo ao subconjunto.

Definição 2.1 *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(SV1) $0 \in W$;

(SV2) *Se* $u, v \in W$ *então* $u + v \in W$;

(SV3) *Se* $u \in W$ *então* $\lambda u \in W$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 2.2 *Note que todo subespaço vetorial W de um espaço vetorial V é ele próprio um espaço vetorial. As propriedades comutativa, associativa, distributivas e* EV8 *são herdadas do próprio espaço vetorial V. O elemento neutro da adição é um elemento de W por* SV1. *Finalmente, se $u \in W$ então $-u = (-1)u \in W$ pelo item 5 da proposição 1.8 e por* SV3.

Observação 2.3 *Obviamente $\{0\}$ e V são subespaços vetoriais do espaço vetorial V. São chamados de subespaços vetoriais triviais.*

Observação 2.4 *Note que W é subespaço vetorial de V se e somente se são válidas as seguintes condições:*

(SV1') $0 \in W$;

(SV2') *Se $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $u + \lambda v \in W$.*

Vejamos alguns outros exemplos:

Exemplo 2.5 *Seja $\mathscr{P}_n^* \subset \mathscr{P}_n$, dado por $\mathscr{P}_n^* = \{p(x) \in \mathscr{P}_n; p(0) = 0\}$.*

Verifiquemos que $\mathscr{P}_n^*$ é, de fato, um subespaço vetorial de $\mathscr{P}_n$.

1. O polinômio nulo se anula em $x = 0$, logo, pertence a $\mathscr{P}_n^*$.

2. Se $p(x), q(x) \in \mathscr{P}_n^*$ então $p(0) + q(0) = 0$ e, portanto, $p(x) + q(x) \in \mathscr{P}_n^*$.

3. Se $p(x) \in \mathscr{P}_n^*$ então $\lambda p(0) = 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda p(x) \in \mathscr{P}_n^*$.

Exemplo 2.6 *Verifiquemos que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.*

1. É claro que $(0, 0, 0)$ satisfaz $0 + 0 + 0 = 0$.

2. Se $(x, y, z), (u, v, w) \in S$ então $(x + u) + (y + v) + (z + w) = (x + y + z) + (u + v + w) = 0$ e, portanto, $(x, y, z) + (u, v, w) \in S$.

3. Se $(x, y, z) \in S$ então $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda(x, y, z) \in S$.

Exemplo 2.7 *Considere o seguinte conjunto $S = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}); y'' - y = 0\}$ onde y'' representa a derivada de segunda ordem de y. Verifiquemos que S é um subespaço vetorial de $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

1. Claramente a função nula satisfaz $0'' - 0 = 0$;

2. Se $y_1, y_2 \in S$ então $(y_1 + y_2)'' - (y_1 + y_2) = (y_1'' - y_1) + (y_2'' - y_2) = 0$. Logo, $y_1 + y_2 \in S$.

3. Se $y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $(\lambda y)'' - \lambda y = \lambda(y'' - y) = 0$. Portanto, $\lambda y \in S$.

Deixamos como exercício a verificação de que os seguintes exemplos são subespaços vetoriais dos respectivos espaços vetoriais.

Exemplo 2.8 *Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.9 *O conjunto das funções contínuas da reta na reta, denotado por $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

Exemplo 2.10 *O conjunto das funções $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ tais que*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

é um subespaço vetorial de $C([a, b]; \mathbb{R})$.

Exemplo 2.11 *O conjunto das* matrizes simétricas *quadradas de ordem n com coeficientes reais é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.*

Exemplo 2.12 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$. Então $\mathscr{P}_m$ é um subespaço de $\mathscr{P}_n$.*

2.2 Interseção e Soma de Subespaços

Proposição 2.13 (Interseção de subespaços) *Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Então $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.*

Prova:

1. Como $0 \in U$ e $0 \in W$ então $0 \in U \cap W$;

2. Se $x, y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $x + \lambda y \in U$ e $x + \lambda y \in W$. Portanto, $x + \lambda y \in U \cap W$.

■

Questão: Com a notação da proposição acima, podemos afirmar que $U \cup W$ é subespaço vetorial de V?

Resposta : Não. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$. Note que $(1, -1) \in U \subset U \cup W$ e $(1, 1) \in W \subset U \cup W$ mas $(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin U \cup W$.

Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V e V' é um subespaço de V que contenha U e W, isto é, $U \cup W \subset V'$ então V' terá que conter todos os vetores da forma $u + w$, $u \in U$ e $w \in W$. Isto motiva a seguinte

Definição 2.14 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Definimos a soma de U e W como $U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}$.*

Proposição 2.15 (Soma de subespaços) *Sejam U, W e V como na definição acima. Então $U + W$ é um subespaço vetorial de V. Além do mais, $U \cup W \subset U + W$.*

Prova: Verifiquemos que $U + W$ é subespaço vetorial de V.

1. Como $0 \in U$ e $0 \in W$ então $0 = 0 + 0 \in U + W$;

2. Sejam $x_1, x_2 \in U + W$ então $x_j = u_j + w_j$, $u_j \in U$, $w_j \in W$, $j = 1, 2$. Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$ então $x_1 + \lambda x_2 = u_1 + w_1 + \lambda(u_2 + w_2) = (u_1 + \lambda u_2) + (w_1 + \lambda w_2) \in U + W$, pois U e W são subespaços vetoriais.

Mostremos que $U \cup W \subset U + W$. Seja $v \in U \cup W$. Se $v \in U$ então $v = v+0 \in U+W$. Se $v \in W$ então $v = 0+v \in U+W$. Ou seja, $U \cup W \subset U+W$.

■

Ainda usando a notação acima, suponha que V' seja um subespaço de V que contenha U e W. Neste caso, para todo $u \in U \subset V'$ e todo $w \in W \subset V'$ temos $u + w \in V'$, ou seja, $U + W \subset V'$. Esta observação nos permite registrar a seguinte

Proposição 2.16 *Sejam V um espaço vetorial e U e W subespaços vetoriais de V. Então $U + W$ é o menor subespaço vetorial de V que contém $U \cup W$. Em outras palavras, se V' é um subespaço vetorial de V que contém $U \cup W$ então $U \cup W \subset U + W \subset V'$.*

Definição 2.17 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que $U + W$ é a soma direta de U e W se $U \cap W = \{0\}$. Neste caso usaremos a notação $U \oplus W$ para representar $U + W$.*

Observação 2.18 *Note que trivialmente $\{0\} \subset U \cap W$ se U e W são subespaços vetoriais.*

Proposição 2.19 (Soma direta de subespaços vetoriais) *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Temos $V = U \oplus W$ se e somente se para cada $v \in V$ existirem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$.*

Prova: Suponha que $V = U \oplus W$, isto é, $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$. Então, dado $v \in V$ existem $u \in U$ e $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. Queremos mostrar que tal *decomposição* é única. Suponha que existam $u' \in U$ e $w' \in W$ tais que $v = u' + w'$. Então, $u + w = u' + w'$, o que implica em $u - u' = w' - w$. Mas $u - u' \in U$ e $w' - w \in W$ e, portanto, $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$, ou seja $u = u'$ e $w = w'$.

Suponha agora que para cada $v \in V$ existam um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. É claro que $V = U + W$. Resta mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Obviamente, $0 \in U \cap W$. Seja $v \in U \cap W$, isto é, $v \in U$ e $v \in W$. Então, existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. Observe que $v = u + w = (u + v) + (w - v)$ com $u + v \in U$ e $w - v \in W$ e, pela unicidade da decomposição, devemos ter $u = u + v$ e $w = w - v$, isto é, $v = 0$. Logo, $U \cap W = \{0\}$.

Alternativamente, poderíamos supor a existência de $v \neq 0$ em $U \cap W$ e daí obteríamos $v = 2v - v = 4v - 3v$, duas decomposições distintas para v já que $2v, 4v \in U$, $2v \neq 4v$ e $-v, -3v \in W$. ∎

Exemplo 2.20 *Verifique que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$.*

Note que W é de fato um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ pois $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$ ou, alternativamente, se $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$ então $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ e $u_1 + u_2 = (0, 0, z_1 + z_2)$ é claramente um elemento de W.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$\lambda u_1 = \lambda(0,0,z_1) = (\lambda 0, \lambda 0, \lambda z_1) = (0,0,\lambda z_1) \in W.$$

Finalmente, $(0,0,0) \in W$, o que conclui a prova de que W é um subespaço vetorial.

Prosseguindo, dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$(x,y,z) = (x,y,-x-y) + (0,0,z+x+y)$$

e como $(x,y,-x-y) \in U$ e $(0,0,z+x+y) \in W$ obtemos $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Resta agora mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Seja $(x,y,z) \in U \cap W$. Temos

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \iff (x,y,z) = (0,0,0).$$

Ex. Resolvido 2.21 *Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$ dados por*

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x=0\} \quad e \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y=0\}.$$

Mostre que $\mathbb{R}^3 = U + V$, mas a soma não é direta.

Resolução: Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$(x,y,z) = (0,y,z) + (x,0,0) \in U + V,$$

pois $(0,y,z) \in U$ e $(x,0,0) \in V$. Portanto, $\mathbb{R}^3 = U + V$.

No entanto, a soma não é direta pois $U \cap V \neq \{(0,0,0)\}$, pois, por exemplo, $(0,0,1) \in U \cap V$. □

Definição 2.22 *Sejam $U_1, \ldots, U_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. A soma de U_1 a U_n é definida por*

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n; u_j \in U_j, j = 1, \ldots, n\}.$$

Definição 2.23 *Sejam $U_1, \dots, U_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que a soma de U_1 a U_n é uma soma direta se*

$$U_j \cap \left(U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n\right) = \{0\}, \quad j = 1, \dots n,$$

em que o termo $\widehat{U_j}$ deve ser omitido da soma. Neste caso usaremos a notação $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ para denotar a soma de U_1 a U_n.

Observação 2.24 *É óbvio que*

$$0 \in U_j \cap \left(U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n\right)$$

se $U_1, \dots, U_n$ são subespaços vetoriais.

Proposição 2.25 *Sejam $U_1, \dots, U_n$ subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ se e somente se para cada $v \in V$ existe, para cada $j = 1, \dots, n$, um único $u_j \in U_j$ tal que $v = u_1 + \cdots + u_n$.*

Prova: A prova é análoga à da proposição 2.19. ∎

Exemplo 2.26 *Mostre que $\mathscr{P}_2$ é soma direta dos seguintes subespaços vetoriais $U_1 = \{a_0; a_0 \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{a_1x; a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $U_3 = \{a_2x^2; a_2 \in \mathbb{R}\}$.*

Dado $p(x) \in \mathscr{P}_2$, temos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, para certos coeficientes $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathscr{P}_2 = U_1 + U_2 + U_3$.

Verifiquemos que a soma é direta.

1. Mostremos que $U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{0\}$. Seja $p(x) \in U_1 \cap (U_2 + U_3)$. Então existem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_0 = a_1x + a_2x^2$. Se $p(x)$ não fosse o polinômio nulo teríamos um polinômio de grau 0, a_0, coincidindo com um de grau no mínimo 1, $a_1x + a_2x^2$, o que é um absurdo. Logo, $p(x) = 0$.

2. Mostremos que $U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{0\}$. Seja $p(x) \in U_2 \cap (U_1 + U_3)$. Então existem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_1x = a_0 + a_2x^2$. Se $p(x)$ não fosse o polinômio nulo teríamos um polinômio de grau 1, a_1x, coincidindo com um de grau 0 (caso $a_2 = 0$) ou 2, $a_0 + a_2x^2$, (caso $a_2 \neq 0$), o que é um absurdo. Logo, $p(x) = 0$.

3. Mostremos que $U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$. Seja $p(x) \in U_3 \cap (U_1 + U_2)$. Então existem $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_2x^2 = a_0 + a_1x$. Se $p(x)$ não fosse o polinômio nulo teríamos um polinômio de grau 2, a_2x^2, coincidindo com um de grau 0 (caso $a_1 = 0$) ou 1, $a_0 + a_1x$, (caso $a_1 \neq 0$), o que é um absurdo. Logo, $p(x) = 0$.

2.3 Exercícios

Ex. 2.27 *Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Caso não sejam especificadas, considere as operações usuais.*

1. $V = M_2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}; a, b, c, \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, x, y, y); x, y \in \mathbb{R}\}$.
3. $V = \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), W = \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}); p(0) = p(1)\}$.
4. $V = M_n$, dada $B \in M_n$, defina $W = \{A \in M_n; BA = 0\}$.
5. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, onde $a_1, \ldots,$ $a_n \in \mathbb{R}$ são dados.
6. $V = M_{n\times 1}$, $W = \{X \in M_{n\times 1}; AX = 0\}$, onde $A \in M_{m\times n}$ é dada.
7. $V = \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), W = \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
8. $V = M_n$, $W = \{A \in M_n; A^t = A\}$.
9. $V = M_n, W = \{A \in M_n; A^t = -A\}$.
10. $V = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}), W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$.
11. $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}), W = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}); f(x_0) = 0\}, x_0 \in \mathbb{R}$.

Ex. 2.28 *Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta. isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra-exemplo se for falsa.*

1. Se W_1 e W_2 são susbespaços de um espaço vetorial V então $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V.
2. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$. (Sugestão: mostre que se W é subespaço de V e $x_0,\, y_0 \in V$ são tais que $x_0 \in W$ e $y_0 \notin W$ então $x_0 + y_0 \notin W$ e use-o.)

Ex. 2.29 *Em cada item abaixo encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.*

1. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}, \quad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 2y\},$
   $V = \mathbb{R}^2$.
2. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}; \quad c, d \in \mathbb{R} \right\},$
   $V = M_2$.
3. $U = \{p(t) \in V; p''(t) = 0\}, \quad W = \{q(t) \in V; q'(t) = 0\}.$
   $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$

Ex. 2.30 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se $V = U \oplus W$.*

1. $V = \mathbb{R}^2, \qquad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y = 0\},$
   $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}.$

2. $V = M_3, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$

   $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}; \quad e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}.$

3. $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \qquad U = \{p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p(1) = p(0) = 0\}$,
   $W = \{q(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Ex. 2.31 *Em cada um dos itens abaixo, dado U subespaço de V, encontrar o subespaço suplementar de U, isto é, o subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$.*

1. $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, $U = \{p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
3. $V = M_3$, $U = \{A \in M_3; A^t = A\}$.
4. $V = M_{2\times 1}$, $U = \{X \in M_{2\times 1}; AX = 0\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Capítulo 3

Combinações Lineares

3.1 Introdução e Exemplos

Vimos no capítulo anterior que um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial que é fechado com relação à adição de vetores e também com relação à multiplicação por escalar. Em outras palavras, quando somamos dois vetores de um subespaço vetorial ou multiplicamos um vetor do subespaço por um escalar, o resultado é um elemento deste subespaço. Quando combinamos repetidas vezes estas ações temos o que chamamos de combinação linear entre vetores. Mais precisamente,

Definição 3.1 *Sejam $u_1, \dots, u_n$ elementos de um espaço vetorial V. Dizemos que u é* combinação linear *de $u_1, \dots, u_n$ se existirem números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$*

Observação 3.2 *Sejam U um espaço vetorial e $V \subset U$ um subespaço vetorial. Se $u_1, \dots, u_n \in V$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ então a combinação linear $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ pertence a V.*

Exemplo 3.3 *Em $\mathscr{P}_2$, o polinômio $p(x) = 2 + x^2$ é uma combinação dos polinômios $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_3(x) = x^2$.*

Basta ver que $p(x) = 2p_1(x) + 0p_2(x) + p_3(x)$.

Exemplo 3.4 *Verifique que em $\mathscr{P}_2$, o polinômio $p(x) = 1 + x^2$ é uma combinação dos polinômios $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = 1 + x$ e $q_3(x) = 1 + x + x^2$.*

Precisamos encontrar números reais α, β e γ tais que $p(x) = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x) + \gamma q_3(x)$. Ou seja, precisamos encontrar α, β e γ satisfazendo

$$1 + x^2 = \alpha + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x + x^2) = \alpha + \beta + \gamma + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2,$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \iff \alpha = 1, \beta = -1 \text{ e } \gamma = 1.$$

3.2 Geradores

Definição 3.5 *Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Usaremos o símbolo $[S]$ para denotar o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S. Em outras palavras, $u \in [S]$ se existirem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n \in S$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.*

Proposição 3.6 *Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Então $[S]$ é um subespaço vetorial de V.*

Prova:

1. Como $S \neq \varnothing$ existe $u \in S$. Logo, $0 = 0u \in [S]$.

2. Se $u, v \in [S]$ então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_m \in S$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$u + \lambda v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m)$$

$$= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda\beta_1 v_1 + \cdots + \lambda\beta_m v_m \in [S].$$

$\blacksquare$

Definição 3.7 *Sejam S e V como acima. Diremos que $[S]$ é o subespaço vetorial gerado por S. Os elementos de S são chamados de* geradores *de $[S]$. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ também usaremos a notação $[S] = [u_1, \ldots, u_n]$.*

Proposição 3.8 *Sejam S e T subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial V. Temos*

1. $S \subset [S]$;

2. *Se $S \subset T$ então $[S] \subset [T]$;*

3. $[[S]] = [S]$;

4. *Se S é um subespaço vetorial então $S = [S]$;*

5. $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Prova:

1. Se $u \in S$ então $u = 1u \in [S]$;

2. Se $u \in [S]$ então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n \in S$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Como $S \subset T$ temos $u_1, \ldots, u_n \in T$ e, portanto, $u \in [T]$;

3. Pelo item 1 desta proposição, $[S] \subset [[S]]$. Seja $u \in [[S]]$. Segue da definição que u é uma combinação linear de elementos de $[S]$, mas como cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S resulta que u é uma combinação linear de elementos de S, ou seja, $u \in [S]$;

4. Pelo item 1, $S \subset [S]$. Seja $u \in [S]$. Então u é uma combinação linear de elementos de S. Como S é um subespaço vetorial, esta combinação linear é um elemento de S;

5. Seja $u \in [S \cup T]$. Por definição, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ e $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $v_1, \ldots, v_m \in T$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

$$= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) \in [S] + [T].$$

   Reciprocamente, se $u \in [S] + [T]$ então $u = v + w$ com $v \in [S]$ e $w \in [T]$. Dessa forma, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_p \in S$ e $w_1, \ldots, w_q \in T$ tais que

$$u = v + w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q \in [S \cup T].$$

∎

Definição 3.9 *Dizemos que um espaço vetorial V é* finitamente gerado *se existir um subconjunto finito $S \subset V$ tal que $V = [S]$.*

São exemplos de espaços vetoriais finitamente gerados:

1. $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = [1, x, \ldots, x^n]$;

2. $\mathbb{R}^n$ é gerado por

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

3. $M_{m \times n}$ é gerado pelas matrizes $E_{kl} = (\delta_{i,j}^{(k,l)})$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots n$, onde

$$\delta_{i,j}^{(k,l)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Exemplo 3.10 *Seja $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial formado por todos os polinômios. Afirmamos que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.*

Note que $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ fosse finitamente gerado existiriam polinômios $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ tais que

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}) = [p_1(x), \ldots, p_n(x)].$$

Seja N o grau mais alto dentre os polinômios $p_1(x), \ldots, p_n(x)$. É evidente que x^{N+1} não pode ser escrito como combinação linear de $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ e, assim, $x^{N+1} \notin [p_1(x), \ldots, p_n(x)] = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Uma contradição.

Note que $[1, x, x^2, \ldots] = \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.11 *Seja V um espaço vetorial gerado por $u_1, \ldots, u_n$. Mostre que se, por exemplo, u_1 é uma combinação linear de $u_2, \ldots, u_n$ então V é gerado por $u_2, \ldots, u_n$.*

Devemos mostrar que qualquer $u \in V$ se escreve como uma combinação linear de $u_2, \ldots, u_n$. Sabemos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e existem também $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ satisfazendo $u_1 = \beta_1 u_2 + \cdots + \beta_{n-1} u_n$. Combinando estas informações, obtemos

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1(\beta_1 u_2 + \cdots + \beta_{n-1} u_n) + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2) u_2 + \cdots + (\alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_n) u_n \in [u_2, \ldots, u_n]. \end{aligned}$$

Exemplo 3.12 *Sejam $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\}$. Encontre um conjunto finito de geradores para os seguintes subespaços vetoriais: U, V, $U \cap V$ e $U + V$.*

1. Se $(x, y, z, t) \in U$ então $y = x + z + t$ e, portanto,

   $$(x, y, z, t) = (x, x+z+t, z, t) = x(1, 1, 0, 0) + z(0, 1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1),$$

   isto é,
   $$U = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

2. Se $(x, y, z, t) \in V$ então $t = x + y + z$ e, portanto,

   $$(x, y, z, t) = (x, y, z, x+y+z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1),$$

   isto é,
   $$V = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)].$$

3. Se $(x, y, z, t) \in U \cap V$ então

$$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0, \end{cases}$$

que implica em $x = -z$ e $y = t$.

Deste modo, $(x, y, z, t) = (x, y, -x, y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, 1)$ e, portanto,

$$U \cap V = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

4. Como $U + V = [U] + [V] = [U \cup V]$, temos que

$$\begin{aligned} U + V = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),\\ (1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)] \\ = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)]. \end{aligned}$$

Observe que

$$(1,1,0,0) = (1,0,0,1) + (0,1,1,0) - (0,0,1,1)$$

e, portanto,

$$U + V = [(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

Veremos mais adiante que este é o número mínimo de geradores para o subespaço $U + V$.

3.3 Exercícios

Ex. 3.13 *Para cada um dos subconjuntos $S \subseteq V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.*

1. $S = \{(1,0),(2,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

2. $\{(1,1,1),(2,2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

3. $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$, $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

4. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2$.

Ex. 3.14 *Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto S, finito, que gere o subespaço vetorial W do espaço vetorial V.*

1. $W = \{(x, y, z) \in V \doteq \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}$.

2. $W = \{p \in V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

3. $W = \{A \in V \doteq M_2; A^t = A\}$.

4. $W = \{X \in V \doteq M_{3\times1}; AX = 0\}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ex. 3.15 *Encontrar, em cada um dos itens abaixo, os subconjuntos S do espaço vetorial V que geram U, W, $U \cap W$ e $U + W$.*

1. $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$, $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

2. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0\}$, $W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

3. $U = \{A \in M_2; A^t = A\}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $V = M_2$.

4. $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3]$, $W = [t^3 + 4t^2, t - 1, 1]$, $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Ex. 3.16 *Obtenha o subconjunto formado por vetores do espaço vetorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ que geram os seguintes subespaços;*

1. $U = \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p(1) = p(0) = 0\}$,

2. $W = \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$,

3. $U \cap W$.

Ex. 3.17 *Mostre que* $1, \cos 2x \in [\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x]$.

Ex. 3.18 *Verifique se* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *é gerado por* $1 + x$, $x + 2x^2$ *e* $1 - x^2$.

Capítulo 4

Dependência Linear

4.1 Introdução e Exemplos

No capítulo anterior ao estudarmos os geradores de um espaço vetorial procuramos encontrar um determinado conjunto de vetores de modo que qualquer vetor do espaço em questão pudesse ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto. Por exemplo, se v e w geram um espaço V então para qualquer $u \in V$ é possível encontrar escalares α e β satisfazendo $u = \alpha v + \beta w$, ou seja

$$\alpha v + \beta w - 1u = 0.$$

Note que a combinação linear acima é nula, embora nem todos os escalares que aparecem na sua formação são nulos.

Vejamos agora a seguinte situação: será possível encontrar escalares α, β e γ, não todos nulos, de modo que, em $\mathbb{R}^3$ tenhamos

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)?$$

A resposta é, obviamente não. Isto significa que não é possível escrever nenhum dos vetores acima como combinação linear dos outros dois. Isto contrasta com o que ocorre com os vetores u, v e w do exemplo anterior. Num certo sentido, os vetores do primeiro exemplo guardam uma certa dependência entre um e outro enquanto que, no segundo, os três vetores são independentes.

Vejamos, com as definições e exemplos que seguem como podemos tornar estes conceitos mais precisos.

Definição 4.1 *Dizemos que uma sequência de vetores* $u_1, \ldots, u_n$ *de um espaço vetorial* V *é linearmente independente (l.i., abreviadamente) se a combinação linear* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ *só for satisfeita quando* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Observação 4.2 *Note que se* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ *então* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$, *porém, a recíproca nem sempre é válida. Basta ver que, por exemplo, em* $\mathbb{R}^2$ *temos* $(0, 0) = 1(1, 1) + 1(-1, -1)$.

