PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Belo Horizonte - Minas Gerais

Disciplina	Cursos	Turno	Período
Otimização	Comp. & Eng.	Manhã	1ª/2019

Professor	Tipo do Documento	Data	Versão
Dorirley Rodrigo Alves	TEORIA	23 de abril de 2019	01

1 Dualidade em Programação Linear

Este capítulo foi adaptado a partir do conteúdo apresentado em [1]

Todo problema de programação linear está associado a outro problema de programação linear chamado dual. 0 problema original é chamado primal. Apesar de possuírem características distintas, ambos os problemas levam à mesma solução ótima.

A teoria da dualidade é bastante útil na resolução de problemas de programação linear, podendo ser utilizada em diversos casos. Por exemplo, a teoria da dualidade pode ser aplicada em casos em que a solução do problema primal não é pragmática, de forma que a transformação do problema primal em dual facilitaria sua solução. Adicionalmente, a teoria da dualidade permite uma interpretação econômica do problema primal. Mostraremos ainda nesta seção outras importantes aplicações da teoria da dualidade.

1.1 Teoria da Dualidade

Um problema de maximização de programação linear pode ser representado matematicamente, na forma canônica, como:

$$
\begin{aligned}
&\max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&\qquad x_1 \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A forma matricial da equação (1) é:

$$
\begin{aligned}
&\max z = f(x) = cx \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad x \geq b
\end{aligned}
\tag{2}
$$

em que:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

O problema dual da equação (1) pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
&\min w = f(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\
&\qquad a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \leq c_n \\
&\qquad y_1 \geq 0, i = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}
\tag{3}
$$

A forma matricial da equação dual (3) é:

$$
\begin{aligned}
&\min w = f(x) = yb \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad yA \geq c \\
&\qquad y \geq 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

em que:

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},
$$

As regras para transformar um problema primal em outro dual são descritas a seguir:

1. Para que o problema primal possa ser facilmente transformado em outro dual, o mesmo deve estar na *forma canônica* e de acordo com o sistema de equações (1) para um problema de maximização.

2. Se o problema primai é de maximização o problema dual será de minimização. Analogamente, se o problema primal e de minimização, o problema dual será de maximização. O problema dual também é apresentado na forma canônica.

3. Os coeficientes da função objetivo do problema primal (transpostos) correspondem às constantes do lado direito das restrições do problema dual.

4. As constantes do lado direito das restrições do problema primal correspondem aos coeficientes da função objetivo do problema dual.

5. Os coeficientes da variável x em cada uma das restrições do problema primal são iguais aos coeficientes da variável y do problema dual.

Primeiro exemplo

Considere o problema abaixo na forma canônica:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 12x_1 + 60x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& 0,25x_1 + 0,50x_2 \leq 36 \\
& 0,10x_1 + 0,75x_2 \leq 22 \\
& 0,10x_1 + 0,40x_2 \leq 15 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1,2
\end{aligned} \tag{5}
$$

SOLUÇÃO

Como o modelo (5) já está na forma canónica, pode-se determinar diretamente o seu respectivo dual, também na forma canónica, utilizando as regras 2 a 5,

$$
\begin{aligned}
\min w &= 36y_1 + 22y_2 + 15y_3 \\
\text{sujeito a:} & \\
& 0,25y_1 + 0,10y_2 + 0,10y_3 \geq 12 \\
& 0,50y_1 + 0,75y_2 + 0,40y_3 \geq 60 \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,3
\end{aligned} \tag{6}
$$

Segundo exemplo

Determine o dual do seguinte problema de minimização:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 20x_1 + 12x_2 \\
\text{sujeito a:}& \\
&2x_1 + 4x_2 \geq 48 \\
&x_1 - 3x_2 \leq 10 \\
&3x_1 + x_2 \geq 24 \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, 2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

SOLUÇÃO

Primeiramente, transformaremos o problema (7) para a forma canónica (regra 1), multiplicando ambos os lados da segunda restrição por (-1), de forma que a desigualdade possa ser escrita com sinal $\geq$.

