Optimum Consultoria

PROBLEMA GERAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Método Simplex de Venttsel

Formulação geral do Problema de Programação Linear

- O problema geral da programação linear necessita determinar os valores de que minimizam a função objetivo linear.

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_1 x_1$$

- Observando o sistema de restrições lineares:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

e das restrições quanto aos sinais das variáveis

$$x_1 \geq 0 \quad onde\ i = 1, \dots, n$$

Formulação geral do Problema de Programação Linear

- A inclusão no sistema de equações apenas das igualdades não limita a formulação do problema, porque as restrições dadas como desigualdades, podem ser reduzidas às igualdades pela introdução de variáveis adicionais.

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$$

Variável de Folga

$$4x_1 + 6x_2 \geq 24$$

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 24$$

Variável de Excesso

Formulação geral do Problema de Programação Linear

Optimum Consultoria

- Além disso, o problema da maximização da função objetivo, pode ser reduzido ao um problema de minimização da função objetivo pela alteração do seu sinal.

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Min } \mathbb{Z} = -80x_1 - 60x_2$$

- Por isso, pode-se falar em problema geral da programação linear.

Portanto, o modelo abaixo pode ser transformado da seguinte forma...

Optimum Consultoria

$$
\begin{aligned}
&FO(x) \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2 \\
&4x_1 + 6x_2 \geq 24 \\
&4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\
&1x_2 \leq 3 \\
&x_i \geq 0 \quad onde\ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\quad \Bigg\} \quad
\begin{aligned}
&FO(x) \rightarrow \text{Min } \mathbb{Z} = -80x_1 - 60x_2 \\
&4x_1 + 6x_2 - x_3 = 24 \\
&4x_1 + 2x_2 + x_4 = 16 \\
&x_2 + x_5 = 3 \\
&x_i \geq 0 \quad onde\ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Resolvendo o modelo de forma gráfica

Optimum Consultoria

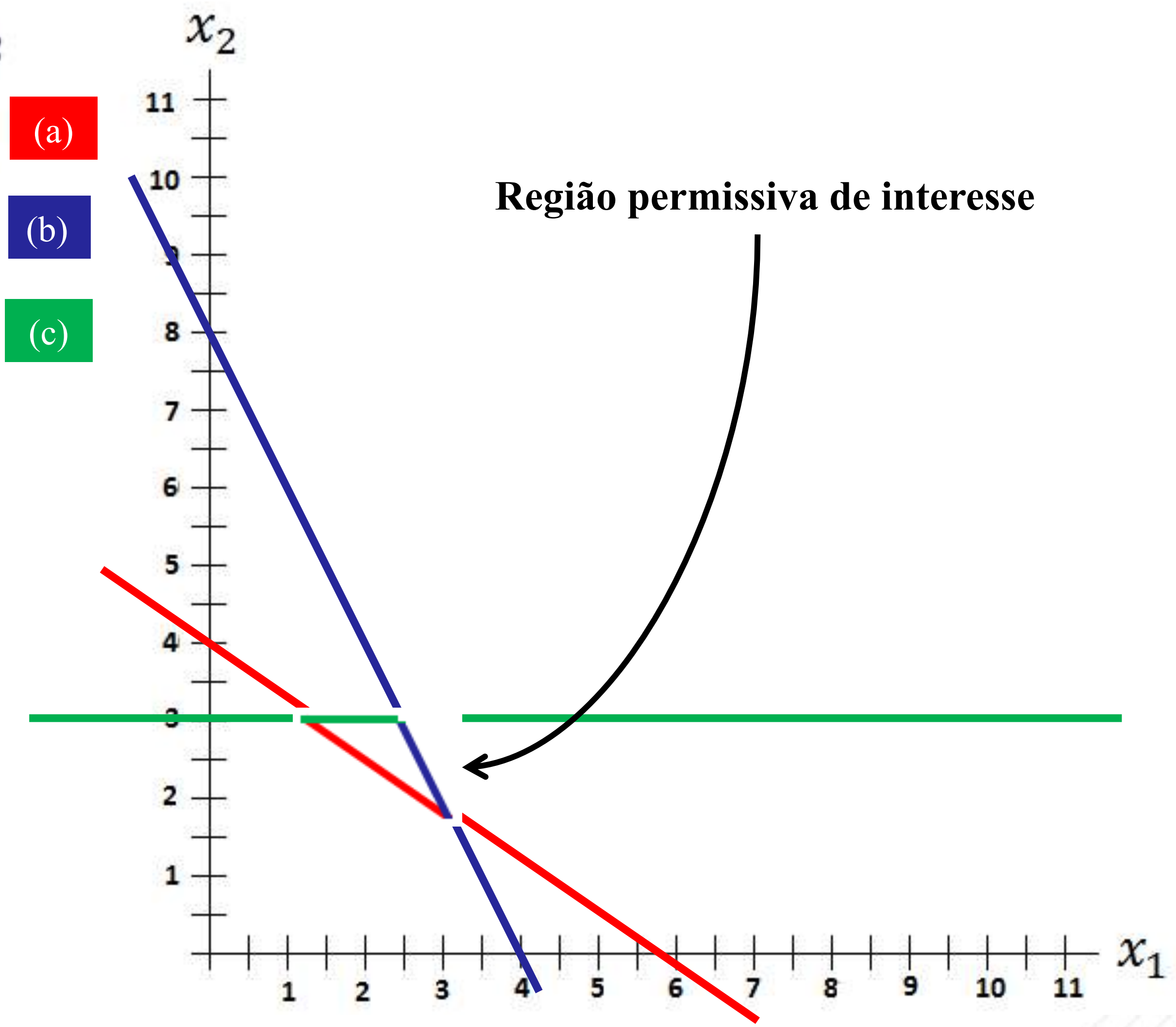
$$FO(x) \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$

