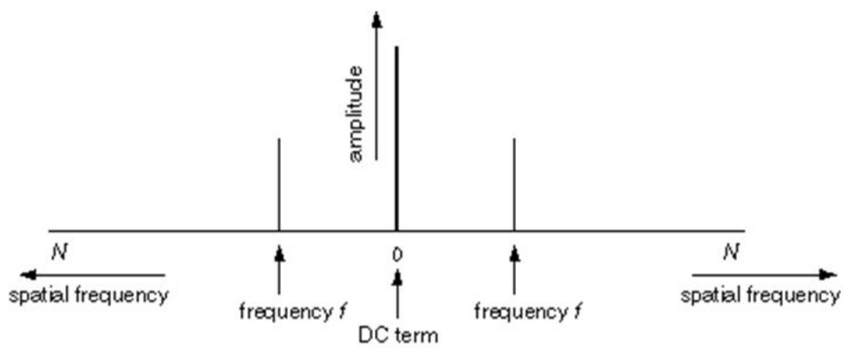
**NOCÕES DE SINAIS REPRESENTADOS NO DOMÍNIO DO TEMPO / ESPAÇO, FREQUÊNCIA / FREQUÊNCIAS ESPACIAIS**

Um sinal, ou função, de apenas uma variável (normalmente o tempo t), pode ser representado também no domínio da frequência. Trata-se do mesmo sinal, representado de duas formas (ou em dois domínios) diferentes. Assim, s(t) é o sinal no domínio do tempo e S(w), ou S(f), é o seu espectro de frequências, ou espectro de Fourier. As variáveis w e f são variáveis de frequência e estão relacionadas por $w=2\pi f$, em que f está expressa em Hertz (1 Hz = 1/s) e w está expressa em radianos/s. O espectro pode ser calculado e visualizado como função de w ou f, mas isso precisa estar expresso.

Da mesma forma, um sinal, ou função de duas variáveis (normalmente as coordenadas espaciais x e y), pode ser representado também no domínio das frequências espaciais. Assim, s(x,y) é o sinal no domínio espacial e S(w1,w2), ou S(f1,f2), é o seu espectro de frequências, ou espectro de Fourier. As variáveis w1, w2, f1 e f2 são variáveis de frequência e também correspondem às unidades Hz ou rad/s, conforme o caso.

A figura abaixo mostra o espectro de um sinal, destacando-se a sua componente de frequência zero (ou termo DC), e uma componente de frequência f. Observe-se que foi utilizada uma representação com frequências positivas e negativas, resultante de uma formulação matemática. Na prática, as frequências são sempre positivas (ou nula). O eixo z, designado por "amplitude", refere-se à amplitude dos senos nas frequências indicadas.




Os exemplos abaixo têm a intenção de fornecer uma intuição prática sobre as representações em ambos os domínios. Não houve qualquer preocupação com relação ao rigor matemático.

## 1. REPRESENTAÇÃO DE UM SINAL NO DOMÍNIO DO TEMPO E NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

**Exemplo 1.1**: A Figura 1 ilustra, através de um exemplo, o conceito de Série de Fourier, usada para descrever o espectro de Fourier de sinais periódicos.

Seja um sinal de onda quadrado, periódico de período $T_0$ (e portanto com frequência $f_0=1/T_0$), plotado na Figura 1 com a cor preta. Este sinal, por ser periódico, pode ser aproximado por uma soma de sinais senoidais, chamados de harmônicos, cujas frequências são múltiplos inteiros de $f_0$ (neste exemplo em particular, apenas os múltiplos ímpares são diferentes de zero; ou seja, todos os harmônicos pares são nulos). As amplitudes dos harmônicos são chamadas de coeficientes de Fourier e podem ser calculados através de fórmulas específicas da Série de Fourier.

