

Unidade VI:

Árvores Alvinegras

Prof. Max do Val Machado



PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Curso de Ciência da Computação

Introdução

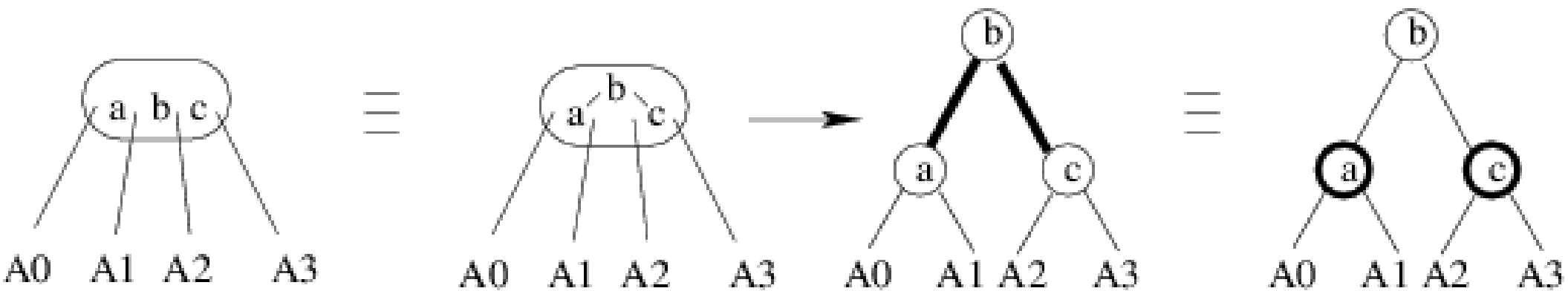
- Estrutura de dados mais eficiente de representar as árvores-2.3.4, evitando o desperdício de memória
- Substitui a representação múltipla de nós por uma representação única contendo os atributos: elemento, apontadores esq e dir e um bit de cor

- Simula a hierarquia 2.3.4, colorindo as ligações entre os nós de duas formas:
 - Se os elementos de dois nós pertencem ao mesmo nó da 2.3.4 (elementos gêmeos), ele será preto (traço grosso)
 - Se eles estiverem em nós diferentes da árvore inicial, ele será branco (traço fino)

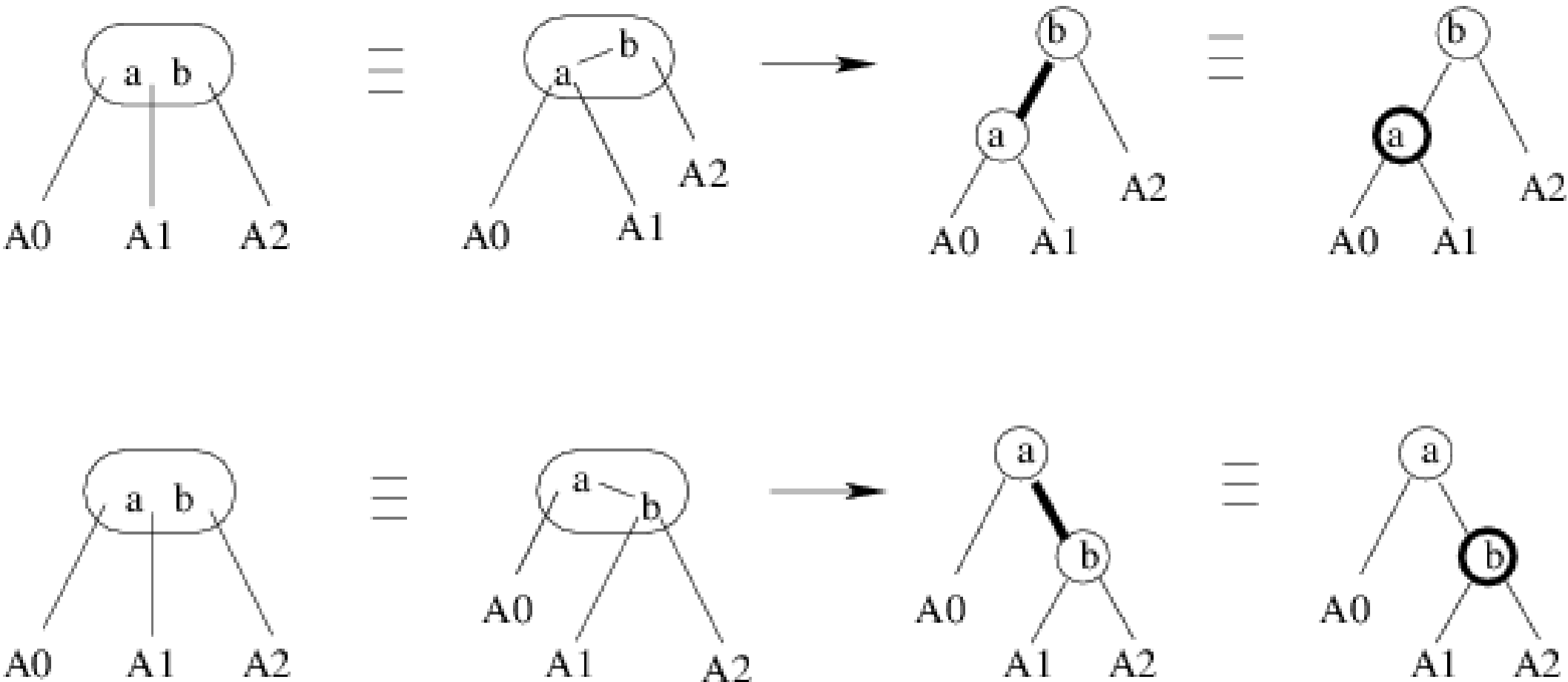
Introdução

- Na verdade, colorimos os nós em vez das arestas
- A atribuição de cores é feita de forma que cada nó tem a cor da ligação que aponta para ele
- Assim, um nó será preto se, e somente se, seu elemento for gêmeo ao de seu pai