$$4x_1 + 6x_2 \geq 24 \quad \text{(a)}$$

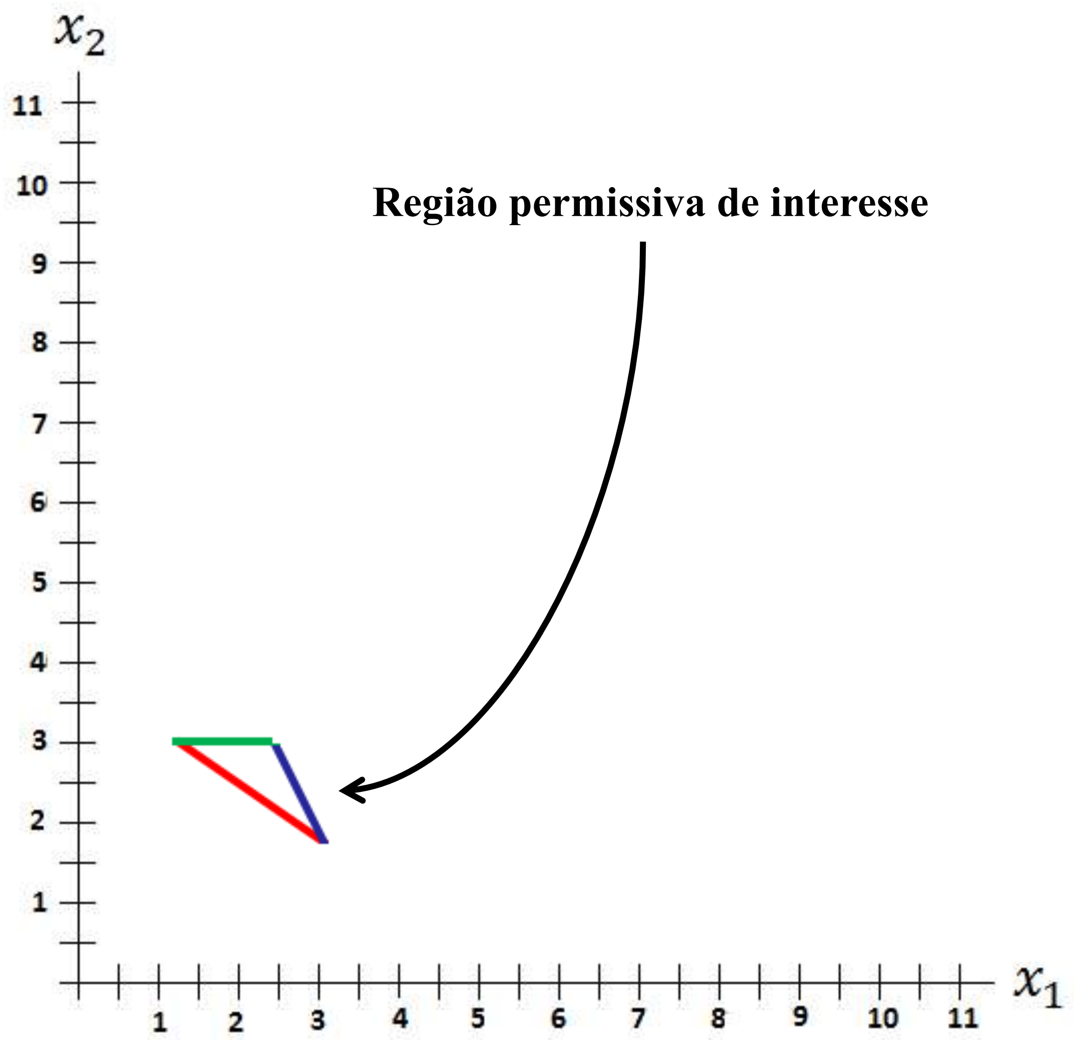
$$4x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad \text{(b)}$$

$$1x_2 \leq 3 \quad \text{(c)}$$

$$x_i \geq 0 \quad onde\ i = 1, \ldots, n$$



Resolvendo o modelo de forma gráfica



Resolvendo o modelo de forma gráfica

Optimum Consultoria

$$FO(x) \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$

$$4x_1 + 6x_2 \geq 24$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$1x_2 \leq 3$$

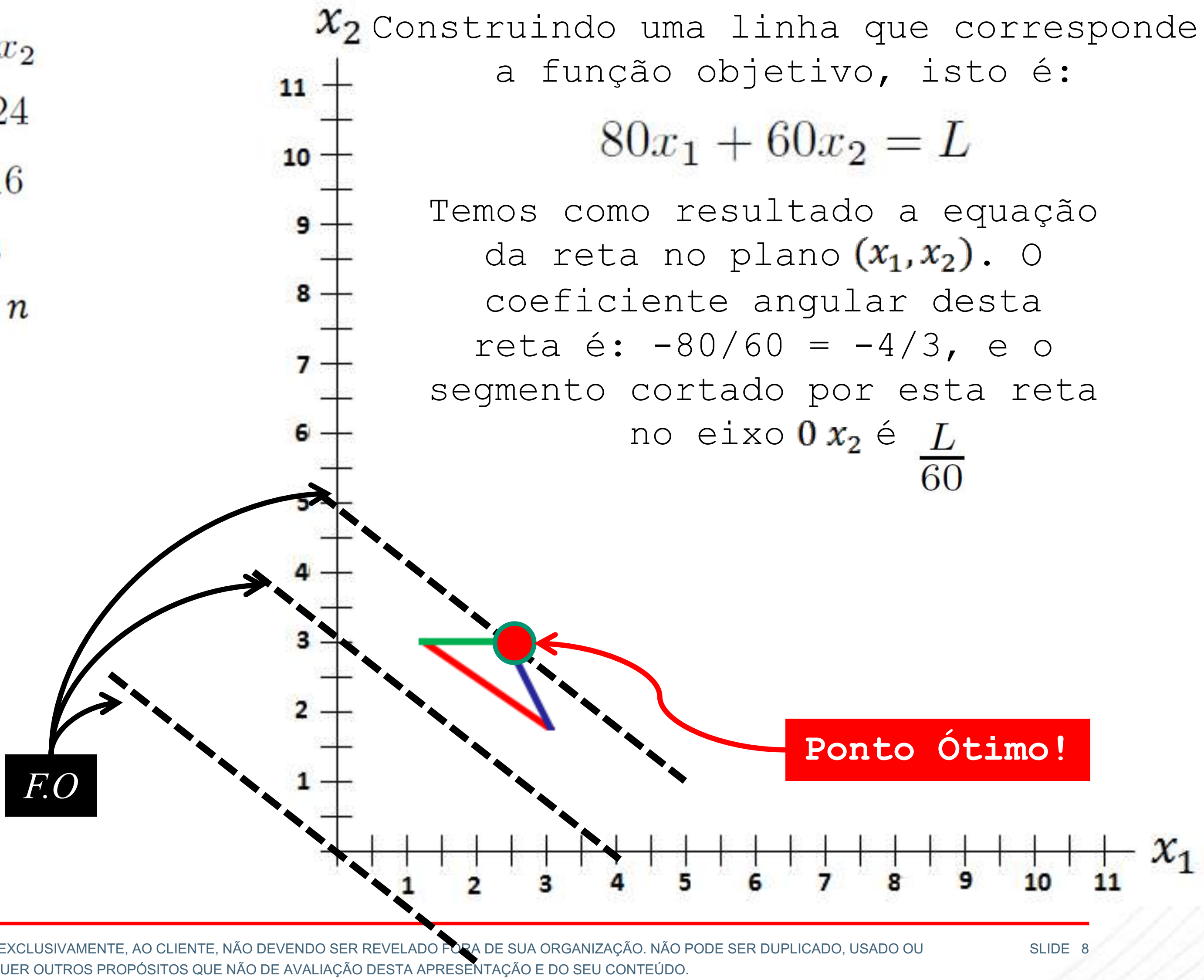
$$x_i \geq 0 \quad onde\ i = 1, \ldots, n$$