Assim, temos:

1º Harmônico: sinal senoidal cuja frequência é $f_0$;

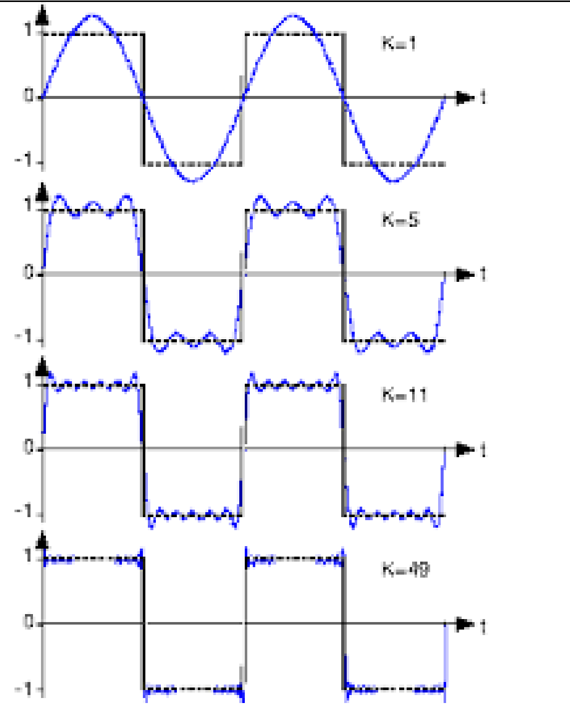
3º Harmônico: sinal senoidal cuja frequência é $3f_0$;

5º Harmônico: sinal senoidal cuja frequência é $5f_0$;

etc

À medida em que utilizamos mais harmônicos para compor o sinal original, somando-os ponto a ponto para todos os valores de t, a soma aproxima-se cada vez mais do sinal quadrado (na prática, a reconstrução perfeita do sinal quadrado nunca será alcançada, mas isso não é assunto pra hoje).

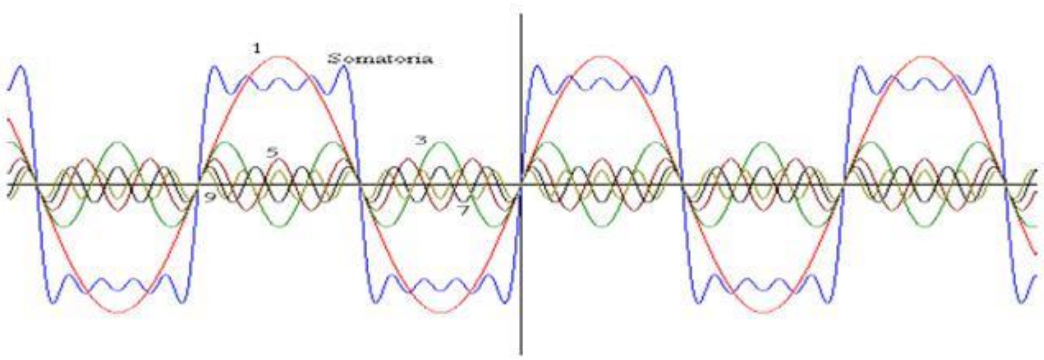
Seja K a quantidade de harmônicos considerada na composição do sinal (incluindo-se os harmônicos pares, que neste caso são nulos). Então temos:




- Na Figura 1 (a), é mostrado em azul apenas o 1º harmônico (K=1). Observe qua ambos os sinais (senoidal e quadrado) apresentam o mesmo período e, portanto, a mesma frequência.
- Na Figura 1 (b), o sinal mostrado em azul corresponde à soma até o 5º harmônico (K=5, correspondendo à soma 1º + 2º + 3º + 4º + 5º), com os harmônicos pares todos nulos, neste caso.
- Na Figura 1 (c), o sinal mostrado em azul corresponde à soma até o 11º harmônico (K=11, correspondendo à soma 1º + 2º + 3º + 4º + 5º+ ...+ 11º), com os harmônicos pares todos nulos, neste caso.
- Na Figura 1 (d), o sinal mostrado em azul corresponde à soma até o 49º harmônico (K=49, correspondendo à soma 1º + 2º + 3º + 4º + 5º+ ...+ 49º), com os harmônicos pares todos nulos, neste caso.

Figura 1

No contexto deste mesmo exemplo, que trata da decomposição do sinal quadrado em suas componentes harmônicas, a Figura 2 mostra os harmônicos ímpares de 1 a 9 (separadamente) e a soma ponto-a-ponto de todos os harmônicos ímpares de 1 a 9, em azul.