Observação 4.3 *A noção de independência linear para a sequência* $u_1, \ldots, u_n$ *equivale a dizer que se* $\beta_i \neq 0$ *para algum* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *então* $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \neq 0$.

Definição 4.4 *Dizemos que uma sequência* $u_1, \ldots, u_n$ *de um espaço vetorial* V *é linearmente dependente (l.d., abreviadamente) se não for linearmente independente.*

Observação 4.5 *A definição de dependência linear para a sequência* $u_1, \ldots, u_n$ *é equivalente a dizer que é possível encontrar números reais* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *não todos nulos tais que* $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$.

Exemplo 4.6 $O, u_1, \ldots, u_n \subset V$ *é uma sequência l.d., onde* O *é o elemento neutro do espaço vetorial* V.

Basta verificar que $1O + 0u_1 + \cdots + 0u_n = O$.

Exemplo 4.7 *Verifique se a sequência* $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ *é linearmente independente em* $\mathbb{R}^3$.

É preciso verificar quais são as possíveis soluções de

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Isto equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

que possui como única solução, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, a sequência acima é l.i..

Exemplo 4.8 *Considere os vetores em $\mathbb{R}^3$ dados por*

$$u_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad u_2 = (x_2, y_2, z_2) \qquad e \qquad u_3 = (x_3, y_3, z_3).$$

Encontre uma condição necessária e suficiente para que os vetores u_1, u_2, u_3 sejam linearmente independentes.

Vejamos, os vetores acima serão l.i. se e somente se $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ apresentar como única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Isto é equivalente a que o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0 \end{cases}$$

possua solução única e, como se sabe, isto é equivalente que a matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

possua determinante diferente de zero. Note que as colunas desta matriz são formadas pelos coeficientes de u_1, u_2 e u_3. O mesmo resultado vale se colocarmos os coeficientes dos vetores u_1, u_2 e u_3 como linhas. Por quê?

Exercício 4.9 *Enuncie e demonstre um resultado análogo ao exemplo anterior para uma sequência com n vetores do $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 4.10 *Verifique se as matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes em M_2.

Procuremos as soluções de

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta + \gamma \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que possui como solução $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, -\alpha, \alpha)$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a sequência de matrizes dada é linearmente dependente, bastando tomar, por exemplo, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e $\gamma = 1$.

Exemplo 4.11 *Verifique se as funções* $\cos$ *e* sen *são l.d. em* $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Como $\cos$ e sen são funções definidas em $\mathbb{R}$, a combinação nula

$$\alpha \cos + \beta \operatorname{sen} = 0$$

significa que $\alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, para $x = 0$ vemos que $\alpha = 0$ e para $x = \pi/2$, vem $\beta = 0$. Portanto, $\cos$ e sen são l.i..

Exemplo 4.12 *Verifique se as funções* $\cos^2, \operatorname{sen}^2, 1$ *são linearmente dependentes em* $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Como

$$1 - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

resulta que as funções acima são l.d..

Exercício 4.13 *Sejam* $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \cos^2 x$ *e* $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. *Mostre que* f, g, h *são linearmente dependentes em* $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

4.2 Propriedades

Proposição 4.14 *Se $u_1, \dots, u_n$ são l.d. em um espaço vetorial V então pelo menos um destes vetores se escreve como combinação linear dos outros.*

Prova: Precisamos mostrar que se $u_1, \dots, u_n$ são linearmente dependentes então existem $j \in \{1, \dots, n\}$ e números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tais que

$$u_j = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{j-1} u_{j-1} + \alpha_j u_{j+1} + \cdots + \alpha_{n-1} u_n.$$

Como $u_1, \dots, u_n$ são l.d. existem números reais $\beta_1, \dots, \beta_n$ não todos nulos tais que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$. Desse modo, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\beta_j \neq 0$ e, assim,

$$u_j = -\frac{\beta_1}{\beta_j} u_1 - \cdots - \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j} u_{j-1} - \frac{\beta_{j+1}}{\beta_j} u_{j+1} - \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_j} u_n.$$

∎

Proposição 4.15 *Se $u_1, \dots, u_n$ em V são l.d. então qualquer sequência finita de vetores de V que os contenha, também será l.d..*

Prova: Vamos mostrar que se $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m \in V$ são tais que $u_1, \dots,$ u_n são l.d. então $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m$ também são linearmente dependentes.

Como existem números reais $\beta_1, \dots, \beta_n$ não todos nulos tais que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$, podemos escrever

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0 u_{n+1} + \cdots + 0 u_m = 0$$

sendo que nesta última expressão nem todos os coeficientes são nulos. ∎

Proposição 4.16 *Se $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m$ são linearmente independentes em um espaço vetorial V então qualquer subsequência destes vetores também é linearmente independente.*

Prova: Basta mostrar que se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ são linearmente independentes então $u_1, \ldots, u_n$ também são.

Suponha que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$. Mas como

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0u_{n+1} + \cdots + 0u_m = 0$$

e estes vetores são l.i., segue que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. ∎

Proposição 4.17 *Se $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. em um espaço vetorial V e $u_1, \ldots, u_n$, u_{n+1} são l.d. então u_{n+1} é combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$.*

Prova: Existem $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ não todos nulos tais que

$$\beta_1 u_1 \cdots + \beta_n u_n + \beta_{n+1} u_{n+1} = 0.$$

Agora, se $\beta_{n+1} = 0$ então a expressão acima ficaria

$$\beta_1 u_1 \cdots + \beta_n u_n = 0.$$

Ora, os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. e, assim, deveríamos ter também $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Uma contradição. ∎

Proposição 4.18 *Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores l.i. em um espaço vetorial V. Então cada vetor $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ se escreve de maneira única como $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.*

Prova:

Basta mostrar que se $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ então $\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Temos

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0$$

e como $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. então $\alpha_j - \beta_j = 0$, isto é $\alpha_j = \beta_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$. ∎

4.3 Exercícios

Ex. 4.19 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é l.i. ou l.d.*

1. $S = \{(1,2),(-3,1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

2. $S = \{1+t-t^2, 2+5t-9t^2\}$, $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

3. $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2$.

4. $S = \{(1,2,2,-3),(-1,4,-2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

5. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_3$.

6. $S = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$, $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

7. $S = \{1, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$, $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

8. $S = \{e^x, e^{-x}\}$, $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

9. $S = \{xe^x, x\}$, $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ex. 4.20 *Seja $S = \{u,v,w\}$ um conjunto l.i. em V. Verifique se os conjuntos abaixo são l.i. ou l.d..*

1. $S_1 = \{u, u+v, u+v+w\}$;

2. $S_2 = \{u-v, v-w, w-u\}$;

3. $S_3 = \{u+v, u+v+w, w\}$.

Ex. 4.21 *Sejam $f,g \in C^1((a,b);\mathbb{R})$. Mostre que se existir $x \in (a,b)$ tal que $f(x)g'(x) \neq f'(x)g(x)$ então f e g são l.i..*

Capítulo 5

Base, Dimensão e Coordenadas

5.1 Base

A noção de base de um espaço vetorial é muito simples. Ela consiste em escolher um conjunto de geradores que seja o menor possível, isto é, um conjunto que gere o espaço, mas que se deste conjunto for subtraído qualquer elemento, o que resta não gera mais o espaço todo.

Vejamos a definição precisa de base.

Definição 5.1 *Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é uma sequência de vetores linearmente independentes B de V que também gera V.*

Exemplo 5.2 *Os vetores de $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.*

Vê-se facilmente que os vetores de B são l.i. e que todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se escreve como $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

Exemplo 5.3 *Os vetores $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ onde $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.*

Ex. Resolvido 5.4 *Mostre que* $(1, 1)$ *e* $(1, -1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^2$.

Resolução: É preciso mostrar que estes vetores são l.i. e que todo ponto de $\mathbb{R}^2$ se escreve como combinação linear de $(1, 1)$ e $(1, -1)$. No entanto, se mostrarmos que todo ponto de $\mathbb{R}^2$ se escreve *de maneira única* como combinação linear de $(1, 1)$ e $(1, -1)$ já estaremos mostrando as duas propriedades ao mesmo tempo. (Por quê?)

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. O nosso problema se resume em mostrar que existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ e um único $\beta \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(1, -1) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Esta última expressão é equivalente ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos uma única solução dada por $\alpha = (x + y)/2$ e $\beta = (x - y)/2$. $\square$

Exemplo 5.5 *As matrizes em*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

formam uma base de M_2.

Exercício 5.6 *Verifique se os elementos de* $B = \{1 + x, 1 - x, 1 - x^2\}$ *formam uma base de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Proposição 5.7 *Seja* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *uma base de* V. *Então* $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ *não é uma base de* V.

Prova: Se $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ fosse uma base de V então existiriam $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n - 1$ tais que

$$u_n = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1},$$

isto é,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1} - u_n = 0,$$

contradizendo o fato de que $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes.

∎

Teorema 5.8 *Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado admite uma base. Em outras palavras, há uma sequência de vetores l.i. de V formada por geradores.*

Prova: Como $V \neq \{0\}$ é finitamente gerado existem $u_1, \ldots, u_n \in V$ tais que $V = [u_1, \ldots, u_n]$. Se $u_1, \ldots, u_n$ forem l.i., então esta sequência é uma base de V e não há nada mais a ser provado.

Suponhamos que $u_1, \ldots, u_n$ sejam l.d.. Como $V \neq \{0\}$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u_j \neq 0$. Por simplicidade, podemos supor que $u_1 \neq 0$. Agora, se todo u_j, $j = 2, \ldots, n$ puder se escrever como combinação linear de u_1 então $V = [u_1]$ e u_1 é uma base de V. Caso isto não ocorra, é porque existe algum u_j, com $2 \leq j \leq n$ tal que u_1, u_j são l.i.. Por simplicidade, suponhamos que seja o u_2, isto é, u_1, u_2 são l.i.. Bem, se todos os vetores $u_3, \ldots, u_n$ forem combinações lineares de u_1 e u_2 então $V = [u_1, u_2]$ e u_1, u_2 formam uma base de V. Podemos repetir este processo e como o número de elementos de $L = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é finito, ele finda. Desse modo, existe uma sequência de vetores l.i. dentre os vetores L que gera V. Esta sequência forma uma base de V. ∎

5.2 Dimensão

Teorema 5.9 *Em um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado toda base possui o mesmo número de elementos.*

Prova: Sejam $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_m$ bases de um espaço vetorial finitamente gerado V. Suponhamos que $n > m$ e mostremos que isto implicará que $u_1, \ldots,$ u_n são l.d., o que contraria o fato de formarem uma base.

Como os vetores $v_1, \ldots, v_m$ geram V podemos escrever para cada $1 \leq j \leq n$,

$$u_j = \alpha_{1j} v_1 + \cdots + \alpha_{mj} v_m.$$

Assim, a combinação linear nula $x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n = 0$ é equivalente a

$$x_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} v_i \right) + \cdots + x_n \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} v_i \right) = 0,$$

ou ainda,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_{1j}\right) v_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_{mj}\right) v_m = 0.$$

Como $v_1, \ldots, v_m$ são l.i. então $\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Estas m equações representam um sistema linear homogêneo com n incógnitas. Como $n > m$, existe uma solução não trivial, isto é, uma solução $x_1, \ldots, x_n$ onde pelo menos um x_j é diferente de zero. Assim, $u_1, \ldots, u_n$ são l.d., uma contradição. ∎

Definição 5.10 *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se $V = \{0\}$ definimos a dimensão de V como sendo 0. Se $V \neq \{0\}$ definimos a dimensão de V como sendo o número de elementos de uma base qualquer de V. Usaremos o símbolo $\dim V$ para designar a dimensão de V.*

Definição 5.11 *Se um espaço vetorial não é finitamente gerado dizemos que V possui dimensão infinita.*

Proposição 5.12 *Todo espaço vetorial de dimensão infinita possui uma infinidade de vetores linearmente independentes, ou seja, existem vetores u_j, $j \in \mathbb{N}$, de modo que a sequência $u_1, \ldots, u_n$ é linearmente independente para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita. Claramente $V \neq \{0\}$. Selecione $u_1 \in V$, $u_1 \neq 0$. Como V não é finitamente gerado, $V \neq [u_1]$. Assim, podemos tomar $u_2 \in V$ tal que $u_2 \notin [u_1]$. Desta forma, os vetores u_1 e u_2 são linearmente independentes.

Suponha que tenhamos encontrado vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ linearmente independentes. Como V não é finitamente gerado, $V \neq [u_1, \ldots, u_n]$ e, assim, é possível escolher $u_{n+1} \in V$ tal que $u_{n+1} \notin [u_1, \ldots, u_n]$, isto é, os vetores $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1} \in V$ são linearmente independentes.

Em resumo, existe em V uma sequência infinita de vetores linearmente independentes. ∎

A seguinte proposição é um resultado da prova do teorema 5.9.

Proposição 5.13 *Em um espaço vetorial de dimensão m qualquer sequência de vetores com mais de m elementos é linearmente dependente.*

Corolário 5.14 *Todo subespaço vetorial de um espaço vetorial de dimensão finita também tem dimensão finita.*

Prova: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço vetorial de V. Se W tivesse dimensão infinita, pela proposição 5.12, existiria uma infinidade de vetores linearmente independentes em W. Como estes vetores também são linearmente independentes em V, o número deles deveria ser menor do que a dimensão de V (pela proposição 5.13). Uma contradição. ∎

Corolário 5.15 *Se V é um espaço vetorial n-dimensional e $u_1, \dots, u_n$ são vetores de V linearmente independentes então estes vetores formam uma base de V.*

Exemplo 5.16 $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 5.17 *A dimensão de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ é infinita. Veja o exemplo 3.10.*

Exemplo 5.18 $\dim \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Basta notar que os polinômios $1, x, \dots, x^n$ formam uma base de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 5.19 $\dim M_{m\times n} = mn$.

Note que as matrizes

$$A_{k,l} = (\delta_{i,j}^{k,l})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$$

$k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$ onde

$$\delta_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

formam uma base de $M_{m\times n}$.

Exercício 5.20 *A dimensão do espaço das matrizes quadradas e simétricas de ordem n é $n(n+1)/2$.*

Teorema 5.21 (Completamento) *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se os vetores $u_1, \ldots, u_r$ são l.i. em V com $r < n$ então existem $u_{r+1}, \ldots, u_n$ tais que $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ formam uma base de V.*

Prova: Como $r < n$ existe $u_{r+1} \in V$ tal que $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$ são l.i., pois caso contrário os vetores $u_1, \ldots, u_r$ formariam uma base de V, o que é impossível pois $\dim V = n > r$.

Se $r + 1 = n$ então $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$ formam uma base de V.

Se $r + 1 < n$ então é possível encontrar $u_{r+2} \in V$ tal que $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$, u_{r+2} são l.i., pois caso contrário a sequência $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$ seria uma base de V, o que é impossível pois $\dim V = n > r + 1$.

Repetindo os argumentos acima, encontramos vetores $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{r+k}$, onde $r + k = n$, de forma que

$$u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_{r+k}$$

são l.i. e, como $\dim V = n = r + k$, segue que esta sequência de vetores é uma base de V que contém os vetores $u_1, \ldots, u_r$. ∎

Exemplo 5.22 *Encontre uma base do $\mathbb{R}^3$ contendo o vetor $(1, 1, -1)$.*

Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é três, precisamos encontrar dois vetores, (a, b, c), (x, y, z), que juntamente com $(1, 1, -1)$ sejam l.i.. Porém, pelo exemplo 4.8, sabemos que isto é equivalente ao determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ -1 & c & z \end{pmatrix}$$

que é dado por $x(b + c) - y(a + c) + z(b - a)$ seja diferente de zero. Há uma infinidade de possibilidades para que isto aconteça. Por exemplo, tomando $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ e $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

5.3 Dimensão de Soma de Subespaços Vetoriais

Proposição 5.23 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços vetoriais de V então*

$$\dim U \cap W + \dim (U + W) = \dim U + \dim W \tag{5.24}$$

Prova: Lembre que todo subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem também dimensão finita.

Sejam $v_1, \ldots, v_m$ elementos de uma base de $U \cap W$. Como estes vetores são l.i. e pertencem a U, pelo teorema 5.21, existem $u_1, \ldots, u_p \in U$ tais que $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ formam uma base de U. Por outro lado, os vetores $v_1, \ldots,$ v_m também pertencem a W e pelo mesmo teorema é possível encontrar $w_1, \ldots,$ $w_q \in W$ de modo que $w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ formem uma base de W.

Com a notação usada, temos $\dim U \cap W = m$, $\dim U = m + p$ e $\dim W = m + q$. Sendo assim, a fim de mostrarmos que 5.24 é válida, é necessário e, na verdade, suficiente mostrar que $\dim (U + W) = m + p + q$. Para tanto, basta mostrarmos que os vetores

$$u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m \tag{5.25}$$

formam uma base de $U + W$.

Mostremos primeiramente que eles geram $U + W$: dado $v \in U + W$ existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. Como u é uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ e w é uma combinação linear de $w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ segue que $v = u+w$ é uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{m,1}, \ldots, w_q$. Portanto,

$$U + W = [u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{m,1}, \ldots, w_q].$$

Verifiquemos que os vetores em 5.25 são l.i.. Suponha que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0, \tag{5.26}$$

ou seja

$$U \ni \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = -\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q \in W.$$

Logo,

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q \in U \cap W = [v_1, \ldots, v_m].$$

Consequentemente, existem $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ tais que

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m,$$

ou seja,

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0.$$

Como $w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ são l.i., pois formam uma base de W, segue-se que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$. Assim, a equação 5.26 se reduz a

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0$$

e como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ são l.i., pois formam uma base de U, segue-se que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \cdots = \delta_m = 0,$$

ou seja, os vetores de 5.25 são linearmente independentes. ∎

Corolário 5.27 *Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial de dimensão finita V. Se $\dim U = \dim V$ então $U = V$.*

Prova: Suponha que exista $u_1 \in V$ com $u_1 \notin U$. Coloque $W = [u_1]$. Como $U \cap W = \{0\}$ e $\dim W = 1$, segue da proposição 5.23 que

$$\dim (U + W) = \dim U + 1 = \dim V + 1 > \dim V.$$

Um absurdo pois $\dim (U + W) \leq \dim V$. ∎

Observação 5.28 *Note que se V, U e W são como na proposição 5.23 e se além do mais tivermos $V = U + W$ e $\dim U + \dim W > \dim V$ então $U \cap W \neq \{0\}$, isto é, a soma $U + W$ não é direta.*

Bem, se fosse $U \cap W = \{0\}$ então pela proposição 5.23 teríamos

$$\begin{aligned} 0 = \dim U \cap W &= \dim U + \dim W - \dim (U + W) \\ &= \dim U + \dim W - \dim V > 0, \end{aligned}$$

um absurdo.

Exemplo 5.29 *Sejam* $U = \{p(x) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$ *e* $V = \{p(x) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p(-1) = 0\}$. *Encontre uma base de* U, V, $U \cap V$ *e* $U + V$.

U : Temos

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U \iff p(0) = p(1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff p(x) = -(a_2 + a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x).$$

Desse modo, $U = [x^2 - x, x^3 - x]$ e estes polinômios são l.i. pois como cada um tem um grau distinto do outro, nenhum pode ser múltiplo do outro. Assim, $x^2 - x$ e $x^3 - x$ formam uma base de U.

V :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V$$
$$\iff p(-1) = 0 \iff a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$
$$\iff p(x) = a_0 + (a_0 + a_2 - a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3$$
$$= a_0(1 + x) + a_2(x^2 + x) + a_3(x^3 - x).$$

Desse modo, $V = [1 + x, x^2 + x, x^3 - x]$ e estes polinômios são l.i. pois como cada um tem um grau distinto do outro, nenhum pode ser uma combinação linear dos outros dois. Portanto, $1+x$, x^2+x e x^3-x formam uma base de V.

$U \cap V$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U \cap V \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \\ a_1 = -a_3 \end{cases} \iff p(x) = -a_1(x^3 - x).$$

Logo, $x^3 - x$ é uma base de $U \cap V$.

$U+V$: Temos $\dim(U+V) = 2+3-1 = 4 = \dim \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Pela proposição 5.27 temos que $U+V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e podemos tomar como base os polinômios $1, x, x^2$ e x^3.

Exemplo 5.30 *Voltemos ao exemplo 3.12. Sabemos que*

$$\begin{aligned} U &= [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)] \\ V &= [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)] \\ U\cap V &= [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)] \\ U+V &= [(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)] \end{aligned}$$

Verifiquemos que os geradores acima são na verdade bases para os respectivos subespaços vetoriais. Para tanto basta verificar que cada sequência de vetores acima é l.i..

Analisemos primeiramente para U: se

$$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha, \alpha+\beta+\gamma, \beta, \gamma) = (0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Vejamos agora o caso do subespaço V: se

$$\alpha(1,0,0,1)+\beta(0,1,0,1)+\gamma(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Passemos agora a $U \cap V$: se

$$\alpha(1,0,-1,0)+\beta(0,1,0,1) = (\alpha, \beta, -\alpha, \beta) = (0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha = \beta = 0$.

Pela proposição 5.23 temos $\dim(U+V) = 3+3-2 = 4$. Como $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,0,1)$, $(0,0,1,1)$ geram $U+V$ segue-se do fato da dimensão deste subespaço ser quatro que formam uma base de $U+V$. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ também e $U+V \subset \mathbb{R}^4$, temos pela proposição 5.27 que $U+V = \mathbb{R}^4$. Note que esta soma não é direta.

5.4 Coordenadas

Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado e B uma base de V formada pelos vetores $u_1, \ldots, u_n$. Como B é uma base de V, todo elemento de $u \in V$ se escreve como $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, com os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Pela proposição 4.18, os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são unicamente determinados pelo vetor u. Estes coeficientes são denominados coordenas de u com relação à base B. Representaremos as coordenadas de u com relação à base como

$$u_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5.31 *Mostre que os vetores* $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ *e* $(0,0,1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontre as coordenadas de* $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base* B *formada pelos vetores acima.*

Já sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Para verificar se os vetores acima formam uma base de V, basta verificar se eles são l.i.. Utilizando o exemplo 4.8 vemos que estes vetores são de fato l.i. pois a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

possui determinante igual a $1 \neq 0$.

Agora,

$$(1,2,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuja (única) solução é $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = -2$. Desse modo, as coordenadas de $(1, 2, 0)$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5.32 *Mostre que os polinômios $1, x, x^2 - x$ formam uma base, B, de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base B. Encontre também as coordenadas deste mesmo polinômio com relação à base C formada pelos polinômios 1, x e x^2.*

Para verificar que $1, x, x^2 - x$ formam uma base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ basta mostrar cada $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se escreve de maneira única como combinação linear de $1, x$ e $x^2 - x$. Isto é equivalente a mostrar que a equação $p(x) = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x)$ possui uma única solução $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. A equação acima se escreve como

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \alpha + (\beta - \gamma)x + \gamma x^2,$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = a_0 \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases}$$

que possui uma única solução dada por $\alpha = a_0$, $\beta = a_1 + a_2$, e $\gamma = a_2$.

Com isso em mãos, vemos que as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que com relação à base C formada por 1, x e x^2 as coordenadas de $1+x+x^2$ são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 Exercícios

Ex. 5.33 *Verificar em cada um dos casos se o subconjunto B do espaço vetorial V é uma base de V.*

1. $B = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$, $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2$.
3. $B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

Ex. 5.34 *Encontrar em cada um dos itens abaixo uma base e a dimensão do subespaço W do espaço vetorial V.*

1. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-y=0 \text{ e } x+2y+t=0\}$, $V = \mathbb{R}^4$.
2. $W = \{X \in M_2; AX = X\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_2$.
3. $W = \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}); p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
4. $W = \{X \in M_2; AX = XA\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_2$.