É evidente que variando-se a constante de L para L_1 o coeficiente angular não se modifica, variando apenas o segmento que corta o eixo $0\,x_2$

Construindo uma linha que corresponde a função objetivo, isto é:

$$80x_1 + 60x_2 = L$$

Temos como resultado a equação da reta no plano (x_1, x_2). O coeficiente angular desta reta é: -80/60 = -4/3, e o segmento cortado por esta reta no eixo $0\,x_2$ é $\frac{L}{60}$



Construindo a tabela do Método Simplex de Petr Ekel

Optimum Consultoria

- Para montarmos a tabela do Método Simplex, devemos realizar modificações nas equações a fim de facilitar os passos necessários para o funcionamento do algoritmo sem perder o resultado matemático das expressões que compõem o modelo proposto.
- Para isso, deverão ser identificados nas expressões os elementos nos quais denominaremos como "*livres*"

Observe as transformações abaixo:

Optimum Consultoria

para a Função Objetivo:

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2 \quad (-1)$$

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Min } \mathbb{Z} = -80x_1 - 60x_2$$

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Min } \mathbb{Z} = 0 - \underbrace{(+80x_1 + 60x_2)}_{\text{elementos livres}}$$

Observe as transformações abaixo:

Optimum Consultoria

para a primeira restrição:

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 24$$

$$-x_3 = 24 - 4x_1 - 6x_2 \quad (-1)$$

$$x_3 = -24 + 4x_1 + 6x_2$$

$$x_3 = -24 - (\underbrace{-4x_1 - 6x_2}_{\text{elementos livres}})$$

Observe as transformações abaixo:

Optimum Consultoria

para a segunda restrição:

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$$

$$x_4 = 16 - 4x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = 16 - (\underbrace{+4x_1 + 2x_2}_{\text{elementos livres}})$$

Observe as transformações abaixo:

Optimum Consultoria

para a terceira restrição:

$$0x_1 + x_2 + x_5 = 3$$

$$x_5 = 3 - (\quad \underbrace{+x_2}_{\text{elementos livres}} \quad)$$

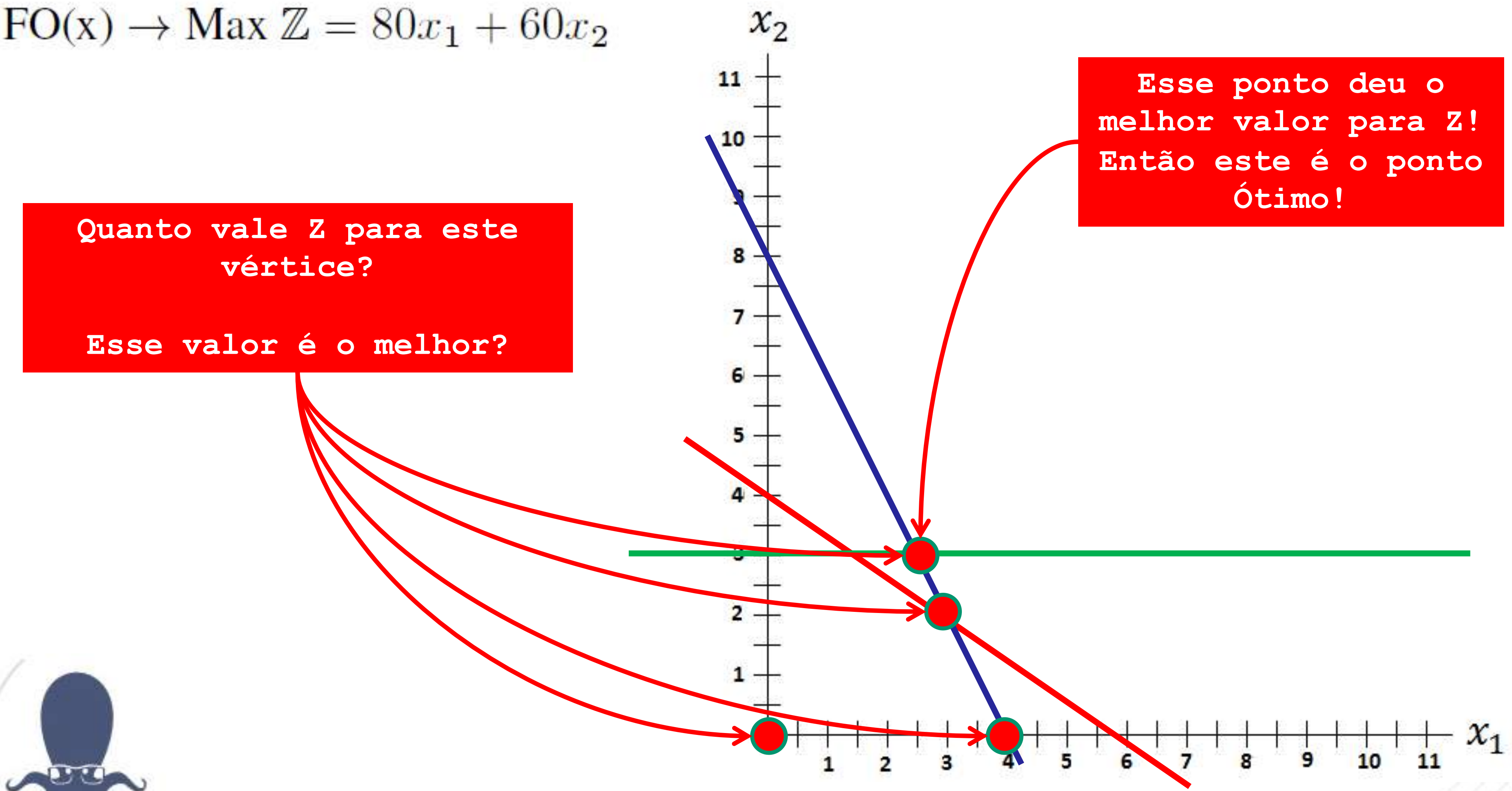
Como o método funciona?