Decomposição Harmônica (Série de Fourier) de onda quadrada até a 9ª ordem.

Figura 2

**Exercício 1.1**: na Figura 2, analise o período do 1º harmônico em relação ao sinal quadrado original.

**Exercício 1.2**: analise o período dos harmônicos mostrados na Figura 2, em relação ao período do 1º harmônico, também chamado de componente fundamental.

A Figura 3 apresenta, respectivamente, os harmônicos variando em função do tempo (nas figuras à esquerda) e os espectros de Fourier correspondentes, que representam os sinais no domínio da frequência. Abaixo de cada gráfico do sinal variando no tempo, você encontra a expressão do sinal traçado, com as amplitudes de cada harmônico indicadas.

Note que cada harmônico, no domínio do tempo, é um sinal senoidal com uma frequência conhecida e, portanto, o seu espectro de Fourier corresponde em um impulso nesta frequência.

Assim, a Figura 3 apresenta:

- O 1º harmônico e o seu espectro de Fourier (mostrando a amplitude do 1º harmônico (1f), também chamado de componente fundamental.
- A soma dos harmônicos (1º+3º+5º) e o seu espectro de Fourier (observe que as amplitudes dos harmônicos em 1f, 3f e 5f é tanto menor, quanto maior a ordem do harmônico)
- Soma dos harmônicos (1º+3º+5º+7º+9º+11º) e o seu espectro de Fourier (idem observação anterior)

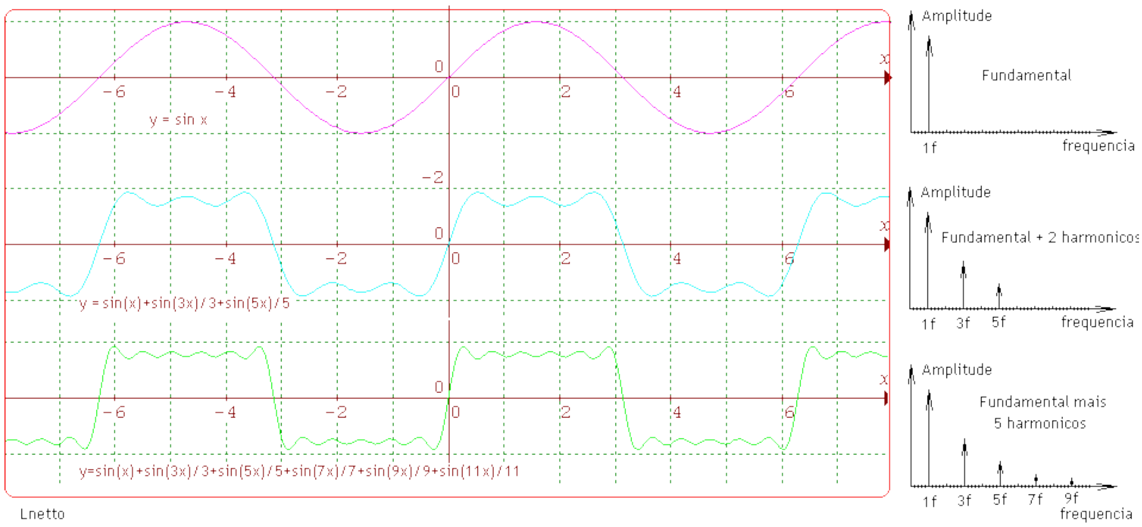



Figura 3

OBs 1: As amplitudes das componente de frequência, plotadas no Espectro de Frequências, são chamadas de Coeficientes de Fourier.

Obs 2: Foram traçados os espectros, à direita, apenas para frequências positivas, por questão de simplicidade. Mas usualmente, adota-se uma representação matemática onde aparecem também as frequências negativas. Não se preocupem com isso, por enquanto.

Obs 3: <u>Todo sinal periódico no domínio do tempo</u>, por apresentar em sua decomposição apenas os harmônicos múltiplos da frequência fundamental $f_0$, apresenta o espectro de Fourier (ou, equivalentemente, a representação no domínio da frequência) discreto. Ou seja, estão presentes no sinal apenas alguns componentes de frequência bem distintos.