Exemplo de 4-nó

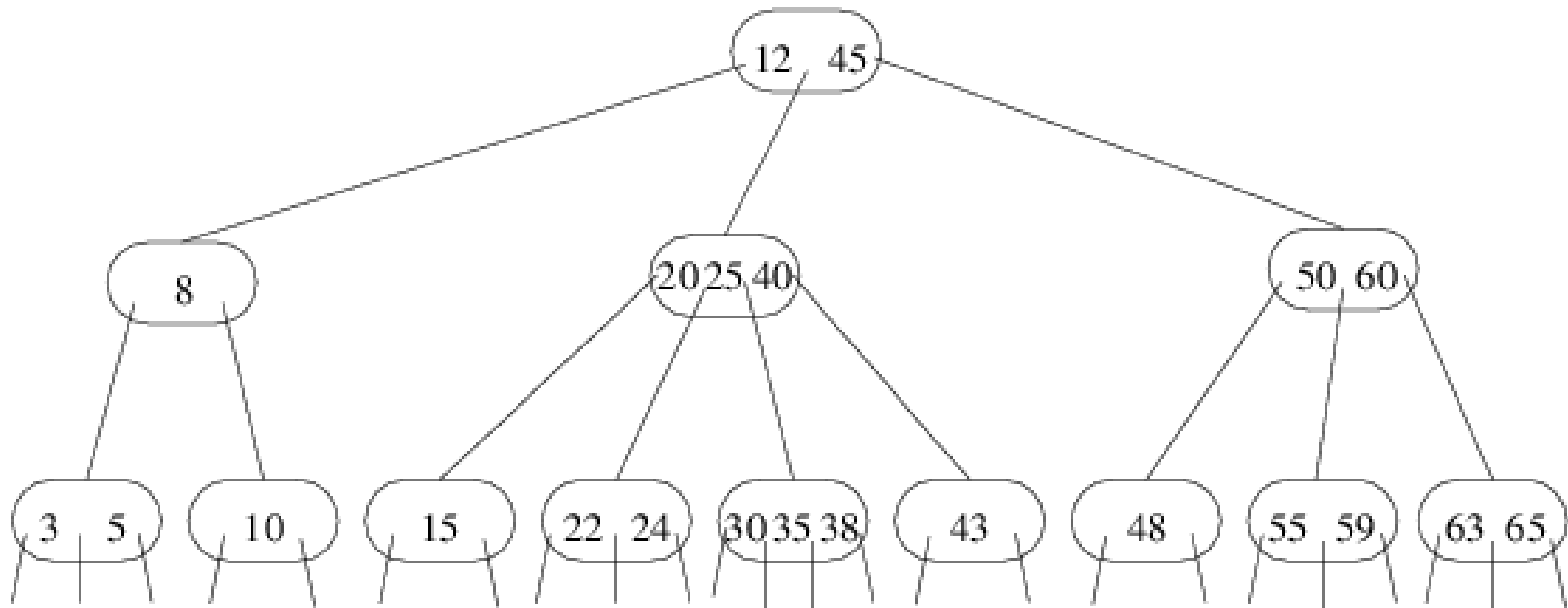


Os Dois Exemplos de 3-nó

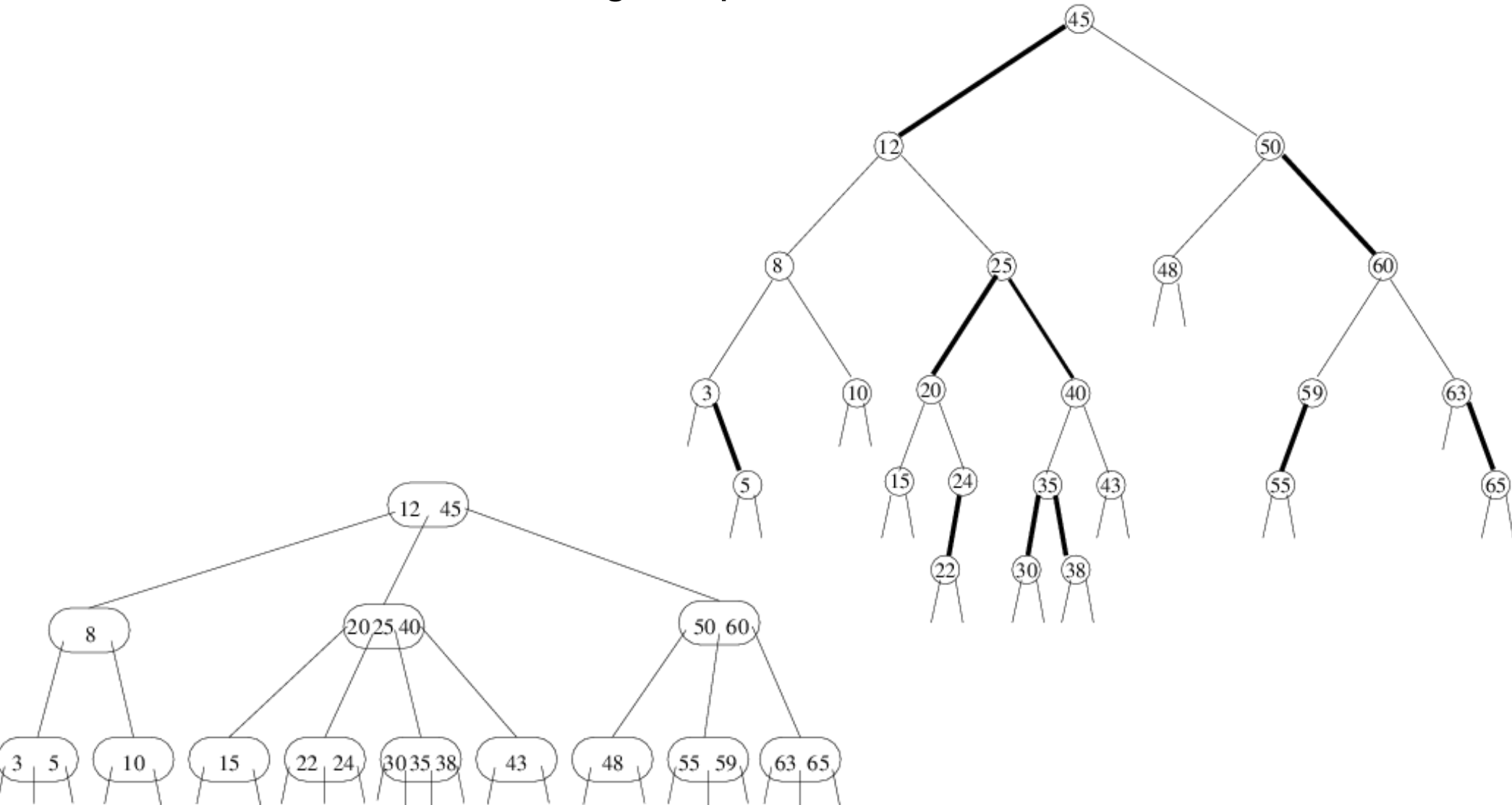


Exercício

- Encontre uma árvore alvinegra equivalente à 2.3.4 abaixo:



- Encontre uma árvore alvinegra equivalente à 2.3.4 abaixo:



Exercício

- Dada uma 2.3.4 qualquer com altura h , qual é a altura máxima da alvinegra correspondente?
- Dada uma 2.3.4 qualquer com altura h , qual é a altura mínima da alvinegra correspondente?

- Dada uma 2.3.4 qualquer com altura h , qual é a altura máxima da alvinegra correspondente?

- Resposta: Quando todos os nós da 2.3.4 são 4 ou 3-nó, temos $2h$

- Dada uma 2.3.4 qualquer com altura h , qual é a altura mínima da alvinegra correspondente?

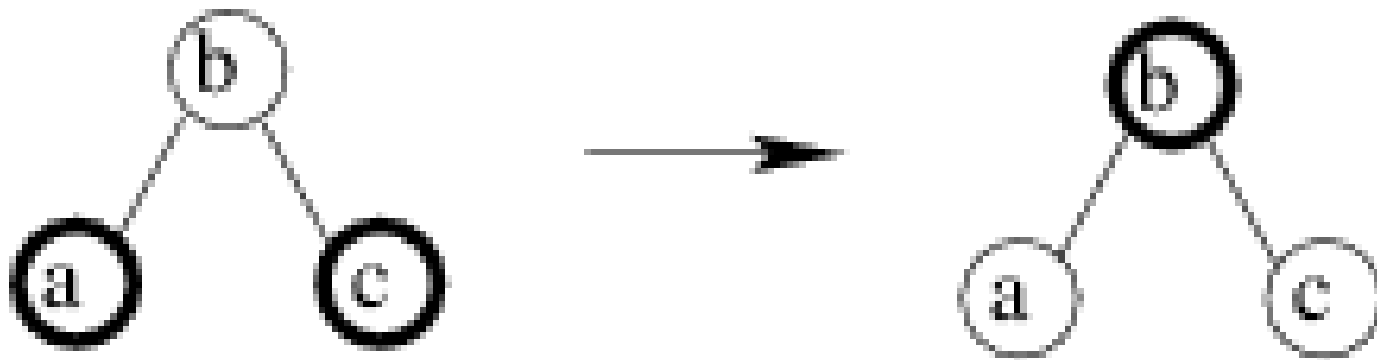
- Resposta: Quando todos os nós da 2.3.4 são 2-nó, temos h

- Qual é o número máximo de ligações pretas consecutivas?
- Qual é a relação entre as arestas da 2.3.4 com as brancas da alvinegra

- Qual é o número máximo de ligações pretas consecutivas?
 - Resposta: Não existem ligações pretas consecutivas
- Qual é a relação entre as arestas da 2.3.4 com as brancas da alvinegra
 - Resposta: As brancas da alvinegra são exatamente as arestas da 2.3.4

- Desconsidera as cores e utiliza o mesmo procedimento das árvores binárias
- No pior caso, tem-se $\Theta(\lg n)$ comparações

- Pode ser feita simulando a inserção com fragmentação na descida em uma 2.3.4
- Ideia básica: Fragmentar um 4-nó é o mesmo que inverter as cores dos elementos gêmeos desse nó



- Algum efeito colateral?

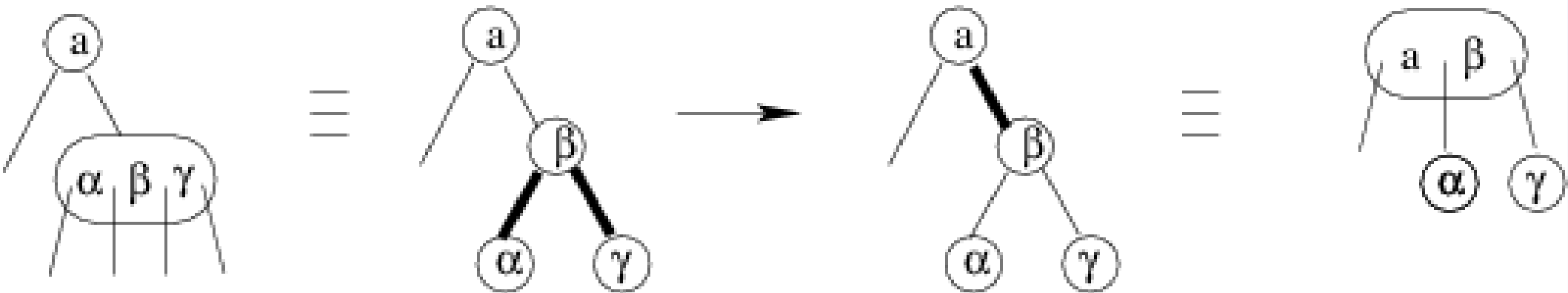
- Efeito colateral de inverter as cores dos elementos gêmeos: pode-se criar nós pretos consecutivos

- Efeito colateral de inverter as cores dos elementos gêmeos: pode-se criar nós pretos consecutivos

E agora José?