Ex. 5.35 *Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determinar;*

i) uma base e a dimensão de U.

ii) uma base e a dimensão de W.

iii) uma base e a dimensão de $U+W$.

iv) uma base e a dimensão de $U \cap W$. nos seguintes casos;

1. $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$, $W = \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

2. $U = \{A \in M_2;\ \mathrm{tr}\,(A) = 0\}$, $W = \{A \in M_2;\ A^t = -A\}$, $V = M_2$, *onde* $\mathrm{tr}\,(A)$ *é a soma dos elementos da diagonal principal de* A*, chamado de traço de* A

3. $U = \{p(t) \in V; p'(t) = 0\}, W = \{p(t) \in V; p(0) = p(1)\}, V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Ex. 5.36 *Determinar as coordenadas do vetor* $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ *em relação a cada uma das bases de* $\mathbb{R}^3$ *abaixo;*

1. *base canônica*

2. $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

3. $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$

Ex. 5.37 *Determinar as coordenadas do polinômio* $p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*, dado por* $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$, $t \in \mathbb{R}$ *em relação as seguintes bases de* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*;*

1. *base canônica*

2. $\{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\}$

3. $\{4 + t, 2, 2 - t^2, t + t^3\}$

Ex. 5.38 *Determinar as coordenadas do vetor* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2$ *em relação as seguintes bases de* M_2*;*

1. *base canônica*

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ex. 5.39 *Encontre uma base de* M_2 *que contenha*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ex. 5.40 *Verifique que as coordenadas de* $p(x) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *com relação à base* $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ *é*

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{1}{2!}p''(0) \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}p^{(n)}(0) \end{pmatrix},$$

onde $p^{(k)}(0)$ *representa a* k*-ésima derivada de* p *em* $x = 0$.

Ex. 5.41 *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* V *mostre que*

1. $\{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \ldots, u_1 + \cdots, u_n\}$ *é um base de* V;
2. *se* $\alpha_j \neq 0, j = 1, \ldots, n$ *então* $\{\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n\}$ *é uma base de* V.

Capítulo 6

Mudança de Base

6.1 Introdução, Exemplos e Propriedades

Como vimos no exemplo 5.32 as coordenadas de um elemento de um espaço vetorial podem variar quando se consideram bases distintas. O que passaremos a estudar agora é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar as coordenadas de um vetor com relação a uma base sabendo-se suas coordenadas com relação a uma outra.

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Sejam B e C bases de V formadas pelos vetores $b_1, \dots, b_n$ e $c_1, \dots, c_n$, respectivamente. Como B é uma base, existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ tais que

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & \alpha_{11} b_1 + \cdots + \alpha_{n1} b_n \\ & \vdots & \\ c_n & = & \alpha_{1n} b_1 + \cdots + \alpha_{nn} b_n. \end{array}$$

Desta forma, as coordenadas de $c_1, \dots, c_n$, com relação à base B são, respectivamente,

$$c_{1_B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, c_{n_B} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Reunimos estas informações sobre as coordenadas dos vetores da base C com relação à base B na seguinte matriz

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelas coordenas de $c_1, \ldots, c_n$ com relação à base B. A matriz M_B^C é chamada de matriz mudança de base da base B para a base C.

Antes de mostrarmos a relação que existe entre M_B^C e as coordenadas de um dado vetor com relação às bases B e C, vejamos como podemos encontrar a matriz de mudança de base em um exemplo no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6.1 *Considere a base* B *de* $\mathbb{R}^3$ *formada pelos vetores* $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ *e* $(1,1,2)$. *Considere também a base* C *formada pelos vetores* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$. *Encontre* M_B^C.

Precisamos resolver

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & = & \alpha_{11}(1,0,1) + \alpha_{21}(1,1,1) + \alpha_{31}(1,1,2) \\ (0,1,0) & = & \alpha_{12}(1,0,1) + \alpha_{22}(1,1,1) + \alpha_{32}(1,1,2) \\ (0,0,1) & = & \alpha_{13}(1,0,1) + \alpha_{23}(1,1,1) + \alpha_{33}(1,1,2) \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31}) & = & (1,0,0) \\ (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\alpha_{32}) & = & (0,1,0) \\ (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}, \alpha_{23} + \alpha_{33}, \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\alpha_{33}) & = & (0,0,1). \end{array}$$

Um momento de reflexão nos poupará um pouco de trabalho neste ponto. Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma. O que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z, basta resolvermos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a \end{pmatrix}$$

cuja única solução é dada por $x = a - b$, $y = a + b - c$ e $z = c - a$.

Tomando $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ obtemos $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = (1, 1, -1)$.

Tomando $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ obtemos $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = (-1, 1, 0)$.

Tomando $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ obtemos $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = (0, -1, 1)$. Desta forma, obtemos

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 6.2 *Com as notações do exemplo acima, encontre M_C^B.*

Vejamos agora como as coordenadas de um vetor se relacionam com respeito a duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita.

Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V formadas, respectivamente, pelos vetores $b_1, \ldots, b_n$ e $c_1, \ldots, c_n$. Dado um vetor v em V sejam

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

as suas coordenadas com relação às bases B e C, respectivamente. Se $M_B^C = (\alpha_{ij})$ representa a matriz de mudança da base B para base C, então como $c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$, $j = 1, \ldots, n$, obtemos

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i = \sum_{j=1}^n y_j c_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) b_i$$

onde na última igualdade invertemos a ordem da soma. Como os vetores $b_1, \ldots,$ b_n são l.i., segue-se que $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j$, $i = 1, \ldots, n$. Porém, estas últimas n

equações podem ser escritas na seguinte fórmula matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ou mais simplesmente,

$$v_B = M_B^C v_C.$$

Resumiremos este resultado na seguinte

Proposição 6.3 *Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V. Se v_B e v_C representam as coordenadas de um dado vetor $v \in V$ com relação às bases B e C, respectivamente e se M_B^C é a matriz de mudança de base da base B para a base C então*

$$v_B = M_B^C v_C.$$

Exemplo 6.4 *Fixado $\theta \in \mathbb{R}$, considere os vetores*

$$u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad e \qquad u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

em $\mathbb{R}^2$. Mostre que estes vetores formam uma base, B, de $\mathbb{R}^2$ e encontre a matriz de mudança desta base para a base C formada pelos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Encontre as coordenadas do vetor $u = ae_1 + be_2$ com relação à base B.

Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é dois basta mostrar que u_1 e u_2 são l.i.. Se

$$\alpha(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \beta(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0,0)$$

então

$$\begin{cases} \alpha\cos\theta - \beta\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \alpha\operatorname{sen}\theta + \beta\cos\theta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0,$$

pois

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

A matriz M_B^C será dada por (α_{ij}), onde

$$\begin{aligned}(1,0) = &\quad \alpha_{11}(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) + \alpha_{21}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\\ (0,1) = &\quad \alpha_{12}(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta) + \alpha_{22}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta),\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}(1,0) = &\quad (\alpha_{11}\cos\theta - \alpha_{21}\operatorname{sen}\theta, \alpha_{11}\operatorname{sen}\theta + \alpha_{21}\cos\theta)\\ (0,1) = &\quad (\alpha_{12}\cos\theta - \alpha_{22}\operatorname{sen}\theta, \alpha_{12}\operatorname{sen}\theta + \alpha_{22}\cos\theta),\end{aligned}$$

e como já visto antes, basta resolver o sistema

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\cos\theta + \beta\operatorname{sen}\theta\\ \beta\cos\theta - \alpha\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}.$$

Fazendo $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ obtemos $(\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$.

Colocando $(\alpha, \beta) = (0, 1)$, temos $(\alpha_{12}, \alpha_{22}) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Assim,

$$M_B^C = \begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Agora, se u_B representa as coordenadas de $u = ae_1 + be_2$ com relação à base B e u_C as coordenadas do mesmo vetor com relação à base C, pela proposição 6.3 temos

$$u_B = M_B^C u_C = \begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta\\ b\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}.$$

Proposição 6.5 *Sejam B, C e D bases de um espaço vetorial n dimensional. Temos*

$$M_B^D = M_B^C M_C^D.$$

Prova: Sejam $b_1, \ldots, b_n$ os vetores de B, $c_1, \ldots, c_n$ os vetores de C e $d_1, \ldots, d_n$ os vetores de D. Usando a notação $M_B^C = (\alpha_{ij})$, $M_C^D = (\beta_{ij})$ e $M_B^D = (\gamma_{ij})$ vemos que

$$c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i, \qquad d_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} c_j, \qquad d_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} b_i. \tag{6.6}$$

Assim,

$$d_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} c_j = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) b_i,$$

como $b_1, \ldots, b_n$ são l.i., comparando com a última expressão de 6.6, obtemos

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}, \qquad 1 \le i, k \le n.$$

Resta apenas lembrar que o lado direito da expressão acima representa o elemento da i-ésima linha e da k-ésima coluna da matriz $M_B^C M_C^D$. Portanto, $M_B^D = M_B^C M_C^D$. ∎

Proposição 6.7 *Sejam B e C bases em um espaço vetorial de n dimensional V. Então a matriz M_B^C possui inversa e esta inversa é dada por M_C^B, a matriz de mudança da base C para a base B.*

Prova: Pela proposição anterior temos $M_B^C M_C^B = M_B^B$ e $M_C^B M_B^C = M_C^C$. Resta mostrar que $M_B^B = M_C^C = I = (\delta_{ij})$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é a matriz identidade de ordem n. É claro que basta mostrar que $M_B^B = I$ e isto é bem simples, pois se $u_1, \ldots, u_n$ são os vetores da base B então $M_B^B = (\alpha_{ij})$

satisfaz $u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} u_i$, $j = 1, \ldots, n$. Ora, como $u_1, \ldots, u_n$ são l.i., para cada $j = 1, \ldots, n$, a única solução de cada uma destas equações é dada por

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$. ∎

Exercício 6.8 *Utilize a proposição acima para refazer o exercício 6.2.*

6.2 Exercícios

Ex. 6.9 *Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de um espaço vetorial V relacionadas da seguinte forma*

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

1. *Determine as matrizes mudança da base B para a base C, isto é, M_B^C, e da base C para a base B, isto é, M_C^B.*

2. *Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base B, isto é, v_B, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base C, isto é, v_C.*

3. *Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base C, isto é, v_C, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base B, isto é, v_B.*

Ex. 6.10 *Considere as bases ordenadas $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.*

1. *Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C, isto é M_B^C, e da base C para a base B, isto é M_C^B.*

2. *Se* $v_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ *encontre* v_C.

3. *Se* $v_C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *encontre* v_B.

4. *Se $D = \{1, t, t^2\}$ é a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, encontre as matrizes de mudança da base B para a base D e da base D para a base C, isto é, M_B^D e M_D^C, respectivamente.*

Ex. 6.11 *Considere o seguinte subespaço de M_2;*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2; x - y - z = 0 \right\}.$$

1. *Mostre que*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são bases de W.

2. *Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B, isto é, M_B^C e M_C^B, respectivamente.*

3. *Encontre uma base D de W, tal que a matriz*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base D para a base B, isto é, $P = M_D^B$.

Capítulo 7

Exercícios Resolvidos – Uma Revisão

NEste capítulo apresentamos uma série de exercícios resolvidos buscando fazer um resumo do que vimos até agora.

Ex. Resolvido 7.1 *Verifique se* $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; y = x, z = w^2\}$ *com as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$ *é um espaço vetorial.*

Resolução: Note que $(0, 0, 1, 1) \in V$ mas $-1(0, 0, 1, 1) = (0, 0, -1, -1) \notin V$. Assim, V não é um espaço vetorial. $\square$

Ex. Resolvido 7.2 *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz quadrada de ordem* n. *Verifique se* $W = \{X \in M_{n\times 1}; AX = 0\}$ *é um subespaço vetorial de* $M_{n\times 1}$, *com as operações usuais.*

Resolução:

1. Seja $O = (0)$ a matriz $n \times 1$ nula. Como $AO = O$, temos que $O \in W$.

2. Se $X, Y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, pelas propriedades da soma e da multiplicação por escalar usuais entre as matrizes e, também, pelas propriedades do produto entre matrizes, temos

$$A(X + \lambda Y) = AX + A(\lambda Y) = AX + \lambda AY = O + \lambda O = O.$$

Portanto $X + \lambda Y \in W$.

Concluímos que W é um subespaço vetorial de $M_{n\times 1}$. $\square$

Ex. Resolvido 7.3 *Encontre o subespaço vetorial de* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ *gerado por* $S = \{1, t, t^2, 1+t^3\}$.

Resolução: Note que $t^3 = (t^3+1)-1$. Assim, dado $p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ podemos escrever $p(t) = (a_0-a_3)+a_1t+a_2t^2+a_3(t^3+1) \in [S]$. Logo, $\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = [S]$. $\square$

Ex. Resolvido 7.4 *Encontre o subespaço vetorial de* M_2 *gerado por*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução: Temos que $A \in [S]$ se e somente se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $A \in [S]$ se e somente se os elementos da diagonal principal de A são nulos. $\square$

Ex. Resolvido 7.5 *Encontre um conjunto finito de geradores para*

$$W = \{X \in M_{3\times 1} : AX = 0\},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in W \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

portanto,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Ex. Resolvido 7.6 *Encontre um conjunto finito de geradores para*

$$W = \{X \in M_{4\times 1} : AX = 0\},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in W \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\gamma/2 - \delta/2 \\ \beta = 3\gamma/2 + \delta/2 \end{cases},$$

isto é,

$$X = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - \delta/2 \\ 3\gamma/2 + \delta/2 \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

portanto,

$$W = \left[\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

□

Ex. Resolvido 7.7 *Encontre uma base do subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$ *dado por* $U = [(1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1)]$.

Resolução: *Primeiro Modo:* $(x,y,z) \in U$ se e somente se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,2,0) + \gamma(0,2,-1) = (x,y,z),$$

ou seja, $(x, y, z) \in U$ se e somente se o sistema abaixo admite solução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z-x+y/2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y/2 \\ y/2 \\ z-x+y/2 \end{pmatrix}$$

que possui solução, e esta é dada por $\alpha = \gamma + x - y/2$, $\beta = -\gamma + y/2$, $\gamma \in \mathbb{R}$, se e somente se $z = x - y/2$. Dessa forma,

$$(x, y, z) = (\gamma + x - y/2)(1, 0, 1) + (-\gamma + y/2)(1, 2, 0) + \gamma(0, 2, -1) =$$

$$= (x, y, x - y/2) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1/2)$$

e como

$$(1, 0, 1), (0, 1, -1/2) \tag{7.8}$$

são l.i., segue-se que formam uma base de U.

Segundo Modo: Note que os vetores $(1, 0, 1)$ e $(1, 2, 0)$ são l.i. e pertencem a U. Vejamos se estes vetores juntamente com $(0, 2, -1)$ são l.d. ou l.i.:

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(0, 2, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (\alpha + \beta, 2\beta + 2\gamma, \alpha - \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = -\beta = \gamma,$$

ou seja, os vetores
$$(1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1)$$
são l.d.. Portanto,
$$(1,0,1),(1,2,0) \tag{7.9}$$
formam uma base de U.

Embora as bases 7.8 e 7.9 não coincidam, ambas estão corretas. Basta observar que
$$(1,2,0)=(1,0,1)+2(0,1,-1/2).$$

□

Ex. Resolvido 7.10 *Dados os subespaços*
$$U=\{A\in M_2 : A^t=A\} \quad e \quad W=\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$
em M_2, encontre uma base de U, W, $U\cap W$ e $U+W$, no caso em que não se reduzam a $\{0\}$.

Resolução:

U :
$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A^t \iff c=b,$$
portanto, $A\in U$ se e somente se existirem $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que
$$A=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
A mesma equação acima tomada com $A=0$, mostra que as matrizes
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
são l.i. e, portanto, como geram U, formam uma base de U. Note que $\dim U=3$.

$W:$ Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gera W e é não nula, ela serve como base de W. Note que $\dim W = 1$.

$U \cap W:$

$$A \in U \cap W \iff A = A^t \text{ e existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

isto é, se e somente se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

que é satisfeita se e somente se $\lambda = 0$, ou seja, $A = O$. Desse modo, $U \cap W = \{O\}$ e $\dim U \cap W = 0$.

$U + W:$ Temos

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 4 = \dim M_2;$$

portanto, $U + W = M_2$ e uma base pode ser dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 7.11 *Sejam* $U = \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$ *subespaços vetoriais de* $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. *Encontre uma base de* U, W, $U \cap W$ *e* $U + W$, *no caso em que não se reduzam a* $\{0\}$.

$U:$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U \iff p'(t) = a_1 + 2a_2 t = 0$$

$$\iff a_1 = a_2 = 0 \iff p(t) = a_0 \iff p(t) \in [1].$$

Logo, 1 é uma base de U e $\dim U = 1$.

W :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U \iff \begin{cases} p(0) = a_0 = 0 \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff p(t) = a_1 t - a_1 t^2 = a_1(t - t^2),$$

isto é, $p(t) \in [t - t^2]$. Assim $t - t^2$ é uma base de W e $\dim W = 1$.

$U \cap W$: $p(t) \in U \cap W = [1] \cap [t - t^2]$ se e somente se existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $p(t) = \lambda = \mu(t - t^2)$. Claramente, isto só é possível quando $\lambda = \mu = 0$, ou seja, quando $p(t) = 0$. Assim, $U \cap W = \{0\}$ e $\dim U \cap W = 0$.

$U + W$: Temos

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 1 + 1 - 0 = 2$$

e como a soma é direta podemos tomar $1, t - t^2$ como base de $U \cap W$. $\square$

Ex. Resolvido 7.12 *Seja V um espaço vetorial. Sejam B e C bases de V formadas pelos vetores e_1, e_2, e_3 e g_1, g_2, g_3, respectivamente, relacionados da seguinte forma:*

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

1. *Determine as matrizes de mudança da base B para a base C, isto é, M_B^C, e da base C para a base B, isto é, M_C^B.*

2. *Se as coordenadas do vetor v em relação a base B, isto é, v_B, são dadas por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontre as coordenadas de v em relação a base C, isto é, v_C.*

3. *Se as coordenadas do vetor v em relação a base C, isto é, v_C, são dadas por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ encontre as coordenadas de v em relação a base B, isto é, v_B.*

Resolução:

1. Temos
$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Como $M_C^B = \left(M_B^C\right)^{-1}$, passemos a encontrar a inversa de M_B^C :
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right)$$
Portanto,
$$M_C^B = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

2. Como $v_C = M_C^B v_B$,
$$v_C = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Como $v_B = M_B^C v_C$,

$$v_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ex. Resolvido 7.13 *Considere o seguinte subespaço de M_2:*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2; x - y - z = 0 \right\}.$$

a) Mostre que B dada pelas matrizes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e C dada pelas matrizes

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são bases de W.

b) Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B.

c) Encontre uma base D de W, tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base D para a base B, isto é, $P = M_D^B$.

Resolução:

a)

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W \iff x = y + z.$$

Assim, $A \in W$ se e somente se existirem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

isto é,

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

A equação 7.14 tomada com $A = O$ mostra que as matrizes acima que geram W são de fato l.i. e, portanto, formam uma base de W. Além do mais, $\dim W = 3$.

Como C é formado por três vetores de W e a dimensão de W é três, basta verificar que tais vetores são l.i.. De fato,

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha+\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

b) Basta notar que

$$\begin{aligned} C_1 &= B_2 \\ C_2 &= -B_1 + B_2 \\ C_3 &= B_3 \end{aligned}$$

e daí,

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quanto a M_C^B, vemos que

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 - C_2 \\ B_2 &= C_1 \\ B_3 &= C_3 \end{aligned}$$

e assim,

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Procuremos D_1, D_2 e D_3 em W de modo que formem uma base W tal que $M_D^B = P$. Isto ocorre se e somente se

$$\begin{array}{rl} B_1 = & 1D_1 + 0D_2 + 0D_3 = D_1 \\ B_2 = & 1D_1 + 0D_2 + 3D_3 = D_1 + 3D_3 \\ B_3 = & 0D_1 + 2D_2 + 1D_3 = 2D_2 + D_3 \end{array},$$

ou seja, $D_1 = B_1$, $D_3 = (B_2 - B_1)/3$ e $D_2 = (B_3 - (B_2 - B_1)/3)/2 = (3B_3 + B_1 - B_2)/6$. Assim, a base D formada por D_1, D_2 e D_3 é dada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 8

Transformações Lineares

8.1 Introdução e Exemplos

ATé agora estudamos os espaços vetoriais e seus subespaços, introduzimos os conceitos como dependência e independência linear e, a partir disto, pudemos descrevê-los de maneira mais simples usando para isto geradores e, mais especificamente, bases. De certa forma já temos em mãos tudo o que precisamos para trabalhar com espaços vetoriais. No capítulo 12 voltaremos a estudar espaços vetoriais que possuem uma estrutura mais rica.

O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de funções, principalmente com aquelas que estão definidas em um subconjunto da reta e tomam seus valores também no conjunto dos números reais. Nosso próximo passo é estudar funções que têm como domínio um espaço vetorial e que tomam seus *valores* em um outro espaço vetorial. Note que os valores tomados são, na verdade, vetores. No entanto, vamos nos restringir a apenas alguns tipos especiais dentre estas funções. Estamos interessados em funções que *preservem* as operações existentes no espaço vetorial que atua como o seu domínio e aquelas do espaço vetorial que age como contra-domínio. Por exemplo, por preservar a adição de vetores entendemos que ao tomar dois vetores no domínio da função o valor que esta deve ter para a soma destes dois vetores é a soma dos valores que ela possui para cada um dos vetores. De maneira semelhante a função deve preservar o produto por escalar. Funções com estas propriedades são chamadas de transformações lineares. Mais precisamente, temos.

Definição 8.1 *Sejam U e V espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma* transformação linear *se forem verificadas as seguintes condições:*

1. $T(u+v) = T(u) + T(v), \qquad \forall u, v \in U;$

2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \qquad \forall u \in U, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Observação 8.2 *Note que $T : U \to V$ é uma transformação linear se e somente se $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$, para todo $u, v \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Observação 8.3 *Note que pela propriedade 2 temos*

$$T(0) = T(00) = 0T(0) = 0.$$

Ou seja, toda transformação linear de U em V leva o elemento neutro de U no elemento neutro de V.

A seguir listamos alguns exemplos de transformações lineares definidas em vários espaços vetoriais que já tratamos no decorrer do curso.

1. $T : U \to V$ dada por $T(u) = 0$, para todo $u \in U$. T é chamada de transformação nula.

2. $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$, para todo $u \in U$. T é chamada de transformação identidade.

3. $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (a_0, \ldots, a_n).$$

4. Se $A \in M_{m\times n}$ é uma matriz dada, definimos

$$T : M_{n\times 1} \to M_{m\times 1}$$

por $T(X) = AX$, o produto de A com X, para todo $X \in M_{n\times 1}$.

5. $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

para toda função $f \in C([0,1];\mathbb{R})$.

6. $T : C^1([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$ dada por $T(f) = f'$, a derivada de f, para toda $f \in C^1([0,1];\mathbb{R})$.

Os exemplos abaixo são de funções entre espaços vetoriais que *não* são transformações lineares.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y,z) = x + y + z + 1$. Note que $T(0,0,0) = 1 \neq 0$.

2. $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

para toda função $f \in C([0,1];\mathbb{R})$.

Se T fosse linear deveríamos ter por 2, $T(-f) = -T(f)$ para toda função $f \in C([0,1];\mathbb{R})$. Para ver que isto não ocorre, basta tomar f como sendo a função constante igual a 1. Temos neste caso que $T(-1) = 1 = T(1)$.

3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$. Observe que $T(-1) = 1 = T(1)$. Logo, não temos $T(-1) = -T(1)$.

Proposição 8.4 *Seja U um espaço vetorial com base $u_1, \ldots, u_n$. Toda transformação linear $T : U \to V$ fica determinada por $T(u_1), \ldots, T(u_n)$, ou seja, conhecidos estes vetores, conhece-se $T(u)$ para qualquer $u \in U$.*

Prova: Já que $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de U, dado $u \in U$ existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Deste modo,

$$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n).$$

∎

Ex. Resolvido 8.5 *Encontre uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1,2) = (3,-1)$ *e* $T(0,1) = (1,2)$.

Resolução: Note que $(1,2)$ e $(0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ então, como é fácil verificar, temos $(x,y) = x(1,2) + (y-2x)(0,1)$. Deste modo, a transformação T deve satisfazer

$$T(x,y) = T(x(1,2) + (y-2x)(0,1)) = xT(1,2) + (y-2x)T(0,1)$$

$$= x(3,-1) + (y-2x)(1,2) = (x+y, 2y-5x).$$

Verifica-se facilmente que a transformação T definida como acima é linear e satisfaz as condições pedidas. □

8.2 O Espaço Vetorial $\mathscr{L}(U,V)$

Sejam U e V espaços vetoriais. O conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$ é denotado por $\mathscr{L}(U,V)$. Quando $U = V$ usamos a notação $\mathscr{L}(U) \doteq \mathscr{L}(U,U)$.