- A idéia do método simplex é suficientemente simples. Basicamente um método de escalada. Assim que se encontra uma solução de vértices, o método examina todos os vértices imediatamente adjacentes e pergunta “e se eu mover para um desses vértices, o valor da Função Objetivo melhorará?" Se a resposta for sim, um novo cálculo é realizado no referido vértice e então novamente ele pergunta se a mudança para o vértice vizinho não melhoraria as coisas ainda mais. Se a resposta for não, o método proclama vitória e para.

Resolvendo o modelo de forma gráfica

Optimum Consultoria

$$FO(x) \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$



Como o método funciona?

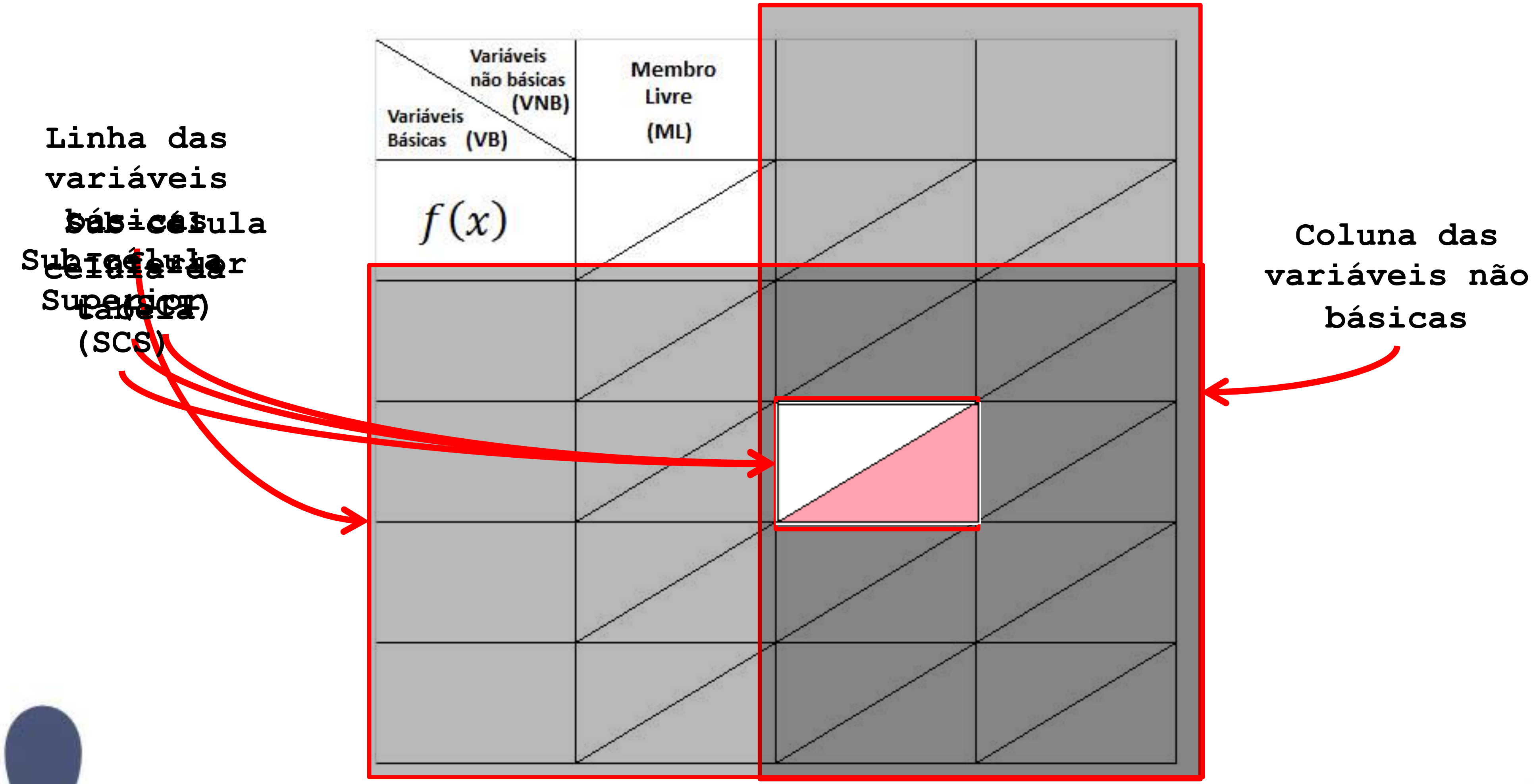
- Portanto, o Método é dividido em duas Etapas e em ambas o Algoritmo de Troca é utilizado a fim de obter a desejada solução.
- Com a ajuda do Algoritmo da Troca das variáveis é possível resolver o qualquer problema da programação linear ou convencer-se, que ele não tem a solução.
- A obtenção da solução do problema da programação linear inclui duas etapas:
  - a) a obtenção da solução permissível;
  - b) a obtenção da solução ótima, que minimiza a função objetiva linear.