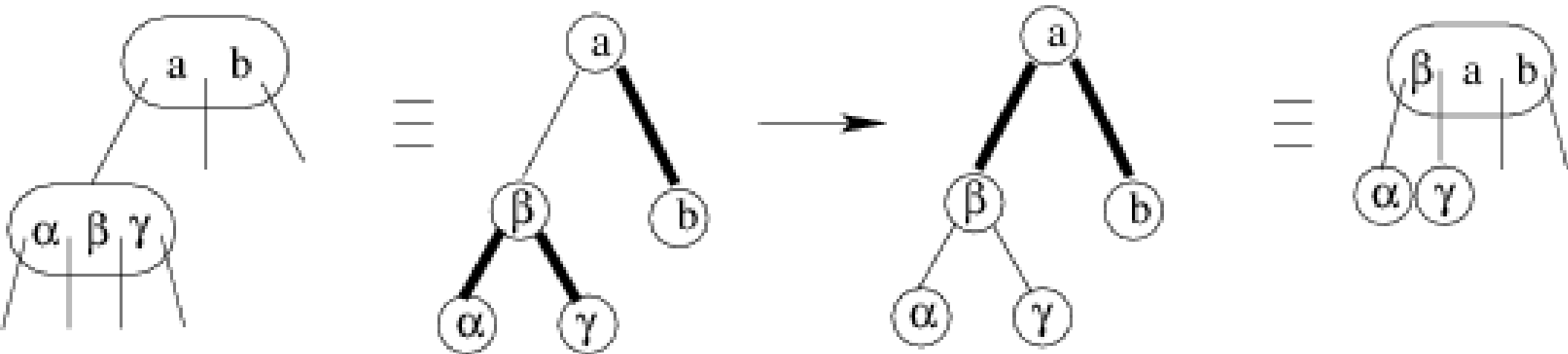
Inserção

- Pode-se inverter as cores de um 4-nó se seu pai for um 2-nó



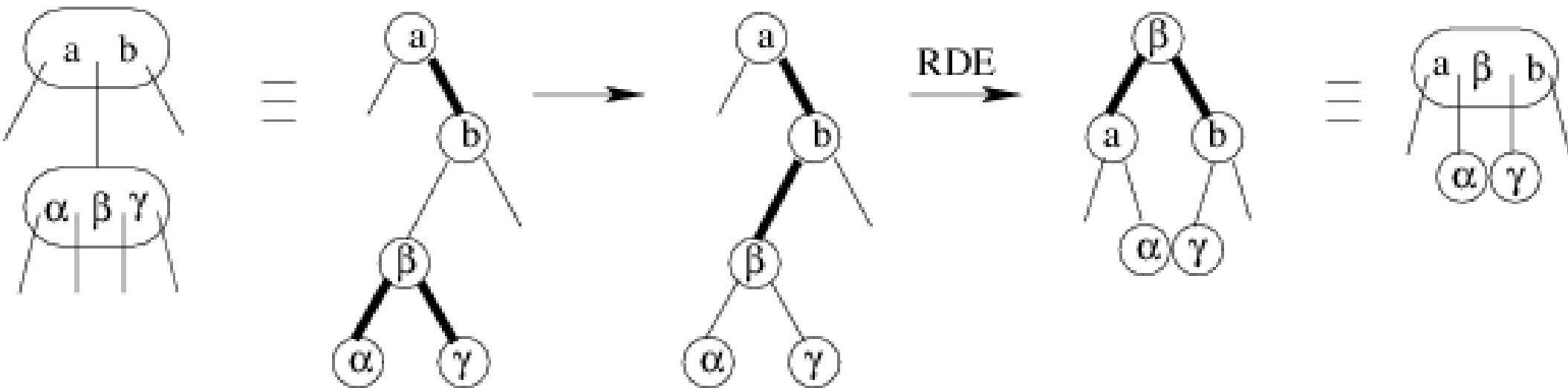
Inserção

- Pode-se inverter as cores de um 4-nó se ele for o filho à esquerda de um 3-nó



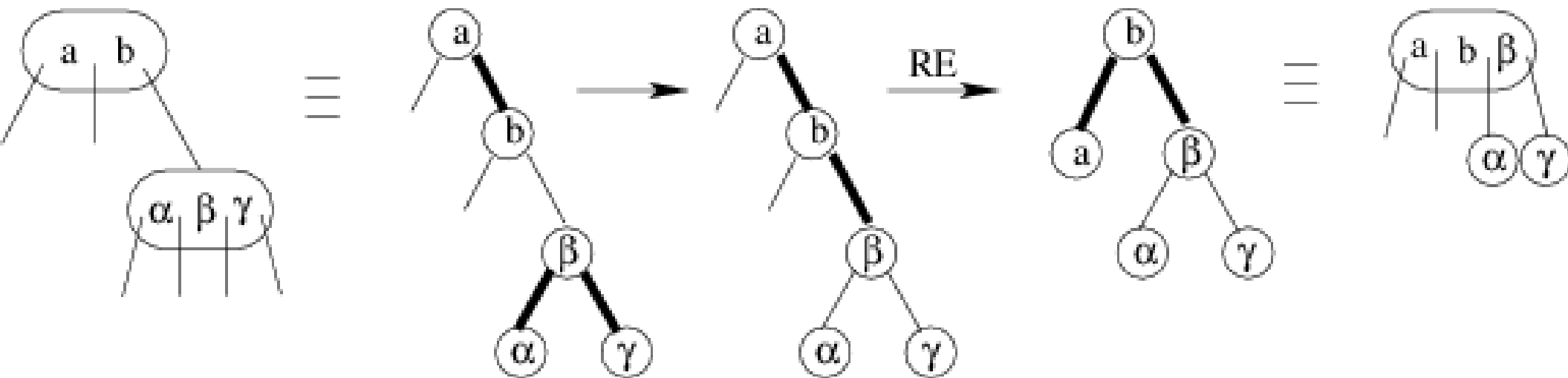
Inserção

- Se o 4-nó for o filho do centro de um 3-nó, deve-se fazer a inversão de cores e uma rotação direita (pai) – esquerda (avô)



Inserção

- Se o 4-nó for o filho à direita de um 3-nó, deve-se fazer a inversão de cores e uma rotação à esquerda (avô)



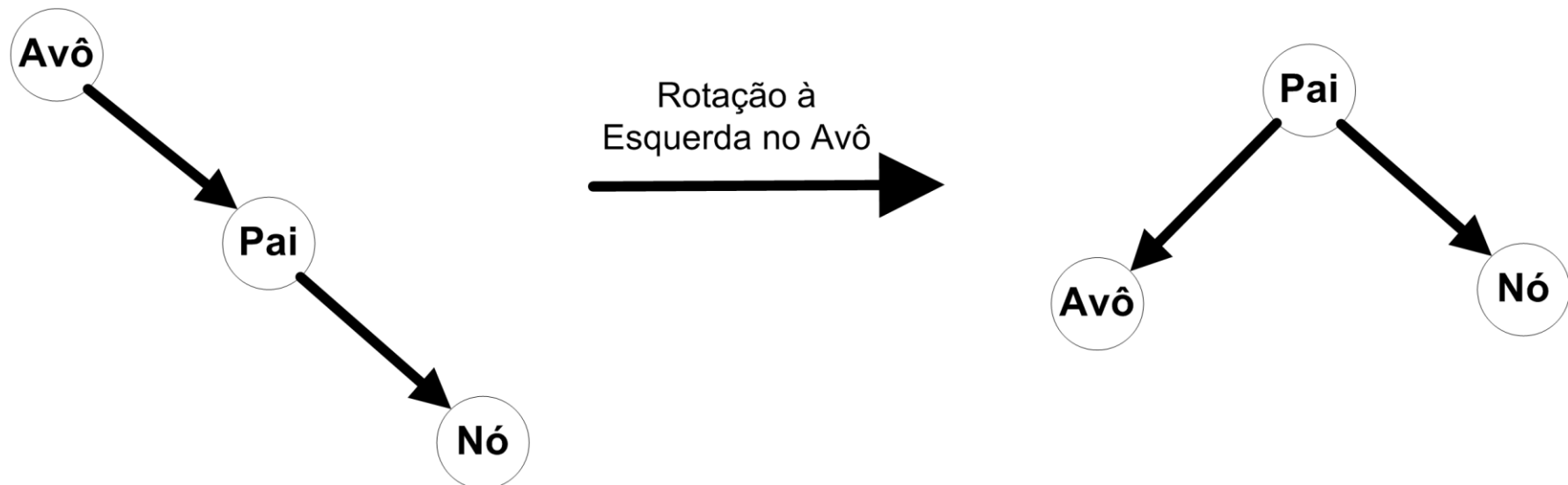
- Como um 4-nó nunca será filho de outro 4-nó, descarta-se esse caso

Ideia Básica da Inserção

- Consiste em procurar a folha em que o novo elemento será inserido
- Nessa procura, quando um nó tiver dois filhos pretos (ele é um 4-nó na 2.3.4), inverte-se as cores desse nó e de seus filhos, exceto para o nó raiz que continuará branco porque ele não tem pai para ser gêmeo
- Após a inversão de cores, se o pai do nó também for preto, rotacionamos o avô considerando o alinhamento entre avô, pai e nó

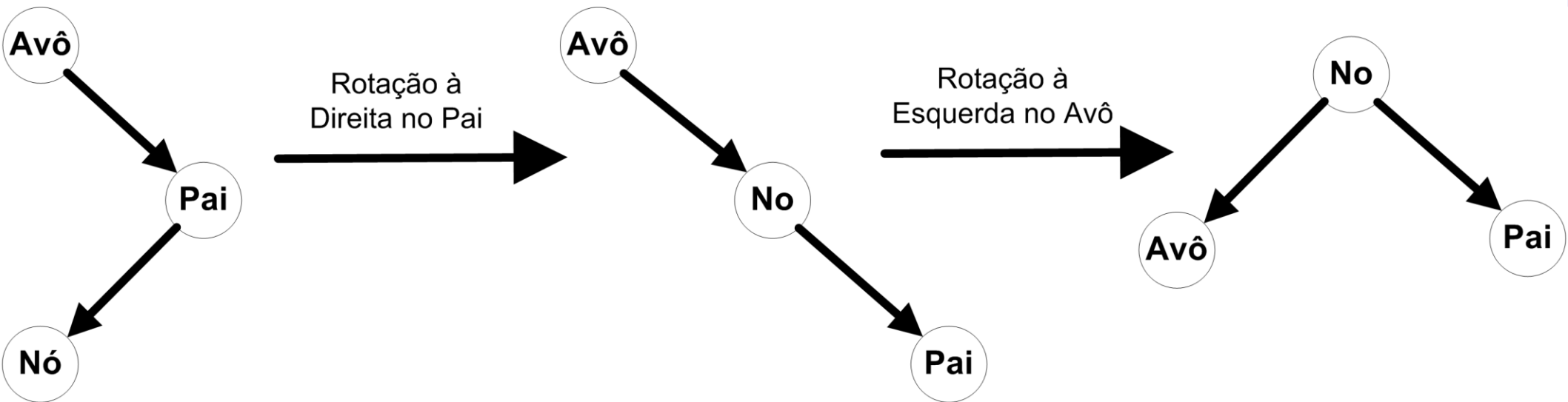
Ideia Básica da Inserção

- Se $avô < pai$ **and** $pai < nó$, rotação à esquerda($avô$)



Ideia Básica da Inserção

- Se $avô < pai$ and $pai > nó$, rotação direita(pai) - esquerda(avô)



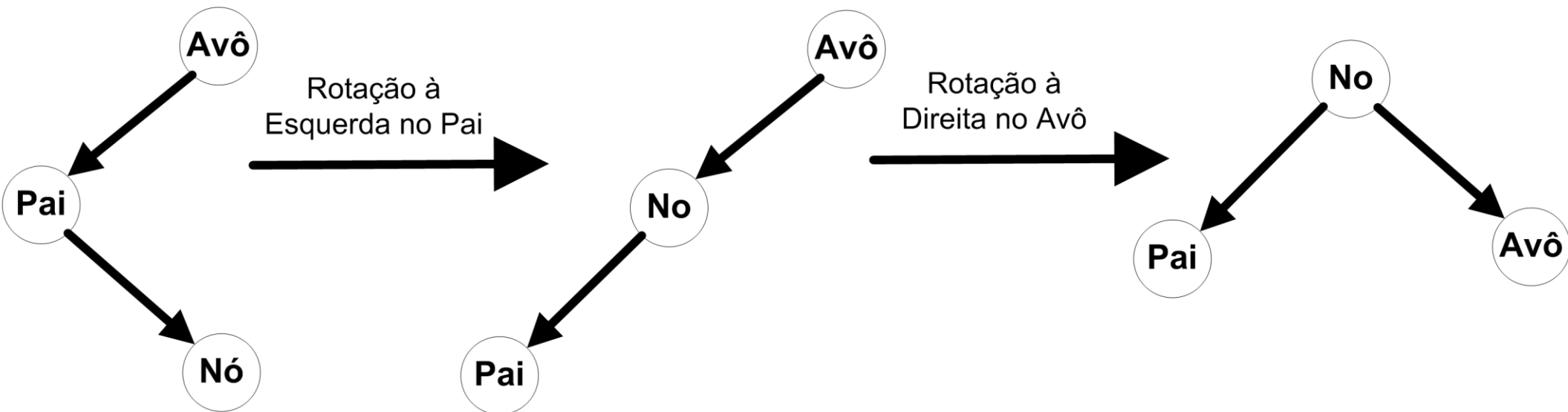
Ideia Básica da Inserção

- Se $avô > pai$ **and** $pai > nó$, rotação à direita(avô)



Ideia Básica da Inserção

- Se $avô > pai$ **and** $pai < nó$, rotação esquerda(pai) - direita(avô)



Ideia Básica da Inserção

- Continuar a descida até chegar em uma folha
- A inserção sempre acontece em uma folha que ficará preta porque o novo elemento é gêmeo (na 2.3.4) do pai e do irmão (se esse existir)
- Se o pai da folha também for preto, rotaciona-se o avô

Exemplo de Inserção

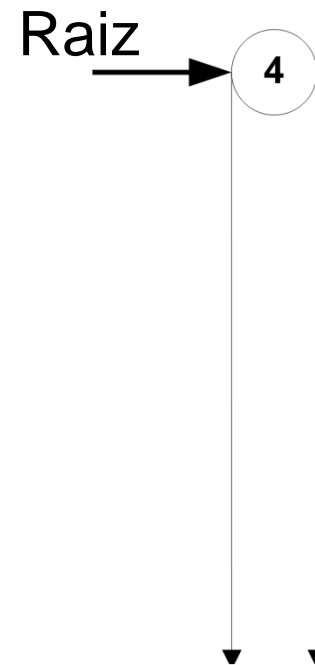
- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente

