Processamento Digital de Imagens

Profa. Flávia Magalhães

PUC Minas

Unidade IV - Parte 2 - Filtragem no Domínio da Frequência

Por que utilizar uma transformada?

- A representação de um sinal no domínio do tempo (do espaço, ...) está presente, naturalmente, no nosso dia a dia.
- Certas operações tornam-se muito mais simples e esclarecedoras se trabalharmos no domínio da freqüência, domínio este, conseguido a partir das **Transformadas de Fourier (TF)**.

Importante:

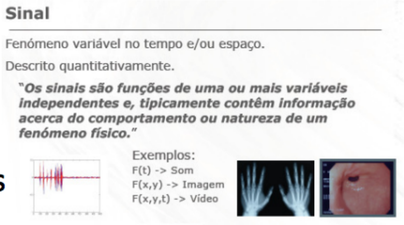
- Funções periódicas são representadas por séries de Fourier;
- Funções não-periódicas são representadas por transformadas de Fourier (espectro do sinal);
- Uma representação de f(x) é uma decomposição em componentes que também são funções;
  - As componentes dessa decomposição são as funções trigonométricas sen(x) e cos(x).

Importante:

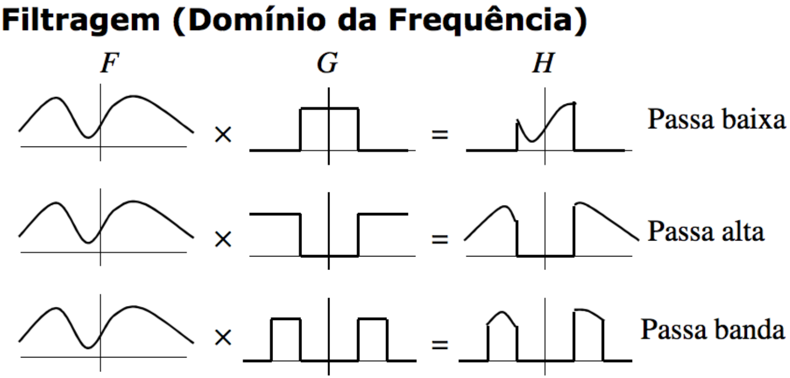
Onde aplicar a Transformada de Fourier?

Aplicações da Transformada de Fourier

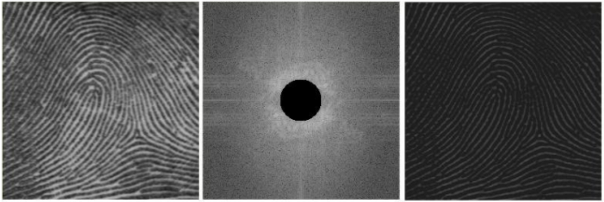
- Física
- Química
- Teoria dos números
- Análise combinatória
- **Processamento de sinais**
- Teoria das probabilidades
- Estatística
- Criptografia
- e outras áreas.



- **Subáreas de aplicação da TF:**
  - Descrição
  - Filtragem
  - Segmentação
  - Compressão
  - Reconstrução
  - Reconhecimento de padrões

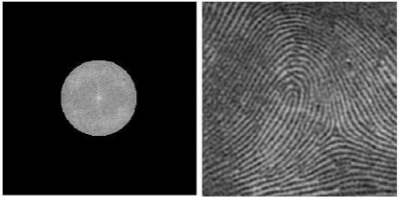

Filtragem (Domínio da Frequência)
F
G
H
×
=
Passa baixa
Passa alta
Passa banda

Filtragem Passa-Alta:



(a) (b) (c)

Filtragem Passa-Baixa:



Transformada Discreta de Fourier e sua Inversa

- É mais natural, especialmente em duas dimensões, usar x e y para variáveis de coordenadas de imagem e u e v para variáveis de frequência, onde se entende que elas sejam números naturais (correspondentes ao índice da amostra na sequência). Assim a Transformada de Fourier Discreta unidimensional e sua inversa são:

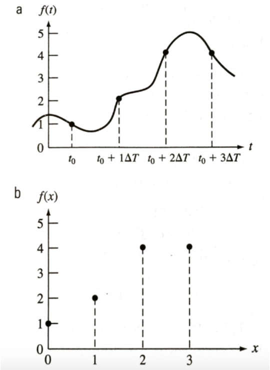
$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}, \; u = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u)\, e^{\frac{j2\pi ux}{M}}, \; x = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

- Tanto a DFT quanto a IDFT são infinitamente periódicas, com período de M amostras.

Mecânica do cálculo da DFT

Na figura abaixo, (a) mostra 4 amostras de uma função contínua $f(t)$, obtidas em intervalos ΔT e (b) mostra os valores de amostragem no domínio discreto x. Observe que os valores de x são 0, 1, 2 e 3 (inteiros), indicando que poderíamos nos referir a quaisquer amostras de $f(t)$.



