I.U.A
A.C : 2023-2024

ECUE : Algèbre 2
L1 Génie Informatique,

Examen Final
DURÉE : 1 H : 45.

Questions de cours :(10 pts)

1) Donner la définion d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur un corps $\mathbb{K}$.

2) Donner la définition d'une famille libre $E_1 = \{V_1, V_2, V_2\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

3) Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F.

   a) Quand dit-on que f est linéaire ?

   b) Définir $ker(f)$ et $Im(f)$.

   c) On considère l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x+y, x-y)$.

   Déterminer $ker(f)$ et $Im(f)$.

Exercice 1. (05 pts)

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$E_1 = \{(x, y) \text{ tel que } x = -2y\}$$

Donner deux éléments appartenant à E_1 puis en déduire que E_1 est non vide.

Montrer que E_1 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(-2, 1)$ et donner sa dimension.

Exercice 2. (05 pts)

On considère la matrice donnée par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) On appelle polynôme caractéristique le polynôme $P_A(X) = \text{dét}(A - XI_2)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $P_A(X) = X^2 + X - 2$.

2) On appelle valeurs propres de A les racines du polynôme $P_A(X)$.

   Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Bonne chance !