Exemplo de Inserção

- Inserindo o 4

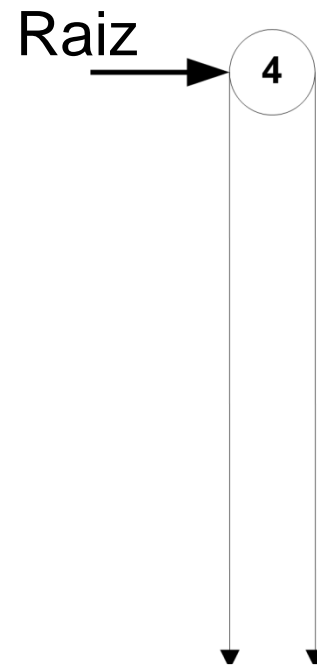
Exemplo de Inserção

- Inserido 4 que será branco pois é o da ``raiz``



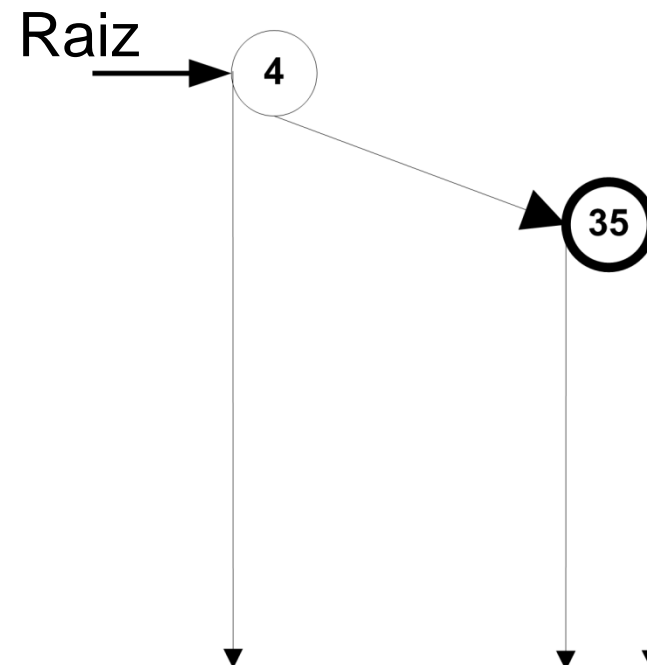
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 35



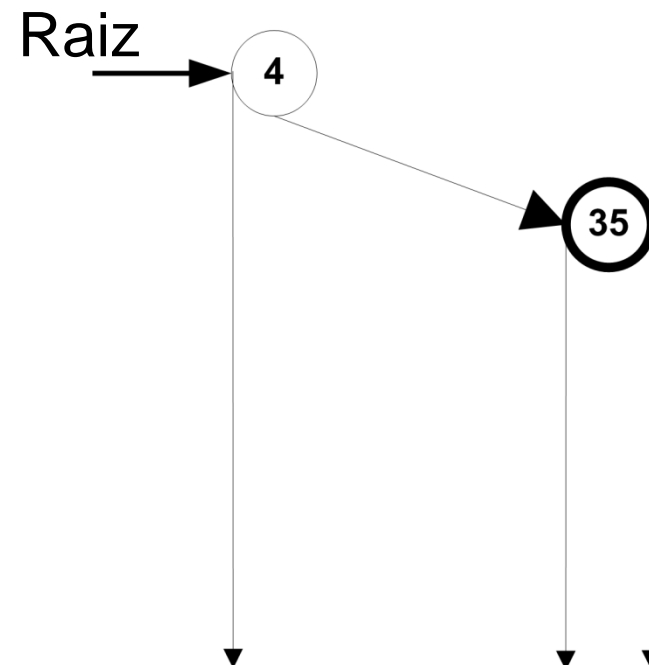
Exemplo de Inserção

- Inserido o 35 (que será preto como todas as folhas)



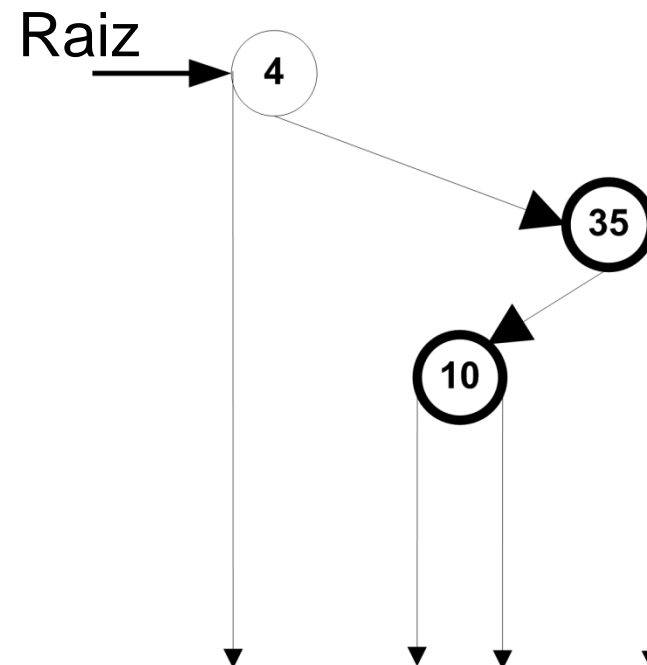
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 10



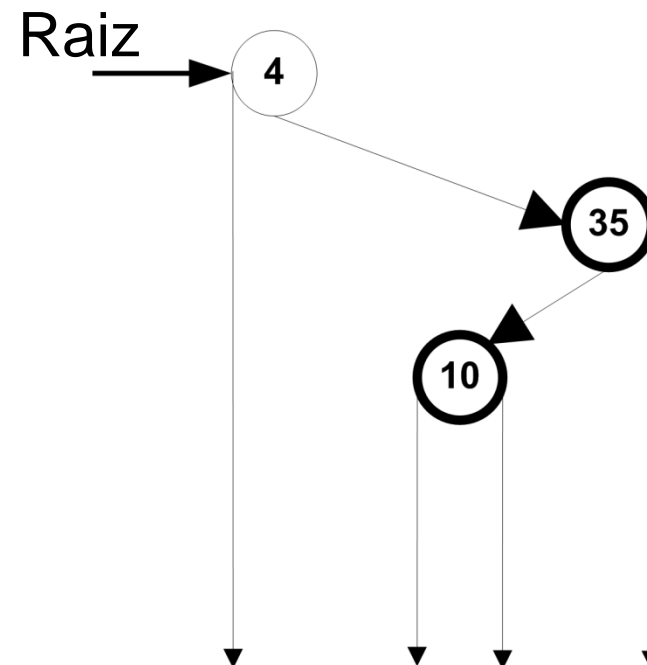
Exemplo de Inserção

- Inserido o 10



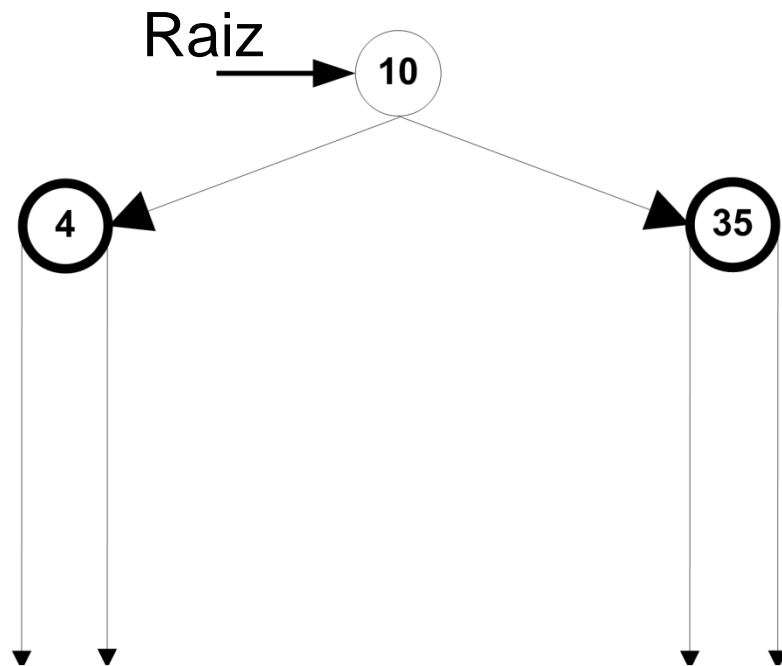
Exemplo de Inserção

- Rotação Direita - Esquerda no 4



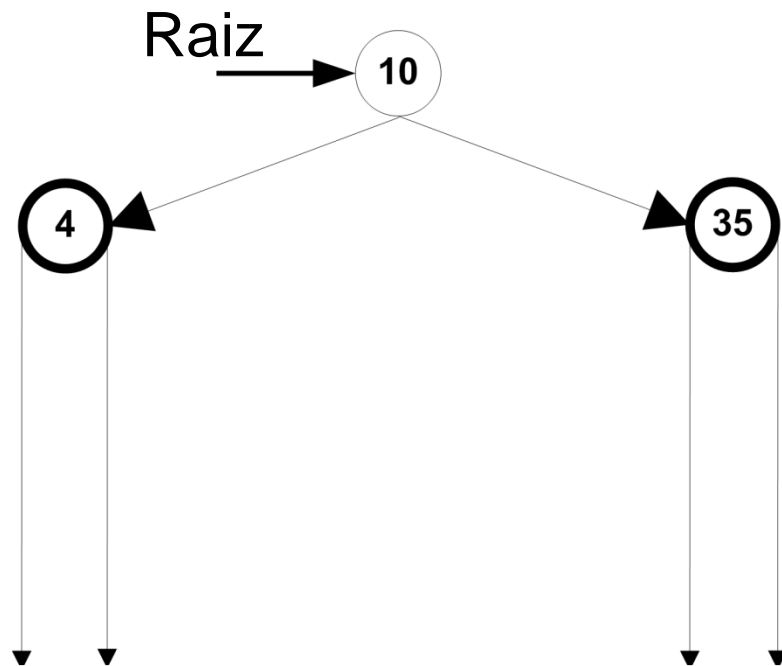
Exemplo de Inserção

- Efetuada a Rotação Direita - Esquerda no 4



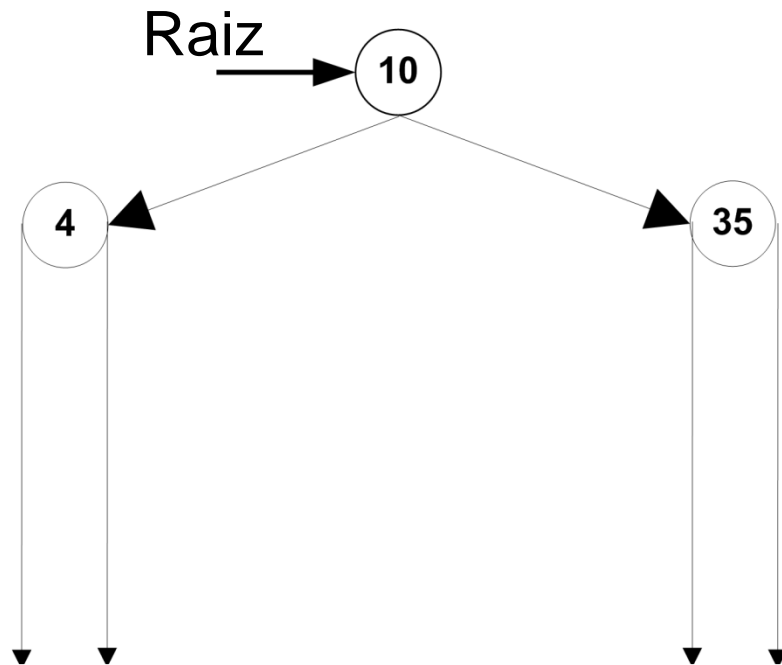
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 13



