PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Belo Horizonte - Minas Gerais

Disciplina Pesquisa Operacional	Curso	Turno	Período
Professor Dorirley Rodrigo Alves	Tipo do Documento AULA 05 - Análise de Pós Otimalidade	Data	Valor

1 Análise de Pós-otimalidade

A Análise de Pós-otimalidade ou Análise de Sensibilidade consiste em obter informações acerca de esquemas alternativos de produção. Muitas vezes estas informações são mais interessantes que a própria solução ótima.

1.1 Observe o exemplo abaixo:

Para atender a necessidade diária para a boa saúde de uma pessoa, bem como o custo unitário dos alimentos o objetivo é minimizar o custo total da dieta de forma a atender as restrições nutricionais. Para o Cardápio A, há a necessidade de compôr uma dieta de 3 mg de Vitamina A, 8 mg de Proteína e 9 mg de Lipídeos. Já para o Cardápio B são necessários para os mesmos componentes 6, 5 e 4 mgs respectivamente. Sabe-se que a necessidade mínima de Vitamina A, Proteínas e Lipídeos são de 29, 33 e 43 miligramas respectivamente, e os custos operacionais para a montagem dos cardápios estão vinculados à R$0,94 para o Cardápio A e R$1,38 para o Cardápio B.

A partir do cenário que representa este problema, podemos realizar uma variedade de perguntas que podem nos auxiliar na tomada de decisão gerencial, tais como:

1. Qual o peso final alcançado em cada Cardápio?
2. Qual seria o custo final em função desses pesos?
3. Quanto seria consumido de cada uma das restrições?
4. Se fosse obrigatório consumir toda a Vitamina A e Proteína informado, qual seria a quantidade de Lipídeos necessária?
5. Se nesse problema estivesse sendo discutido o lucro de cada cardápio, qual seria o valor máximo a ser obtido?

Na verdade, as perguntas estão embasadas exclusivamente na nossa capacidade em compreender a solução inicial encontrada e na simulação de outros cenários que permita produzir novas informações para uma tomada de decisão mais confiável.

Podemos utilizar como instrumento para a resolução do cenário apresentado a geometria análitica, que possibilitará, inclusive, uma visualização gráfica do problema.

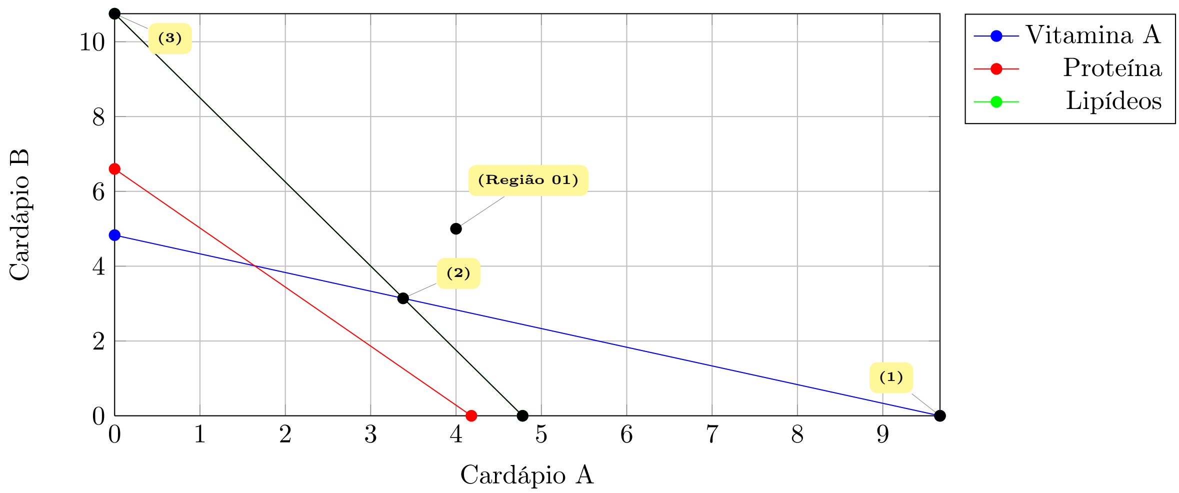
É possível identificar neste problema que deseja-se obter o peso ideal dos cardápios A e B de tal forma que seja possível atender as restrições definidas pelos itens Vitamina A, Proteina e Lipídeos. Portanto, podemos determinas que as variáveis de decisão do nosso problema são os dois Cardápios. Para isso, vamos denominar o Cardápio A como (x_1), o Cardápio B como (x_2) e as restrições Vitamina A como (R_1), Proteína (R_2) e Lipídeos como (R_3).

