Exercice 1.5.3

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 1.5.4

Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$: $a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right)$

Exercice 1.5.5

En utilisant la Propriété 1.1.1 et la complétude de $\mathbb{R}$ pour l'ordre $\leq$, montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède un infimum dans $\mathbb{R}$

Exercice 1.5.6

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que,

1. $\sup\,]a; b[= b$ ct $\inf\,]a; b[= a$.
2. $\sup\, [a; b[= b$ et $\inf\, [a; b[= a = \min\, [a; b[$.

Exercice 1.5.7

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1. $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$ implique $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$.
2. $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ implique $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

2. $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$ et $\sum_{i=1} x_i = \sum_{i=1} y_i$ implique

Exercice 1.5.8

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Exercice 1.5.9

Soit $E = \left\{\frac{p}{q} | p + q = s, p, q \in \mathbb{N}\right\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 1.5.10

Soit $E = \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 1.5.11

Soit $E = \{x | x > 0\}$. Vérifier que E est borné inférieurement mais pas supérieurement et déterminer $\inf E$.