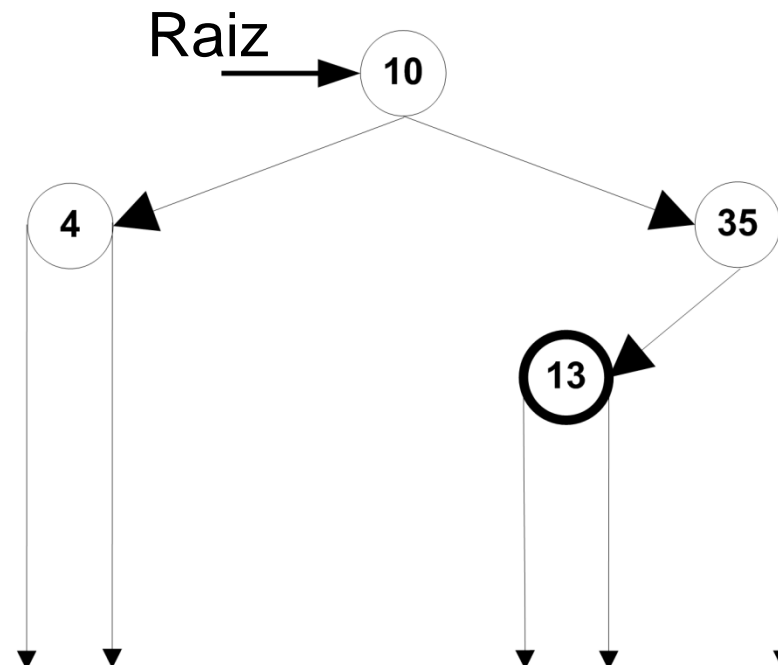
Exemplo de Inserção

- Antes de inserir o 13, como o 10 tem dois filhos pretos, invertamos as cores do 4, 10 e 35 (10 continua branco porque é raiz)



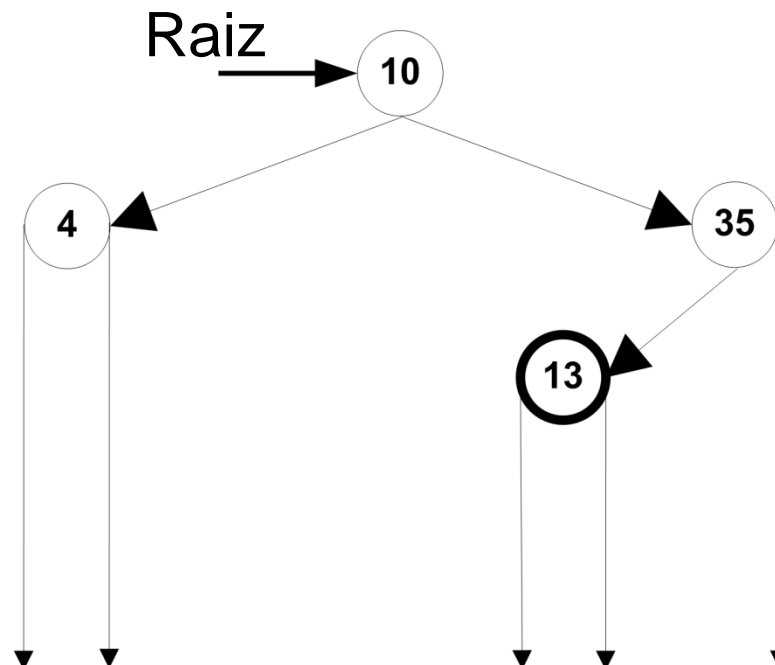
Exemplo de Inserção

- Inserido o 13



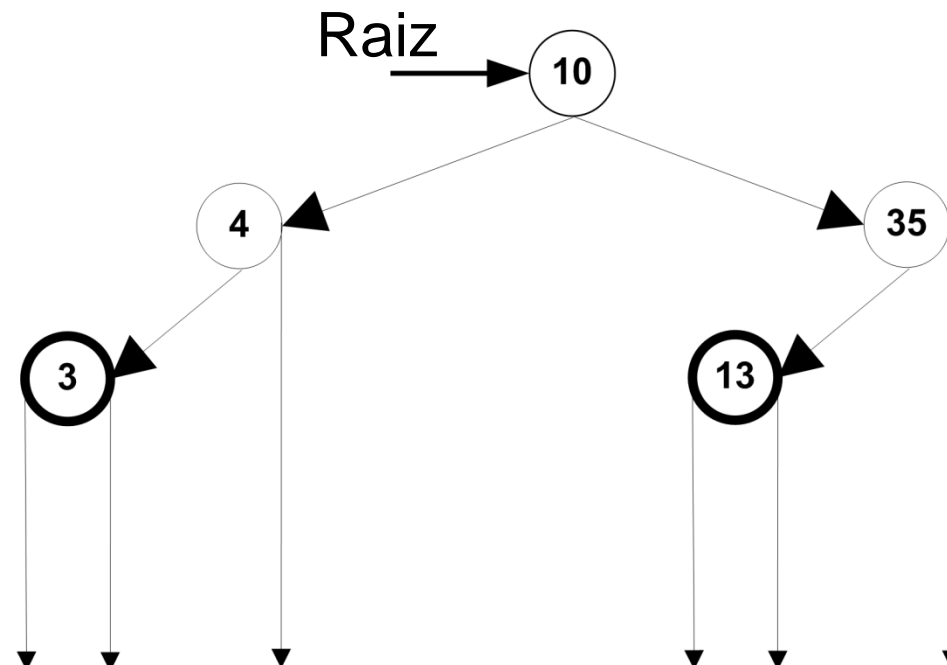
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 3



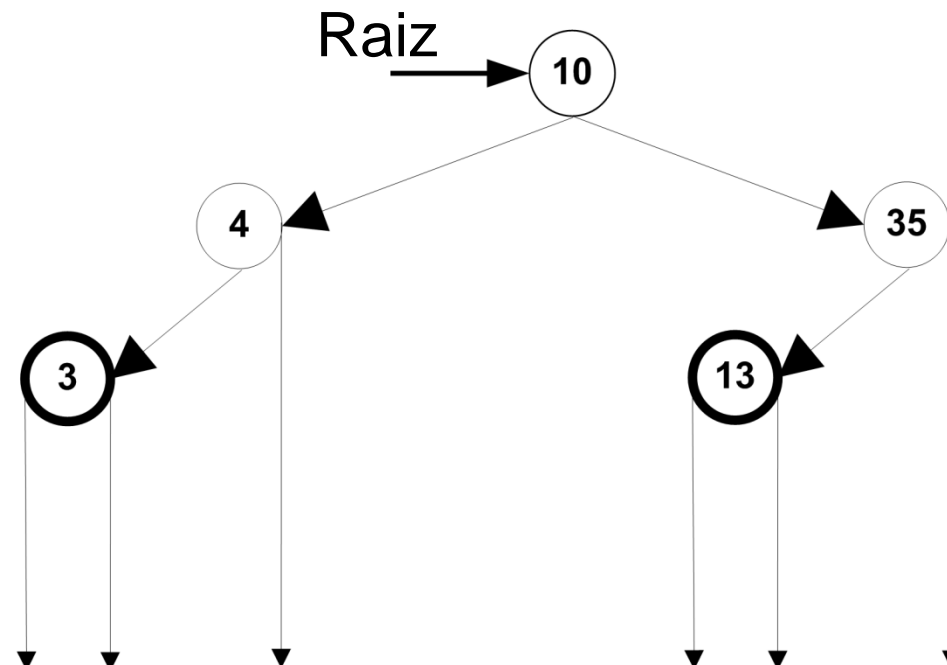
Exemplo de Inserção

- Inserido o 3



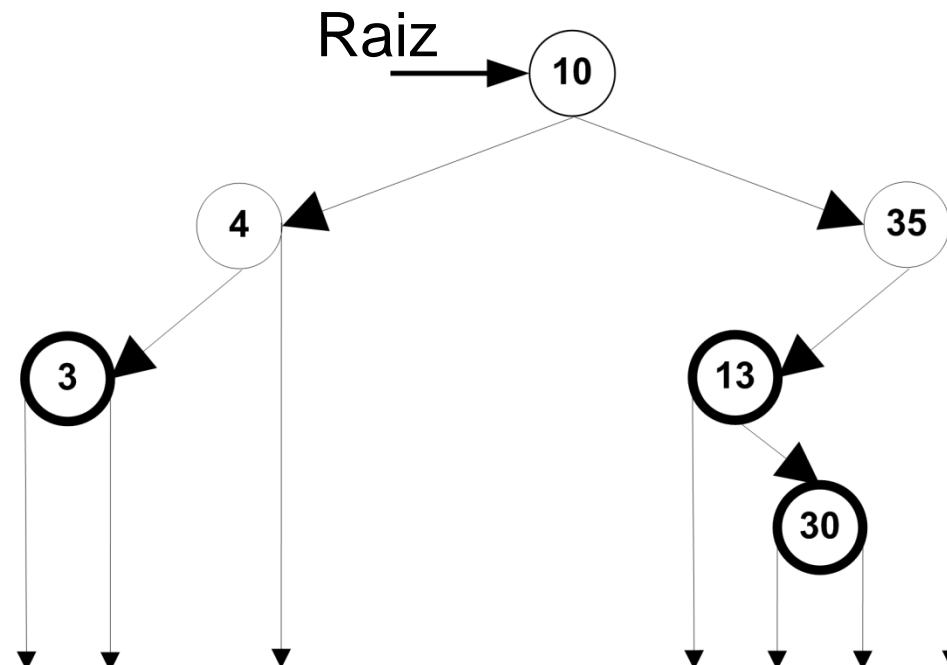
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 30



