

### Exercice 5.4.22

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}$  :

$$1. f(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{x^2} - \cos(x) \right).$$

$$2. g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}.$$

$$3. h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$



### Exercice 1.5.18

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

### Exercice 1.5.19

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

### Exercice 1.5.20

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$  quel que soit  $x \geq -1$ .

### Exercice 1.5.21

Montrer que si  $n \geq 4$ ,  $n^2 \leq 2^n$

### Exercice 1.5.22

Calculer les sommes suivantes

1. 
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k};$$

---



**Exercice 1.5.12**

Soit  $E = \{n/(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$ . Vérifier que  $E$  est borné et déterminer  $\sup E$  et  $\inf E$ .

**Exercice 1.5.13**

Soit  $E = \{n + (-1)^n/n | n \in \mathbb{N}\}$ . Vérifier que  $E$  est borné inférieurement mais pas supérieurement et déterminer  $\inf E$ .

**Exercice 1.5.14**

Montrer que, quels que soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

**Exercice 1.5.15**

Soit  $a < b$ . Montrer que l'inégalité  $|x - a| < |x - b|$  est équivalente à l'inégalité  $x < (a + b)/2$ .

**Exercice 1.5.16**

Vérifier les relations suivantes :

$$\sup \{a, b\} = \frac{(a + b) + |a - b|}{2}, \text{ et } \inf \{a, b\} = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}$$

**Exercice 1.5.17**

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

**Exercice 1.5.18**