IUA
ANALYSE 1

ANNÉE ACADÉMIQUE 2023-2024
LICENCE1 GI

EXAMEN PREMIERE SESSION / : DUEÉE 2H

Exercice 1 (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux les affirmations suivantes :

1. L'ensemble $V =]0;1] \cup \{2\}$ est un voisinage de 1. V
2. La partie $X = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$ admet 4 comme majorant. F
3. Le sous ensemble $]-\infty; 1]$ de $\mathbb{R}$ est minoré. F
4. L'ensemble $W =]-10;1] \cup [2;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$
5. Soit $A \subset \mathbb{R}$. $M = \sup(A)$ si et seulement si M est un majorant de A et $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in A \,/\, x \in]M-\epsilon; M]$ V
6. La fonction $|x|$ est derivable en 1. V

Exercice 2 (5 points)

1. En utilisant la définition de la limite montrer que

$$\lim_{n} \frac{n^2-1}{n^2+2n+4} = 1$$

2. Donner l'expression du terme général de la suite récurrente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Exercice 3 (6 points)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ \\ v_n = u_n + \frac{3}{n} \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. Que vient-on de montrer sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 4 (6 points)

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^6 - x^3 + 4$. Montrer qu' il existe un réel $c \in]0; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Étudier la convexité de la fonction suivante : $f : x \mapsto x(x-2)(x-5)$.
3. A l'aide du développement limité, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$$

$(x^2-2x)(x-$

$-5)' ((x^2-2x)) ((x-5))'$