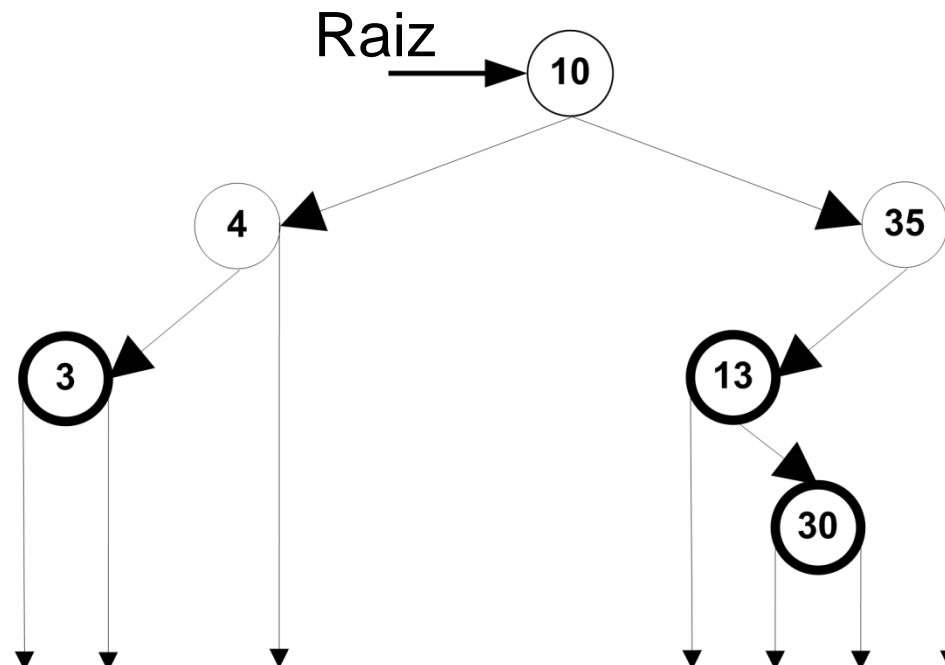
Exemplo de Inserção

- Inserido o 30



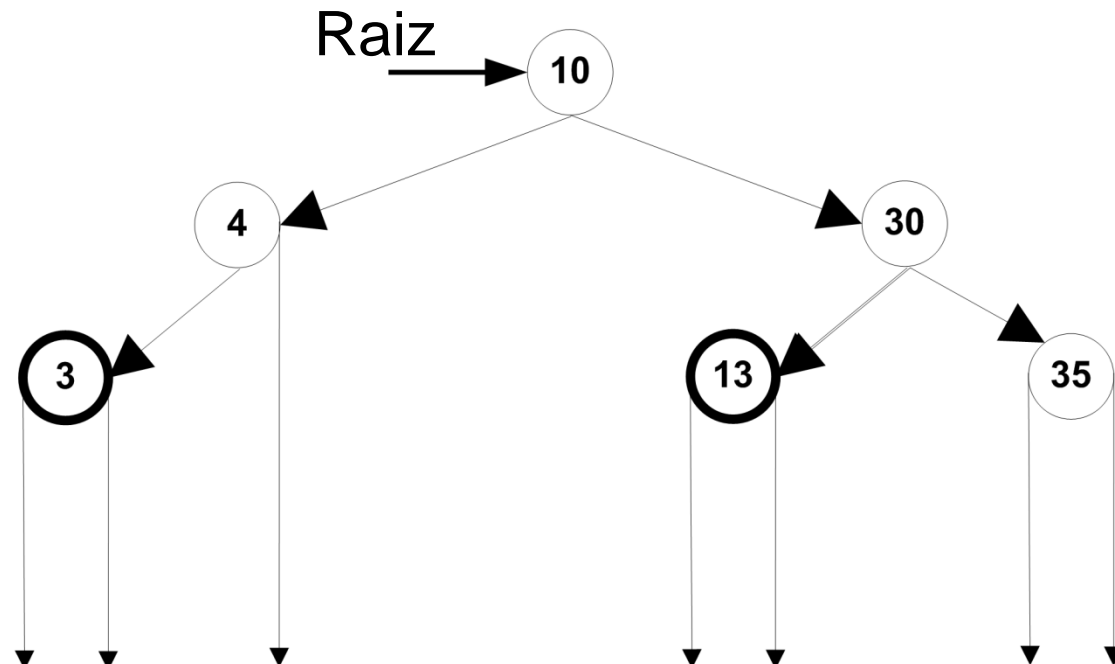
Exemplo de Inserção

- Como temos dois nós pretos, rotacionamos o 30 para a direita e o 35 para a esquerda



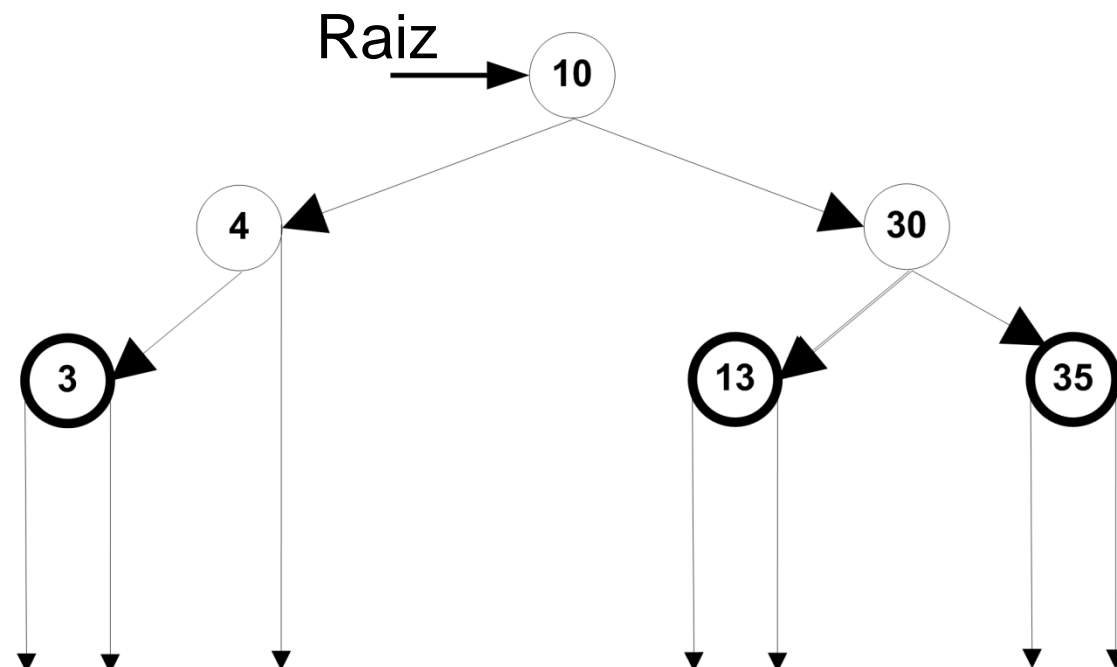
Exemplo de Inserção

- Como temos dois nós pretos, rotacionamos o 30 para a direita e o 35 para a esquerda e, em seguida, vamos reorganizar as cores



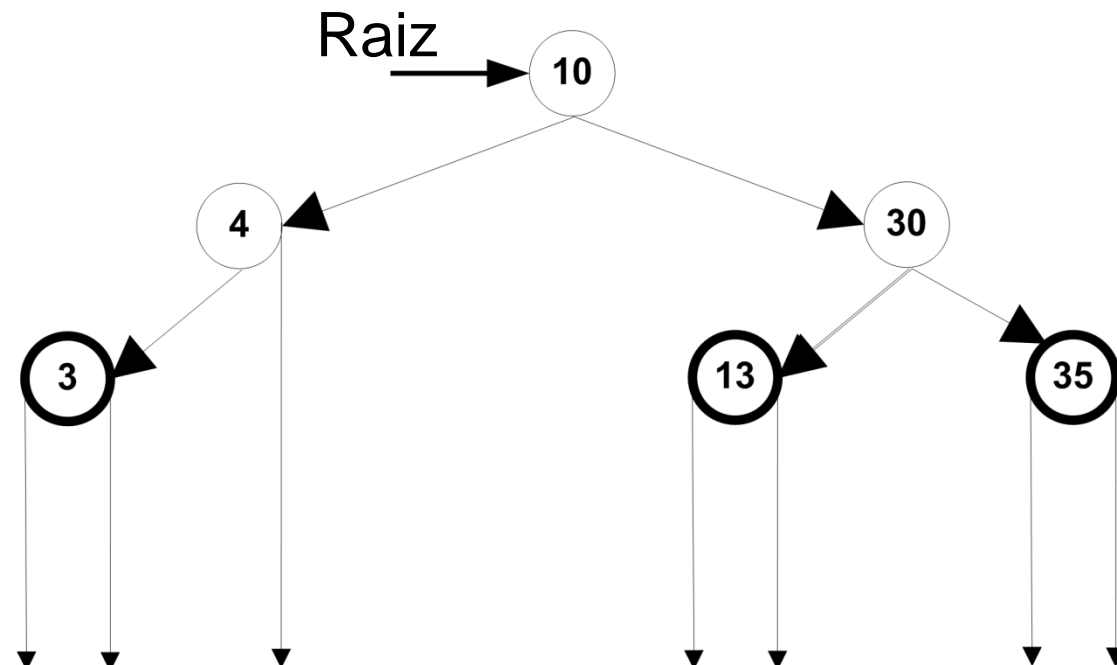
Exemplo de Inserção

- Reorganizando as cores



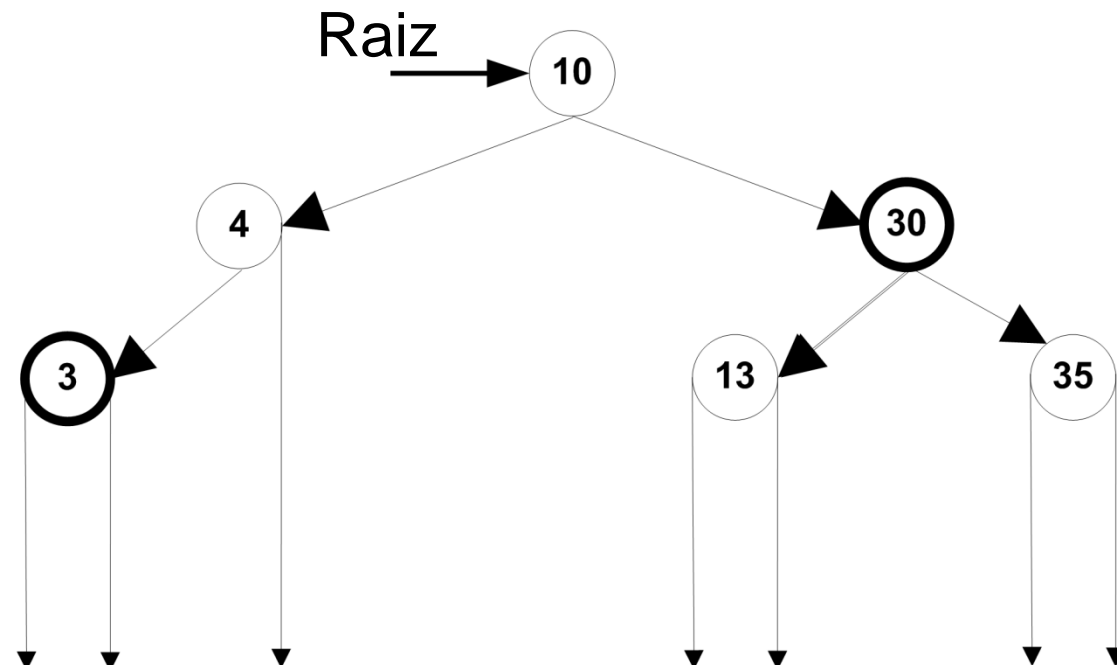
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 15, temos um nó (30) com dois filhos pretos



