1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une même limite l.

Exercice 8. *Trois suites, (u_n), (v_n), et (w_n) sont définies de la manière suivante sur $\mathbb{N}^*$.*

$$(u_n)\begin{cases} u_1 = 1 \\ n > 1: \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \qquad (v_n)\begin{cases} v_1 = 12 \\ n > 1: \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

$$w : \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n = u_n - v_n.$$

1. *Démontrer que (w_n) est une suite géométrique convergente à termes négatifs ;*
2. *Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes :*
3. *On considère la suite (t_n) définie, pour tout n par*

$$t_n = 3u_n + 8v_n.$$

   Démontrer que t est constante. Est elle convergente ?
4. *Démontrer que u et v ont la même limite. Trouver cette limite.*

Exercice 9.
On considère une suite (U_n) définie sur par : $\mathbb{N}$

$$U_0 = 4 \quad et \quad U_{n+1} = 2U_n - 3.$$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$V_n = U_n - 3.$$

1. *Quelle est la nature de la suite (U_n) ?*
2. *Montrer que la suite (V_n) est géométrique.*
3. *Donner l'expression de (V_n) en fonction de n.*
4. *En déduire l'expression de (U_n). en fonction de n.*
5. *Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).*

Exercice 10.
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \qquad u_0 = 3 \qquad u_1 = 5;$
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 0;$
3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 2.$

Exercice 11. *Etudier la convergence des suites :*
$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{n \sin n}{n^2+1}, \quad \frac{1}{n} + (-1)^n.$

Exercice 12.

1. *En utilisant la définition, montrer que :*

Exercice 1.

Soit $A = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Montrer que $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.

Exercice 2.

Soit E la partie de $\mathbb{R}$ *définie par :* $E = \left\{\frac{2n+1}{n+1};\quad n \in \mathbb{N}\right\}$ *et* $F = \left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}};\quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. *Montrer que E est bornée.*
2. *Déterminer (en justifiant), si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de E.*
3. *Étudier l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de E.*
4. *Déterminez, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de F.*
5. *Étudiez l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de F.*

Exercice 3.

Démontrer que pour tous réels x et y :

a) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

b) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$

Exercice 4. *Soit la suite de terme général* $u_n = \frac{n^3+2}{n^3+n^2+1}$. *Trouver un entier N , tel que, si* $n \geq N$, *on ait* $|u_n - 1| < 10^{-2}$.

Plus généralement, ε *étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N , tel que, si* $n \geq N$, *on ait* $|u_n - 1| < \varepsilon$. *Qu'a-t-on démontré pour la suite* (u_n) *?*

Exercice 5.

En utilisant les définitions, montrer que

1. *la suite de terme général* $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ *converge vers 1,*
2. *la suite de terme général* $w_n = \frac{n}{n^3+1}$ *converge vers 0.*

Exercice 6.

1. *Etudier la monotonie de la suite* (x_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{n^2}{2^n}$.
2. *En déduire le plus grand élément de* $B = \left\{\frac{n^2}{2^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercice 7. *On considère les deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$