Como o método funciona?

- No processo da primeira etapa, pode ser encontrada a situação que a solução permissível não existe.
- No processo da segunda etapa, pode ser encontrada a situação que a função objetivo não é limitada.
- A execução das duas etapas é baseada na utilização do Algoritmo da Troca

Conhecendo a tabela

Optimum Consultoria



Construindo a tabela

Optimum Consultoria

$$\mathbb{Z} = 0 - (+80x_1 + 60x_2)$$

$$x_3 = -24 - (-4x_1 - 6x_2)$$

$$x_4 = 16 - (+4x_1 + 2x_2)$$

$$x_5 = 3 - (+x_2)$$

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16	4	2
x_5	3	0	1

1ª Fase do Método

1. Na tabela padronizada procuramos uma variável básica com membro livre negativo.

   1.1 - **Se** essa variável **existe**, então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.

   1.2 - **Se** essa variável **não existe**, então passamos para a segunda etapa da solução do problema de programação linear.

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16	4	2
x_5	3	0	1

1ª Fase do Método

Optimum Consultoria

2. Na linha que corresponde à variável com membro livre negativo, procuramos o elemento negativo.

2.1 - **Se** o elemento negativo **existe**, então a coluna, onde está esse elemento, é escolhida como permissível.

2.2 - **Se** o elemento negativo **não existe** (todos as SCS >= 0), então a solução permissível não existe.

Coluna Permitida

Variáveis Básicas (VB) \ Variáveis não básicas (VNB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16	4	2
x_5	3	0	1

Neste caso, como há valores negativos nas duas colunas, qualquer uma delas pode ser escolhida

1ª Fase do Método

Optimum Consultoria

3. Busca-se a linha permitida a partir da identificação do Elemento Permitido (EP) que possuir o menor quociente entre os membros livres que representam as variáveis básicas (VB)

$$\frac{-24}{-4}; \frac{16}{4}; \frac{3}{0}$$

Linha Permitida

Coluna Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16	4	2
x_5	3	0	1

Obs.: Somente será identificado como quociente válido aquela fração que possuir numerador e denominador com o mesmo sinal e denominador maior que zero

Fim da 1ª Fase do Método

Optimum Consultoria

4. Executamos os passos do Algoritmo da Troca

Coluna Permitida

Linha Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16	4	2
x_5	3	0	1

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

1. Calcula-se o inverso do Elemento Permitido

$$\text{Se } 4 = \frac{4}{1} \therefore \frac{1}{4}$$

Coluna Permitida

Linha Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16	4 / $\frac{1}{4}$	2
x_5	3	0	1

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

2. Multiplica-se toda a linha pelo EP Inverso

$$16 \times \frac{1}{4} = 4$$

$$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Coluna Permitida

Linha Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80	60
x_3	-24	-4	-6
x_4	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3	0	1

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

Coluna Permitida

3. Multiplica-se toda a coluna pelo - (EP Inverso)

$$80 \times -\left(\frac{1}{4}\right) = -20$$

$$-4 \times -\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$0 \times -\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

Variáveis Básicas (VB) \ Variáveis não básicas (VNB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80 / -20	60
x_3	-24	-4 / 1	-6
x_4	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3	0 / 0	1

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

4. Marcar todas as sub-células superiores (SCS) da Linha Permitida e todas as sub-células Inferiores (SCI) da Coluna Permitida

Coluna Permitida

Linha Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0	80 / -20	60
x_3	-24	-4 / 1	-6
x_4	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3	0 / 0	1

Algoritmo da Troca

5. Nas (SCI) vazias, multiplica-se a (SCS) marcada em sua respectiva coluna com a (SCI) marcada de sua respectiva linha

$$16 \times -20 = -320$$

$$16 \times 1 = 16$$

$$16 \times 0 = 0$$

Coluna Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0 / -320	80 / -20	60
x_3	-24 / 16	-4 / 1	-6
x_4	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3 / 0	0 / 0	1

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

5. Nas (SCI) vazias, multiplica-se a (SCS) marcada em sua respectiva coluna com a (SCI) marcada de sua respectiva linha

$$2 \times -20 = -40$$

$$2 \times 1 = 2$$

$$2 \times 0 = 0$$

Coluna Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0 / -320	80 / -20	60 / -40
x_3	-24 / 16	-4 / 1	-6 / 2
x_4	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3 / 0	0 / 0	1 / 0

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

7. Reescreva a tabela trocando de posição a variável não básica com a variável básica, ambas definidas como "Permitidas na tabela anterior

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_1	x_2
$f(x)$	0 / -320	80 / -20	60 / -40
x_3	-24 / 16	-4 / 1	-6 / 2
x_4	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3 / 0	0 / 0	1 / 0

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		x_2
$f(x)$			
x_3			
x_5			

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

8. Todas as (SCI) da Linha e Coluna Permitida da tabela original deverão ser copiadas para suas respectivas (SCS) da nova tabela

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		x_2
$f(x)$	0 / -320	80 / -20	60 / -40
x_3	-24 / 16	-4 / 1	-6 / 2
	16 / 4	4 / $\frac{1}{4}$	2 / $\frac{1}{2}$
x_5	3 / 0	0 / 0	1 / 0

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_2
$f(x)$			
x_3			
x_1			
x_5			

Algoritmo da Troca

9. Somam-se as (SCI) com as (SCS) das demais células restantes da tabela original e seu resultado deverá ser copiado para sua respectiva (SCS) da nova tabela

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		x_2
$f(x)$	0 / -320	80	60 / -40
x_3	-24 / 16	-4	-6 / 2
	16	4	2
x_5	3 / 0	0	1 / 0

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_2
$f(x)$	-320	-20	20
x_3	-8	1	-4
x_1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_5	3	0	1

$$0 - 320 = -320$$

$$-24 + 16 = -8$$

$$3 + 0 = 3$$

$$60 - 40 = 20$$

$$-6 + 2 = -4$$

$$1 + 0 = 1$$

Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

10. Se após os passos anteriores ainda houver valor negativo na coluna (ML) (exceto na célula da linha que representa a Função Objetivo), o Algoritmo da Troca deverá ser repetido até todos os valores da (ML) estarem positivos

