

Devoir surveillé N°1
Durée : 2h00.

Exercice 1.

(5 points)

Soient P et Q deux propositions données comme suit : P : "Les chiens aboient" et Q : "La caravane passe". Dans chacun des cas suivants, traduisez les propositions suivantes à l'aide de connecteur logique et donnez leur négation en langage français explicite.

- 1) Si les chiens aboient, alors la caravane passe.
- 2) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- 3) Il existe un chien qui n'aboie pas alors que la caravane passe.
- 4) Tous les chiens aboient et la caravane ne passe.

Exercice 2.

(5 points)

Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, n^2 \leq 2^n.$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$

Exercice 3.

(2 points)

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Calculer le produit matriciel $A.B$ ou $B.A$ lorsque cela est possible.

Exercice 4.

(8 points)

Calculer le déterminant des matrices suivantes et donner leur inverse lorsque cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2024 \end{pmatrix};$$