Exercice 1.
Soit $A = \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
Montrer que $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.

Exercice 2.
Soit E la partie de $\mathbb{R}$ *définie par :* $E = \left\{ \frac{2n+1}{n+1};\quad n \in \mathbb{N} \right\}$ *et* $F = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}};\quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. *Montrer que E est bornée.*
2. *Déterminer (en justifiant), si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de E.*
3. *Étudier l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de E.*
4. *Déterminez, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de F.*
5. *Étudiez l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de F.*

Exercice 3.
Démontrer que pour tous réels x *et* y *:*

a) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

b) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$

Exercice 4. *Soit la suite de terme général* $u_n = \frac{n^3+2}{n^3+n^2+1}$. *Trouver un entier N , tel que, si* $n \geq N$, *on ait* $|u_n - 1| < 10^{-2}$.
Plus généralement, ε *étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N , tel que, si* $n \geq N$, *on ait* $|u_n - 1| < \varepsilon$. *Qu'a-t-on démontré pour la suite* (u_n) *?*

Exercice 5.
En utilisant les définitions, montrer que

1. *la suite de terme général* $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ *converge vers 1,*
2. *la suite de terme général* $w_n = \frac{n}{n^3+1}$ *converge vers 0.*

Exercice 6.

1. *Etudier la monotonie de la suite* (x_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.
2. *En déduire le plus grand élément de* $B = \left\{ \frac{n^2}{2^n};\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercice 7. *On considère les deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une même limite l.

Exercice 8. *Trois suites, (u_n), (v_n), et (w_n) sont définies de la manière suivante sur $\mathbb{N}^*$.*

$$(u_n)\begin{cases} u_1 = 1 \\ n > 1: \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \qquad (v_n)\begin{cases} v_1 = 12 \\ n > 1: \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

$$w : \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n = u_n - v_n.$$

1. *Démontrer que (w_n) est une suite géométrique convergente à termes négatifs ;*
2. *Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes :*
3. *On considère la suite (t_n) définie, pour tout n par*

   $$t_n = 3u_n + 8v_n.$$

   Démontrer que t est constante. Est elle convergente ?
4. *Démontrer que u et v ont la même limite. Trouver cette limite.*

Exercice 9.
On considère une suite (U_n) définie sur par : $\mathbb{N}$

$$U_0 = 4 \quad et \quad U_{n+1} = 2U_n - 3.$$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$V_n = U_n - 3.$$

1. *Quelle est la nature de la suite (U_n) ?*
2. *Montrer que la suite (V_n) est géométrique.*
3. *Donner l'expression de (V_n) en fonction de n.*
4. *En déduire l'expression de (U_n). en fonction de n.*
5. *Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).*

Exercice 10.
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \qquad u_0 = 3 \qquad u_1 = 5;$
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 0;$
3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 2.$

Exercice 11. *Etudier la convergence des suites :*
$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{n \sin n}{n^2+1}, \quad \frac{1}{n} + (-1)^n.$

Exercice 12.

1. *En utilisant la définition, montrer que :*

(a) $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty$.

2. *En utilisant la règle de l'Hospital calculer*

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{\sin 5x}$.

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{(\tan x)^2}{\cos(2x) - 1}$

(c) $\lim_{x \to 1^+} (x^3 - 1) \ln(2x^2 + x - 3)$.

(d) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

Exercice 13.

1. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^6 - x^3 + 4$. *Montrer qu' il existe un réel* $c \in]0; 1[$ *tel que* $f'(c) = 0$.
2. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 4$. *Montrer qu' il existe un réel* $c \in]0; 2[$ *tel que* $f'(c) = 0$.
3. *On considère deux nombres réels* a *et* b *strictement positifs tes que* $a < b$

   (a) *Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.

   (b) *En déduire l'existence d'un nombre réel* $c \in]a; b[$ *tel que* $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b - a)$.

   (c) *démontrer que*

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

Exercice 14. *Pour chacune des fonctions suivantes*

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité quand c'est possible.*

1. $f(x) = (x-1)\ln(x-1)$
2. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Exercice 15.

1. *On pose* $g(x) = e^{2x}$ *et* $h(x) = \frac{1}{1+x}$,
   calculer pour tout entier naturel k *la dérivée d'ordre* k *des fonctions* g *et* k *sur leur ensemble de définition respectif.*
2. *On pose* $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$,
   en utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n-ième d'un produit de fonctions, déterminer pour tout entier naturel n *et pour tout* $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, *la valeur de* $f^{(n)}(x)$

Exercice 16.

Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x(x-1)(x-4)$.
2. *cosinus.*

Exercice 17.

A l'aide du développement limité, déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^{x \ln x}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, \qquad a > 0.$

Exercice 18.

On considère les fonctions g, h et f définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad h(x) = \exp(1-\cos(x)) \quad et \quad f(x) = \frac{g(x)-h(x)}{x^4}.$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;*
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de h ;*
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de f ;*
4. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ;*
5. *Soit k le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que k est dérivable en 0 et préciser $k'(0)$;*
6. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Ck) de k au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0 ;*
7. *Déterminer le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de h*