$$
\begin{aligned}
\min z &= 20x_1 + 12x_2 \\
\text{sujeito a:}& \\
&2x_1 + 4x_2 \geq 48 \\
&-x_1 + 3x_2 \geq -10 \\
&3x_1 + x_2 \geq 24 \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, 2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Aplicando as regras 2 a 5, obtém-se o dual do problema (8) :

$$
\begin{aligned}
\max w &= 48y_1 - 10y_2 + 24y_3 \\
\text{sujeito a:}& \\
&2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 20 \\
&4y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 12 \\
&y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 3
\end{aligned}
\tag{9}
$$

1.2 Caso Especial: Restrições de Igualdade e Variáveis Livres

Nesta seção estudaremos um caso especial que ocorre quando uma ou mais restrições do problema primal estão na forma de igualdade ou quando pelo menos uma das variáveis for livre ou irrestrita em sinal.

Considere o seguinte exemplo de programação linear:

$$
\begin{aligned}
&\max z = f(x_1 + x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \\
&\text{sujeito a:} \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
&\quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\
&\quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Como o problema não está na forma canônica, algumas transformações, deverão ser efetuadas.

Primeiramente, a restrição de igualdade $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ deve ser transformada em duas restrições de desigualdade:

$$
\begin{aligned}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Porém, as restrições de desigualdade do tipo $\geq$ devem ser transformadas em outra do tipo $\leq$, por meio da multiplicação de ambos os lados por (-1):

$$
\begin{aligned}
-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_2 \\
-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \leq -b_3
\end{aligned}
\tag{12}
$$

O modelo completo, na forma canónica, passa a ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
&\max z = f(x_1 + x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \\
&\text{sujeito a:} \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\
&\quad -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_2 \\
&\quad -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \leq -b_3 \\
&\quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Aplicando as regras 2 a 5, pode-se determinar o dual de (13) na forma canônica:

$$
\begin{aligned}
&\min w = b_1y_1 + b_2y_2^1 - b_2y_2^2 - b_3y_3 \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad a_{11}y_1 + a_{21}y_2^1 - a_{21}y_2^2 - a_{31}y_3 \geq c_1 \\
&\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2^1 - a_{22}y_2^2 - a_{32}y_3 \geq c_2 \\
&\qquad y_1, y_2^1, y_2^2, y_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{14}
$$

Podemos definir y_2, como a diferença entre duas variáveis, isto é, $y_2 = y_2^1 - y_2^2$. Dessa forma, a variável y_2, chamada *variável livre*, pode assumir um valor positivo, negativo ou nulo. Assim, o problema (14) pode se reduzir a:

$$
\begin{aligned}
&\min w = b_1y_1 + b_2y_2 - b_3y_3 \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - a_{31}y_3 \geq c_1 \\
&\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - a_{32}y_3 \geq c_2 \\
&\qquad y_1, y_3 \geq 0 \\
&\qquad y_2 \text{ livre}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Podemos concluir, portanto, que, quando uma ou mais restrições do problema primal estão na forma de igualdade, a variável dual correspondente é uma variável livre ou irrestrita em sinal. Analogamente se o problema primal possui pelo menos uma variável livre, a equação correspondente no problema dual está na forma de igualdade.

Primeiro exemplo

Determine o dual do seguinte problema a seguir:

$$
\begin{aligned}
&\min z = 4x_1 + 5x_2 \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \geq 20 \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 = 40 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \leq 30 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

SOLUÇÃO

Para que o problema (16) possa ser escrito na forma canônica, primeiramente, a restrição de igualdade deve ser transformada em duas restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 40 \end{aligned} \tag{17}$$

Porém, as restrições de desigualdade do tipo $\leq$ devem ser transformadas em outra do tipo $\geq$:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &\geq -40 \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -30 \end{aligned} \tag{18}$$

O modelo completo de minimização, na forma canônica, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\min z = 4x_1 + 5x_2 \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad 2x_1 + x_2 \geq 20 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 \geq 40 \\ &\quad -2x_1 - 3x_2 \geq -40 \\ &\quad -x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

