Composez une solution rigoureuse de chaque exer[...] qui le précèdent dans le clusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précèdent dans le cours.

Exercice 2.6.1

Pour chacune des suites suivantes, vérifier à partir de la définition de limite que : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

1. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. $a_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{n+1}$.
3. $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 2.6.2

Montrer, à partir de la définition de limite, que

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} = \dfrac{3}{4}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2-100} = \dfrac{1}{2}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{an}{bn+1}\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{an}{bn+1} 2^{n/(n+1)} = 2$

Exercice 2.6.3

Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\lim_{n\to+\infty} a_n|.$$

Exercice 2.6.4

Montrer que si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$, alors $lim_{n\to+\infty} b_n = L$.

Exercice 2.6.5

Pour chacune des suites suivantes, utiliser les règles du calcul des limites pour évaluer

1. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$;
2. $b_n = \sqrt[3]{\dfrac{(-1)^n n}{(-1)^{n+1}n+1}}$;
3. $c_n = \dfrac{(n+5)(n+7)}{n^2+n+35}$.

Exercice 2.6.6

Calculer

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{2}}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ $(a>0)$, $(b>0)$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[k]{n+p}-\sqrt[k]{n}\right)$ $(k,p \in \mathbb{N})$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ (Justifier son calcul).

Exercice 2.6.7

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

Exercice 2.6.8

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n = e^{2/3}$$

Exercice 2.6.9

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Exercice 2.6.10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 2.6.11

Soit

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \end{cases}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 2.6.12

[Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz] Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 2.6.13

Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, on a

1. quels que soient les entiers naturels k et p : $u_{p+k} = u_p + kr$.
2. quels que soient les entiers naturels n et p :
$$\sum_{k=p+1}^{n} u_k = \frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2} n.$$

Exercice 2.6.14

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^3$.

1. Montrer (par récurrence) que cette suite est à termes strictement positifs.
2. Montrer que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire une expression u_n en fonction de n.

Exercice 2.6.15

Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 2u_n + 3$

1. Soit v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 3$.
   (a) Montrer que la suite v est géométrique.
   (b) Pour tout entier n, exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire, pour tout entier n, une expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de la suite u

Exercice 2.6.16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}.$$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 2.6.17

Déterminons le terme général u_n en fonction de n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = -3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_1 = -1, \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = -3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 6u_{n+1} + 9u_n = 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n. \end{cases}$

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1

Calculer la dérivée de $\cos x$ ou point $x = a$.

Exercice 4.4.2

Montrer que la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4.4.3

Montrer que si une fonction est dérivable en a elle est continue en a. Montrer, par un contre-exemple, que la réciproque est fausse

Exercice 4.4.4

Soient α un nombre réel et f et g deux fonctions dérivables au point a. Montrer alors que :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$\text{et} \quad (\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

Exercice 4.4.5

Calculer la fonction dérivée de $\dfrac{\sin x}{x^2+1}$.

Exercice 4.4.6

Soit la fonction $f(x) = e^{x^2 \sin x}$, calculer sa dérivée en tout point où elle existe.

Exercice 4.4.7

Soit la fonction $f(x) = x$ sur $[0, 1]$. Donner la valeur du minimum et du maximum de f sur l'intervalle considéré. La dérivée de f s'annule-t-elle en ces points ? Conclure.

Exercice 4.4.8

Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = f(c)$ $(a < b < c)$. La fonction f'' admet-elle un zéro strictement compris entre a et c ?

Exercice 4.4.9

Soient α, β et γ trois nombres réels, on suppose $\alpha \neq 0$. Soit alors la fonction f définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Soit enfin, $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.
Déterminer $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

Exercice 4.4.10

Soit f une fonction deux fois dérivable sur Ω (intervalle ouvert). Soient $x \in \Omega$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in \Omega$. On définit la fonction $G(t) = f(x+th) + f(x-th)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$.
2. En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h).$$
3. En utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $c \in]x - \theta h, x + \theta h[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 2\theta h f''(c).$$

Exercice 4.4.11 *Accroissements finis généralisés*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.