Obs 4: Quando o sinal, no domínio do tempo, não é periódico, o seu espectro de frequências não é discreto, mas sim contínuo. Isso quer dizer que há infinitas componetes de frequência presentes no sinal.

**Exercício 1.3**: Gere no matlab o sinal x(t) dado pela expressão abaixo. Em seguida, faça um esboço do seu espectro de frequência (fora do matlab, manualmente mesmo) considerando apenas as frequências positivas, sabendo que o sinal $A\ sen(2\pi f t)$ é um seno com amplitude $A$ e frequência $f$. Atenção: escolha previamente a variável de frequência que irá utilizar, f ou w, em que w=2πf.

$x(t) = 0{,}5 + \ sen(2\pi t)$ + 0,5 sen(4πt) + 0,3 sem(6πt)

dica: $sen(2\pi f t) = \ sen(wt)$

**Exercício 1.4**: Analise a Figura 4, o mais detalhadamente possível. Mencione todas as informações que puder encontrar.

Na coluna "termo", encontram-se os coeficientes de Fourier que correspondem às frequências f múltiplas da frequência fundamental $f_0$.

Ao é a componete de frequência 0 (com f=0.$f_0$), correspondente ao valor médio do sinal, que neste caso é nulo;

$A_1$ é a componete de frequência $f_0$, com f=1.$f_0$, correspondente ao harmônico fundamental, de mesma freqência do sinal periódico original;

E assim por diante.

Fase é o deslocamento no tempo. Como todos os termos têm fase nula, significa que todos eles são senoides não defasadas.