O problema dual de (19), na forma canônica, é:

$$\begin{aligned} &\max w = 20y_1 + 40y_2^1 - 40y_2^2 - 30y_3 \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad 2y_1 + 2y_2^1 - 2y_2^2 - y_3 \leq 4 \\ &\quad y_1 + 3y_2^1 - 3y_2^2 - 2y_3 \leq 5 \\ &\quad y_1, y_2^1, y_2^2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Definindo a veriável y_2, como a diferença entre duas variáveis, isto é, $y_2 = y_2^1 - y_2^2$, a mesma passa a ser uma *variável livre*, sem restrição de sinal. Assim, o problema (20) pode se reduzir a:

$$\begin{aligned} &\max w = 20y_1 + 40y_2^1 - 30y_3 \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad 2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 4 \\ &\quad y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 5 \\ &\quad y_1, y_3 \geq 0 \\ &\quad y_2 \text{ livre} \end{aligned} \tag{21}$$

A transformação da equação de igualdade do problema original em uma variável livre correspondente para o problema dual pode ser efetuada diretamente de (16) para (21), sem a necessidade das etapas intermediárias.

2 Caso Prático

Este capítulo foi adaptado a partir do conteúdo apresentado em [2]

A Daicast Ind. e Com é uma empresa metalúrgica que fabrica peças de alumínio e zamak para os mercados de autopeças, de telecomunicações e de eletrônica, dentre outros. Ela tem uma linha de produção que atende o mercado com demandas depedentes (como o de autopeças para montadoras) e uma outra que atende linhas com demadnas independentes (como o mercado de reposição de autopeças). Como é uma empresa pequena se comparada as outras do mesmo segmento que atuam no mercado de reposição de autopeças, ela consegue escoar toda a sua produção de produtos com a demanda independente sem grandes problemas. A tabela abaixo oferece uma visão geral dos problema enfrentado por eles mensalmente: definir as quantidades a serem produzidas considerando os recursos disponíveis, os recursos necessários para a produção dos itens e as margens dos mesmos.

Recurso	**Disponibilidade**	**Recurso necessário / Peça**		
		Tampa	**Suporte**	**Plaqueta**
Matéria-prima	10.000 kgs	0,3	0,2	0,1
Injetora	1.600 hrs	0,003	0,005	0,007
Furadeira	800 hrs	0,007	0,008	0,01
Afinação	600 hrs	0,033	0,005	0,002
Margem líquida(R$ 0)		R$5,00	R$7,00	R$8,00

Tabela 1: Quantidades a serem produzidas considerando os recursos disponíveis

Um problema de PL pode ser facilmente formulado para esse caso. Sejam x_1, x_2 e x_3 as quantidades a serem produzidas da tampa, do suporte e da plaqueta, respectivamente. Se considerarmos que a empresa deseja maximizar sua margem, podemos definir seu problema como:

$$
\begin{aligned}
F.O \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} \quad &= \quad 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \text{ (Maximizar a margem)} \\
S.a. \quad & \quad 0,30x_1 + 0,20x_2 + 0,10x_3 \leq 10.000 \text{ (restrição da matéria-prima)} \\
& \quad 0,003x_1 + 0,005x_2 + 0,007x_3 \leq 1.600 \text{ (Restrição da capacidade de injeção)} \\
& \quad 0,007x_1 + 0,008x_2 + 0,010x_3 \leq 800 \text{ (Restrição da capacidade de furação)} \\
& \quad 0,033x_1 + 0,005x_2 + 0,002x_3 \leq 600 \text{ (Restrição da capacidade de afinação)} \\
& \quad x_1; x_2; x_3 \geq 0 \text{ (condições de não-negatividade)}
\end{aligned}
$$