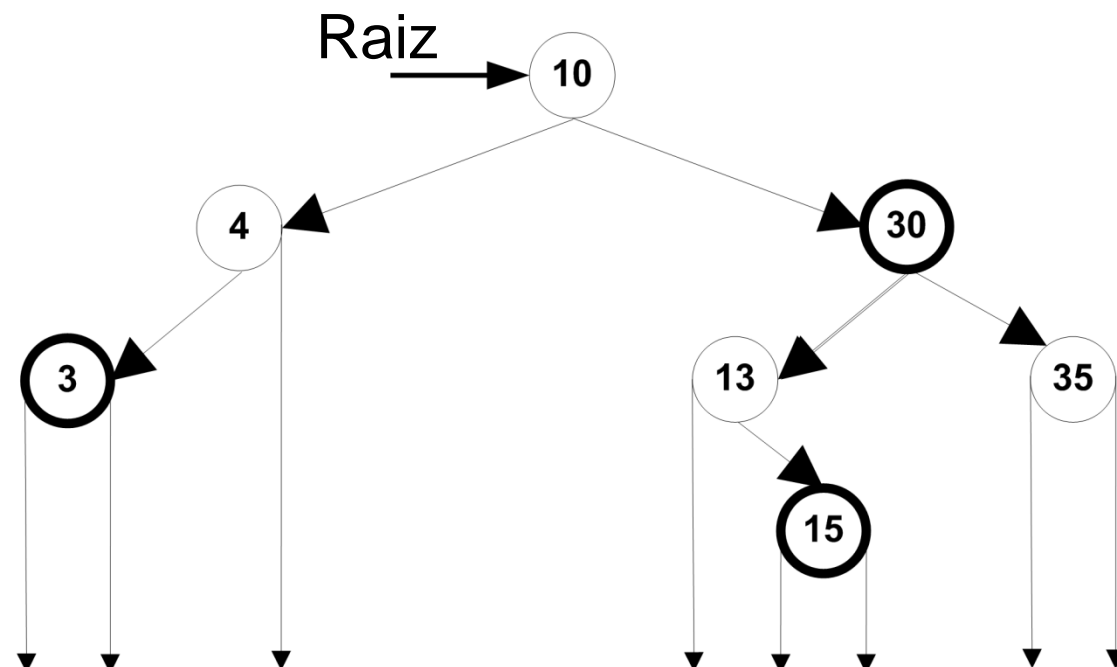
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 15, temos um nó (30) com dois filhos pretos



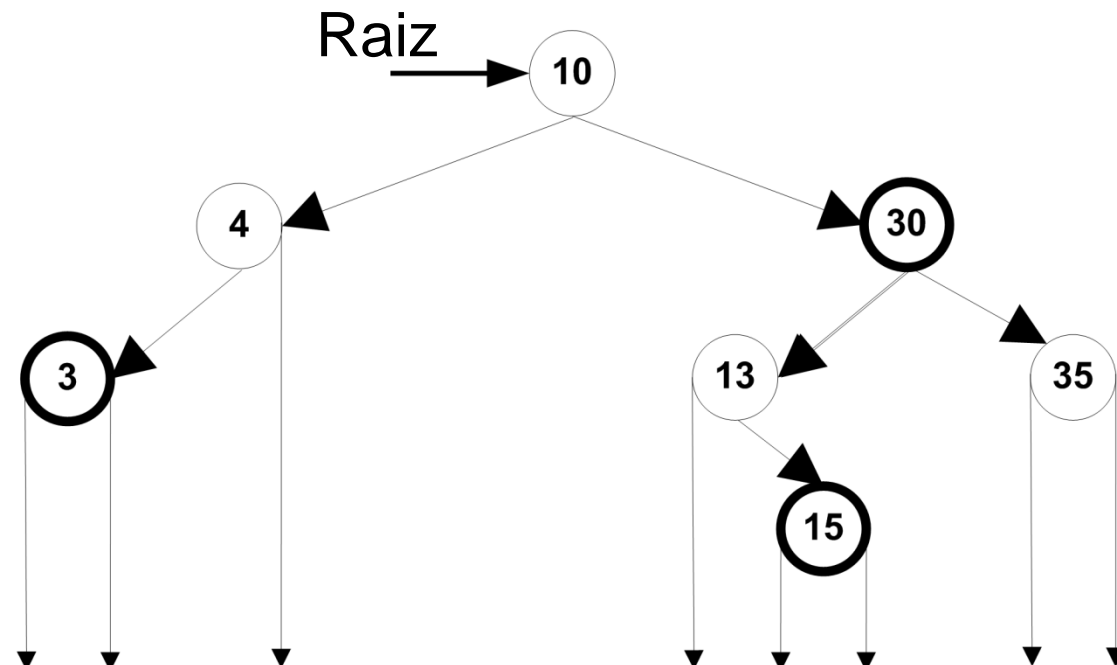
Exemplo de Inserção

- Inserido o 15



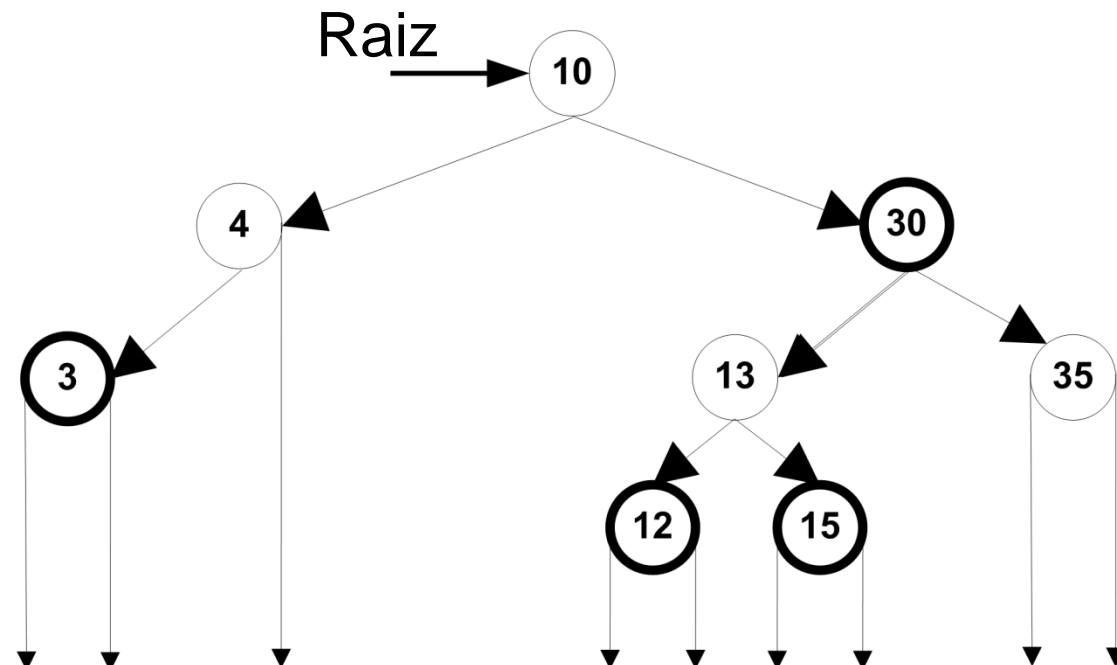
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 12



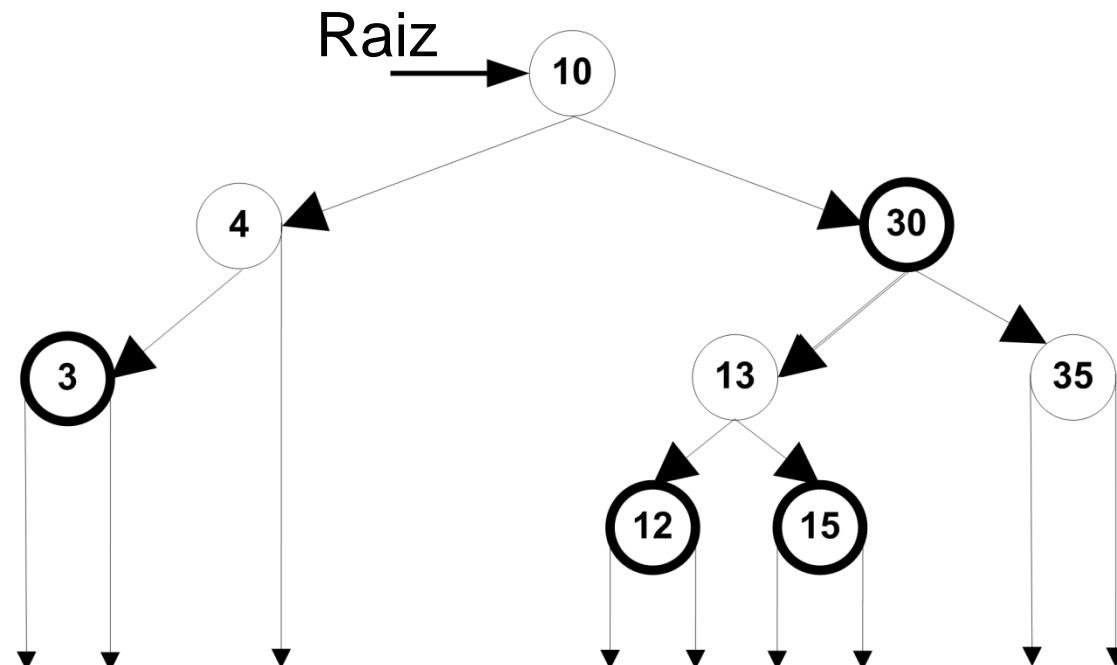
Exemplo de Inserção

- Inserido o 12



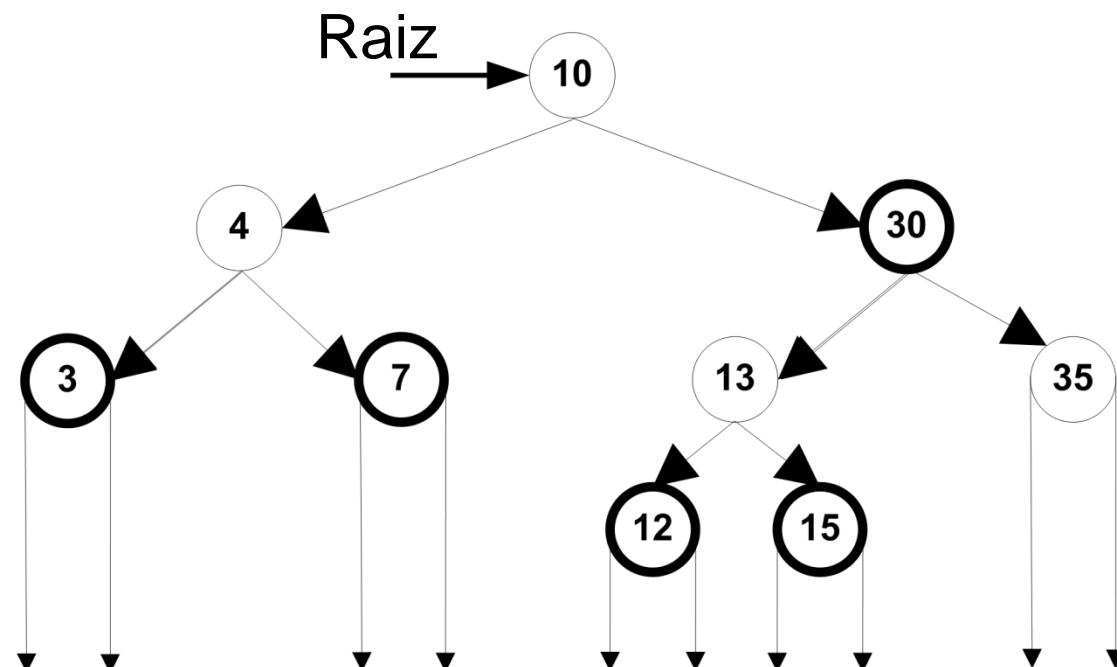
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 7