Mecânica do cálculo da DFT

De:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-j2\pi ux}{M}},\ u = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

Calculamos:

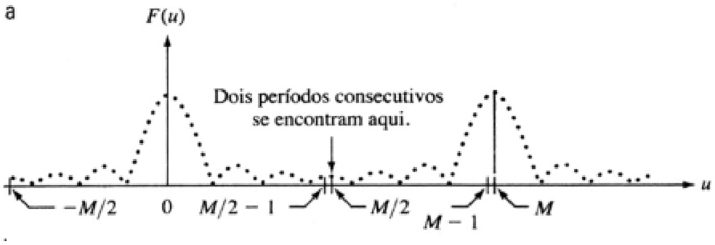
$$F(0) = \sum_{x=0}^{3} f(x) = [f(0)+f(1)+f(2)+f(3)] = 1+2+4+4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{\frac{-j2\pi(1)x}{4}} = 1e^{0}+2e^{-j\pi/2}+4e^{-j\pi}+4e^{-j3\pi/2} = -3+2j$$

e de forma similar, calculamos $F(2)$ e $F(3)$.

Periodicidade da DFT

A transformada de Fourier discreta (DFT) e sua inversa (IDFT) são infinitamente periódicas no domínio da frequência e do tempo, respectivamente.



Os dados da transformada no intervalo de 0 a M-1 consistem de 2 "meios períodos" consecutivos, se encontrando no ponto $M/2$.

Transformada de Fourier Bidimensional: Imagem

- O coeficiente de F(0,0): denota a intensidade média da imagem.
- Coeficientes de baixos índices (freqüências): componentes da imagem que variam pouco.
- Coeficientes de alta freqüência: associados a variações bruscas de intensidade.

A Transformada Discreta de Fourier 2D e sua inversa

Da DFT unidimensional:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}, \; u = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

Resulta a DFT bidimensional:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$u = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

$$v = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$x = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

$$y = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

E então:

$$F(0,0) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(x,y)$$

observa-se que o termo de frequência zero é proporcional ao valor médio de $f(x,y)$:

$$F(0,0) = MN|\overline{f}(x,y)|$$

Como a constante de proporcionalidade MN costuma ser grande, normalmente $|F(0,0)|$ é o maior componente do espectro, por um fator que pode ser várias ordens de magnitude maior que os outros termos.

Como os componentes de frequência u e v são zero na origem, $F(0,0)$ é chamado de *componente dc* da transformada.

Filtragem no Domínio da Frequência

Apresentaremos os fundamentos para as técnicas de filtragem no domínio da frequência. Lembrando...

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-j2\pi ux}{M}},\ u = 0, 1, 2, \cdots, M-1$$

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

Características adicionais do domínio da frequência

- Cada termo de $F(u, v)$ contém informação de todos os termos de $f(x, y)$. Portanto, costuma não ser possível fazer associações diretas entre componentes específicos de uma imagem e sua transformada.
- As técnicas de filtragem no domínio da frequência baseiam-se na modificação da TF da imagem para atingir um objetivo específico e calcular a DFT inversa para retornar ao domínio da imagem.

Fundamentos da filtragem no domínio da frequência

- A filtragem no domínio da frequência consiste em modificar a Transformada de Fourier (TF) de uma imagem $f(x, y)$ e depois calcular a inversa para obter o resultado processado $g(x, y)$

$$g(x, y) = \Im^{-1}[H(u, v)F(u, v)] \quad (1)$$

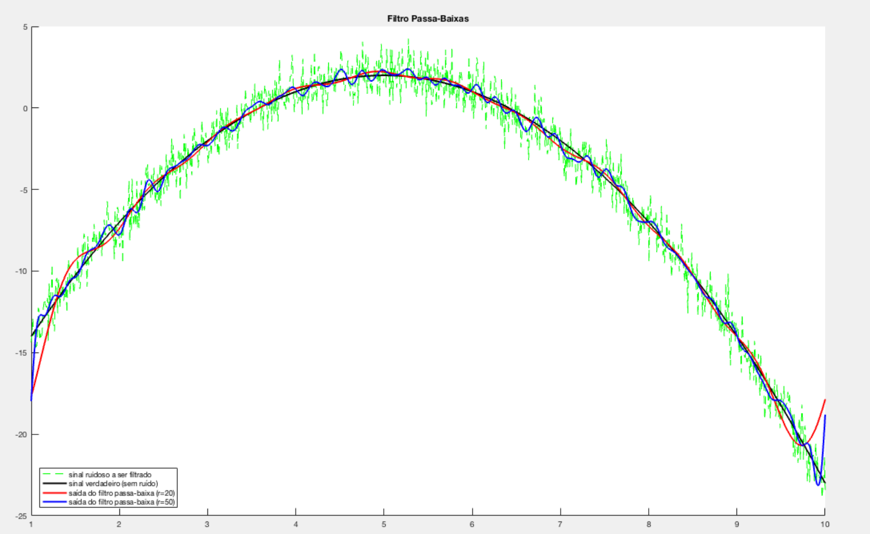
em que $\Im^{-1}$ é a IDFT, $F(u, v)$ é a DFT da imagem de entrada $f(x, y)$ e $H(u, v)$ é a função de transferência do Filtro (ou simplesmente, Filtro).

- As funções F, H e g são arranjos matriciais de mesmo tamanho da imagem de entrada.
- O produto $H(u, v)F(u, v)$ é feito utilizando-se a multiplicação de arranjos matriciais, ou seja, componente a componente.

Filtragem no domínio da Frequência Usando o MATLAB

Ver função do 'Matlab Frequency_Filtering.m'

Filtragem no domínio da Frequência Usando o MATLAB - FPB



Filtragem no domínio da Frequência Usando o MATLAB - FPA