Dadas $T, S \in \mathscr{L}(U,V)$ podemos definir $T + S : U \to V$ por $(T+S)(u) = T(u) + S(u)$, $u \in U$. Vê-se claramente que $T + S \in \mathscr{L}(U,V)$.

Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\lambda T : U \to V$ como $(\lambda T)(u) = \lambda(T(u))$. Também, $\lambda T \in \mathscr{L}(U,V)$.

É um simples exercício de verificação o fato de $\mathscr{L}(U,V)$ com as operações definidas acima ser um espaço vetorial. Note que o elemento neutro da adição é a transformação nula, isto é, $T \in \mathscr{L}(U,V)$ definida por $T(u) = 0$, $u \in U$.

Registraremos isto na seguinte

Proposição 8.6 $\mathscr{L}(U,V)$ *com as operações acima é um espaço vetorial.*

Definição 8.7 *Se* U *é um espaço vetorial, definimos o espaço dual de* U *como sendo* $U' \doteq \mathscr{L}(U,\mathbb{R})$, *isto é,* U' *é formado pelas transformações lineares* $T : U \to \mathbb{R}$. *Estas transformações lineares também são chamadas de funcionais lineares definidos em* U.

Teorema 8.8 *Se U é um espaço vetorial de dimensão n e V é um espaço vetorial de dimensão m então $\mathscr{L}(U,V)$ tem dimensão mn.*

Prova: Fixemos duas bases, uma formada por vetores $u_1, \ldots, u_n$ de U e outra formada por $v_1, \ldots, v_m$, vetores de V.

Para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ defina

$$T_{ij}(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_iv_j, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}.$$

Verifiquemos que $T_{ij} \in \mathscr{L}(U,V)$:

$$\begin{aligned} &T_{ij}((x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) + (y_1u_1 + \cdots + y_nu_n)) \\ &= T_{ij}((x_1+y_1)u_1 + \cdots + (x_n+y_n)u_n) = (x_i+y_i)v_j = x_iv_j + y_iv_j \\ &= T_{ij}(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) + T_{ij}(y_1u_1 + \cdots + y_nu_n). \end{aligned}$$

Também, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n)) &= T_{ij}(\lambda x_1u_1 + \cdots + \lambda x_nu_n) \\ &= \lambda x_iv_j = \lambda T_{ij}(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n). \end{aligned}$$

Mostremos que T_{ij}, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, formam uma base de $\mathscr{L}(U,V)$. Se $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}T_{ij} = 0$ então, para cada $1 \leq k \leq n$,

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^m a_{kj}T_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^m a_{kj}v_j$$

e como $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes, segue-se que $a_{k1} = \cdots = a_{km} = 0$. Portanto $T_{11}, \ldots, T_{nm}$ são linearmente independentes.

Seja $T \in \mathscr{L}(U,V)$. Se $u \in U$ então $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, para certos números reais $x_1, \ldots, x_n$. Como T é linear

$$T(u) = x_1T(u_1) + \cdots + x_nT(u_n).$$

Como $T(u_i) \in V$, podemos escrever, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$T(u_i) = \alpha_{1i}v_1 + \cdots + \alpha_{mi}v_m.$$

Porém, como para cada $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, $T_{ij}(u) = x_i v_j$, obtemos

$$T(u) = x_1T(u_1) + \cdots + x_nT(u_n)$$

$$= x_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{m1}v_m) + \cdots + x_n(\alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_m)$$

$$= \alpha_{11}x_1v_1 + \cdots + \alpha_{m1}x_1v_m + \cdots + \alpha_{1n}x_nv_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_nv_m$$

$$= \alpha_{11}T_{11}(u) + \cdots + \alpha_{m1}T_{1m}(u) + \cdots + \alpha_{1n}T_{1n}(u) + \cdots + \alpha_{mn}T_{nm}(u),$$

ou seja

$$T = \alpha_{11}T_{11} + \cdots + \alpha_{m1}T_{1m} + \cdots + \alpha_{1n}T_{1n} + \cdots + \alpha_{mn}T_{nm}.$$

Corolário 8.9 *Se V é um espaço de dimensão n então o seu dual também tem dimensão n.*

Pelo corolário 8.9, se U tem dimensão n então o seu dual, U', tem a mesma dimensão. Seguindo os passos da demonstração do teorema 8.8, se $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base B de U então os funcionais lineares $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ dados por $f_j(u) = f_j(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, formam uma base de U'. Esta base é chamada de *base dual* da base B.

Ex. Resolvido 8.10 *Considere a base B de $\mathbb{R}^3$ formada por $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ e $u_3 = (1, 0, 0)$. Encontre a base dual de B.*

Resolução: Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(x, y, z) = z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0).$$

Deste modo, a base dual de B, é dada pelos funcionais lineares f_1, f_2 e f_3 onde

$$f_1(x, y, z) = z, \qquad f_2(x, y, z) = y - z \qquad \text{e} \qquad f_3(x, y, z) = x - y.$$

□

Definição 8.11 *Sejam U, V e W espaços vetoriais. Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ e $S \in \mathscr{L}(V, W)$ definimos a composta $S \circ T : U \to W$ por $S \circ T(u) = S(T(u))$, $u \in U$.*

Exemplo 8.12 *Considere $T, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dadas por $T(x, y) = (x + y, 0)$ e $S(x, y) = (x, 2y)$. Encontre $T \circ S$ e $S \circ T$.*

$$T \circ S(x, y) = T(S(x, y)) = T(x, 2y) = (x + 2y, 0).$$
$$S \circ T(x, y) = S(T(x, y)) = S(x + y, 0) = (x + y, 0).$$

Note que $T \circ S \neq S \circ T$.

Definição 8.13 *Se $T \in \mathscr{L}(U)$, definimos $T^1 = T$ e $T^n = T \circ T^{n-1}$ para $n \geq 2$.*

Definição 8.14 *$T \in \mathscr{L}(U)$ é chamada de nilpotente se existir algum inteiro positivo n tal que $T^n = 0$, a transformação nula.*

Obviamente a transformação nula é um exemplo de uma transformação nilpotente.

Exemplo 8.15 *Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (0, x)$ é um operador nilpotente.*

Vejamos: $T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(0, x) = (0, 0)$. Assim, $T^2 = 0$.

Proposição 8.16 *Sejam $T \in \mathscr{L}(U, V)$ e $S \in \mathscr{L}(V, W)$. Então $S \circ T \in \mathscr{L}(U, W)$.*

Prova: Dados $u, v \in U$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos

$$S \circ T(\lambda u + \mu v) = S(T(\lambda u + \mu v)) = S(\lambda T(u) + \mu T(v))$$

$$= S(\lambda T(u)) + S(\mu T(v)) = \lambda S(T(u)) + \mu S(T(v)) = \lambda S \circ T(u) + \mu S \circ T(v).$$

∎

Proposição 8.17 *Sejam $T \in \mathscr{L}(U, V)$, $S \in \mathscr{L}(V, W)$ e $R \in \mathscr{L}(W, X)$, onde U, V, W e X são espaços vetoriais. Então $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.*

Prova: Para todo $u \in U$, temos

$$(R \circ S) \circ T(u) = (R \circ S)(T(u)) = R(S(T(u)))$$

e por outro lado

$$R \circ (S \circ T)(u) = R((S \circ T)(u)) = R(S(T(u))).$$

Comparando as expressões chegamos ao resultado desejado. ∎

Proposição 8.18 *Se* $S, T \in \mathscr{L}(U, V)$, $R \in \mathscr{L}(V, W)$ *então* $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$.

Prova: Dado $u \in U$, temos

$$R \circ (S+T)(u) = R((S+T)(u)) = R(S(u) + T(u)) = R(S(u)) + R(T(u))$$
$$= R \circ S(u) + R \circ T(u) = (R \circ S + R \circ T)(u).$$

∎

Proposição 8.19 *Se* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *e* $I_V \in \mathscr{L}(V)$ *é a identidade em* V, *isto é,* $I(v) = v$, $v \in V$, *e* $I_U \in \mathscr{L}(U)$ *é a identidade em* U, *então* $I_V \circ T = T$ *e* $T \circ I_U = T$.

Prova: Dado $u \in U$, temos

$$I_V \circ T(u) = I_V(T(u)) = T(u)$$

e

$$T \circ I_U(u) = T(I_U(u)) = T(u).$$

∎

Definição 8.20 *Diremos que* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *possui inversa se existir* $S : V \to U$ *tal que* $S \circ T(u) = u$ *para todo* $u \in U$ *e* $T \circ S(v) = v$ *para todo* $v \in V$. *Em outras palavras,* $T \circ S = I_V$ *e* $S \circ T = I_U$, *onde* $I_U : U \to U$ *é a identidade em* U *e* $I_V : V \to V$ *é a identidade em* V.

Proposição 8.21 *Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ possui uma inversa então esta inversa é única.*

Suponha que T possua inversas $R, S \in \mathscr{L}(V, U)$. Como $I_V = T \circ R$ e $I_U = S \circ T$, temos

$$S = S \circ I_V = S \circ (T \circ R) = (S \circ T) \circ R = I_U \circ R = R.$$

∎

Denotaremos a inversa de T por T^{-1}.

Definição 8.22 *Uma transformação linear $T : U \to V$ é*

1. *injetora se $T(u) = T(v)$ implicar em $u = v$;*
2. *sobrejetora se para todo $v \in V$ existir $u \in U$ tal que $T(u) = v$;*
3. *bijetora se for injetora e sobrejetora.*

Proposição 8.23 *Uma transformação linear $T : U \to V$ é injetora se e somente se $T(u) = 0$ implicar em $u = 0$.*

Prova: Suponha que T seja injetora. Se $T(u) = 0$ então $T(u) = T(0)$ e como T é injetora, segue-se que $u = 0$.

Reciprocamente suponha que a única solução de $T(u) = 0$ seja $u = 0$. Se $T(u) = T(v)$ então $T(u - v) = 0$ e, por hipótese, $u - v = 0$, isto é, $u = v$. ∎

Proposição 8.24 *A fim de que $T \in \mathscr{L}(U, V)$ possua inversa é necessário e suficiente que T seja bijetora.*

Prova: Suponha que T possua inversa.

Se $T(u) = T(v)$ então $u = T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(T(v)) = v$ e, portanto, T é injetora.

Dado $v \in V$ vemos que $T(T^{-1}(v)) = v$ e, portanto, T também é sobrejetora. Assim, T é bijetora.

Suponha agora que T seja bijetora. Dado $v \in V$ existe um único $u_v \in U$ tal que $v = T(u_v)$. Defina $S : V \to U$ por $S(v) = u_v$. Mostremos que S é a inversa de T.

Se $v \in V$ então $T(S(v)) = T(u_v) = v$.

Se $u \in U$ então $S(T(u))$, pela definição de S, é o único elemento u' em U tal que $T(u') = T(u)$. Como T é injetora, temos $u' = u$ e, assim, $S(T(u)) = u$.
∎

Proposição 8.25 *Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ possui inversa $T^{-1} : V \to U$ então $T^{-1} \in \mathscr{L}(V, U)$.*

Prova: Devemos mostrar que $T^{-1} : V \to U$ é linear.

Sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Como T é sobrejetora existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$. Assim,

$$T^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = T^{-1}(\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2)) = T^{-1}(T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2))$$

$$= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 T^{-1}(v_1) + \lambda_2 T^{-1}(v_2).$$

∎

8.3 Imagem e Núcleo

Definição 8.26 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.*

1. *Se $X \subset U$, definimos a imagem de X por T como sendo o conjunto $T(X) = \{T(x); x \in X\}$.*

2. *Se $Y \subset V$, definimos a imagem inversa de Y por T como sendo o conjunto $T^{-1}(Y) = \{u \in U; T(u) \in Y\}$.*

Ex. Resolvido 8.27 *Seja V um espaço de dimensão 1. Mostre que qualquer transformação linear não nula $T : U \to V$ é sobrejetora.*

Resolução: Como T é não nula existe $u_o \in U$ tal que $T(u_o) \neq 0$. Já que V tem dimensão 1 então qualquer base de V é constituída por um elemento e como $T(u_o) \in V$ é não nulo (portanto, l.i.), ele próprio forma uma base de V. Assim, dado $v \in V$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha T(u_o) = T(\alpha u_o)$, ou seja, T é sobrejetora. □

Proposição 8.28 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Temos*

1. *Se W é um subespaço vetorial de U então $T(W)$ é um subespaço vetorial de V.*

2. *Se W é um subespaço vetorial de V então $T^{-1}(W)$ é um subespaço vetorial de U.*

Prova: *1.* Seja W um subespaço vetorial de U.

Como $0 \in W$ vemos que $0 = T(0) \in T(W)$.

Se $x, y \in T(W)$ então existem $u, w \in W$ tais que $x = T(u)$ e $y = T(w)$. Como W é um subespaço vetorial, temos que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $u+\lambda w \in W$. Desse modo

$$x + \lambda y = T(u) + \lambda T(w) = T(u) + T(\lambda w) = T(u + \lambda w) \in T(W).$$

2. Seja W um subespaço vetorial de V.

Como $T(0) = 0 \in W$, segue-se que $0 \in T^{-1}(W)$.

Se $x, y \in T^{-1}(W)$ então $T(x), T(y) \in W$. Como W é um subespaço vetorial temos que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(x) + \lambda T(y) \in W$. Mas $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \in W$ e, portanto, $x + \lambda y \in T^{-1}(W)$. ∎

Definição 8.29 *O núcleo de uma transformação linear $T : U \to V$ é o subespaço vetorial de U dado por $T^{-1}(\{0\})$, ou seja, é o conjunto $\{u \in U; T(u) = 0\}$. Denotaremos o núcleo de T por $\mathcal{N}(T)$.*

Proposição 8.30 *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. T é injetora se e somente se $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.*

Prova: Pela proposição 8.23 T é injetora se e somente se a equação $T(u) = 0$ possui como única solução $u = 0$. Isto é o mesmo que dizer que o conjunto $\mathcal{N}(T)$ é formado somente pelo elemento 0. ∎

Ex. Resolvido 8.31 *Seja $T \in \mathcal{L}(U)$. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(U) \subset \mathcal{N}(T)$.*

Resolução: Suponha que $T^2 = 0$. Se $v \in T(U)$ então existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$ e, portanto, $T(v) = T^2(u) = 0$. Logo, $v \in \mathcal{N}(T)$.

Suponha agora que $T(U) \subset \mathcal{N}(T)$. Dado $u \in U$, como $T(u) \in T(U) \subset \mathcal{N}(T)$, temos $T^2(u) = T(T(u)) = 0$. $\square$

Ex. Resolvido 8.32 *Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

Resolução: Por definição, $(x, y) \in \mathcal{N}(T)$ se e somente se $T(x, y) = (0, 0)$, isto é, se e somente se

$$(x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta) = (0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta = 0 \\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

Portanto, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

Teorema 8.33 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam U e V espaços vetoriais $T : U \to V$ uma transformação linear. Suponha que U tenha dimensão finita. Temos*

$$\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim T(U).$$

Prova: Seja $p = \dim \mathcal{N}(T)$. Se $p \geq 1$, tome B_1 uma base de $\mathcal{N}(T)$ formada pelos vetores $u_1, \ldots, u_p$. Pelo teorema do completamento, existem vetores $v_1, \ldots, v_q \in U$ tais que $u_1, \ldots, u_p$, $v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U. Se $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, tomamos os vetores $v_1, \ldots, v_q$ de modo a formarem uma base de U. Note que com esta notação temos $\dim U = p + q$. Resta mostrar que $\dim T(U) = q$ e, para isto, mostraremos que $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ formam uma base de $T(U)$.

Se $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_q T(v_q) = 0$ então $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q) = 0$, isto é, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q \in \mathcal{N}(T)$. Desta forma, existem $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p$, isto é,

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_q v_q = 0.$$

Como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U, segue-se que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$ e, portanto, $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ são linearmente independentes.

Mostremos que $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ geram $T(U)$. Seja $v \in T(U)$. Logo, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q$$

e daí,

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_p T(u_p) + \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_q T(v_q) \\ &= \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_q T(v_q), \end{aligned}$$

já que $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{N}(T)$. ∎

Corolário 8.34 *Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e se $T : U \to V$ é uma transformação linear então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é sobrejetora;*
2. *T é injetora;*
3. *T é bijetora;*
4. *T leva bases de U em bases de V, isto é, se $u_1, \ldots, u_n$ é uma base de U então $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ é uma base de V.*

Prova: *(1) $\Longrightarrow$ (2):* Se T é sobrejetora então $T(U) = V$ e pelo teorema anterior, $\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim V$. Mas como $\dim U = \dim V$ segue que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, isto é, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Pela proposição 8.30, T é injetora.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Se T é injetora então $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Pelo teorema anterior segue-se que $\dim U = \dim T(U)$. Como $\dim U = \dim V$ segue-se que $T(U)$ é um subespaço de V com a mesma dimensão de V. Logo, $T(U) = V$, isto é, T é sobrejetora. Dessa forma, T é bijetora.

(3) $\Longrightarrow$ (4): Suponha que T seja bijetora. Considere uma base de U formada por vetores $u_1, \ldots, u_n$. Precisamos mostrar que $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ formam uma base de V.

Se $\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = 0$ então $T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0$, isto é, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathcal{N}(T)$. Como T é injetora temos $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e, consequentemente, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$. Como $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de U temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e, portanto, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ são linearmente independentes.

Seja $v \in V$. Como T é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Escrevendo u como $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ vemos que

$$v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n),$$

isto é, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ geram V. Observe que já havíamos provado isto na proposição 8.4

(4) $\Longrightarrow$ (1): Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma base de U. Por hipótese, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ formam uma base de V. Assim, dado $v \in V$ existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n)$. Deste modo, $v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)$, isto é, T é sobrejetora. ∎

Ex. Resolvido 8.35 *Mostre que toda transformação linear bijetora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva retas em retas, isto é, a imagem de uma reta por T é uma reta.*

Resolução: Dada uma reta r no plano usaremos a equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto $P \in r$ é da forma $P_o + \lambda \vec{v}$, onde P_o é um ponto sobre a reta, $\vec{v}$ é um vetor direção da reta e $\lambda \in \mathbb{R}$. A imagem de r por T é $T(r) = \{T(P); P \in r\}$. Assim, todo ponto em $T(r)$ é da forma $T(P) = T(P_o) + \lambda T(\vec{v})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Como T é injetora e $\vec{v} \neq \vec{0}$ temos que $T(\vec{v}) \neq \vec{0}$, ou seja, $T(r)$ é uma reta que passa por $T(P_o)$ e tem direção $T(\vec{v})$. □

Ex. Resolvido 8.36 *Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos. Mostre que o subespaço $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ tem dimensão $n - 1$.*

Resolução: Note que H é o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $T(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. Como nem todos os a_j são nulos, segue-se que T é não nula e pelo exercício 8.27, T é sobrejetora. Deste modo, pelo teorema 8.33, temos

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim H + \dim T(\mathbb{R}^n) = \dim H + 1,$$

ou seja, $\dim H = n - 1$. $\square$

Ex. Resolvido 8.37 *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $T : M_2 \to M_2$ dada por $T(X) = AX - XA$. Encontre o núcleo e a imagem de T.

Resolução: *Núcleo:* $X \in \mathscr{N}(T)$ se e somente se $AX = XA$. Se denotarmos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

vemos que $X \in \mathscr{N}(T)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ c = c \\ d = 2c + d \end{cases} \iff c = 0 \text{ e } a = d.$$

Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o núcleo de T é o subespaço vetorial gerado pela base (note que as matrizes são l.i.) formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imagem de T: Temos que

$$Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in T(M_2)$$

se e somente se existir

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $Y = AX - XA$, isto é,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$$

$$= 2c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2(d-a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, a imagem de T é gerada pela base (note que as matrizes são l.i.) formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma outra maneira para encontrar uma base da imagem de T é fazer uso da **prova** do teorema 8.33. Isto é, sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base do núcleo de T e, como no referido teorema, a completamos até uma base de M_2 como, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, pelo mesmo teorema,

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base da imagem de T. $\square$

Definição 8.38 *Dizemos que $T \in \mathscr{L}(U)$ é idempotente se $T^2 = T$.*

Exemplo 8.39 *$I : U \to U$, a identidade de U é idempotente.*

Exemplo 8.40 *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$ é idempotente.*

Note que

$$T^2(x, y) = T(x, 0) = (x, 0) = T(x, y).$$

Proposição 8.41 *Mostre que se $T \in \mathscr{L}(U)$ é idempotente então*

$$U = T(U) \oplus \mathscr{N}(T).$$

Prova: Dado $u \in U$ podemos escrever

$$u = T(u) + (u - T(u)).$$

Claramente, $T(u) \in T(U)$ e $T(u - T(u)) = T(u) - T^2(u) = T(u) - T(u) = 0$. Logo, $U = T(U) + \mathscr{N}(T)$ e resta mostrarmos que a soma é direta.

Se $u \in T(U) \cap \mathscr{N}(T)$ então existe $v \in U$ tal que $u = T(v)$ e $T(u) = 0$. Porém, como $T = T^2$, temos

$$u = T(v) = T^2(v) = T(T(v)) = T(u) = 0,$$

ou seja, $T(U) \cap \mathscr{N}(T) = \{0\}$. ∎

8.4 Isomorfismo e Automorfismo

Definição 8.42 *Dizemos que uma transformação linear $T : U \to V$ é isomorfismo quando ela for bijetora. No caso em que $U = V$ diremos que T é um automorfismo.*

Definição 8.43 *Dizemos que os espaços vetoriais U e V são isomorfos se existir um isomorfismo $T : U \to V$.*

As seguintes transformações são exemplos de isomorfismos e, portanto, os respectivos espaços vetoriais são isomorfos.

1. $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$.
2. $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ dada por $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}$.
3. $T : M_{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$ que associa a cada matriz $A = (a_{ij})$ de $M_{m\times n}$ o seguinte elemento de $\mathbb{R}^n$
$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

Ex. Resolvido 8.44 *Verifique se $T(x, y, z) = (x - y, x - z, z - y)$ é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.*

Resolução: Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ então

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

Logo, T não é injetora, pois $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Assim, T não é um isomorfismo. $\square$

Proposição 8.45 *Se $T : U \to V$ é um isomorfismo e U tem dimensão finita então $\dim U = \dim V$.*

Prova: Como T é injetora, $\mathscr{N}(T) = \{0\}$ e, portanto, $\dim \mathscr{N}(T) = 0$. Como T é sobrejetora, $T(U) = V$. Segue do teorema do núcleo e da imagem 8.33, que

$$\dim U = \dim \mathscr{N}(T) + \dim T(U) = \dim V.$$

∎

Corolário 8.46 *Se $T : U \to V$ é um isomorfismo e V tem dimensão finita então $\dim U = \dim V$.*

Prova: Note que $T^{-1} : V \to U$ é um isomorfismo e $\dim V$ é finita. Assim, pela proposição 8.45 temos que

$$\dim U = \dim V.$$

∎

Proposição 8.47 *Sejam U e V espaços de dimensão n. Se $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots,$ v_n formam bases de U e V, respectivamente, então*

$$T(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

define um isomorfismo entre U e V. Note que $T(u_j) = v_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Prova: Primeiramente, note que T, de fato, define uma função pois as coordenadas de um vetor com relação a uma base são unicamente determinadas por ele e pela base.

Verifiquemos que T é linear.

Dados $w_1, w_2 \in U$, podemos escrever

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i \quad \text{e} \quad w_2 = \sum_{i=1}^{n} y_iu_i,$$

com $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$T(\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_1x_i + \lambda_2y_i)u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_1x_i + \lambda_2y_i)v_i$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \lambda_1 T(w_1) + \lambda_2 T(w_2).$$

Seja $w = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ tal que $T(w) = 0$. Mas $T(w) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ e, portanto, $x_1 = \cdots = x_n = 0$, ou seja, $w = 0$. Portanto, T é injetora e pelo corolário 8.34, segue-se que T é um isomorfismo. ∎

As últimas proposições resultam no seguinte

Corolário 8.48 *Dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão.*

Combinando o corolário acima com a proposição 8.45 vemos que dois espaços de dimensão finita são isomorfos se e somente se eles possuem a mesma dimensão.