Se consideramos que o problema anterior é o problema primal, podemos definir o problema dual como:

$$\begin{aligned} F.O \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z}^* &= 10.000y_1 + 1.600y_2 + 800y_3 + 600y_4 \text{ (Minimizar o uso dos recursos disp.)} \\ S.a. \quad & \quad 0,3y_1 + 0,003y_2 + 0,007y_3 + 0,033y_4 \geq 5 \text{ (Restrição da tampa)} \\ & \quad 0,2y_1 + 0,005y_2 + 0,008y_3 + 0,005y_4 \geq 7 \text{ (Restrição do suporte)} \\ & \quad 0,1y_1 + 0,007y_2 + 0,010y_3 + 0,002y_4 \geq 8 \text{ (restrição da Plaqueta)} \\ & \quad y_1; y_2; y_3; y_4 \geq 0 \text{ (condições de não-negatividade)} \end{aligned}$$

Fazendo uma analogia entre a tabela anterior e o problema dual, podemos perceber que y_1 está associada com a matéria-prima, y_2 com a injetora, y_3 com a furadeira e y_4 com a afinação.

Considere que os recursos da Daicast possam tanto ser utilizados em sua produção como podem ser vendidos a Metagal, uma outra empresa que atua em mercados semelhantes e que utiliza os mesmos tipos de processos e recursos. As variáveis y_1 podem ser entendidas como as margens oferecidas pelo uso da matéria-prima, y_2 como a margem paga pelo uso da injetora, y_3 como a margem paga pelo uso da furadeira e y_4 como a margem paga pelo uso da afinação. A soma de todas as margens de cada recurso utilzado deve estar maior do que a margem dos produtos. Em outras palavras, a Metagal tem que oferecer no mínimo a margem atual para que o problema seja viável (caso contrário, a Daicast não venderia recursos para Metagal, pois seria mais vantajoso vender peças).

Como as equações e as inequações precisam ter consistência dimensional, as variáveis y são dimensionalmente diferentes. Por exemplo: y_1 é a margem paga por quilo de matéria-prima, y_2 é a margem paga por hora do uso da injetora e assim sucessivamente.

O problema dual da Daicast pode ser entendido como se a Metagal estivesse interessada na minimização das margens pagas pelo uso dos recursos da Daicast.

Considerando que o custo total de compra de todos os recursos da Daicast seja de

$$10.000y_1 + 1.600y_2 + 800y_3 + 600y_4.$$

Ou seja, 10.000 kgs de matéria-prima $\times$ margem para por quilo de matéria prima + 1.600 horas de injetora $\times$ margem paga por hora de injetora + ..., a Metagal estaria interessada em minimizar esse custo total, ou seja:

$$F.O \mapsto \text{MIN } \mathbb{Z}^* = 10.000y_1 + 1.600y_2 + 800y_3 + 600y_4$$

que é exatamente a função-objetivo do problema dual.

Para o caso da restrição da tampa, a Metagal precisa oferecer uma margem que seja superior ou igual à que a Daicast conseguiria com a utilização de seus próprios recursos. Em outras palavras, para que a Daicast se interesse em vender recursos equivalentes à produção de uma tampa (0,3 kg de matéria-prima, 0,003 horas de injetora; 0,007 horas de furadeira e 0,033 horas de afinação), a Metagal precisa oferecer, o mínimo, a mesma margem que a Daicast conseguiria com ela mesma fazendo tampa, ou seja, R$ 5,00. Matemáticamente,

$$0,3y_1 + 0,003y_2 + 0,007y_3 + 0,033y_4 \geq 5$$

que é exatamente a restrição da tampa do problema dual.

As outras restrições são obtidas com um raciocício análogo. Como nesse caso só faz sentido que as margens pagas pelos recursos sejam positivas, as restrições de não negatividade são estabelecidas para as variáveis y.

As variáveis duais (ou seja, os y em nosso exemplo) são muitas vezes chamados de preço-sombra, ou custos de oportunidade dos recursos.

Referências

[1] FÁVERO, Luiz Paulo *Pesquisa operacional para cursos de administração, contabilidade e economia.* Elsevier, 2012. 355 P. Rio de Janeiro: ISBN 978-85-352-3421-3

[2] COLIN, Emerson C. *Pesquisa Operacional - 170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas..* LTC, 2007. 501 p. Rio de Janeiro. ISBN 978-85-216-1559-0