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_2
$f(x)$	-320	-20	20
x_3	-8	1	-4
x_1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_5	3	0	1

Entendendo o resultado parcial

Optimum Consultoria

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_2
$f(x)$	-320	-20	20
x_3	-8	1	-4
x_1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_5	3	0	1

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$

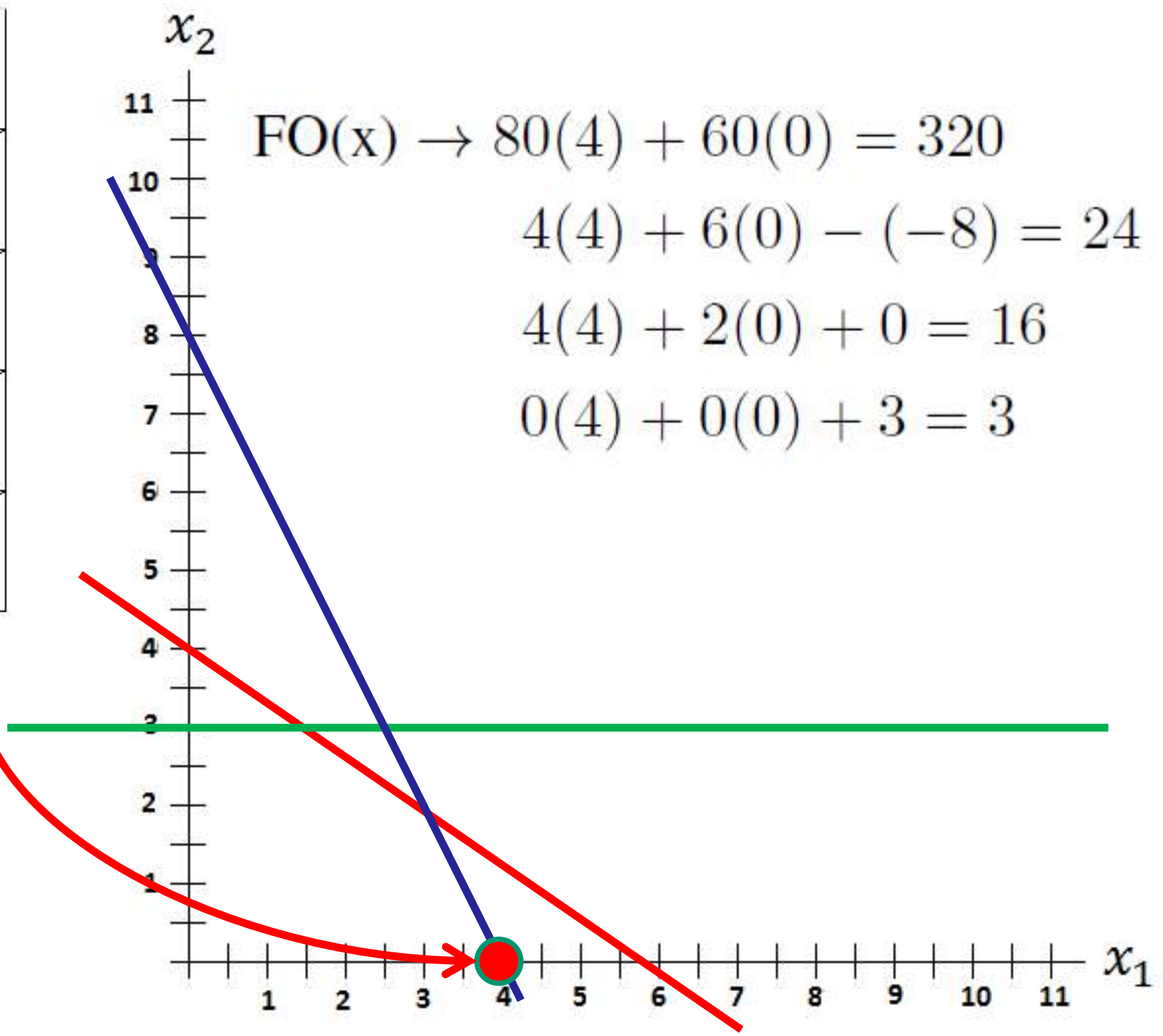
(a) $4x_1 + 6x_2 - x_3 = 24$

(b) $4x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$

(c) $0x_1 + 1x_2 + x_5 = 3$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$\text{FO(x)} \rightarrow 80(4) + 60(0) = 320$$

$$4(4) + 6(0) - (-8) = 24$$

$$4(4) + 2(0) + 0 = 16$$

$$0(4) + 0(0) + 3 = 3$$

Continuando com o Algoritmo da Troca

Optimum Consultoria

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_2
$f(x)$	-320	-20	20
x_3	-8	1	-4
x_1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_5	3	0	1

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_3
$f(x)$	-360	-15	5
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_5	1	0	$\frac{1}{4}$

Do passo 1 ao passo 11

Entendendo o resultado parcial

Optimum Consultoria

Variáveis Básicas (VB) \ Variáveis não básicas (VNB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_3
$f(x)$	-360	-15	5
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_5	1	0	$\frac{1}{4}$