Modelando matematicamente o problema apresentado, temos:

$$\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z} &= 0,94x_1 + 1,38x_2 \\
R_1 \text{ (Vitamina A):} & \quad 3x_1 + 6x_2 \geq 29 \\
R_2 \text{ (Proteína):} & \quad 8x_1 + 5x_2 \geq 33 \\
R_3 \text{ (Lipídeos):} & \quad 9x_1 + 4x_2 \geq 43 \\
& \quad x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Resolvendo as restrições, é possível obter as seguintes tangentes no gráfico abaixo:

Gráfico 01: Análise Geométrica do Problema da Dieta



Neste caso, como sabemos que a região de interesse para nossa solução é a Região 01 (conforme sinalizado no Gráfico 01) pois a referida região está acima das três tangentes que representam as restrições R_1, R_2 e R_3, basta calcular os vértices (1), (2) e (3) para identificar o menor valor determinado pelo resultado da Função Objetivo representada pela expressão $FO \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z} = 0,94x_1 + 1,38x_2$.

A partir da identificação do Ponto Ótimo após verificado os três vértices em questão, é possível responder as perguntas que foram elaboradas no início desse estudo.

1. Qual o peso final alcançado em cada Cardápio?
   - Como a solução para este problema é determinada pelo vértice (2), uma vez que ($x_1 = 3,38$) e ($x_2 = 3,14$), significa afirmar que para a minimização dos custos de produção dos cardápios, será necessário produzir o Cardápio A e B com 3,38 e 3,14 miligramas respectivamente.
2. Qual seria o custo final em função desses pesos.
   - Uma vez que sabemos os valores definidos para x_1 (Cardápio A) e x_2 (Cardápio B), basta aplicá-los na Função Objetivo $FO \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z} = 0,94x_1 + 1,38x_2$. Neste caso, $0,94(3,38) + 1,38(3,14) = 7,52$. Ou seja, o lucro final seria de R$7,52
3. Quanto seria consumido de cada uma das restrições?
   - Uma vez que já foram determinados os valores das variáveis de decisão x_1 e x_2, basta aplicá-las também nas demais expressões do modelo. Neste caso, temos:

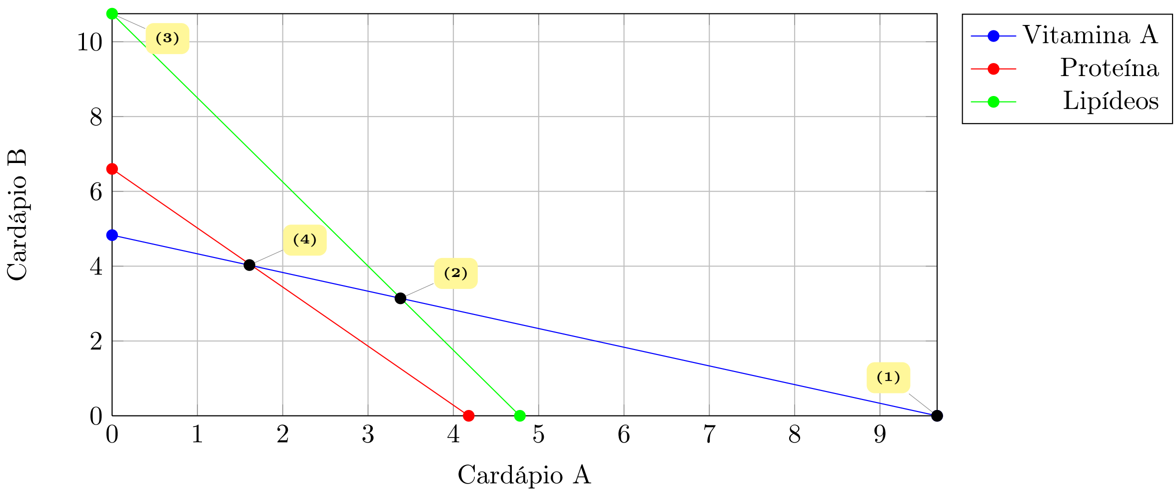
$$\begin{aligned} FO \mapsto \text{MIN } 7,52 &= 0,94(3,38) + 1,38(3,14) \\ R_1 \text{ (Vitamina A):} & \quad 3(3,38) + 6(3,14) = 29 \\ R_2 \text{ (Proteína):} & \quad 8(3,38) + 5(3,14) = 42,76 \\ R_3 \text{ (Lipídeos):} & \quad 9(3,38) + 4(3,14) = 43 \end{aligned}$$

   - Portanto, é possível perceber que apenas as restrições R_1 (Vitamina A) e R_3 (Lipídeos) foram atendidas em sua totalidade.