Corolário 8.49 *Se U é um espaço vetorial de dimensão n e V é um espaço vetorial de dimensão m então $\mathscr{L}(U, V)$ é isomorfo a $M_{m\times n}$.*

Prova: Note que tanto $\mathscr{L}(U, V)$ como $M_{m\times n}$ têm a mesma dimensão: mn. ∎

8.5 Matriz de uma Transformação Linear

8.5.1 Definição e Exemplos

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Fixemos uma base B de U formada por vetores $u_1, \ldots, u_n$ e uma base C de V formada por vetores $v_1, \ldots, v_m$. Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ podemos escrever

$$T(u_j) = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{mj} v_m, \qquad = 1, \ldots, n.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$$

é chamada de matriz da transformação T com relação às bases B e C e é denotada por $[T]_{B,C}$. No caso em que $U = V$ e $B = C$ usaremos a notação $[T]_B$.

Ex. Resolvido 8.50 *Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.*

Resolução: Temos

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1),$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1) \quad \text{e}$$

$$T(0, 0, 1) = (0, -1) = 0(1, 0) - 1(0, 1).$$

Assim,

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 8.51 *Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ com relação às bases $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $D = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$*

Resolução: Temos

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = 1(1, 1) + 0(0, 1),$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 1) - 1(0, 1) \quad \text{e}$$

$$T(0, 0, 1) = (0, -1) = 0(1, 1) - 1(0, 1).$$

Assim,

$$[T]_{B,D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. 8.52 *Sejam U e V espaços vetoriais com bases $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_m\}$, respectivamente. Fixe $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$ e defina $T_{ij} \in \mathscr{L}(U, V)$ como na prova do teorema 8.8, isto é, T_{ij} é dada por*

$$T_{ij}(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) = x_i v_j, \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j \text{ se } i = k \\ 0 \text{ se } i \neq k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n \text{ se } i = k \\ 0 \text{ se } i \neq k \end{cases} .$$

Assim $[T_{ij}]_{B,C} = E_{ji} = (\delta_{k,l}^{(j,i)})$, *onde*

$$\delta_{k,l}^{(j,i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (j,i) = (k,l) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, a matriz E_{ji} possui todos os coeficientes nulos com exceção daquele que ocupa a j-ésima linha e da i-ésima coluna cujo valor é 1.

8.5.2 Propriedades

Proposição 8.53 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T, S \in \mathscr{L}(U,V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ então*

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \lambda [T]_{B,C} + \mu [S]_{B,C}.$$

Prova: Colocando $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{B,C} = (\beta_{ij})$ temos

$$(\lambda T + \mu S)(u_j) = \lambda T(u_j) + \mu S(u_j)$$

$$= \lambda(\alpha_{1j} v_1 + \cdots + \alpha_{mj} v_m) + \mu(\beta_{1j} v_1 + \cdots + \beta_{mj} v_m)$$
$$= (\lambda \alpha_{1j} + \mu \beta_{1j}) v_1 + \cdots + (\lambda \alpha_{mj} + \mu \beta_{mj}) v_m$$

e, desse modo,

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} + \mu\beta_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} + \mu\beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} + \mu\beta_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} + \mu\beta_{mn} \end{pmatrix} = \lambda [T]_{B,C} + \mu [S]_{B,C}.$$

∎

Corolário 8.54 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ é a transformação nula então $[T]_{B,C} = 0$.*

Proposição 8.55 *Se B e C são bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $I \in \mathscr{L}(V)$ é a identidade de V então $[I]_{B,C} = M_C^B$.*

Prova: Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $[I]_{B,C} = (\alpha_{ij})$. Como

$$u_j = I(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{nj}v_n$$

vê-se que $[I]_{B,C} = M_C^B$. ∎

Proposição 8.56 *Sejam U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam $T \in \mathscr{L}(U,V)$ e $S \in \mathscr{L}(V,W)$. Se B, C e D são bases de U, V e W, respectivamente, então*

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

Prova: Coloquemos $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $D = \{w_1, \dots, w_p\}$. Se $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{C,D} = (\beta_{kl})$ então

$$S \circ T(u_j) = S(T(u_j)) = S\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}S(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki}w_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) w_k.$$

Portanto,

$$[S \circ T]_{B,D} = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) = [S]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

∎

Proposição 8.57 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ possui inversa T^{-1} então $[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1}$.*

Prova: Seja $n = \dim U = \dim V$. Temos

$$[T]_{B,C}[T^{-1}]_{C,B} = [T \circ T^{-1}]_{C,C} = [I]_{C,C} = I_n$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Analogamente,

$$[T^{-1}]_{C,B}[T]_{B,C} = [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B} = I_n.$$

Portanto, $[T^{-1}]_{C,B} = [T]^{-1}_{B,C}$. ∎

Proposição 8.58 *Seja V um espaço de dimensão finita. Se $T \in \mathscr{L}(V)$ e B e C são bases de V então*

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C.$$

Prova: Como $[I]_{B,C} = M_C^B$ e $[I]_{C,B} = M_B^C$, temos

$$M_C^B [T]_{B,B} M_B^C = [I]_{B,C}[T]_{B,B}[I]_{C,B} = [I]_{B,C}[T]_{C,B} = [T]_{C,C}.$$

∎

Ex. Resolvido 8.59 *Considere, B, a base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vetores $(1,1)$ e $(1,-1)$. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$T_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encontre $[T]_{C,C}$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Resolução: Como

$$(1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) \text{ e } (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1),$$

obtemos

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } M_C^B = \left(M_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT((1,0)) + yT((0,1))$$

$$= x(3(1,0) - 2(0,1)) + y(-2(1,0) + 3(0,1)) =$$

$$= x(3,-2) + y(-2,3) = (3x - 2y, 3y - 2x).$$

□

Proposição 8.60 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ e $u \in U$ então, representando por $T(u)_C$ e u_B as coordenadas dos vetores $T(u)$ e u, respectivamente, temos*

$$T(u)_C = [T]_{B,C} u_B.$$

Prova: Coloque $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e

$$u_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Temos

$$T(u) = T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n)$$

$$= a_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{m1}v_m) + \cdots + a_n(\alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_m)$$

$$= (a_1\alpha_{11} + \cdots + a_n\alpha_{1n})v_1 + \cdots + (a_1\alpha_{m1} + \cdots + a_n\alpha_{mn})v_m,$$

ou seja,

$$T(u)_C = \begin{pmatrix} a_1\alpha_{11} + \cdots + a_n\alpha_{1n} \\ \vdots \\ a_1\alpha_{m1} + \cdots + a_n\alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

isto é, $T(u)_C = [T]_{B,C} u_B$. ∎

Proposição 8.61 *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C, respectivamente. Então $T \in \mathscr{L}(U, V)$ é um isomorfismo se e somente se $[T]_{B,C}$ possui inversa.*

Prova: Se T é um isomorfismo então pela proposição 8.57 $[T]_{B,C}$ possui inversa dada por $[T^{-1}]_{C,B}$.

Reciprocamente, suponha que $[T]_{B,C}$ possua inversa. Pelo corolário 8.34, basta mostrar que T é injetora. Se $T(u) = 0$ então

$$u_B = [T]_{B,C}^{-1} T(u)_C = [T]_{B,C}^{-1} 0 = 0.$$

Como todas as coordenadas de u são iguais a zero, obtemos $u = 0$ e, portanto, T é injetora. ∎

Ex. Resolvido 8.62 *Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = a + (a + b)x$ é um isomorfismo.*

Resolução: Consideremos as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$. Como $T(1, 0) = 1 + x$ e $T(0, 1) = x$, a matriz de T com relação a estas bases é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima possui inversa, segue-se que T é um isomorfismo. □

8.6 Exercícios Resolvidos

Ex. Resolvido 8.63 *Encontre uma base do núcleo e outra para a imagem de $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$.*

Resolução: Note que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathscr{N}(T)$ se e somente se $(a_1 + 2a_2x) + 2a_2 = 0$, isto é, se e somente se $a_1 = a_2 = 0$. Desta forma, $p(x) \in \mathscr{N}(T)$ se e somente se $p(x) = a_0$. Desta forma o polinômio 1 é uma base de $\mathscr{N}(T)$.

Como $1, x, x^2$ é uma base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ que completa a base de $\mathscr{N}(T)$, vemos que pela demonstração do teorema 8.33, $T(x) = 1$ e $T(x^2) = 2x + 2$ formam uma base da imagem de T. □

Ex. Resolvido 8.64 *Encontre uma base do núcleo e outra da imagem de* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(X) = AX + X$, *onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resolução: Observe que se $T(X) = (A + I)X$, onde I é a matriz identidade de ordem dois.

Se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vemos que $X \in \mathscr{N}(T)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vê-se claramente que

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $\mathscr{N}(T)$.

A seguir, procuraremos matrizes M_3 e M_4 tais que $M_1, \ldots, M_4$ formem uma base de $M_2(\mathbb{R})$. Isto é, equivalente a encontrar M_2 e M_3 tais que a única solução de

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \delta M_4 = 0$$

seja a trivial.

Colocando

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } M_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\alpha\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que equivale à equação

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & a & x \\ 1 & 0 & c & z \\ 0 & -2 & b & y \\ 0 & 1 & d & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que apresenta uma única solução se e somente se o determinante da matriz de ordem quatro acima for diferente de zero. Como este determinante é

$$\Delta = -(2c + a)(2t + y) + (2z + x)(2d + b),$$

vemos que $\Delta \neq 0$ se e somente se

$$(2z + x)(2d + b) \neq (2c + a)(2t + y).$$

Dessa forma podemos tomar

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue da demonstração do teorema 8.33 que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

formam uma base da imagem de T. □

Ex. Resolvido 8.65 *Determinar uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem seja gerada pelos vetores* $(1, 2, 0)$ *e* $(1, 1, 1)$.

Resolução: Como $(1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$ são linearmente independentes, o subespaço gerado por estes vetores tem dimensão dois. Logo, a transformação procurada deverá ter necessariamente núcleo unidimensional. O que faremos é definir uma transformação tal que $T(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, ou seja,

$$T(x, y, z) = x(1, 2, 0) + y(1, 1, 1) = (x + y, 2x + y, y)$$

assim definida, é linear e satisfaz a propriedade desejada. □

Ex. Resolvido 8.66 *Determinar uma* $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$ *cujo núcleo seja gerado pelos polinômios* $1 + x^3$ *e* $1 - x^2$.

Resolução: Como $\dim \mathscr{P}_3 = 4$ e o subespaço gerado por $1 + x^3$ e $1 - x^2$ tem dimensão dois, vemos que a imagem da transformação procurada deverá ter necessariamente dimensão dois.

O primeiro passo é completar a sequência de vetores $1 + x^3$ e $1 - x^2$ a uma base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Para isto, basta acrescentarmos os polinômios 1 e x, como se vê:

$$\alpha 1 + \beta x + \gamma(1 + x^3) + \delta(1 - x^2) = \alpha + \gamma + \delta + \beta x - \delta x^2 + \gamma x^3 = 0$$

se e somente se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Assim, as imagens dos polinômios 1 e x, pela transformação procurada precisam necessariamente ser linearmente independentes. Para isto, o que faremos é definir $T : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ tal que $T(1) = 1$, $T(x) = x$, $T(1 + x^3) = 0$ e $T(1 - x^2) = 0$.

Dado $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, reescrevemos $p(x) = a_0 + a_2 - a_3 + a_1 x + a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2)$ e colocamos

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= T(a_0 + a_2 - a_3 + a_1 x + a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2)) \\ &= (a_0 + a_2 - a_3)1 + a_1 x = a_0 + a_2 - a_3 + a_1 x, \end{aligned}$$

que é uma transformação linear cujo núcleo é gerado por $1 + x^3$ e $1 - x^2$. □

Ex. Resolvido 8.67 *Considere* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dado por* $T(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$. *Encontre a matriz de* T *com relação às bases canônicas de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *e* $\mathbb{R}$.

Resolução: Temos

$$T(1) = 1, \quad T(x) = \frac{1}{2}, \quad T(x^2) = \frac{1}{3}.$$

Assim, a matriz de T com relação às bases canônicas é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 8.68 *Seja $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p'(x)$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.*

Resolução: Temos

$$T(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \quad T(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$T(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \quad T(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2$$

e a matriz de T com relação às bases canônicas é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 8.69 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por*

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e com relação à base B formada pelos vetores

$$u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0), w = (-1, -1, 1).$$

Resolução: Com relação à base canônica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, temos

$$\begin{array}{rcrcrcr} T(e_1) = T(1,0,0) = (1,0,1) = & e_1 & + & 0e_2 & + & e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,1) = & 0e_1 & + & e_2 & + & e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (1,1,2) = & e_1 & + & e_2 & + & 2e_3 \end{array}$$

e, portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Com relação à base B, temos

$$\begin{array}{rcccccc} T(u)=T(1,1,2)=(3,3,6)=3u= & 3u & + & 0v & + & 0w \\ T(v)=T(-1,1,0)=(-1,1,0)=v= & 0u & + & v & + & 0w \\ T(w)=T(-1,-1,1)=(0,0,0)= & 0u & + & 0v & + & 0w \end{array}$$

e, portanto,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 8.70 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e T uma transformação idempotente definida em U (Cf. 8.38). Sabemos, pela proposição 8.41, que $U = \mathscr{N}(T) \oplus T(U)$. Seja B uma base de U formada pelos vetores $u_1, \ldots, u_p$, que formam uma base de $\mathscr{N}(T)$, juntamente com $v_1, \ldots, v_q$, que formam uma base de $T(U)$. Encontre $[T]_B$.*

Resolução: Como $T(u_1) = \cdots = T(u_p) = 0$, pois $u_j \in \mathscr{N}(T)$ e $T(v_j) = \alpha_{1j}v_1 + \cdots + \alpha_{qj}v_q$, já que $T(v_j) \in T(U)$, vemos que $[T]_B$ tem a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qq} \end{pmatrix}$$

8.7 Exercícios

Ex. 8.71 *Verifique se as transformações abaixo são lineares.*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + 5y - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + 5y - z + 1$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x^2 + 5y - z, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4. $T : M_{n\times 1} \to M_{n\times 1}$, $T(X) = AX + X$, $X \in M_{n\times 1}$ *com* $A \in M_n$ *fixa.*

5. $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $T(p) = p' + p''$, $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

6. $T : M_2 \to M_2$, $T(X) = AX$, $X \in M_2$, *onde* $A \in M_2$ *está fixada.*

7. $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, $T(p) = p + q$, $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *e* $q(t) = t^2 + 1, t \in \mathbb{R}$.

Ex. 8.72 *Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.*

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = y + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = z - 2x$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 2y, x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Ex. 8.73 *Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo.*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = y + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. $T : M_2 \to M_2$, $T(X) = AX$, $X \in M_2$, *onde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, $T(p) = p'$, $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

5. $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, $T(p) = p' + p''$, $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

6. $T : M_2 \to M_2$, $T(X) = AX + X$, $X \in M_2$, *onde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 8.74 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que*

$$T((1,0,0)) = (2,3,1), \quad T((1,1,0)) = (5,2,7), \text{ e } \quad T((1,1,1)) = (-2,0,7).$$

1. *Encontre $T((x,y,z))$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.*
2. *T é sobrejetora? Justifique sua resposta.*
3. *T é injetora? Justifique sua resposta.*
4. *T é bijetora? Justifique sua resposta.*

Ex. 8.75 *Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que*

$$(T(p_0))(t) = 1 + t, \quad (T(p_1))(t) = t + t^2 \quad e \quad (T(p_2))(t) = 1 + t - 2t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$.

1. *Encontre $T(p)$ para $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.*
2. *T é sobrejetora? Justifique sua resposta.*
3. *T é injetora? Justifique sua resposta.*
4. *T é bijetora? justifique sua resposta.*

Ex. 8.76 *Seja $T : M_2 \to M_2$ um operador linear tal que*

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Encontre $T(X)$ para $X \in M_2$.*
2. *T é sobrejetora? Justifique sua resposta.*
3. *T é injetora? Justifique sua resposta.*

4. *T é bijetora? Justifique sua resposta.*

Ex. 8.77 *Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1,1,0,0),\ (0,0,1,0)$.

Ex. 8.78 *Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo e a imagem sejam gerados pelos vetores* $(1,1,0,0),\ (0,0,1,0)$.

Ex. 8.79 *Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo tem dimensão* 1.

Ex. 8.80 *Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1,1,0),\ (0,0,1)$ *e a imagem gerado pelo vetor* $(1,-1,1)$.

Ex. 8.81 *Determinar $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tal que*

$$T(\mathbb{R}^3) = [(2,2,3,2),(3,2,0,2)].$$

Ex. 8.82 *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(\mathbb{R}^5) = [(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)] \text{ e } \mathscr{N}(T) = [(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0)].$$

Ex. 8.83 *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(1,0,0) = (1,2), \quad T(0,1,0) = (3,4), \quad T(0,0,1) = (0,0).$$

Ex. 8.84 *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que* $\dim \mathscr{N}(T) = 2$*,* $\dim T(\mathbb{R}^5) = 3$.

Ex. 8.85 *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que* $\mathscr{N}(T) = [(1,0,1)]$.

Ex. 8.86 *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que* $\mathscr{N}(T) = T(\mathbb{R}^4) = [(1,0,1,0),(0,1,0,1)]$.

Ex. 8.87 *Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que* $T(\mathbb{R}^2) = [(1,1,1),\ (1,2,0)]$.

Ex. 8.88 *Determinar uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(\mathbb{R}^2) = [(1,1,1)]$ *e* $\mathscr{N}(T) = [(1,1)]$.

Ex. 8.89 *Verifique se os operadores lineares em* $\mathbb{R}^3$ *abaixo são isomorfismos e em caso afirmativo determinar o isomorfismo inverso.*

a) $T(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$

b) $T(x,y,z) = (x, x - y, 2x + y - z)$

Ex. 8.90 *Considere o operador linear em* $\mathbb{R}^3$ *tal que*

$$T(1,0,0) = (1,1,1), \quad T(0,0,1) = (1,0,1), \quad F(0,1,2) = (0,0,4).$$

Pergunta-se: T *é um isomorfismo? Em caso afirmativo, obtenha o isomorfismo inverso.*

Ex. 8.91 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais* U *e* V *são isomorfos, justificando a resposta.*

1. $U = \mathbb{R}^2$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.
2. $U = M_{2\times 3}$, $V = \{p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
3. $U = \mathbb{R}^3$, $V = \{A \in M_2; A^t = A\}$.
4. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Ex. 8.92 *Considere* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x,y) = (y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Determine* $T^n(x,y)$, *onde* $n \in N$ *e* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ex. 8.93 *Mostre que* $T, R, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, *dados por* $T(x,y) = (x, 2y)$, $R(x,y) = (x, x+y)$, $S(x,y) = (0,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *formam um subconjunto l.i. em* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Ex. 8.94 *Sejam* U, V, W *espaços vetoriais,* $T \in \mathscr{L}(U,V)$ *e* $S \in \mathscr{L}(V,W)$ *tais que* $\mathscr{N}(T) = \{0\}$ *e* $\mathscr{N}(S) = \{0\}$. *Mostre que* $\mathscr{N}(S \circ T) = \{0\}$.

Ex. 8.95 *Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação as bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais.*

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, 3x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ex. 8.96 *Considere*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinar a matriz do operador linear $T : M_2 \to M_2$ dado por $T(X) = MX - XM$, $X \in M_2$ em relação à base canônica de M_2.

Ex. 8.97 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.*

Ex. 8.98 *Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ transformação linear definida por*

$$T(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt, \qquad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine a matriz de T em relação as seguintes bases.

$$a)\ B = \left\{1, t, t^2\right\}, \ C = \{1\}. \quad b)\ B = \left\{1, 1 + t, 1 + t + t^2\right\}, \ C = \{-2\}.$$

Ex. 8.99 *Se a matriz de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação a base canônica é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e se $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dado por $S = I + T + 2T^2$, determinar a matriz de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Encontre também $S(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Ex. 8.100 *Seja* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *o operador linear dado por*

$$T(p(t)) = p(t) - p(1) \quad p(t) \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Se $B = \{1, t-1, (t-1)^2\}$ *e* $C = \{1, t, t^2\}$ *encontrar* $[T]_{B,C}$, $[T]_B$ *e* $[T]_C$.

Ex. 8.101 *Seja* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *uma base de um espaço vetorial* V. *Se* $T, S : V \to V$ *são operadores lineares em* V *tais que*

$$\begin{array}{ll} T(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3 & S(e_1) = 3e_1 + 2e_2 \\ T(e_2) = e_1 + e_2 & S(e_2) = e_1 - e_2 - e_3 \\ T(e_3) = e_2 + e_3 & S(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3 \end{array}$$

Determine as seguintes matrizes $[T]_B$, $[S]_B$, $[S \circ T]_B$, $[S^2 + I]_B$ *e* $[T^3 - S^2]_B$.

Ex. 8.102 *Sejam* $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *e* $C = \{(1,0),\ (0,1)\}$ *bases de* U *e* V, *respectivamente. Encontrar, em cada um dos itens abaixo,* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *tal que* $[T]_{B,C}$ *seja a matriz;*

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ex. 8.103 *Sejam* V *espaço vetorial e* $T : V \to V$ *um operador linear idempotente, isto é,* $T^2 = T$. *Mostrar que* $V = \mathscr{N}(T) \oplus T(V)$.

Ex. 8.104 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o operador linear dado por*

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $(T^2 - I) \circ (T - 3I) = 0$.

Capítulo 9

Autovalores e Autovetores

9.1 Definição, Exemplos e Propriedades

Considere um operador linear $T \in \mathscr{L}(V)$ e um subespaço $U \subset V$. Se a imagem de U por T for um subconjunto (na verdade é um subespaço vetorial) de U dizemos que U é um subespaço invariante por T, isto é, $T(U) \subset U$. Desta forma, a restrição de T ao subespaço U, denotada por $T_{|U}$, pertence a $\mathscr{L}(U)$. Como veremos no próximo capítulo, isto facilitará muitas vezes a compreensão de como age um operador linear, pois, sem dúvida, é mais simples estudá-lo em subespaços de dimensões mais baixas.

É óbvio que os subespaços $\{0\}$ e V são invariantes por qualquer $T \in \mathscr{L}(V)$. Vejamos o que é preciso acontecer para que exista um subespaço invariante de dimensão um. Obviamente precisamos que $V \neq \{0\}$. Como todo subespaço de dimensão um é gerado por um vetor não nulo, vemos que $U \doteq [u] \subset V$, $u \neq 0$ é invariante por T se e somente se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tivermos $T(\alpha u) \in [u]$, ou seja, se existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $T(\alpha u) = \beta u$, que para $\alpha \neq 0$ é equivalente a existir β tal que $T(u) = (\beta/\alpha)u$, para algum $u \neq 0$. Isto sugere a seguinte definição:

Definição 9.1 *Sejam U um espaço vetorial e $T \in \mathscr{L}(U)$. Dizemos que um vetor não nulo $u \in U$ é um autovetor de T se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \lambda u$.*

Observação 9.2 *Se $u \neq 0$ é tal que $T(u) = \lambda u = \mu u$ então $\lambda = \mu$. De fato, esta* *igualdade implica que* $(\lambda - \mu)u = 0$, *ou seja,* $\lambda - \mu = 0$.

Definição 9.3 *Sejam* U *um espaço vetorial,* $T \in \mathscr{L}(U)$ *e* u *um autovetor de* T. *O número* λ *tal que* $T(u) = \lambda u$ *é chamado de autovalor de* T *associado ao autovetor* u.

Definição 9.4 *Sejam* U *um espaço vetorial,* $T \in \mathscr{L}(U)$ *e* λ *um autovalor de* T. *Seja* $I : U \to U$ *a identidade. O subespaço vetorial*

$$V(\lambda) = \{u \in U; T(u) = \lambda u\} = \mathscr{N}(T - \lambda I)$$

é chamado de subespaço próprio do autovalor λ, *ou autoespaço associado a* λ. *Se* U *tem dimensão finita, diremos que a dimensão de* $V(\lambda)$ *é a multiplicidade geométrica de* λ.

Observação 9.5 *Note que todo* $u \in V(\lambda)$, $u \neq 0$, *é um autovetor de* T *associado ao autovalor* λ.

Observação 9.6 $V(\lambda)$ *é um subespaço invariante por* T, *isto é,*

$$T(V(\lambda)) \subset V(\lambda).$$

Basta notar que se $u \in V(\lambda)$ *então* $T(u) = \lambda u \in V(\lambda)$.

Ex. Resolvido 9.7 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (y, 4x)$. *Encontre os autovalores de* T, *os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.*

Resolução: $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, ou seja, se e somente se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $(y, 4x) = (\lambda x, \lambda y)$. Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ 4x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero. Como este determinante é $\lambda^2 - 4$, vemos que os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Temos

$$V(-2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (y, 4x) = -2(x,y)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -2x = y\} = [(1,-2)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de -2 é um.