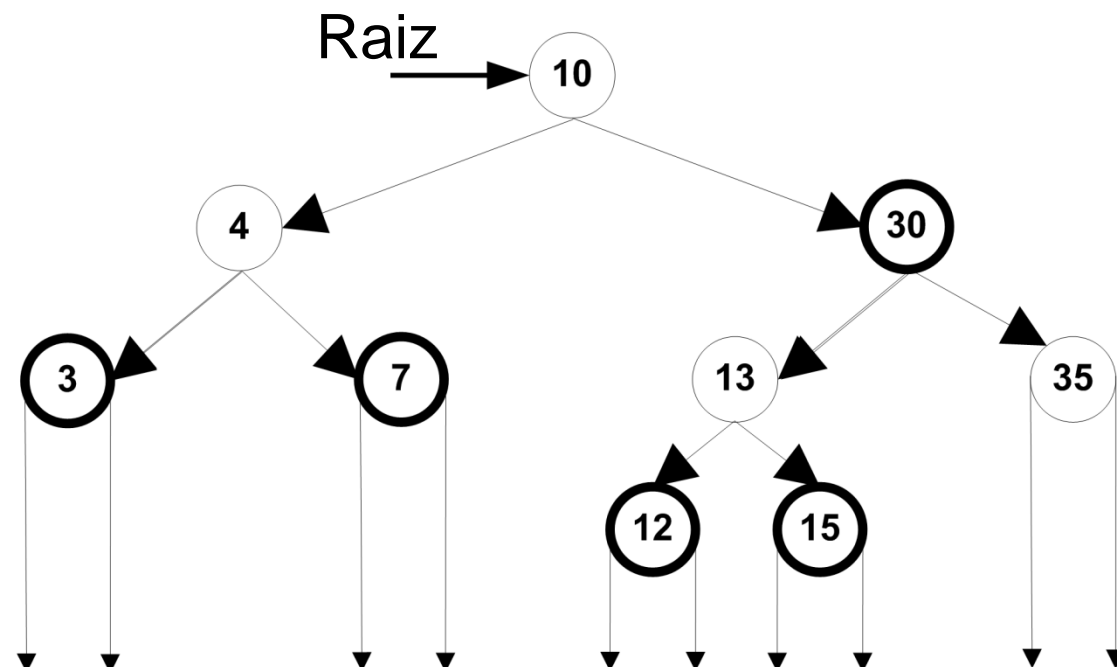
Exemplo de Inserção

- Inserido o 7



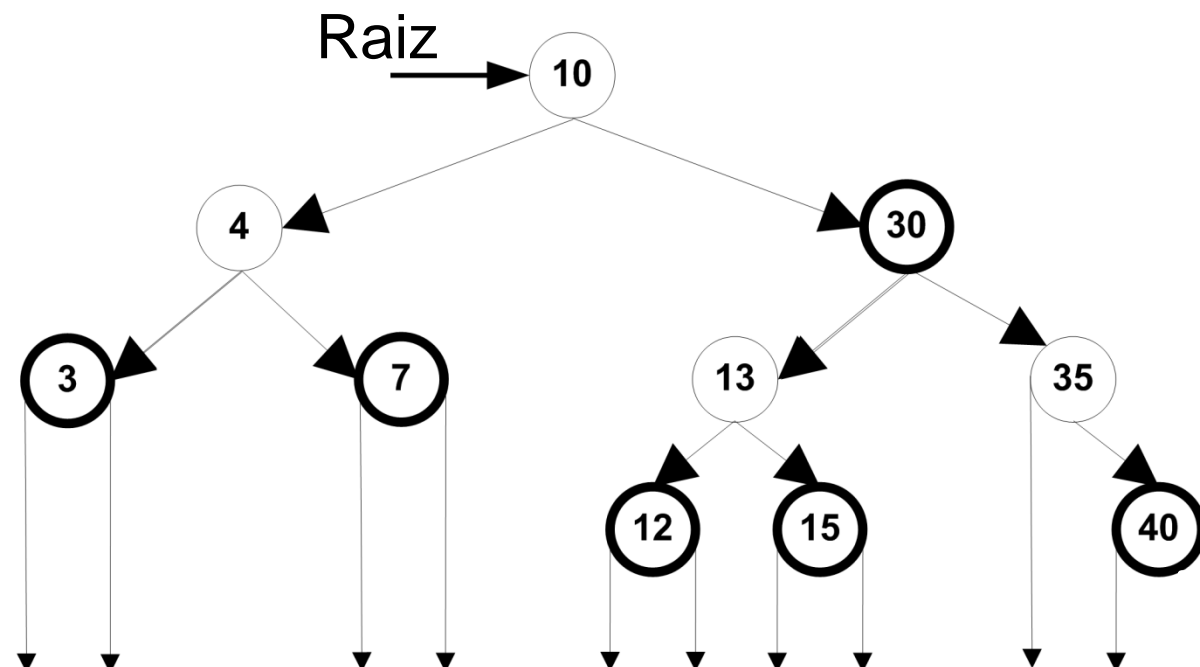
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 40



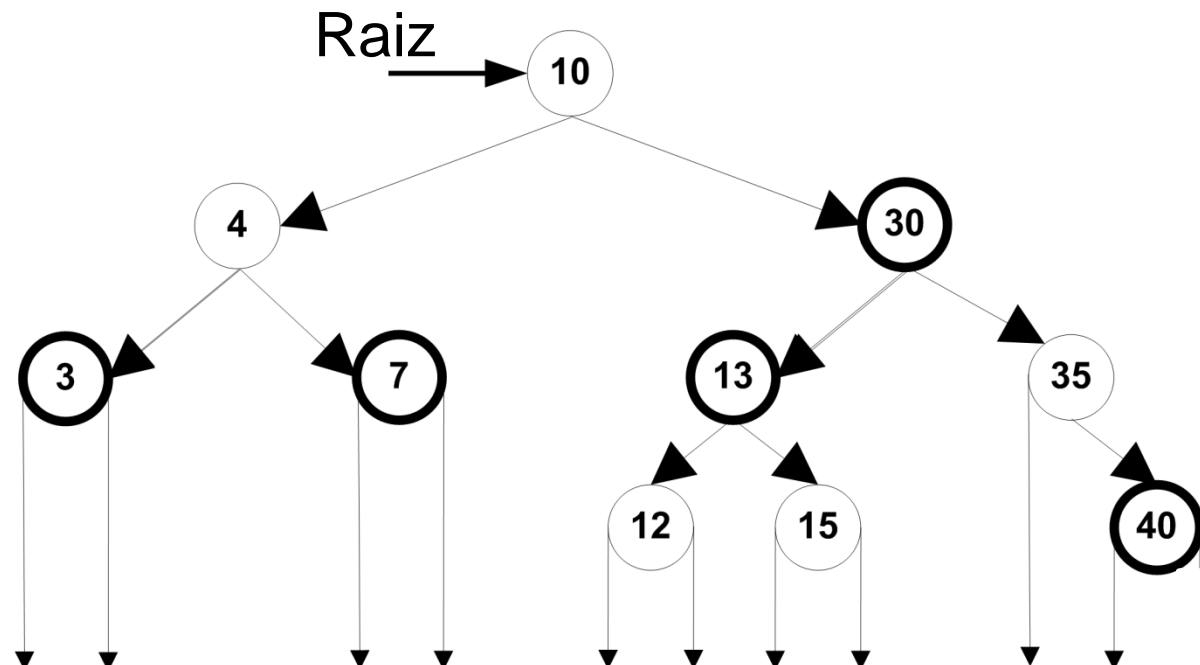
Exemplo de Inserção

- Inserido o 40



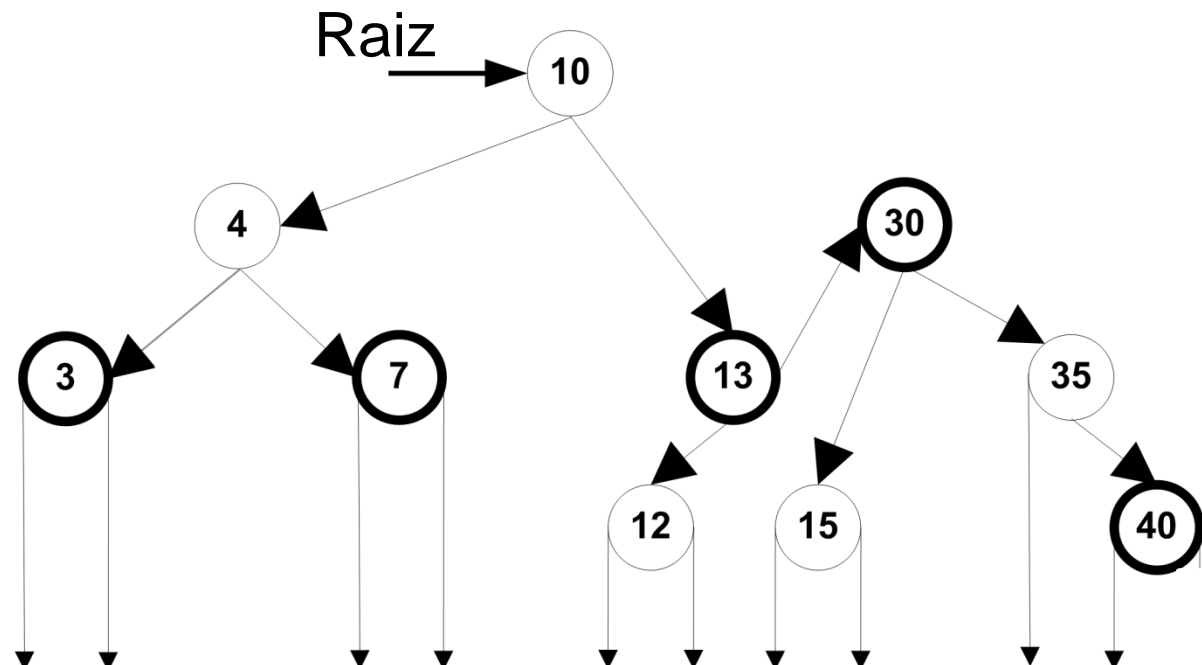
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 20, temos o 13 com dois filhos pretos



Exemplo de Inserção

- Inserindo o 20, temos o 13 e o 30 pretos, rotacionamos o 30 para direita



Exemplo de Inserção

- Inserindo o 20, rotacionamos o 10 para a esquerda