   Quanto as demais perguntas, vale agora a capacidade de simularmos o cenário estudade a partir da manipulação das restrições levantadas pelo problema.

4. Se fosse obrigatório consumir toda a Vitamina A e Proteína, qual seria a quantidade de Lipídeos necessária?
   - Observe que no Gráfico 02 há nove vértices identificados no espaço geométrico. Cada vértice representa uma combinação dada por x_1 e x_2. Observe também, que cada um desses vértices podem ser vistos como o consumo total de cada uma das restrições ou de um conjunto delas, caso este vértice seja a interseção de um conjunto de várias restrições. Ou seja, se avaliarmos o resultado original do problema apresentado, será possível perceber que uma vez que o vértice (2) foi eleito como o Ponto Ótimo, não foi coincidência que justamente as restrições R_1 (Vitamina A) e R_3 (Lipídeos) foram atendidas em sua totalidade, dado que o referido vértice encontra-se na interseção das duas tangentes, além de fazer parte da região de interesse. Portanto, para respondermos a pergunta em questão, basta calcularmos o vértice (4) do referido gráfico e aplicá-lo no modelo matemático original.

Gráfico 02: Análise Geométrica do Problema da Dieta



- vértice (4) $= x_1 = 1,61$ e $x_2 = 4,03$

$$
\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MIN } 7,07 &= 0,94(1,61) + 1,38(4,03) \\
R_1 \text{ (Vitamina A):} &\quad 3(1,61) + 6(4,03) = 29 \\
R_2 \text{ (Proteína):} &\quad 8(1,61) + 5(4,03) = 33 \\
R_3 \text{ (Lipídeos):} &\quad 9(1,61) + 4(4,03) = 30,61
\end{aligned}
$$

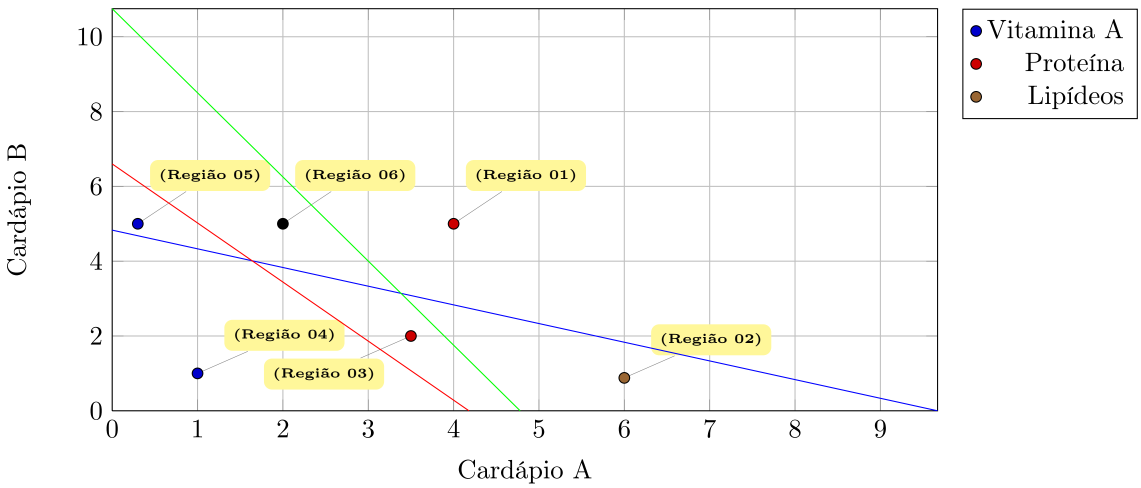
- Portanto, podemos verificar que para atendermos a totalidade da Vitamina A e Proteína a quantidade de Lipídeos será menor que aquela determinada no modelo matemático original. Ou seja, se a restrição R_3 (Lipídeos) está limitada a 43 miligramas, para atendermos somente as restrições R_1 e R_2 será possível obter apenas 30,61 miligramas de Lipídeos. Ou seja, apenas 71,18% do limite mínimo demandado.