Também,

$$V(2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (y,4x) = 2(x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x = y\} = [(1,2)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 2 é um.

Note que $(1,-2)$ é um autovetor associado ao autovalor -2 e e $(1,2)$ é um autovetor associado ao autovalor 2. □

Ex. Resolvido 9.8 *Ainda com relação ao exercício anterior, encontre a matriz de T com relação à base $(1,-2)$ e $(1,2)$ formada pelos autovetores de T.*

Resolução: Temos

$$\begin{array}{rcccccc} T(1,-2) & = & (-2,4) & = & -2(1,-2) & + & 0(1,2) \\ T(1,2) & = & (2,4) & = & 0(1,-2) & + & 2(1,2) \end{array}.$$

Logo, a matriz de T com relação a esta base é a matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 9.9 *Faça o mesmo que se pede no exercício 9.7 para a transformação $T(x,y) = (-y,x)$.*

Resolução: $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, ou seja, se e somente se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $(-y, x) = (\lambda x, \lambda y)$. Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero. Como este determinante é $-\lambda^2 - 1 < 0$, vemos que não existem autovalores associados à transformação T. $\square$

Ex. Resolvido 9.10 *Seja $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$. Verifique que 0 é o único autovalor desta transformação. Encontre $V(0)$.*

Resolução: Note que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $p(x) \neq 0$ tal que $p'(x) = \lambda p(x)$. Se $\lambda \neq 0$ esta equação só é verdadeira para o polinômio nulo, posto que para qualquer outro polinômio os graus de $p'(x)$ e $\lambda p(x)$ são distintos. Desta forma, $\lambda \neq 0$ não é autovalor de T.

Agora, se $\lambda = 0$, então $p'(x) = 0$ apresenta como solução todos os polinômios constantes. Logo, $\lambda = 0$ é um autovalor associado, por exemplo, ao autovetor $p(x) = 1$.

Quanto a $V(0)$, basta ver que $V(0) = \mathscr{N}(T) = [1]$, isto é, o subespaço gerado pelo polinômio 1. $\square$

Ex. Resolvido 9.11 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, x)$. Encontre os autovalores de T, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.*

Resolução: Veja que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se e somente se existir $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que $T(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$, isto é, se e somente se existir $(x, y, z) \neq$

$(0,0,0)$ tal que $(x,y,x) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ \lambda z - x = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero. Como este determinante é $\lambda(1-\lambda)^2$, vemos que os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Quanto aos subespaços próprios, temos

$$V(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,x) = (0,0,0)\} = [(0,0,1)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 0 é um.

$$V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,x) = (x,y,z)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$$
$$= [(0,1,0),(1,0,1)].$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 1 é dois.

Proposição 9.12 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e T em $\mathscr{L}(U)$. Suponha que T possua autovetores $u_1, \ldots, u_n$ associados a autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, quando $i \neq j$ então $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes.*

Prova: A prova será por indução sobre o número de autovalores. Se $n = 1$ não há nada a demonstrar pois como $u \neq 0$, ele é linearmente independente.

Vejamos agora o caso $n = 2$. Se $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ então

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 = 0.$$

Portanto, $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 = 0$ e, como $u_2 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que $\alpha_2 = 0$. Daí, $\alpha_1 u_1 = 0$ e, como $u_1 \neq 0$, temos $\alpha_1 = 0$. Portanto, u_1 e u_2 são linearmente independentes.

Suponhamos, como hipótese de indução, que $n-1$ autovetores de uma transformação linear associados a $n-1$ autovalores dois a dois distintos sejam linearmente independentes. Devemos mostrar que o mesmo resultado vale para n autovetores associados a n autovalores dois a dois distintos.

Se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

então

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n u_n = 0.$$

Portanto,

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)u_n = 0$$

e, como $u_2, \cdots, u_n$ são linearmente independentes segue que

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1) = 0.$$

Mas como $\lambda_1 \neq \lambda_j$, para $j = 2, \ldots, n$, temos $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Daí, $\alpha_1 u_1 = 0$ e, como $u_1 \neq 0$, temos $\alpha_1 = 0$. Portanto, $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes.

Sejam então $u_1, \ldots, u_n$ autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dois a dois distintos.

Proposição 9.13 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e T em $\mathscr{L}(U)$. Suponha que T possua autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, distintos. Então a soma dos subespaços próprios de T é direta, isto é, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos*

$$V(\lambda_j) \cap (V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)) = \{0\}.$$

Prova: A prova será por indução sobre o número de autovalores. Primeiramente, mostremos que $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}$. Fixe $v_1^{(1)}, \ldots, v_{m_1}^{(1)}$ uma base de $V(\lambda_1)$ e $v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}$ uma base de $V(\lambda_2)$. Se $u \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2)$ então

$$u = \alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} v_{m_1}^{(1)} = \alpha_1^{(2)} v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} v_{m_2}^{(2)}. \tag{9.14}$$

Logo, $T(u)$ é dado por

$$\alpha_1^{(1)} T(v_1^{(1)}) + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} T(v_{m_1}^{(1)}) = \alpha_1^{(2)} T(v_1^{(2)}) + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} T(v_{m_2}^{(2)}),$$

ou seja,

$$\alpha_1^{(1)} \lambda_1 v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \lambda_1 v_{m_1}^{(1)} = \alpha_1^{(2)} \lambda_2 v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \lambda_2 v_{m_2}^{(2)}. \tag{9.15}$$

Multiplicando a equação 9.14 por λ_1 e subtraindo-a de 9.15, obtemos

$$\alpha_1^{(2)} (\lambda_2 - \lambda_1) v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} (\lambda_2 - \lambda_1) v_{m_2}^{(2)} = 0.$$

Como $v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}$ é uma base de $V(\lambda_2)$, temos

$$\alpha_1^{(2)} (\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)} (\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

e, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que $\alpha_1^{(2)} = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)} = 0$. Segue-se de 9.14 que $u = 0$.

Suponhamos agora, por indução, que a soma de $n-1$ espaços próprios de T referentes a $n-1$ autovalores distintos seja direta. Precisamos mostrar que este resultado é válido quando T apresenta n autovalores distintos.

Para cada $j = 1, \ldots, n$ selecione uma base B_j de $V(\lambda_j)$ constituída por vetores que denotaremos por $v_1^{(j)}, \ldots, v_{m_j}^{(j)}$. Note que cada $v_i^{(j)}$ é um autovetor associado ao autovalor λ_j e que m_j é a multiplicidade geométrica deste autovalor.

Se

$$u \in V(\lambda_j) \cap (V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)),$$

então

$$\begin{aligned} u = \alpha_1^{(j)} v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} v_{m_j}^{(j)} = \alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots \\ + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)} v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} v_{m_n}^{(n)}. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Assim, $T(u)$ é dado por

$$\alpha_1^{(j)}T(v_1^{(j)}) + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)}T(v_{m_j}^{(j)}) = \alpha_1^{(1)}T(v_1^{(1)}) + \cdots$$
$$+ \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}T(v_{m_{j-1}}^{(j-1)}) + \alpha_1^{(j+1)}T(v_1^{(j+1)}) + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)}T(v_{m_n}^{(n)})$$

isto é,

$$\alpha_1^{(j)}\lambda_j v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)}\lambda_j v_{m_j}^{(j)} = \alpha_1^{(1)}\lambda_1 v_1^{(1)} + \cdots$$
$$+ \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}\lambda_{j-1} v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)}\lambda_{j+1} v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)}\lambda_n v_{m_n}^{(n)}. \quad (9.17)$$

Multiplicando a equação 9.16 por λ_j e subtraindo-a de 9.17, obtemos

$$\alpha_1^{(1)}(\lambda_1 - \lambda_j)v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)v_{m_{j-1}}^{(j-1)} +$$
$$\alpha_1^{(j+1)}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)}(\lambda_n - \lambda_j)v_{m_n}^{(n)} = 0$$

Usando a nossa hipótese de indução e o fato que $\lambda_j \neq \lambda_i$, quando $i \neq j$, obtemos $\alpha_1^i = \cdots = \alpha_{m_i}^i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Disto e da equação 9.16 resulta que $u = 0$. Como queríamos. ∎

9.2 Polinômio Característico

Definição 9.18 *Dada $A \in M_{n\times n}$ definimos o polinômio característico de A como sendo o determinante*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

onde I é a matriz identidade de ordem n.

Definição 9.19 *Sejam $A, B \in M_{n\times n}$. Dizemos que A e B são semelhantes se existir $M \in M_{n\times n}$ invertível tal que $A = M^{-1}BM$.*

Ex. Resolvido 9.20 *Prove que se A é semelhante a B então B é semelhante a A.*

Resolução: Existe $M \in M_n$ invertível tal que $A = M^{-1}BM$. Segue que $B = MAM^{-1}$. Tomando $N = M^{-1}$, obtemos $B = N^{-1}AN$, isto é, B é semelhante a A. □

Proposição 9.21 *Se $A, B \in M_{n\times n}$ são matrizes semelhantes então seus polinômios característicos são iguais.*

Prova: Temos

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(M^{-1}BM - \lambda M^{-1}IM)$$

$$= \det(M^{-1}(BM - \lambda IM)) = \det(M^{-1}(B - \lambda I)M)$$

$$= \det M^{-1} \det(B - \lambda I) \det M = \frac{1}{\det M} \det(B - \lambda I) \det M = p_B(\lambda).$$

∎

Lembre que se $T \in \mathscr{L}(U)$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, e se B e C são bases de U então

$$[T]_C = M_C^B [T]_B M_B^C = \left[M_B^C\right]^{-1} [T]_B M_B^C.$$

Desta forma, $p_{[T]_B}(\lambda) = p_{[T]_C}(\lambda)$, ou seja, o polinômio característico da matriz de uma transformação linear independe da escolha da base. Podemos assim, sem causar ambiguidades, definir o polinômio característico do operador linear T como sendo

$$p_T(\lambda) = p_{[T]_B}(\lambda),$$

onde B é uma base qualquer de U.

Ex. Resolvido 9.22 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Encontre $p_T(\lambda)$.

Resolução: Usaremos a base canônica, C, de $\mathbb{R}^2$. Como $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$, vemos que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$p_T(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

□

Proposição 9.23 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e T em $\mathscr{L}(U)$. Então, λ é um autovalor de T se e somente se $p_T(\lambda) = 0$. Em outras, palavras, os autovalores de T são as raízes* reais *de seu polinômio característico.*

Prova: Fixe B uma base de U.

Suponha que λ seja um autovalor de T. Então existe $u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$, ou seja, $(T - \lambda I)(u) = 0$. Desta forma, vemos que a transformação linear $T - \lambda I : U \to U$ não é injetora e, consequentemente, não é um isomorfismo. Disto resulta que $[T - \lambda I]_B$ não é invertível, ou equivalentemente, $p_T(\lambda) = \det[T - \lambda I]_B = 0$.

Reciprocamente, se $p_T(\lambda) = 0$ então a matriz $[T - \lambda I]_B$ tem determinante nulo. Isto implica que a transformação $T - \lambda I : U \to U$ não é um isomorfismo e, portanto, não é injetora. Logo, existe $u \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)(u) = 0$. Portanto, $T(u) = \lambda u$, $u \neq 0$, isto é, λ é um autovalor de T. ∎

Exercício 9.24 *Refaça os exercícios resolvidos 9.7, 9.9, 9.10 e 9.11 tendo como base a proposição anterior.*

Definição 9.25 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$. Se λ é um autovalor de T, definimos a multiplicidade algébrica de λ como sendo a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de T.*

Proposição 9.26 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e T em $\mathscr{L}(U)$. Se λ_o é um autovalor de T então a sua multiplicidade geométrica não excede a sua multiplicidade algébrica.*

Prova: Seja n a dimensão de U. Denotemos por m e r as multiplicidades algébrica e geométrica de λ_o, respectivamente.

Como $\dim V(\lambda_o) = r$, existem $u_1, \ldots, u_r \in V(\lambda_o)$ linearmente independentes. Completando estes vetores a uma base de U, vemos que a matriz de T com relação a esta base é da forma

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_o & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_o \end{bmatrix}_{r\times r} & A_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & B_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

vemos que o fator $(\lambda - \lambda_o)^r$ aparece na fatoração do polinômio $p_T(\lambda)$. Por outro lado, como a multiplicidade algébrica de λ_o é m, obtemos $r \leq m$. ∎

Ex. Resolvido 9.27 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Analise quando esta transformação possui autovalores e o número deles.

Resolução: Sabemos do exercício resolvido 9.22 que

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc.$$

Pela proposição 9.23 temos que λ é um autovalor de T se e somente se $p_T(\lambda) = 0$, isto é, se e somente se

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

e esta equação possui solução (real) se e somente se $(a + d)^2 - 4(ad - bc) \geq 0$. Quando $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$ vemos que T apresenta somente um autovalor, dado por $(a+d)/2$; quando $(a+d)^2-4(ad-bc) > 0$, T apresenta dois autovalores distintos dados por

$$\frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}.$$

Ex. Resolvido 9.28 *Sejam $p(t) = a_0 + \cdots + a_m t^m$ um polinômio e $A \in M_n$. Defina $p(A) = a_0 I_n + \cdots + a_m A^m$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Mostre que se A é semelhante a B então $p(A)$ é semelhante a $p(B)$.*

Resolução: Existe $M \in M_n$ invertível tal que $A = M^{-1}BM$. Desta forma, $A^2 = M^{-1}BMM^{-1}BM = M^{-1}B^2M$ e, indutivamente, $A^j = M^{-1}B^jM$, $j \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$p(A) = a_0 I_n + \cdots + a_m A^m = a_0 M^{-1} I_n M + \cdots + a_m M^{-1} B^m M =$$

$$= M^{-1}(a_0 I_n + \cdots + a_m B^m)M = M^{-1}p(B)M.$$

□

Ex. Resolvido 9.29 *Sejam $p(t) = a_0 + \cdots + a_m t^m$ um polinômio e $T \in \mathscr{L}(U)$. Definimos $p(T) = a_0 I + \cdots + a_m T^m$, onde I é a identidade de U. Se B é uma base de U mostre que $[p(T)]_B = p([T]_B)$.*

Resolução: Pelas proposições 8.53 e 8.56 temos que

$$[p(T)]_B = [a_0 I + \cdots + a_m T^m]_B = a_0[I]_B + \cdots + a_m[T]_B^m = p([T]_B).$$

□

9.3 Exercícios

Ex. 9.30 *Encontrar os autovalores e autovetores de $T \in \mathscr{L}(V)$ nos seguintes casos:*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,2)$, $T(0,0,1) = (3,2,1)$.

c) $V = \mathbb{R}^4$ *e* $[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *onde* B *é base canônica de* $\mathbb{R}^4$.

Ex. 9.31

a) Seja $A \in M_n$ *uma matriz triangular, isto é,* $A = (a_{ij})$ *onde* $a_{ij} = 0$*, sempre que* $i > j$ *(ou sempre que* $i < j$*). Qual o polinômio característico de* A*?*

b) Sejam $A, B \in M_n$ *matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus polinômios característicos? Qual?*

c) Mostre que se λ *é autovalor de* $T \in \mathscr{L}(V)$ *então* λ^n *é autovalor de* T^n.

d) Mostre que se $p = p(t)$ *é um polinômio e* λ *é autovalor de* $T \in \mathscr{L}(V)$ *então* $p(\lambda)$ *é autovalor de* $p(T)$*, onde* $p(T) = a_o I + a_1 T + \cdots + a_n T^n$*, com* $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$.

Capítulo 10

Diagonalização

10.1 Definição e Caracterização

SEjam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base de U formada por autovetores de T.

Note que se $T \in \mathscr{L}(U)$ é diagonalizável e se $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base B de U formada por autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então a matriz de T com relação a esta base é

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ou seja, $[T]_B$ é uma matriz diagonal, isto é, uma matriz quadrada (a_{ij}) tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Reciprocamente, se existir uma base $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de U com relação a qual a matriz de $T \in \mathscr{L}(U)$ é diagonal, isto é, todos os seus coeficientes fora da diagonal principal são nulos, então T é diagonalizável. De fato, se

$$[T]_C = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$$

então, pela própria definição de matriz de uma transformação linear, vemos que $T(v_1) = \mu_1 v_1, \ldots, T(v_n) = \mu_n v_n$, ou seja, a base C é formada por autovetores de T. Resumiremos este fato no seguinte

Teorema 10.1 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$. Então T é diagonalizável se e somente se existir uma base de U com relação a qual a matriz de T é diagonal.*

Note que se $T \in \mathscr{L}(U)$ é diagonalizável então existe uma base B formada por autovetores de T com relação a qual a matriz de T é diagonal. Se C é uma outra base de U sabemos que $[T]_B = (M_C^B)^{-1}[T]_C M_C^B$. Esta última igualdade nos sugere a seguinte

Definição 10.2 *Dizemos que uma matriz $A \in M_{n\times n}$ é diagonalizável se existir $M \in M_{n\times n}$ invertível tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.*

Proposição 10.3 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathscr{L}(U)$ e C uma base qualquer de U. Então T é diagonalizável se e somente se a matriz $[T]_C$ for diagonalizável.*

Prova: Já vimos que se T for diagonalizável então $[T]_C$ é uma matriz diagonalizável.

Reciprocamente, suponha que $[T]_C$ seja diagonalizável. Assim, existe $M = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ invertível tal que $M^{-1}[T]_C M$ é uma matriz diagonal. Se $u_1, \ldots, u_n$ são os vetores da base C então, colocando $v_j = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{nj}u_n$, vemos que $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base B de U pois M é invertível. Além do mais, $M = M_C^B$. De fato, para ver que $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base, note que as coordenadas de v_j com relação à base C são dadas por

$$(v_j)_C = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

ou seja, coincidem com a j-ésima coluna da matriz $[T]_C$.

Note que as colunas de uma matriz invertível são linearmente independentes (pensadas como matrizes colunas) pois, caso contrário, seu determinante seria zero.

Agora, como

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (v_1)_C + \cdots + \alpha_n (v_n)_C = 0$$

temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Isto mostra que os vetores v_j formam uma base.

Uma demonstração alternativa é como segue. Coloque E_j como sendo a matriz coluna $n \times 1$ cujo j-ésima linha vale 1 e as demais 0. Assim,

$$0 = \alpha_1 (v_1)_C + \cdots + \alpha_n (v_n)_C = \alpha_1 [T]_C E_1 + \cdots + \alpha_n [T]_C E_n$$

$$= [T]_C (\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_n E_n) = [T]_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

isto é,

$$[T]_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $[T]_C$ é invertível, multiplicando ambos os lados por $[T]_C^{-1}$ chegamos a

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$[T]_B = (M_C^B)^{-1}[T]_C M_C^B = M^{-1}[T]_C M$$

é diagonal, isto é, T é diagonalizável. ∎

Observação 10.4 *Note que pelo teorema acima, para verificar se um operador é diagonalizável, basta verificar se a matriz de T com relação a uma base* qualquer *de U é diagonalizável.*

Suponha que $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ seja diagonalizável. Vejamos como podemos encontrar uma matriz M invertível de modo que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal. Considere $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j).$$

Se C é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ então $[T]_C = A$ e pela proposição 10.3, T é diagonalizável. Seja B uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T. Lembrando que C é a base canônica, vemos que $M \doteq M_C^B$ é a matriz cuja j-ésima coluna é formada pelas coordenadas do j-ésimo autovetor da base B. Como $[T]_B$ é uma matriz diagonal e

$$[T]_B = (M_C^B)^{-1}[T]_C M_C^B = M^{-1}AM$$

vemos que M resolve o nosso problema.

Observação 10.5 *Note que se T for diagonalizável, o seu polinômio característico é da forma*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda),$$

onde os números reais *$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são todos os autovalores de T.*

Teorema 10.6 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se e somente se os seus autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ forem tais que*

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

Prova: Se
$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)$$
então podemos formar uma base B de U formada por bases B_j de $V(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Como cada elemento de B_j é um autovetor de T, segue por definição que T é diagonalizável.

Reciprocamente, se T for diagonalizável existe uma base B de U formada por autovetores de T. Como cada autovetor está associado a algum autovalor de T, vemos que cada elemento de B está contido em algum $V(\lambda_j)$. Desta forma, a soma de todos os subespaços próprios de T contém B e, portanto, é o próprio U. Pelo teorema 9.13 esta soma é direta, ou seja,
$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$
∎

Exemplo 10.7 *As transformação do exercício resolvido 9.7 é diagonalizável. Já a transformação do 9.11 não é pois possui apenas dois autoespaços cuja soma não é* $\mathbb{R}^3$*, isto é,*
$$V(0) \oplus V(1) = [(0,0,1),(1,0,1)] \neq \mathbb{R}^3.$$
Também não é diagonalizável a transformação do exercício resolvido 9.9 pois não possui autovetores. Quanto a transformação do 9.10 vemos que também não é diagonalizável se $n \geq 1$*, pois todo autovetor de* T *pertence a* $V(0)$*, que é unidimensional, e* $\dim \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1 \geq 2$.

Vejamos como é possível decidir sobre a diagonalização de um operador linear a partir das multiplicidades algébrica e geométrica de seus autovalores.

Sejam U um espaço vetorial de dimensão m e $T \in \mathscr{L}(U)$.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de T, dois a dois distintos. Assim, o polinômio característico de T é dado por
$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} q(\lambda), \tag{10.8}$$
onde m_j é a multiplicidade algébrica de λ_j e $q(\lambda)$ é um polinômio que não tem raízes reais.

Se denotarmos por r_j a multiplicidade geométrica de λ_j, isto é, r_j é igual a $\dim V(\lambda_j)$ então, pelo teorema 10.6, T é diagonalizável se e somente se $m = r_1 + \cdots + r_n$. Por este mesmo teorema, T é diagonalizável se e somente se U possuir uma base formada pela reunião das bases dos espaços próprios de T, visto que isto é equivalente a dizer que a soma destes subespaços é direta. Por sua vez, a existência de uma tal base é equivalente que T apresente uma matriz na forma

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}_{r_1 \times r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{r_n \times r_n} \end{pmatrix}_{m \times m} .$$

Desta forma, se T é diagonalizável então o seu polinômio característico é dado por

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{r_n}, \tag{10.9}$$

onde r_j é a multiplicidade geométrica de λ_j, $j = 1, \ldots, n$. Comparando com 10.8 vemos que $m_j = r_j$, $j = 1, \ldots, n$, $q(\lambda) \equiv 1$ e $r_1 + \cdots + r_n = m$.

Reciprocamente, suponha que $m_j = r_j$, $j = 1, \ldots, n$ e $r_1 + \cdots + r_n = m$. Como a multiplicidade algébrica de cada autovalor iguala a sua multiplicidade geométrica cada espaço próprio $V(\lambda_j)$ possui uma base B_j com m_j elementos. Como $m_1 + \cdots + m_n = r_1 + \cdots + r_n = m$ segue de 10.8 que o grau de $q(\lambda)$ é zero e que a reunião das bases B_j forma uma base de U (lembre que a soma de espaços próprios é direta) constituída por autovetores de T. Assim, T é diagonalizável. Provamos assim, o seguinte

Teorema 10.10 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$. Então T é diagonalizável se e somente se ambas condições forem verificadas*

1. *para cada autovalor de T as suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais;*

2. *a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de T coincide com a dimensão de U.*

Corolário 10.11 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(U)$. Se*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são distintos entre si então T é diagonalizável.

Prova: Como os autovalores de T são dois a dois distintos, vê-se que as raízes de $p_T(\lambda)$, são todas simples, isto é, têm multiplicidade um. Desta forma, se λ é um autovalor de T então a sua multiplicidade algébrica é um. Pela proposição 9.26, a multiplicidade geométrica de λ é menor do que ou igual a um. Como $\dim V(\lambda) \geq 1$, segue-se que a multiplicidade geométrica de λ é um, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica. ∎

Ex. Resolvido 10.12 *Verifique se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$$

é diagonalizável.