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$

(a) $4x_1 + 6x_2 - x_3 = 24$

(b) $4x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$

(c) $0x_1 + 1x_2 + x_5 = 3$

$x_1 \geq 0$

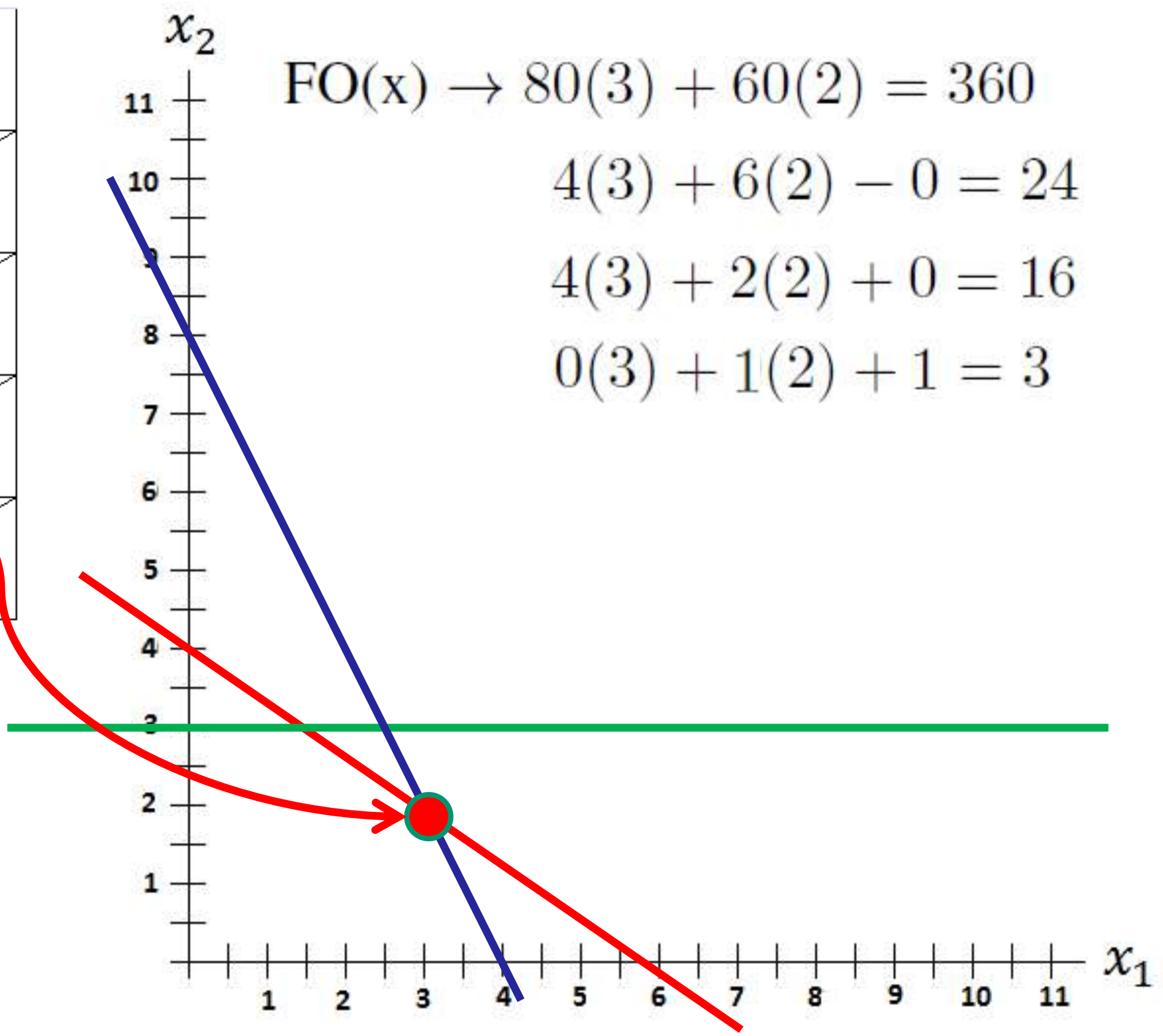
$x_2 \geq 0$

$$\text{FO(x)} \rightarrow 80(3) + 60(2) = 360$$

$$4(3) + 6(2) - 0 = 24$$

$$4(3) + 2(2) + 0 = 16$$

$$0(3) + 1(2) + 1 = 3$$



2ª Fase do Método

Optimum Consultoria

1. Na linha F(x) procuramos um elemento positivo (não consideramos o membro livre).

   1.1 - **Se** o elemento positivo **existe,** então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.

   1.2 - **Se** o elemento positivo **não existe,** então a solução ótima é obtida.

Variáveis Básicas (VB) \ Variáveis não básicas (VNB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_3
$f(x)$	-360	-15	5
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_5	1	0	$\frac{1}{4}$

2ª Fase do Método

Optimum Consultoria

2. Na coluna permitida, correspondente ao elemento positivo escolhido, procuramos o elemento positivo fora da linha F(x).

   2.1 - **Se** o elemento positivo **existe**, então passamos para a operação 3 do presente algoritmo.

   2.2 - **Se** o elemento positivo **não existe** (todos as SCS <= 0), então a solução ótima não existe, ou seja a **Solução é ilimitada**

Coluna Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_3
$f(x)$	-360	-15	5
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_5	1	0	$\frac{1}{4}$

2ª Fase do Método

Optimum Consultoria

3. Busca-se a linha permitida a partir da identificação do Elemento Permitido (EP) que possuir o menor quociente entre os membros livres que representam as variáveis básicas (VB)

$$\cancel{\frac{2}{-\frac{1}{4}}};\ \frac{3}{\frac{1}{8}};\ \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

Coluna Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_3
$f(x)$	-360	-15	5
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_5	1	0	$\frac{1}{4}$

Linha Permitida

Obs.: Somente será identificado como quociente válido aquela fração que possuir numerador e denominador com o mesmo sinal e denominador maior que zero

2ª Fase do Método

Optimum Consultoria

4. Executamos os passos do Algoritmo da Troca

Coluna Permitida

Linha Permitida

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_3
$f(x)$	-360	-15	5
x_2	2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_5	1	0	$\frac{1}{4}$

Entendendo o resultado final

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)	x_4	x_5
$f(x)$	-380	-15	-20
x_2	3	$-\frac{1}{4}$	1
x_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$
x_3	4	0	4