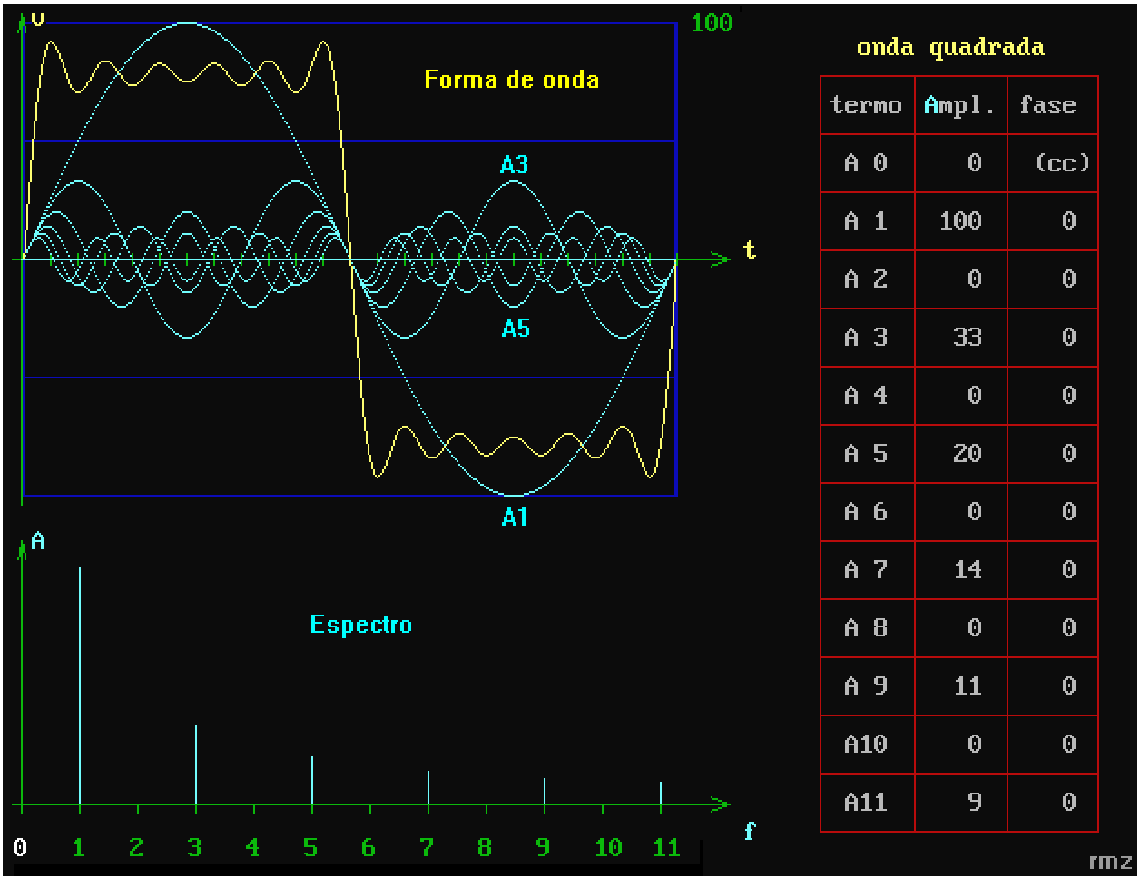

v
100
Forma de onda
A3
A5
A1
t
A
Espectro
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
f
onda quadrada
termo Ampl. fase
A 0 0 (cc)
A 1 100 0
A 2 0 0
A 3 33 0
A 4 0 0
A 5 20 0
A 6 0 0
A 7 14 0
A 8 0 0
A 9 11 0
A10 0 0
A11 9 0
rmz

Figura 4

## 2. ESPECTRO DE FOURIER DE SINAIS BIDIMENSIONAIS (FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS), QUE CHAMAREMOS DE "IMAGENS"

O espectro de Fourier de uma imagem, que é um sinal bidimensional, também é um sinal bidimensional, pois depende de duas componentes de frequência (frequência aqui refere-se à "rapidez" da variação da intensidade de cinzas na direção das linhas e na direção das colunas). Assim, uma imagem com altas componentes de frequência será uma imagem com muitas bordas e detalhes, ao passo que uma imagem com baixas componentes de frequência será uma imagem suave, com a predominância de regiões suaves. A componente de frequências zero, assim como nos sinais unidimensionais, representa o valor de intensidade médio da imagem.

**Exemplo 2.1:** na Figura 5, à esquerda, apresenta-se uma imagem f, que é um sinal 2D cujas intensidades de cinzas variam em (x,y), que são as variáveis espaciais. A imagem é formada por listas verticais, que parecem brancas e pretas, mas que na verdade correspondem a uma variação senoidal das intensidades de cinza, indo do preto ao branco e retornando ao preto, repetidas vezes.

À direita, o seu espectro de Fourier F, que também é 2D, plotado como uma imagem onde o valor do coeficiente F(w1,w2) é mapeado para um valor de intensidade de cinzas, com o intuito de exibir o espectro como uma figura. Assim, os pontos da imagem do espectro F que esão pretos indicam coeficientes nulos (senóides de amplitude zero) e os pontos onde a imagem do espectro F está clara correspondem aos coeficientes de frequência não nulos (quanto mais claros forem os pontos, maior o valor dos coeficientes).

Nesta representação do espectro F, utilizaram-se frequências positivas e negativas. O centro da figura corresponde à componente DC, ou componente F(0,0), ou seja, componente de frequências nulas em ambas as direções. A componete DC do espectro de Fourier corresponde ao valor de intensidade médio da imagem mostrada à esquerda (média de todos os pixels). O quarto quadrante desta figura corresponde às frequências positivas.

Como a intensidade média da imagem no domínio espacial não é nula, a componente DC no espectro aparece como um pontinho claro.

A imagem no domínio espacial, por ser composta por listras verticais exatamente iguais e com o mesmo espaçamento, é um sinal 2D periódico. Por isso, o seu espectro de Fourier F é discreto (pode haver apenas algumas componentes específicas de frequência presentes).

Como a intensidade da imagem não muda quando percorremos o sentido das colunas, as componentes de frequência w2, na direção das colunas, são nulas.

Quando percorremos a imagem no sentido das linhas, a intensidade varia senoidalmente, com a frequência w, do preto ao branco e novamente ao preto, repetidas vezes. Portanto, nessa direção o sinal apresenta apenas uma componente de frequência (senoide pura), mostrada no eixo w1 (representando-se as frequências positiva e negativa).