Resolução: Com relação à base canônica, a matriz de T é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = \det & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) - 1) + 1(-(1-\lambda)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Desta forma, vemos que $p_T(\lambda)$ apresenta todas as raízes reais e simples e, pelo corolário 10.11, segue-se que T é diagonalizável. □

Ex. Resolvido 10.13 *Encontre uma base de autovetores para o operador do exercício anterior. Encontre também a matriz de T com relação a esta base.*

Resolução: *autovalor 0:* Precisamos encontrar (x, y, z) não nulo tal que

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Temos

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = -z \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = -z,$$

assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 0, o vetor $u = (1, 1, -1)$.

autovalor 1: Neste casos precisamos encontrar (x, y, z) não nulo tal que $T(x, y, z) = (x, y, z)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = x \\ y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases},$$

assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 1, o vetor $v = (1, -1, 0)$.

autovalor 3: Agora precisamos encontrar $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisfazendo

$$T(x, y, z) = (3x, 3y, 3z).$$

Temos

$$\begin{cases} x + z = 3x \\ y + z = 3y \\ x + y + 2z = 3z \end{cases} \iff z = 2x = 2y,$$

assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 3, o vetor $w = (1, 1, 2)$.

É claro que a matriz de T com relação à base formada por u, v e w é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 10.14 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz com relação a alguma base é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Mostre que T diagonalizável.

Resolução: O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$

Vemos que $p_T(\lambda)$ apresenta duas raízes reais simples, isto é, com multiplicidade um, se e somente se o discriminante $(a+c)^2 - 4(ac-b^2)$ for positivo. Assim,

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$$

se e somente se $a \neq c$ ou $b \neq 0$. Vemos assim que, se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores de T (as raízes de $p_T(\lambda)$) coincidem e, portanto, T é diagonalizável.

Se $a = c$ e $b = 0$ então vê-se claramente que T é diagonalizável pois, neste caso, A é diagonal. □

Ex. Resolvido 10.15 *Verifique se $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$T(p(t)) = p''(t) - 2p'(t) + p(t)$$

é diagonalizável.

Resolução: A matriz de T com relação à base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $P_T(\lambda) = (1-\lambda)^3$ e, desta forma, 1 é o único autovalor de T. Como pelo teorema 10.10 T é diagonalizável se e somente se $\dim V(1) = 3$, vejamos qual é a dimensão deste subespaço próprio.

$$p(t) = x + yt + zt^2 \in V(1) \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff y = z = 0 \iff p(t) = x.$$

Portanto, $V(1) = [1]$ e T não é diagonalizável. □

Ex. Resolvido 10.16 *Verifique se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por*

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y, 2z + t, 2z + t)$$

é diagonalizável. Encontre também os espaços próprios de T.

Resolução: A matriz de T com relação à base canônica é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e o seu polinômio característico é

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2((2-\lambda)(1-\lambda) - 2)$$

$$= (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(\lambda-3)(1-\lambda)^2.$$

(i) autovalor 0:

$$(x,y,z,t) \in V(0) \iff (x+y, y, 2z+t, 2z+t) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ 2z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y=0 \\ t=-2z \end{cases} \iff (x,y,z,t) = z(0,0,1,-2).$$

Logo, $V(0) = [(0,0,1,-2)]$.

(ii) autovalor 3:

$$(x,y,z,t) \in V(3) \iff (x+y, y, 2z+t, 2z+t) = (3x, 3y, 3z, 3t)$$

$$\iff \begin{cases} x+y=3x \\ y=3y \\ 2z+t=3z \\ 2z+t=3t \end{cases} \iff \begin{cases} x=y=0 \\ t=z \end{cases} \iff (x,y,z,t) = z(0,0,1,1).$$

Logo, $V(3) = [(0,0,1,1)]$.

(iii) autovalor 1:

$$(x,y,z,t) \in V(1) \iff (x+y, y, 2z+t, 2z+t) = (x,y,z,t)$$

$$\iff \begin{cases} x+y=x \\ y=y \\ 2z+t=z \\ 2z+t=t \end{cases} \iff y=z=t=0 \iff (x,y,z,t) = x(1,0,0,0).$$

Logo, $V(1) = [(1,0,0,0)]$.

Como a multiplicidade algébrica do autovalor 1 é dois e a sua multiplicidade geométrica é um, vemos que T não é diagonalizável. $\square$

Ex. Resolvido 10.17 *Ainda com relação ao operador do exercício anterior, encontre a matriz de T com relação à base B formada pelos vetores*

$$u = (0, 0, 1, -2), v = (0, 0, 1, 1), w = (1, 0, 0, 0) \quad e \quad p = (0, 1, 0, 0).$$

Resolução: Já sabemos que $T(u) = 0$, $T(v) = 3v$ e $T(w) = w$. Agora, como

$$T(p) = T(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) = w + p,$$

vemos que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ex. Resolvido 10.18 *Seja $T \in \mathscr{L}(U)$ um operador diagonalizável com autovetores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, onde $n = \dim U$. Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, denote por $D(x_1, \dots, x_n) = (a_{ij})$ a matriz diagonal tal que $a_{ii} = x_i$.*

Seja $p(t) = a_0 + a_1 t \cdots + a_m t^m$ um polinômio. Sejam B uma base de autovalores de U tal que $[T]_B = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e C uma base de U. Mostre que $[p(T)]_C$ é semelhante a $D(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$.

Resolução: Como $[T]_C = (M_B^C)^{-1}[T]_B M_B^C$ temos pelo exercícios resolvidos 9.28 e 9.29 que $[p(T)]_C = (M_B^C)^{-1}[p(T)]_B M_B^C$. Mas

$$[p(T)]_B = [a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m]_B = a_0 I_n + a_1 [T]_B + \cdots + a_m [T]_B^m$$

$$= a_0 D(1, \dots, 1) + a_1 D(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \cdots + a_m D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^m$$

$$= a_0 D(1, \dots, 1) + a_1 D(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \cdots + a_m D(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$$

$$= D(a_0, \dots, a_0) + D(a_1\lambda_1, \dots, a_1\lambda_n) + \cdots + D(a_m\lambda_1^m, \dots, a_m\lambda_n^m)$$

$$= D(a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_m\lambda_1^m, \dots, a_0 + a_1\lambda_n + \cdots + a_m\lambda_n^m)$$

$$= D(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)).$$

Ex. Resolvido 10.19 *Seja $T \in \mathscr{L}(U)$ um operador diagonalizável. Mostre que $p_T(T) = 0$.*

Resolução: Seja B uma base de U tal que $[T]_B = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de T. Segue da resolução do exercício anterior que

$$[p_T(T)]_B = D(p_T(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)) = D(0, \ldots, 0) = 0,$$

pois $p_T(\lambda_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Assim, $p_T(T) = 0$.

$\square$

Observação 10.20 *Pode-se mostrar que mesmo que $T \in \mathscr{L}(U)$ não seja diagonalizável vale $p_T(T) = 0$.*

10.2 Exercícios

Ex. 10.21 *Determinar $M \in M_2$, se existir, de modo que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal nos seguintes casos:*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 10.22 *Verificar, em cada um dos itens abaixo, se o operador $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dado pela sua matriz com relação à base canônica é diagonalizável.*

$$a)\ [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad b)\ [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex. 10.23 *Verificar em cada um dos itens abaixo se o operador $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ dado pela sua matriz com relação à base canônica é diagonalizável.*

$$a)\ [T]_C = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 11

Forma Canônica de Jordan

11.1 Introdução e Exemplos

Como vimos, nem todo operador linear é diagonalizável. No entanto, se $T \in \mathscr{L}(U)$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, existe uma base com relação a qual, a matriz de T é *próxima* de uma matriz diagonal. A seguir daremos uma pequena descrição de como é a forma desta matriz, mas antes precisamos de algumas notações.

Seja $p_T(\lambda)$ o polinômio característico de T. A primeira observação a ser feita é que $p_T(\lambda)$ se fatora como

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n}((\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k}$$

onde $\lambda_r \neq \lambda_s$, e $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$. Note que cada $\alpha_r + i\beta_r$ é uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$. Note também que $m_1 + \cdots + m_n + 2p_1 + \cdots 2p_k = \dim U$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, denotaremos por $J(\lambda; r)$ a matriz quadrada de ordem r com todos os elementos da diagonal principal iguais a λ e todos os elementos logo acima desta, iguais a 1, ou seja,

$$J(\lambda;r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{r\times r} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r\times r} = \lambda I + N,$$

onde I é a matriz identidade de ordem r e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r\times r} .$$

Note que N^r é a matriz nula, isto é, N é uma matriz nilpotente.

Se $\alpha + i\beta$ é uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$ e r é um número par, definimos

$$R(\alpha,\beta;r) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}_{r\times r} .$$

Se $B_1, \ldots, B_k$ são matrizes quadradas, não necessariamente de ordens iguais, definimos $\operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ como sendo a matriz quadrada de ordem igual à soma das ordens de $B_1, \ldots, B_k$ dada por

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix},$$

por exemplo, se

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 11.1 (Forma Canônica de Jordan) *Seja U um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $T \in \mathscr{L}(U)$ cujo polinômio característico é dado por*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} ((\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k}$$

onde $\lambda_r \neq \lambda_s$, $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$, e $\beta_r > 0$. Então existe uma base de U com relação a qual a matriz de T é da forma

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p, R_1, \ldots, R_q), \tag{11.2}$$

onde $J_1, \ldots, J_p$ são da forma $J(\lambda; r)$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e $R_1, \ldots, R_q$ são da forma $R(\alpha, \beta; s)$ para algum $s \in \mathbb{N}$ e $(\alpha, \beta) \in \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)\}$.

Observação 11.3 *A matriz 11.2 é única a menos de permutações dos seus* blocos *que compõem a sua diagonal.*

Observação 11.4 *Se λ é um autovalor de T então a soma das ordens dos blocos $J(\lambda; s)$ é igual à multiplicidade algébrica de λ.*

Observação 11.5 *Se $\alpha + i\beta$ é uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$ então a soma das ordens dos blocos $R(\alpha, \beta; s)$ é igual ao dobro da multiplicidade da raiz $\alpha + i\beta$.*

Observação 11.6 *Se λ é um autovalor de T com multiplicidade geométrica r então existem r blocos $J(\lambda; s)$ associados ao autovalor λ.*

Observação 11.7 *Suponha que*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n}$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Se m_j também é multiplicidade geométrica de λ_j então o teorema de Jordan diz simplesmente que T é diagonalizável.

Observação 11.8 *O teorema de Jordan diz que a matriz de um operador T com relação a uma base arbitrária é semelhante a uma matriz da forma 11.2*

Ex. Resolvido 11.9 *Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador cujo polinômio característico é dado por $p_T(\lambda) = (2 - \lambda)^3(1 - \lambda)$.*

Resolução: Note que T apresenta apenas os autovalores 2 e 1.

Como as multiplicidades algébricas e geométrica do autovalor 1 são iguais a um, vemos que o único bloco correspondente a este autovalor é $J(1; 1) = (1)$.

Com relação ao autovalor 2, a sua multiplicidade algébrica é três. Se sua multiplicidade geométrica for três então existem três blocos associados a este autovalor e todos eles são iguais a (2). Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 2 for dois, então existem dois blocos correspondentes a este autovalor que são da forma

$$J(2;1) = (2) \qquad J(2;2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 2 for um, então existe um bloco correspondente a este autovalor que é

$$J(2;3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex. Resolvido 11.10 *Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador cujo polinômio característico é dado por* $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^2(4 + \lambda^2)$.

Utilizando a notação do teorema 11.1 temos $\lambda_1 = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Como $0 + i2$ tem multiplicidade um (como raiz de $p_T(\lambda)$), existe apenas um bloco da forma

$$R(0,2;2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 for dois então existem apenas dois blocos associados a este autovalor e são iguais a (1). Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 for um então existe apenas um bloco de ordem dois associado a este autovalor que é dado por

$$J(1;2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. Resolvido 11.11 *Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ com relação a qual a matriz da transformação*

$$T(x, y, z, t) = (2x + y + z + t, 2y - z - t, 3z - t, 4t)$$

está na forma canônica de Jordan.

Resolução: Com relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$, a matriz de T é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)^2$. Desta forma vemos que $\dim V(3) = \dim V(4) = 1$. É simples ver que

$$V(3) = [(0, 1, -1, 0)] \quad \text{e} \quad V(4) = [(0, 0, 1, -1)].$$

Vejamos qual a dimensão de $V(2)$. Temos que $(x,y,z,t) \in V(2)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(x,y,z,t) = x(1,0,0,0)$. Assim, $\dim V(2) = 1$ e T não é diagonalizável. Sendo assim, a matriz de T na forma canônica de Jordan é da forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que se pusermos $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_3 = (0,1,-1,0)$ e $u_4 = (0,0,1,-1)$ então para que u_1, u_2, u_3, u_4 seja a base procurada, o vetor u_2 deve satisfazer $T(u_2) = u_1 + 2u_2$, ou seja, $(T - 2I)(u_2) = u_1$. Desta forma, colocando $u = (a,b,c,d)$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução geral é da forma $(a,1,0,0)$. Podemos tomar, por exemplo, $u_2 = (0,1,0,0)$ e isto nos fornecerá a base procurada.

11.2 Exercícios

Ex. 11.12 *Se uma matriz de ordem 3 tem os autovalores 3, 3 e 3, quais são as possíveis formas canônicas de Jordan dessa matriz?*

Ex. 11.13 *Se uma matriz de ordem 4 tem os autovalores 1, 2 e 3, quais são as possíveis formas canônicas de Jordan dessa matriz?*

Capítulo 12

Espaços Euclidianos

12.1 Produto Interno

Nos primeiros capítulos deste curso estudamos as propriedades mais básicas de um espaço vetorial. A introdução de conceitos como geradores e base foram feitas a partir de combinações lineares que, por sua vez, envolvem apenas a adição de vetores e a multiplicação por escalares, dois objetos que estão presentes na própria definição do espaço vetorial. Neste capítulo veremos tipos especiais de espaços vetoriais que possuem uma estrutura mais refinada que nos proporcionará desenvolver alguns aspectos geométricos, como por exemplo, o ângulo ou a distância entre dois vetores. Veremos também que é possível elaborar mais detalhes sobre operadores lineares definidos em tais espaços vetoriais.

Definição 12.1 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma aplicação que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um número real denotado por $\langle u, v\rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades*

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$;

(ii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *para todo* $u, v \in V$;

(iv) $\langle u, u\rangle > 0$ *se* $u \neq 0$.

O espaço vetorial V *munido de um produto interno é chamado de espaço euclidiano.*

Observação 12.2 *O produto interno também é chamado de produto escalar.*

Algumas propriedades seguem-se imediatamente.

Por exemplo, vemos que $\langle 0, u\rangle = 0$ para todo $u \in V$, pois

$$\langle 0, u\rangle = \langle 0 + 0, u\rangle = \langle 0, u\rangle + \langle 0, u\rangle,$$

e o resultado segue por cancelamento.

Outra propriedade é que $\langle u, v + \alpha w\rangle = \langle u, v\rangle + \alpha\langle u, w\rangle$, para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Basta combinar as propriedades (i), (ii) e (iii) acima. Desta maneira, vemos que o produto interno é linear em cada variável.

A seguir apresentamos alguns exemplos de produto interno em vários espaços vetoriais. A verificação das propriedades (i) a (iv) é deixada como exercício.

Exemplo 12.3 *Se* $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *definimos*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \tag{12.4}$$

Ex. Resolvido 12.5 *Com relação ao exemplo anterior, calcule o produto interno entre os vetores* $(1, -1, 1), (0, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução: Basta notar que

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2.$$

□

Ex. Resolvido 12.6 *Com relação ao produto interno dado por 12.4, calcule* $\langle u, v\rangle$ *onde* $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ *e* $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Resolução: Temos

$$\langle u, v\rangle = \langle(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta), (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)\rangle$$

$$= \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = \cos(\theta - \alpha).$$

□

Há vários outros tipos de produto interno no $\mathbb{R}^n$ além do apresentado em 12.4. Vejamos um exemplo no $\mathbb{R}^3$:

Exemplo 12.7 *Se* $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, *definimos*

$$\langle(x, y, z), (x', y', z')\rangle = \frac{xx'}{2} + \frac{yy'}{3} + \frac{zz'}{4}.$$

É fácil verificar que a expressão acima define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Ex. Resolvido 12.8 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule* $\langle(1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle$.

Resolução:

$$\langle(1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle = \frac{1 \cdot 0}{2} + \frac{-1 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 4}{4} = \frac{1}{3}.$$

□

Exemplo 12.9 *Se* $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ *definimos*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \tag{12.10}$$

que é um produto interno.

Ex. Resolvido 12.11 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule o produto interno entre as funções seno e co-seno definidas no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Resolução:

$$\langle \operatorname{sen}, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \left. \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

□

Exemplo 12.12 *Se $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$ definimos*

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

Ex. Resolvido 12.13 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule o produto interno entre*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

$$\langle A, B \rangle = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0.$$

□

Exercício 12.14 *O traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da diagonal da matriz e é denotado por $\operatorname{tr} A$. Mostre que se $A, B \in M_n$ então*

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$$

define um produto interno em M_n.

12.2 Norma

Definição 12.15 *Se V é um espaço euclidiano, definimos para cada $u \in V$ o número $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Este valor é chamado de norma de u.*

Observação 12.16 *Note que é possível extrair a raiz quadrada de $\langle u, u \rangle$ pois este número é não negativo.*

Exemplo 12.17 *Em $\mathbb{R}^n$, com o produto interno dado por 12.4, a norma de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é dada por*

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Note que a norma de x representa o comprimento deste vetor.

Exemplo 12.18 *Em $C([a,b];\mathbb{R})$ com o produto interno definido por 12.10, a norma de $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ é dada por*

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}.$$

Proposição 12.19 *Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Temos*

1. $||\alpha u|| = |\alpha|||u||$ *para todo* $u \in V$ *e todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $||u|| \geq 0$ *para todo* $u \in V$;
3. $||u|| = 0$ *se e somente se* $u = 0$;
4. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ *para todo* $u, v \in V$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz);*
5. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in V$ *(desigualdade triangular).*

Prova:

1. $||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle u, u\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\alpha|\,||u||.$
2. Óbvio pois a raiz quadrada é não negativa.
3. Se $u = 0$ então $\|u\| = \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0$.

   Reciprocamente, se $u \neq 0$ então $\langle u, u\rangle > 0$ e $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} > 0$.

4. Se $v = 0$ então $|\langle u, 0\rangle| = 0 = \|u\|\,\|0\||$.

   Suponha que $v \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\|u + \alpha v\|^2 \geq 0$. Logo,

   $$0 \leq \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle\alpha + \langle v, v\rangle\alpha^2$$

   $$= ||u||^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + ||v||^2\alpha^2.$$

   Assim,
   $$\Delta \doteq 4\langle u, v\rangle^2 - 4||u||^2||v||^2 \leq 0,$$
   ou seja, $\langle u, v\rangle^2 \leq ||u||^2||v||^2$. Extraindo a raiz quadrada, obtemos $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

5. A seguir usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz

   $$||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v\rangle$$

   $$\leq ||u||^2 + ||u||^2 + 2||u||||v|| = [||u|| + ||v||]^2.$$

   Extraindo a raiz quadrada, segue o resultado desejado.

∎

Observe que a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada ao produto interno do $\mathbb{R}^n$ dado por 12.4 nos diz que

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

A mesma desigualdade aplicada ao produto interno em $C([a, b,]; \mathbb{R})$ fornece

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2\,dx \int_a^b [g(x)]^2\,dx.$$

Proposição 12.20 (Identidade do Paralelogramo) *Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Prova:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle$$

$$= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

∎

A próxima proposição mostra como se pode obter o produto interno entre dois vetores a partir das normas de suas soma e diferença.

Proposição 12.21 *Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então*

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle.$$

Prova:

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle - \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle$$

$$= 4\langle u,v\rangle.$$

∎

Ex. Resolvido 12.22 *Calcule $\langle u,v\rangle$ sabendo-se que $\|u+v\| = 1$ e $\|u-v\| = 1$.*

Resolução: Temos

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = 0.$$

□

12.3 Distância

Definição 12.23 *Num espaço euclidiano V definimos a distância entre $u, v \in V$ como*

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Resulta da proposição 12.19 que a distância satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 12.24 *Num espaço euclidiano V temos*

1. $d(u, v) \geq 0$ *para todo* $u, v \in V$;
2. $d(u, v) = 0$ *se e somente se* $u = v$;
3. $d(u, v) = d(v, u)$ *para todo* $u, v \in V$;
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ *para todo* $u, v, w \in V$.

Ex. Resolvido 12.25 *Com relação ao produto interno 12.4 calcule a distância entre os pontos $u = (1, 1, 3, 2)$ e $v = (2, 2, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.*

Resolução: Temos

$$d(u, v) = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{10}$$

□

Ex. Resolvido 12.26 *Com relação ao produto interno 12.10 calcule a distância entre as funções sen e $\cos$ de $C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$*

Resolução: Temos

$$d(\operatorname{sen}, \cos)^2 = \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} x - \cos x]^2 \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x] \, dx = \int_0^{2\pi} [1 - 2 \operatorname{sen} x \cos x] \, dx =$$

$$= x - \operatorname{sen}^2 x \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Portanto, $d(\operatorname{sen}, \cos) = \sqrt{2\pi}$. □

12.4 Ângulo

Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$ ambos não nulos. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja proposição 12.19) temos

$$-\|u\|\,\|v\| \leq \langle u, v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|$$

ou ainda,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1.$$

Desta forma, existe um único número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Este número θ é chamado de ângulo entre os vetores u e v.

Ex. Resolvido 12.27 *Calcule o ângulo entre as funções seno e co-seno definidas em $[0, 2\pi]$ com o produto interno dado por 12.10.*

Resolução:

$$\langle\,\mathrm{sen}\,, \cos\,\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,^2 x\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Desta forma, o ângulo entre seno e co-seno é $\frac{\pi}{2}$. □

Ex. Resolvido 12.28 *Sabe-se que $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Calcule o ângulo entre u e v.*

Resolução: Como $\|u - v\| = 2$ então

$$4 = \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle$$
$$= \|u\| + \|v\| - 2\langle u, v\rangle = 2 - 2\langle u, v\rangle.$$

Assim, $\langle u, v\rangle = -1$ e

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = -1,$$

ou seja, $\theta = \pi$.

12.5 Ortogonalidade

Definição 12.29 *Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que $u, v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$ e, neste caso, denotaremos $u \perp v$.*

Dizemos que um conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é ortogonal se $u_i \perp u_j$ quando $i \neq j$.

Dizemos que um conjunto ortogonal $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é ortonormal se $\|u_j\| = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Dizemos que $u \in V$ é ortogonal a um subconjunto não vazio S de V se u for ortogonal a todos os elementos de S. Neste caso usaremos a definição $u \perp S$.

Exemplo 12.30 *$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto ortonormal com relação ao produto interno dado por 12.4.*

Observação 12.31 *Se $u = 0$ ou $v = 0$ então $u \perp v$. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$ então $u \perp v$ se e somente se o ângulo entre u e v é $\pi/2$.*

Observação 12.32 *Se $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é um conjunto ortogonal com $u_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$ então*

$$\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\right\}$$

é um conjunto ortonormal.

Proposição 12.33 *Sejam V um espaço euclidiano e $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ um conjunto ortonormal. Então $u_1, \dots, u_n$ são linearmente independentes.*

Prova: Se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \tag{12.34}$$

então, fazendo o produto interno do vetor acima com u_1 e lembrando que $\langle u_1, u_1\rangle = \|u_1\|^2 = 1$ e $\langle u_j, u_1\rangle = 0$, se $j = 2, \dots, n$, obtemos

$$\alpha_1 = \alpha_1\langle u_1, u_1\rangle + \cdots + \alpha_n\langle u_n, u_1\rangle = \langle 0, u_1\rangle = 0,$$

isto é, $\alpha_1 = 0$, e 12.34 fica

$$\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$$

Tomando o produto interno do vetor acima com u_2, obtemos, como acima, que $\alpha_2 = 0$. Repetindo o processo chegamos à conclusão que a única possibilidade para 12.34 é $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. ∎

Observação 12.35 *A proposição acima continua válida se S for apenas um conjunto ortogonal com elementos não nulos.*

Definição 12.36 *Se V é um espaço euclidiano de dimensão n e se $u_1, \ldots, u_n$ formam um conjunto ortonormal, então diremos que estes vetores formam uma base ortonormal de V.*

Proposição 12.37 *Sejam V um espaço euclidiano que possui uma base ortonormal dada por $u_1, \ldots, u_n$. Então, se $u \in V$ temos*

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n.$$

Prova: Como $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de V, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Tomando o produto interno de u com u_1, temos

$$\langle u, u_1 \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle u_n, u_1 \rangle = \alpha_1,$$

pois a base é ortonormal. O resultado segue tomando o produto interno de u por u_2, u_3, etc. ∎

Ex. Resolvido 12.38 *Encontre as coordenadas de $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ com relação à base formada por $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.*

Resolução: Como a base em questão é ortonormal, pela proposição anterior, temos que

$$(1,1) = \langle (1,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + \langle (1,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + 0(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Desta forma as coordenadas de $(1, 1)$ com relação à base acima são

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Proposição 12.39 *Sejam V um espaço euclidiano e $U = [u_1, \ldots, u_n]$ o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Então, para qualquer $u \in V$ o vetor dado por*

$$v = u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n$$

é ortogonal a todo $w \in U$, isto é, $v \perp U$.