$$\text{FO(x)} \rightarrow \text{Max } \mathbb{Z} = 80x_1 + 60x_2$$

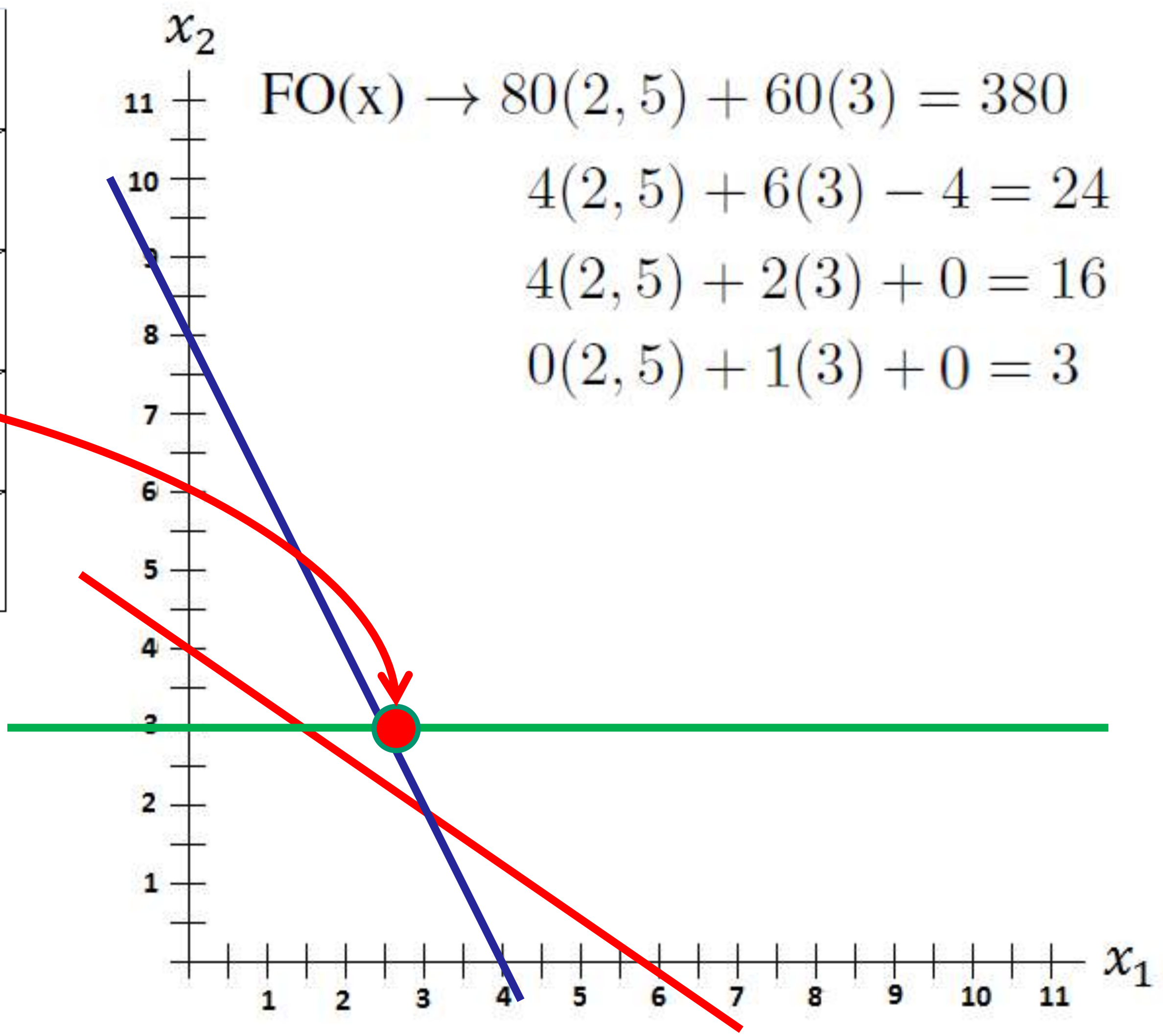
(a) $4x_1 + 6x_2 - x_3 = 24$

(b) $4x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$

(c) $0x_1 + 1x_2 + x_5 = 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



$$\text{FO(x)} \rightarrow 80(2,5) + 60(3) = 380$$

$$4(2,5) + 6(3) - 4 = 24$$

$$4(2,5) + 2(3) + 0 = 16$$

$$0(2,5) + 1(3) + 0 = 3$$

Resumo : Solução Impossível

Optimum Consultoria

1. Na tabela padronizada procuramos uma variável básica com membro livre negativo.
    1. Se essa variável existe, então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.
2. Na linha que corresponde à variável com membro livre negativo, procuramos o elemento negativo.
    1. Se o elemento negativo não existe (todos as partes altas das células >= 0), então a solução permissível não existe.

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		
$f(x)$			
	(-)	(+)	(+)

Resumo : Solução Ótima

Optimum Consultoria

1. Na tabela padronizada procuramos uma variável básica com membro livre negativo.

    1. Se essa variável não existe, então passamos para a segunda etapa da solução do problema de programação linear.

(Segunda Etapa)

1. Na linha F(x) procuramos um elemento positivo (não consideramos o membro livre).

    1. Se o elemento positivo não existe, então a solução ótima é obtida.

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		
$f(x)$		(-)	(-)
	(+)		
	(+)		
	(+)		

Resumo : Múltiplas Soluções

Optimum Consultoria

1. Na tabela padronizada procuramos uma variável básica com membro livre negativo.

   1. Se essa variável não existe, então passamos para a segunda etapa da solução do problema de programação linear.

(Segunda Etapa)

1. Na linha F(x) procuramos um elemento positivo (não consideramos o membro livre).

   1. Se o elemento positivo não existe, então a solução ótima é obtida.

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		
$f(x)$		0	(-)
	(+)		
	(+)		
	(+)		

Resumo : Solução Ilimitada

Optimum Consultoria

1. Na tabela padronizada procuramos uma variável básica com membro livre negativo.
    1. Se essa variável não existe, então passamos para a segunda etapa da solução do problema de programação linear.

(Segunda Etapa)

1. Na linha F(x) procuramos um elemento positivo (não consideramos o membro livre).
    1. Se o elemento positivo existe, então passamos para a operação 2 do presente algoritmo.
1. Na coluna permitida, correspondente ao elemento positivo escolhido, procuramos o elemento positivo fora da linha F(x).
    1. Se o elemento positivo não existe (todos as partes altas das células <= 0), então a solução ótima não existe (Solução Ilimitada)

Variáveis não básicas (VNB) / Variáveis Básicas (VB)	Membro Livre (ML)		
$f(x)$		(+)	
	(+)	(-)	
	(+)	(-)	
	(+)	(-)	

Referências

Optimum Consultoria

- Venttsel' E. S. Issledovanie operatsiy [Operation research]. — Moscow : Sovetskoe radio, 1972. — 552 p. [in Russian]