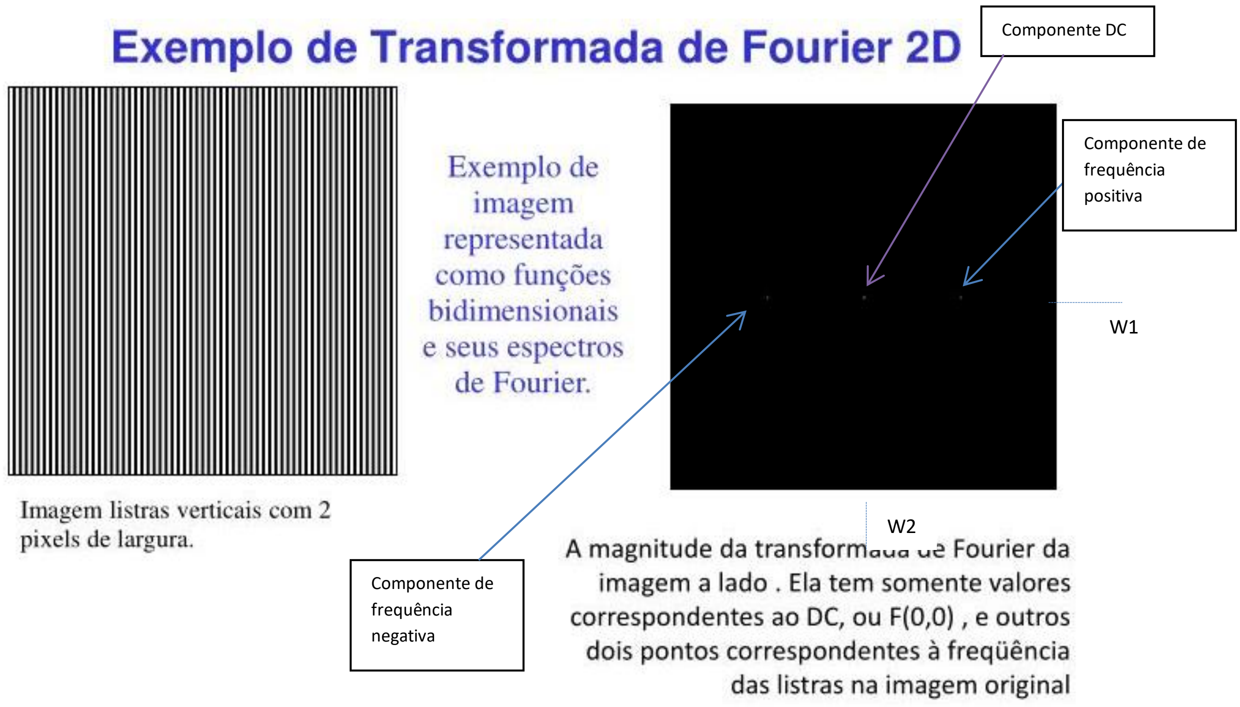



Figura 5

**Exercício 2.1**: tomando por base o espectro F mostrado na subfigura à direita (na Figura 5), faça um esboço (manualmente) do espectro F como função de w1 e w2, utilizando o plano w1 x w2 como região de suporte e plotando F(w1, w2) no eixo z. Utilize também a representação de frequências positivas e negativas.

**<u>Exemplo 2.1</u>:** na Figura 6, à direita, apresenta-se uma imagem f, que é um sinal 2D cujas intensidades de cinzas variam em (x,y). À esquerda, o seu espectro de Fourier F, que também é 2D, plotado como uma imagem onde o valor do coeficiente F(w1,w2) é mapeado para um valor de intensidade de cinzas, com o intuito de exibir o espectro como uma figura. Da mesma forma que no exemplo anterior, os pontos da imagem do espectro F que esão pretos indicam coeficientes nulos (senóides de amplitude zero) e os pontos onde a imagem do espectro F está clara correspondem aos coeficientes de frequência não nulos (quanto mais claros forem os pontos, maior o valor dos coeficientes).