Além do mais, $v = 0$ se e somente se $u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n$, isto é, se e somente se $u \in [u_1, \ldots, u_n]$.

Prova: Seja $w \in U$. Podemos escrever $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Precisamos mostrar que $\langle w, v \rangle = 0$, isto é, $\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, v \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, v \rangle = 0$. Portanto, basta verificar que $\langle u_j, v \rangle = 0$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Como $u_1, \ldots, u_n$ formam um conjunto ortonormal, temos

$$\langle u_j, v \rangle = \langle u_j, u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n \rangle$$

$$= \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_1 \rangle \langle u_j, u_1 \rangle - \cdots - \langle u, u_n \rangle \langle u_j, u_n \rangle$$

$$= \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle = \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0$$

$\blacksquare$

Proposição 12.40 *Sejam V um espaço vetorial e U um subespaço de V. Se $u \in U$ e $u \perp U$ então $u = 0$.*

Prova: Como $u \in U$ e u é ortogonal a todo vetor de U, devemos ter $||u||^2 = \langle u, u \rangle = 0$, ou seja, $u = 0$. $\blacksquare$

Proposição 12.41 *Sejam $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $R = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conjuntos ortonormais de um espaço euclidiano V tais que $[S] = [R]$. Então, para $u \in V$, temos*

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Prova: Seja $u \in V$. Coloque $U = [R] = [S]$,

$$w_1 = u - (\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n)$$

e

$$w_2 = u - (\langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n).$$

Pela proposição 12.39, $w_1, w_2 \perp U$. Logo, para todo $w \in U$, temos $\langle w_1 - w_2, w \rangle = \langle w_1, w \rangle - \langle w_2, w \rangle = 0$, isto é, $(w_1 - w_2) \perp U$.

Note também que

$$w_1 - w_2 = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n - (\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n) \in U.$$

Segue da proposição 12.40 que $w_1 - w_2 = 0$, isto é,

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

∎

Definição 12.42 *Sejam $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ um conjunto ortonormal de um espaço euclidiano V e $U = [u_1, \ldots, u_n]$. Se $u \in V$, o vetor*

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n$$

é chamado de projeção ortogonal de u sobre o subespaço U.

Observação 12.43 *Se $v \in V$ é um vetor não nulo então $S = \{\frac{v}{\|v\|}\}$ é um conjunto ortonormal. Assim, se $u \in V$, a projeção ortogonal de u sobre $[S]$ nada mais é do que o vetor*

$$w = \langle u, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Neste caso, w é chamado de projeção ortogonal de u sobre v.

Ex. Resolvido 12.44 *Com relação ao produto interno usual de* $\mathbb{R}^3$, *verifique que os vetores* $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *e* $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ *formam um conjunto ortonormal e encontre a projeção ortogonal de* $u = (2, 3, 1)$ *sobre o subespaço gerado por* u_1 *e* u_2.

Resolução: Claramente,

$$\|u_1\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

e

$$\|u_2\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Também,

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}0 = 0.$$

Assim, a projeção ortogonal de $u = (2, 3, 1)$ sobre $[u_1, u_2]$ é

$$w = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2$$

$$= \langle (2,3,1), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \rangle (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + \langle (2,3,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rangle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0).$$

□

Ex. Resolvido 12.45 *Considere* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ *com o produto interno dado por*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx.$$

Encontre a projeção de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ *sobre* $[q(x)] = [x^3 - x]$.

Resolução: Temos

$$\|q\|^2 = \int_0^1 (x^3 - x)^2 \, dx = \int_0^1 (x^6 + x^2 - 2x^4) \, dx = \left. \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{8}{105};$$

$$\langle p, q \rangle = \langle 1 + x + x^2 + x^3, x^3 - x \rangle = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3)(x^3 - x) \, dx$$

$$= \int_0^1 (-x - x^2 + x^5 + x^6) \, dx = -11/21.$$

Assim a projeção ortogonal de $p(x)$ sobre $q(x)$ é

$$r(x) = -\frac{11}{21} \cdot \frac{105}{8}(x^3 - x) = -\frac{55}{8}(x^3 - x).$$

□

12.6 Processo de Gram-Schmidt

A demonstração do próximo teorema fornece um método para se conseguir uma base ortonormal de um espaço euclidiano a partir de uma base dada.

Teorema 12.46 *Todo espaço euclidiano de dimensão finita possui uma base ortonormal.*

Prova: A prova é por indução sobre a dimensão do espaço.

Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se $\dim V = 1$ então existe $v_1 \in V$, tal que $V = [v_1]$. Como $v_1 \neq 0$, tomamos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

e, dessa forma, $\{u_1\}$ é um conjunto ortonormal e $V = [u_1]$, ou seja, u_1 forma uma base ortonormal de V.

Se $\dim V = 2$ então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $V = [v_1, v_2]$. Coloque

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Nosso trabalho se resume em encontrar um vetor ortogonal a u_1 e que tenha norma 1. Primeiramente vamos encontrar um vetor ortogonal a u_1. Ora, pela proposição 12.39, basta tomarmos $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$. Note que $u_2' \neq 0$, pois v_1 e v_2 são linearmente independentes. Resta agora *normalizar* u_2', isto é, definimos

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$

e então

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}$$

formam uma base ortonormal de V.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha que tenhamos provado o teorema para todos os espaços euclidianos de dimensão $n-1$. Queremos provar que o mesmo é verdade para todo espaço euclidiano de dimensão n.

Se $\dim V = n \geq 2$ então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ que formam uma base de V. Note que $U = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$ é um subespaço de V de dimensão $n-1$. Desse modo, usando a nossa hipótese de indução, é possível tomar uma base ortonormal de U. Chamemos estes vetores da base ortonormal de U por $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Como $v_n \notin U$ então, pela proposição 12.39, o vetor

$$u_n' = v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}$$

é não nulo e ortogonal a todos os elementos de U (portanto, ortogonal a $u_1, \ldots,$ u_{n-1}). Para finalizar, tomamos como base de V os vetores

$$u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$$

onde

$$u_n = \frac{u_n'}{\|u_n'\|} = \frac{v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}}{\|v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}\|}.$$

∎

Observação 12.47 *No caso de um espaço euclidiano tridimensional, se v_1, v_2, v_3 formam uma base, então uma base ortonormal deste espaço pode ser dada pelos vetores*

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},$$

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}$$

e

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}.$$

Ex. Resolvido 12.48 *Encontre uma base ortonormal de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.*

Resolução: Usaremos o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal a partir da base formada pelos polinômios $1, x$ e x^2. Temos

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2\,dx = 1$$

e colocamos $p_1(x) = 1$. Seguindo o processo, definimos

$$p_2(x) = \frac{x - \langle x, 1\rangle 1}{\|x - \langle x, 1\rangle 1\|},$$

onde

$$\langle x, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|x - \langle x, 1\rangle 1\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{12}.$$

Assim, $p_2(x) = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2x-1)$. Por fim, colocamos

$$p_3(x) = \frac{x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle\sqrt{3}(2x-1)}{\|x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle\sqrt{3}(2x-1)\|},$$

onde

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \qquad \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 x^2(2x-1)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

e

$$\|x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle\sqrt{3}(2x-1)\|^2 = \|x^2 - x + \frac{1}{6}\|^2 =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\, dx = \frac{1}{180}.$$

Assim,

$$p_3(x) = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

Desta forma, uma base ortonormal de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = \sqrt{3}(2x-1) \qquad \text{e} \qquad p_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

$\square$

Ex. Resolvido 12.49 *Encontre uma base ortonormal de*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}.$$

Resolução: Note que $(x, y, z) \in W$ se e somente se

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Desta forma $(2, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ formam uma base de W.

Tomaremos como $u_1 = (0, 0, 1)$, pois este vetor é unitário (tem norma 1). Pelo processo de Gram-Schmidt, u_2 é a projeção ortogonal unitária de $(2, 1, 0)$ sobre u_1, isto é

$$u_2 = \frac{(2,1,0) - \langle(2,1,0),(0,0,1)\rangle(0,0,1)}{\|(2,1,0) - \langle(2,1,0),(0,0,1)\rangle(0,0,1)\|} = \frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0).$$

$\square$

Ex. Resolvido 12.50 *Encontre uma base ortonormal de*

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0\}.$$

Resolução: Temos que $(x, y, z, t) \in W$ se somente se

$$(x, y, z, t) = (-y - z - t, y, z, t)$$
$$= y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1).$$

Como $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ e $(-1, 0, 0, 1)$ são linearmente independentes, segue-se que formam uma base de W. Coloquemos

$$u_1 = \frac{(-1, 1, 0, 0)}{\|(-1, 1, 0, 0)\|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0).$$

$$u_2 = \frac{(-1, 0, 1, 0) - \langle(-1, 0, 1, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)}{\|(-1, 0, 1, 0) - \langle(-1, 0, 1, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\|}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)}{\|(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2, 0).$$

$$u_3 = \frac{(-1, 0, 0, 1) - \langle(-1, 0, 0, 1), u_1\rangle u_1 - \langle(-1, 0, 0, 1), u_2\rangle u_2}{\|(-1, 0, 0, 1) - \langle(-1, 0, 0, 1), u_1\rangle u_1 - \langle(-1, 0, 0, 1), u_2\rangle u_2\|}$$

onde

$$\langle(-1, 0, 0, 1), u_1\rangle = \langle(-1, 0, 0, 1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle(-1, 0, 0, 1), u_2\rangle = \langle(-1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2, 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Assim,

$$(-1, 0, 0, 1) - \langle(-1, 0, 0, 1), u_1\rangle u_1 - \langle(-1, 0, 0, 1), u_2\rangle u_2$$

$$= (-1, 0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2, 0)$$

$$= (-1, 0, 0, 1) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, 0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1).$$

Desta forma,

$$u_3 = \frac{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)}{\|(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\|} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$$

$\square$

12.7 Complemento Ortogonal

Definição 12.51 *Sejam V um espaço euclidiano e U um subespaço vetorial de V. O complemento ortogonal de U é o conjunto*

$$U^{\perp} = \{v \in V; \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall\, u \in U\}.$$

Proposição 12.52 *$U^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.*

Prova: Temos $0 \in U^{\perp}$ pois $\langle 0, u\rangle = 0$ para todo $u \in U$. Se $v, w \in U^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então para todo $u \in U$, temos

$$\langle v + \alpha w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \alpha\langle w, u\rangle = 0.$$

Portanto, $v + \alpha w \in U^{\perp}$. ∎

Observação 12.53 *Se V tem dimensão finita então $u \in U^{\perp}$ se e somente se u é ortogonal a todos os vetores de uma base qualquer de U.*

Ex. Resolvido 12.54 *Encontre $U^{\perp}$ se $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$.*

Resolução: Temos $(x, y, z) \in U$ se somente se $(x, y, z) = (y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. Vemos que $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ formam uma base de U.

Assim, $(x, y, z) \in U^{\perp}$ se somente se

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0)\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle (x, y, z), (1, 0, 1)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, -1, -1).$$

Assim,

$$U^{\perp} = [(1, -1, -1)].$$

□

Teorema 12.55 *Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço vetorial de V. Então $V = U \oplus U^{\perp}$.*

Prova: Dado $v \in V$, seja w a projeção ortogonal de v sobre U. Temos $v = w + (v - w)$ e pela proposição 12.39, $w \in U$ e para todo $u \in U$, $\langle v - w, u\rangle = 0$, ou seja, $v \in U + U^{\perp}$.

Agora, se $u \in U \cap U^{\perp}$ então $\langle u, u\rangle = 0$ e, portanto, $u = 0$. ∎

12.8 Isometria

Definição 12.56 *Sejam U e V espaços euclidianos. Dizemos que $T \in \mathscr{L}(U,V)$ é uma isometria se $\langle T(u_1), T(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ para todo $u_1, u_2 \in U$.*

Observação 12.57 *Note que os produtos internos acima, embora representados pelo mesmo símbolo, são produtos internos de V e de U, respectivamente.*

Exemplo 12.58 (rotação) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

é uma isometria, onde $\theta \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\langle T(x_1,y_1), T(x_2,y_2)\rangle$$

$$= \langle (x_1\cos\theta - y_1\,\mathrm{sen}\,\theta, x_1\,\mathrm{sen}\,\theta + y_1\cos\theta), \\ (x_2\cos\theta - y_2\,\mathrm{sen}\,\theta, x_2\,\mathrm{sen}\,\theta + y_2\cos\theta)\rangle$$

$$= x_1x_2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) - y_1x_2(-\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ - x_1y_2(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + y_1y_2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 = \langle (x_1,y_1), (x_2,y_2)\rangle.$$

Teorema 12.59 *Sejam U, V espaços euclidianos e $T \in \mathscr{L}(U,V)$. São equivalentes:*

1. *T é uma isometria;*
2. *$\|T(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in U$;*
3. *$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ para todo $u, v \in U$;*
4. *Se $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$ é ortonormal então $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é ortonormal em V.*

Prova: ($1 \Longrightarrow 2$) Como T é uma isometria temos que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in U$. Em particular, tomando $u = v$, obtemos

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2,$$

ou seja, $\|T(u)\| = \|u\|$.

($2 \Longrightarrow 3$) Para todo $u, v \in U$, temos

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| = \|u - v\|.$$

($3 \Longrightarrow 1$) Note que

$$\|T(u) + T(v)\| = \|T(u) - T(-v)\| = \|u - (-v)\| = \|u + v\|.$$

Pela proposição 12.21, temos

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u) - T(v)\|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) = \langle u, v\rangle.$$

($1 \Longrightarrow 4$) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de U então, como T é uma isometria, temos

$$\langle T(u_i), T(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

ou seja, $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal.

($4 \Longrightarrow 1$) Seja $u_1, \dots, u_n$ uma base ortonormal de U. Por hipótese, $T(u_1)$, $\dots, T(u_n)$ formam um conjunto ortonormal. Dados $u, v \in U$, escrevemos

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

e

$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$$

e obtemos

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j T(u_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j \langle T(u_i), T(u_j)\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.$$

Por outro lado,

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j \langle u_i, u_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.$$

Comparando as expressões acima, concluímos que T é uma isometria. ∎

Corolário 12.60 *Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ é uma isometria então T é injetora.*

Prova: Basta ver que se $T(u) = 0$ então $\|u\| = \|T(u)\| = 0$, portanto, $u = 0$. ∎

Corolário 12.61 *Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ é uma isometria e $\dim U = \dim V$ então T é um isomorfismo.*

Prova: Como U e V têm a mesma dimensão e T é injetora, segue-se que T é uma bijeção, isto é, um isomorfismo. ∎

Ex. Resolvido 12.62 *Seja $T \in \mathbb{R}^2$ tal que a matriz de T com relação a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é dada por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

T é uma isometria?

Resolução: Vejamos, se u, v é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de uma isometria S com relação a esta base então pelo teorema anterior $\|S(u)\| = \|S(v)\| = 1$. Além do mais, $\langle S(u), S(v)\rangle = 0$. Como $S(u) = au + cv$ e $S(v) = bu + dv$, teríamos

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} .$$

Deste modo, T não pode se uma isometria pois, por exemplo, $1^2 + 2^2 = 5 \neq 1$. □

Vejamos como fica a matriz de uma isometria $T \in \mathscr{L}(U)$ com relação a uma base ortogonal $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. Seja $M = [T]_B = (a_{ij})$. Como

$$T(u_j) = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{nj}u_n,$$

obtemos

$$a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \langle T(u_i), T(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} ,$$

ou seja, as colunas da matriz M quando vistas como vetores do $\mathbb{R}^n$ são ortonormais.

Vale observar também que

$$M^t M = (a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}) = I_n.$$

Uma matriz quadrada com a propriedade acima é chamada de matriz ortogonal.

Exercício 12.63 *Sejam $A, B \in M_n$ tais que $AB = I_n$. Mostre que $BA = I_n$ e, portanto, $B = A^{-1}$.*

Com base no exercício acima, vemos que se $M \in M_n$ é uma matriz ortogonal então $M^tM = MM^t = I_n$ e, portanto, $M^{-1} = M^t$. Observe que a equação $MM^t = I_n$ nos diz que as linhas da matriz M quando vistas como vetores do $\mathbb{R}^n$ são ortonormais.

Se M é ortogonal então

$$(\det M)^2 = \det M \det M = \det M^t \det M = \det M^tM = \det I_n = 1,$$

isto é, $|\det M| = 1$.

12.9 Operador Autoadjunto

Definição 12.64 *Sejam U um espaço euclidiano e $T \in \mathscr{L}(U)$. Dizemos que T é um operador autoadjunto se $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$ para todo $u, v \in U$.*

Ex. Resolvido 12.65 *Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (ax + by, bx + cy)$. Verifique que T é um operador autoadjunto.*

Resolução: Temos

$$\langle T(x, y), (z, t)\rangle = \langle (ax + by, bx + cy), (z, t)\rangle = axz + byz + bxt + cyt.$$

Por outro lado,

$$\langle (x, y), T(z, t)\rangle = \langle (x, y), (az + bt, bz + ct)\rangle = axz + bxt + byz + cyt.$$

Comparando as expressões vemos que

$$\langle T(x, y), (z, t)\rangle = \langle (x, y), T(z, t)\rangle.$$

□

Note que a matriz do operador do exemplo anterior com relação à base canônica é uma matriz simétrica. Isto, como diz o próximo teorema, não é uma simples coincidência.

Teorema 12.66 *Seja U um espaço euclidiano de dimensão finita. Então, um operador $T \in \mathscr{L}(U)$ é autoadjunto se e somente se a matriz de T com relação a uma base ortonormal de U for simétrica.*

Prova: Sejam $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal e $A = (a_{ij})$ a matriz de T com relação a esta base.

Temos

$$T(u_k) = a_{1k}u_1 + \cdots + a_{nk}u_n, \tag{12.67}$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Tomando o produto interno de 12.67 com $k = i$ com o vetor u_j, obtemos

$$\langle T(u_i), u_j\rangle = a_{1i}\langle u_1, u_j\rangle + \cdots + a_{ni}\langle u_n, u_j\rangle = a_{ji}. \tag{12.68}$$

Por outro lado, tomando o produto interno de u_i com $T(u_j)$ temos

$$\langle u_i, T(u_j)\rangle = a_{1j}\langle u_i, u_1\rangle + \cdots + a_{nj}\langle u_i, u_n\rangle = a_{ij}. \tag{12.69}$$

Suponha que T seja autoadjunto. Queremos mostrar que $a_{ij} = a_{ji}$. Como T é autoadjunto, segue de 12.68 e de 12.69 que $a_{ij} = a_{ji}$.

Reciprocamente, suponha que a matriz (a_{ij}) de T com relação a uma base ortonormal, $u_1, \dots, u_n$ seja simétrica. Devemos mostrar que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle.$$

Note que se

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

e

$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n,$$

então, como o produto interno é linear em cada variável e a base acima é ortonormal, temos

$$\langle T(u), v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\langle T(u_i), u_j\rangle$$

e, analogamente,

$$\langle u, T(v)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i, T(u_j)\rangle.$$

Desta forma, basta mostrar que $\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle$. Como (a_{ij}) é a matriz de T com relação a esta base, temos por 12.68 e 12.69 que

$$\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle,$$

como queríamos. ∎

Teorema 12.70 *Se $T \in \mathscr{L}(U)$ é um operador autoadjunto e se λ e μ são autovalores distintos de T então os autovetores correspondentes são ortogonais.*

Prova: Sejam u e v autovetores correspondentes a λ e μ respectivamente. Temos

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle - \langle u, \mu v\rangle = \langle T(u), v\rangle - \langle u, T(v)\rangle = 0$$

pois T é autoadjunto. Como $\lambda \neq \mu$, segue-se que $\langle u, v\rangle = 0$. ∎

Finalizamos este capítulo com o seguinte resultado que provaremos apenas no caso bidimensional. O caso unidimensional é trivial. Para a prova no caso geral, indicamos a leitura do livro *Álgebra Linear,* de Elon L. Lima, Coleção Matemática Universitária [L].

Teorema 12.71 *Sejam U um espaço euclidiano de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$ um operador autoadjunto. Então existe uma base ortonormal de U formada por autovetores de T. Note que todo operador autoadjunto é diagonalizável.*

Prova do caso bidimensional: Seja u, v uma base ortonormal de U. Sabemos pelo teorema 12.66 que a matriz de T é simétrica, ou seja, da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o polinômio característico de T é da forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2.$$

Como

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

vemos que $p_T(\lambda)$ só apresenta raízes reais. Se $a = c$ e $b = 0$ então $A = aI$ e a própria base u, v serve para provar o teorema.

Agora, se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ então $p_T(\lambda)$ possui duas raízes reais distintas, isto é, T apresenta dois autovalores distintos. Pelo teorema 12.70 os autovetores correspondentes são ortogonais. Basta tomar como base dois autovetores unitários correspondentes a cada um dos autovalores.

∎

12.10 Exercícios

Ex. 12.72 *Verifique, em cada um dos itens abaixo, se a aplicação $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno no espaço vetorial V.*

1. $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ *e* $\langle u, w\rangle = 2x_1x_2 + 4y_1y_2$.
2. $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$ *e* $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
3. $V = M_2$, $A, B \in M_2$ *e* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$, *onde* $\mathrm{tr}(A)$ *é o traço de* A.
4. $V = \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $\langle u, w\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$.
5. $V = \mathbb{R}^4$, $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ *e* $\langle u, w\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$.

Ex. 12.73 *Para cada um dos itens abaixo determinar;*

a) $\langle u, v\rangle$ *b)* $\|u\|$, $\|v\|$ *c) o ângulo entre* u *e* v.

1. $V = \mathbb{R}^3$, *com o produto interno usual,* $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 4, 2)$.
2. $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *com produto interno* $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, $u = p(t) = 1 + t + 4t^2$, $v = q(t) = 2 + 5t^2$.

3. *$V = M_2$, com produto interno $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$,*
   $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 12.74 *Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u,v)$.*

1. *$V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, $u = (1,1,1,1), v = (1,0,2,3)$.*
2. *$V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, $u = 1+t$, $v = \frac{3}{4}t + 3t^2$.*
3. *$V = M_3$, com produto interno $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$,*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex. 12.75 *Verifique se o subconjunto S do espaço com produto interno V é ortogonal.*

1. *$V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual , $S = \{(0,1,1),(1,1,0)\}$.*
2. *$V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, $S = \{t, t^2\}$.*
3. *$V = M_3$, com produto interno $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$,*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ex. 12.76 *Com relação ao exercício anterior, quais conjuntos são ortonormais?*

Ex. 12.77 *Determinar uma base ortonormal para cada um dos subespaços vetoriais W do espaço com produto interno V abaixo, utilizando o processo de Gram-Schmidt.*

1. *$V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual ,*

$$W = [(1,1,0,0),(0,1,2,0),(0,0,3,4)].$$

2. $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *com produto interno* $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$, $W = [1, 1 + t, t^2]$.

3. $V = M_3$, *com produto interno* $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$,

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Ex. 12.78 *Determine* $m \in \mathbb{R}$ *de modo que* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$T(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + mz, -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z)$$

seja uma isometria.

Ex. 12.79 *Determinar uma isometria em* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *cuja matriz em relação à base canônica é* $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ *(onde* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *devem ser determinados).*

Ex. 12.80 *Verifique se* $T : M_2 \to M_2$ *dada por* $T(A) = A^t$, $A \in M_2$, *é uma isometria.*

Ex. 12.81 *Mostre que o conjunto infinito*

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots\}$$

é um conjunto ortogonal no espaço das funções contínuas $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *com relação ao produto interno* $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$.

A partir do conjunto acima encontre um conjunto ortonormal deste espaço. Conclua daí que $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *tem dimensão infinita.*

Referências Bibliográficas

[CDC] Callioli, C. A., Domingues, H. H., Costa, R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações,* 2^a edição, Atual Editora Ltda, 1978.

[L] Lima, E. L., *Álgebra Linear,* Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1995.

Índice Remissivo