Exercice 16.
Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x(x-1)(x-4)$.
2. *cosinus.*

Exercice 17.
A l'aide du développement limité, déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, \quad a > 0.$

Exercice 18.
On considère les fonctions g, h et f définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad h(x) = \exp(1-\cos(x)) \quad et \quad f(x) = \frac{g(x)-h(x)}{x^4}.$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;*
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de h ;*
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de f ;*
4. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ;*
5. *Soit k le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que k est dérivable en 0 et préciser $k'(0)$;*
6. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Ck) de k au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0 ;*
7. *Déterminer le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de h*

(a) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty$.

2. *En utilisant la règle de l'Hospital calculer*

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{\sin 5x}$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^2}{\cos(2x) - 1}$

   (c) $\lim_{x\to 1^+} (x^3 - 1)\ln(2x^2 + x - 3)$.

   (d) $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

Exercice 13.

1. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^6 - x^3 + 4$. Montrer qu' il existe un réel $c \in]0;1[$ tel que $f'(c) = 0$.*
2. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 4$. Montrer qu' il existe un réel $c \in]0;2[$ tel que $f'(c) = 0$.*
3. *On considère deux nombres réels a et b strictement positifs tes que $a < b$*

   (a) *Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.*

   (b) *En déduire l'existence d'un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$.*

   (c) *démontrer que*

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

Exercice 14. *Pour chacune des fonctions suivantes*

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité quand c'est possible.*

1. $f(x) = (x-1)\ln(x-1)$
2. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Exercice 15.

1. *On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$, calculer pour tout entier naturel k la dérivée d'ordre k des fonctions g et k sur leur ensemble de définition respectif.*
2. *On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$, en utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n-ième d'un produit de fonctions, déterminer pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$*