Nesta representação do espectro F, utilizaram-se apenas frequências positivas. O canto superior esquerdo corresponde à componente DC, ou componente F(0,0), que é a intensidade média da imagem. Como ela não é nula, a componente DC no espectro aparece como um pontinho claro (que não pode ser visto, por coincidir com a borda da imagem).

A imagem no domínio espacial é um sinal 2D periódico. Por isso, o seu espectro de Fourier F é discreto (há apenas algumas componentes específicas de frequência presentes).

Como a intensidade da imagem muda quando a percorremos tanto no sentido das colunas quanto no sentido das linhas, as componentes de frequência w1 e w2 estarão presentes. Neste caso, a função senoidal que gerou a imagem espacial depende de ambas as direções: $sen[2\pi(f_1 x + f_2\, y)]$. Dessa forma, o espectro à direita mostra um pontinho branco (coeficiente de Fourier não nulo) perto da origem (um pouco abaixo e à esquerda), identificando uma componente de frequência em ambas as direções. Pela simetria, observa-se que a frequência em ambas as direções é a mesma.

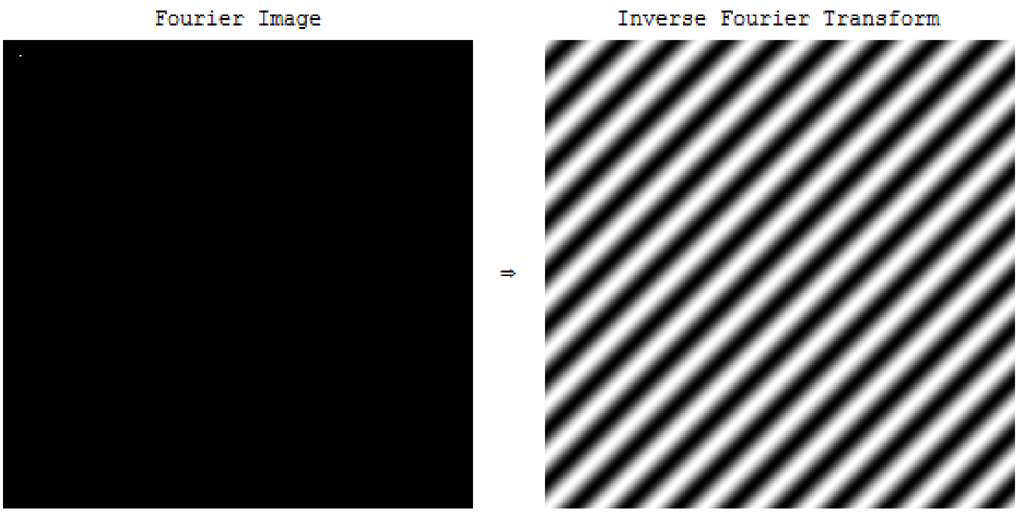



Figura 6

**Exercício 2.2**: tomando por base o espectro F mostrado na subfigura à esquerda (na Figura 6), faça um esboço (manualmente) do espectro F como função de w1 e w2, utilizando o plano w1 x w2 como região de suporte e plotando F(w1, w2) no eixo z. Utilize a representação de frequências positivas e negativas.

# Mais detalhes daTransformada de Fourier

- Coeficientes de Fourier se combinam em ambos os domínios. Por exemplo, a imagem sinusoidal vertical e inclinada a esquerda e abaixo é a soma das sinusóides inclinadas mostrada a direita inferior.

**Imagem** espectro da **Transformada Fourier**

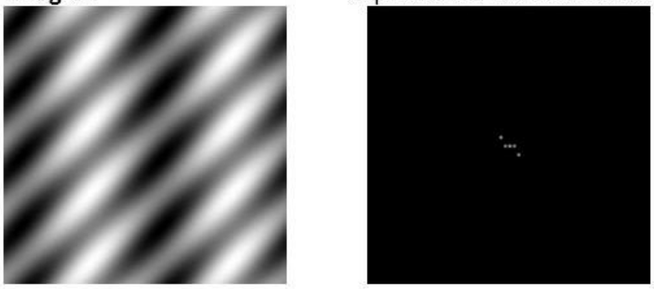


Figura 7