5. Se nesse problema estivesse sendo discutido o lucro de cada cardápio, qual seria o valor máximo a ser obtido?

- Vale ressaltar que neste modelo estamos tratando da busca do menor custo de produção dos Cardápios. A questão aqui está ancorada na mudança do objetivo do problema transformando-o em um problema de maximização. É muito importante observar que as limitações das restrições também devem ser alteradas, uma vez que no problema original está sendo avaliado o consumo mínimo dessas restrições. Isso siginifica que torna-se impossível buscar a maximização do lucro se todas as restrições possuem um limite mínimo de consumo e não um limite máximo. Ou seja, resolver um modelo deste tipo obteria uma solução ilimitada para os Cardápios A e B. Portanto, torna-se mandatório que as limitações das restrições sejam alteradas. Uma possibilidade seria tranformá-las todas elas em limites máximos. Isso significa que o modelo matemático teria todas as restrições com desigualdades do tipo $\leq$. Neste caso, observando o Gráfico 03, é possível verificar que o plano geométrico em questão possui seis regiões possíveis. Observe também que cada região apresenta um conjunto de desigualdades que combinadas, remetem a soluções diferentes. No caso do modelo proposto, onde todas as restrições possuem desigualdades do tipo $\leq$. A região de interesse seria a Região 04.

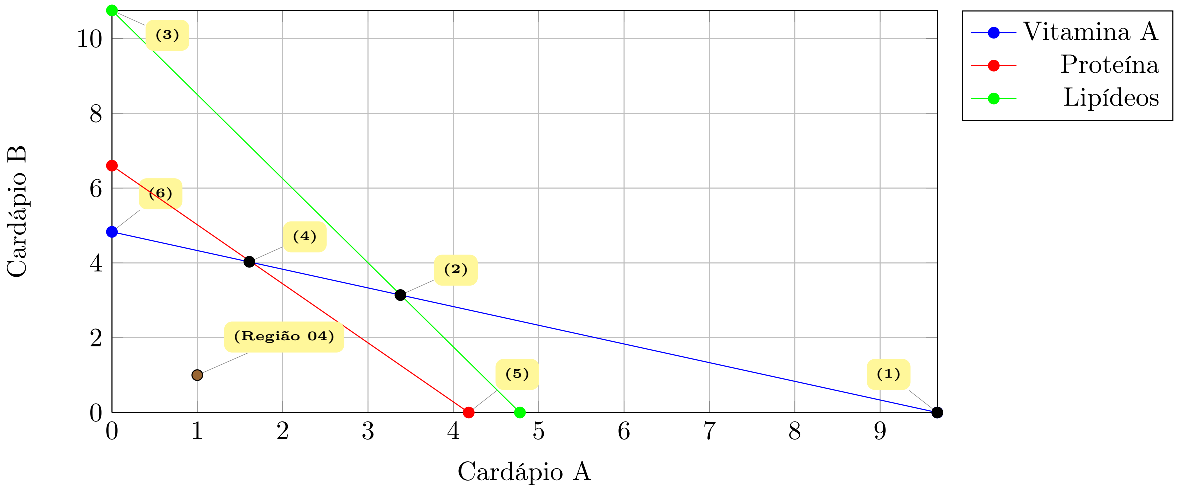
$$
\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} &= 0,94x_1 + 1,38x_2 \\
R_1 \text{ (Vitamina A):} &\quad 3x_1 + 6x_2 \leq 29 \\
R_2 \text{ (Proteína):} &\quad 8x_1 + 5x_2 \leq 33 \\
R_3 \text{ (Lipídeos):} &\quad 9x_1 + 4x_2 \leq 43 \\
&\quad x_1; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Gráfico 03: Análise Geométrica do Problema da Dieta



- Sendo assim, a partir do Gráfico 04, basta calcularmos os vértices (4), (5) e (6) para identificarmos os valores de x_1 e x_2 que promovam o maior valor na Função Objetivo a partir da Região 04.
- Calculando os três vértices em questão, é possível verificar que o vértice (4) detem o maior valor ao ser aplicado na Função Objetivo.

Gráfico 04: Análise Geométrica do Problema da Dieta



$$
\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MAX } 7,07 &= 0,94(1,61) + 1,38(4,03) \\
R_1 \text{ (Vitamina A):} &\quad 3(1,61) + 6(4,03) = 29 \\
R_2 \text{ (Proteína):} &\quad 8(1,61) + 5(4,03) = 33 \\
R_3 \text{ (Lipídeos):} &\quad 9(1,61) + 4(4,03) = 30,61
\end{aligned}
$$

Vale reforçar que a perguntas apresentadas aqui estão alinhadas com gráfico apresentado. Isso significa comentar que muitas vezes algumas perguntas podem necessitar de mais de uma resposta. Portanto, algumas perguntas podem remeter a um problema sem solução, por exemplo, simular o atendimento da demanda total de restrições que não possuam interseção. Algo como identificar o consumo total de Proteína e Lipídeos. Observe que as referidas tangentes são paralelas entre si. Logo, não há como encontrar um resultado que atenda ao mesmo tempo a totalidade das Restrições R_2 e R_3.