2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

"On pourra considérer la fonction u définie sur $[a, b]$ par

$$u(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) - f(x)."$$

Exercice 4.4.12

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. . On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} A.$$
2. On définit φ sur $[a, b]$ par :
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} A.$$
Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ tel que $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\theta).$$

Exercice 4.4.13

Soit la fonction $f(x) = x^3$. Est-elle strictement croissante ?
A-t-on $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$?

Exercice 4.4.14

Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
Montrer que $f'(x) > 0$ sur le domaine de définition de f. Cette fonction est-elle strictement monotone ? Conclure.

Exercice 4.4.15

Si l'on approche la valeur de sinus 29° par celle de sinus 30°, encadrer l'erreur commise.

Exercice 4.4.16

En reprenant la démonstration de la condition suffisante de la convexité à partir de la dérivée seconde, montrer que si $\forall x \in \Omega$, $f''(x) > 0$, alors la fonction est strictement convexe sur Ω.

Exercice 4.4.17

Soit f une fonction bijective dérivable. On suppose en outre que f^{-1} est dérivable. En utilisant la définition de la fonction réciproque retrouver le résultat :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (\text{avec } y_0 = f(x_0)).$$

Exercice 4.4.18

En utilisant leur dérivée, donner une relation qui relie les fonctions Arc sinus et Arc cosinus.

Exercice 4.4.19

On considère la fonction définie sur $D =]0, \pi[$ par $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$. Définir son application réciproque ainsi que la dérivée de celle-ci.

Exercice 4.4.20

Soit r un réel, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on définira x^r par $x^r = e^{r \ln x}$. Montrer que $f(x) = x^r$ définie de : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, est strictement monotone et que sa réciproque est (le vérifier à l'aide des définitions) :

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{r}{\ln y}}.$$

Calculer sa dérivée.

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1

Montrer par récurrence que :
$\forall k = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{d^k}{dx^k}x^n = n(n-1)\cdots(n+1-k)x^{n-k},$$

En déduire que

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n = n!,$$

puis que

$$\frac{d^k}{dx^k}x^n = 0, \text{ pour } k > n.$$

Exercice 5.4.2

Montrer que la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 n'est autre que la formule des accroissements finis.

Exercice 5.4.3

Montrer que si l'on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à un polynôme de degré n, on obtient la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 5.4.4

Montrer que la formule de Mac-Laurin est une application directe de la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 5.4.5

Donner une approximation de $\ln 2$ en utilisant le développement de Taylor de $f(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre 2, 3, $\cdots$,6 et comparer à sa valeur exacte.

Exercice 5.4.6

Donner, à l'ordre 7, le développement de $\sin x$ et $\cos x$ au point $x = 0$.

Exercice 5.4.7

Donner les développements de Mac-Laurin des fonctions

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$,
2. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;
3. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercice 5.4.8

1. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4. 2. Donner le développement de Taylor-Young de $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
   En déduire la limite de $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ quand x tend vers 0.

Exercice 5.4.9

Montrer que les infiniment petits (au voisinage de 0) $\sin kx$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$) et x sont du même ordre et que les infiniment petits (au voisinage de 0) x^2 et $\sin x$ ne sont pas du même ordre.

Exercice 5.4.10

On suppose que f est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de a et on pose $g(x) = f(a+x)$. Montrer que g est un infiniment petit d'ordre p au voisinage de 0.

Exercice 5.4.11

Soit la fonction $f(x) = x\sin(1/x)$, montrer que c'est un infiniment petit au voisinage de $x = 0$, mais que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^p}$ n'existe pas pour $p \geq 1$. En déduire que l'infiniment petit f n'a pas d'ordre entier non nul.

Exercice 5.4.12

Montrer que si f et g sont deux infiniment petits au voisinage de 0, on a

$$Ordre(f(x)g(x)) = Ordre(f(x)) + Ordre(g(x))$$

et en déduire que si f est d'ordre strictement supérieur à g, alors

$$Ordre\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = Ordre(f(x)) - Ordre(g(x)).$$

Exercice 5.4.13

Soient $f(x) = x$ et $g(x) = -sinx$. Quel est l'ordre des infiniment petits f, g et $f+g$?
Conclusion ?

Exercice 5.4.14

Montrer que si f admet un développement limité à l'ordre n en a, elle y admet un développement à n'importe quel ordre $m < n$.

Exercice 5.4.15

Donner des exemples de développement limité dans lequel la partie régulière du développement est un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre du développement

Exercice 5.4.16

Donner le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 5.4.17

Donner, à l'ordre 2, le développement limité de e^x et $\sin x$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $e^x \sin x$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Taylor.

Exercice 5.4.18

Donner le développement limité à l'ordre 7 de $\sin x$ et $\cos x$. Effectuer la division suivant les puissantes croissantes des deux parties principales pour montrer que le développement limité à l'ordre 7 de $\tan x$ est :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + x^7\epsilon(x).$$

Exercice 5.4.19

Donner le développement limité à l'ordre 5 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ (en utilisant celui de $(1+x)^{-1}$).

Exercice 5.4.20

Donner le développement limité de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ à l'ordre 5. En déduire (par intégration) le développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre 6. Comment calculeriez vous celui de $\arctan x$?

Exercice 5.4.21

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0
2. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f+g) \sim (\lambda + \mu)h$ en 0.
   Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.
4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$.
   Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.
5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f+g) \sim h$ en 0.