Programação Linear

Prof. Dorirley Rodrigo Alves

Introdução
Modelo
Análise
1ª Análise - Parâmetros da F.O
2ª Análise - Coeficientes das Restrições
3ª Análise - Limites das Disponibilidades
Referências
Dúvidas?!

Programação Linear

Análise de Sensibilidade

Prof. Dorirley Rodrigo Alves
dorirley@pucminas.br

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - PUC Minas
Instituto de Ciências Exatas e Informática - ICEI
Otimização de Sistemas

Programação Linear

Prof. Dorirley Rodrigo Alves

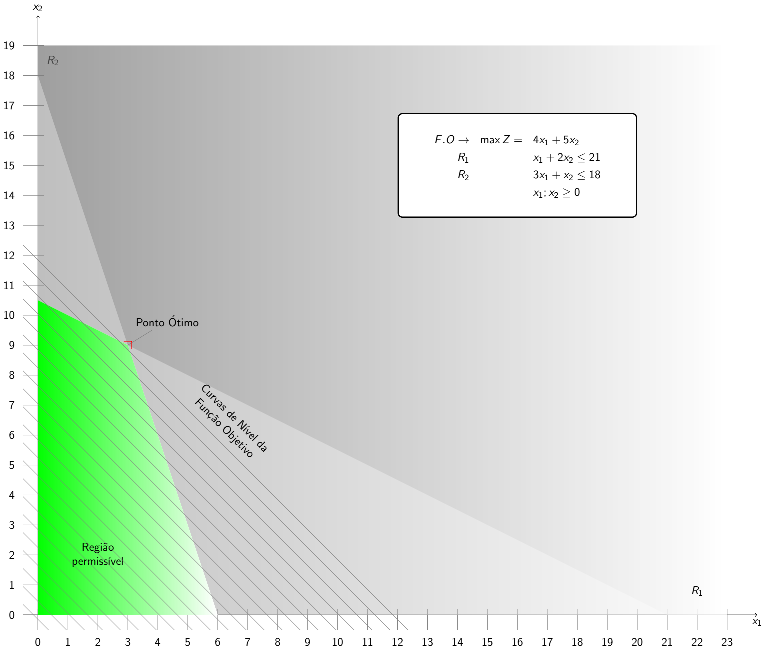
Introdução
Modelo
Análise

1ª Análise - Parâmetros da F.O

2ª Análise - Coeficientes das Restrições

3ª Análise - Limites das Disponibilidades

Referências
Dúvidas?!



Introdução
Modelo
Análise
1ª Análise - Parâmetros da F.O
2ª Análise - Coeficientes das Restrições
3ª Análise - Limites das Disponibilidades
Referências
Dúvidas?!

Observe o modelo matemático e suas respectivas soluções utilizando o Método Gráfico e o Método Simplex

$$\begin{aligned} FO \mapsto \max z \quad &= \quad 4x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad R_1 : &\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 21 \\ R_2 : &\quad 3x_1 + x_2 + x_4 = 18 \\ &\quad x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Tabela Inicial

	ML	x_1	x_2
$f(x)$	0	4	5
x_3	21	1	2
x_4	18	3	1

Tabela Final

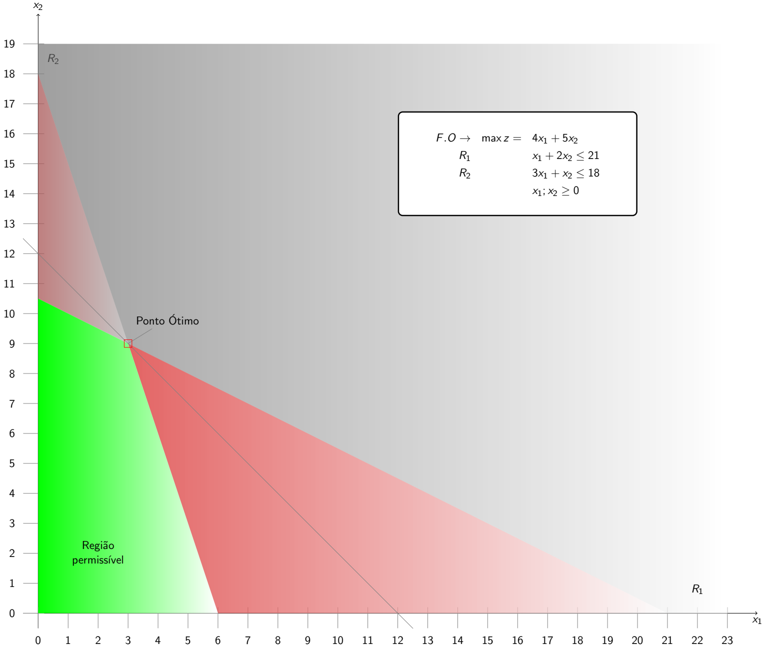
	ML	x_3	x_4
$f(x)$	-57	-11/5	-3/5
x_2	9	3/5	-1/5
x_1	3	-1/5	2/5

Análise de Sensibilidade

Há, inicialmente, algumas análises a serem realizadas para uma melhor tomada de decisão.

1. Análise dos parâmetros da Função Objetivo;
2. Analise dos coeficientes das restrições. Ou seja, alterar o valor das variáveis não básicas (VNB);
3. Análise dos limites das disponibilidades.

Analisando os parâmetros da Função Objetivo



Se a reta $\mathbb{Z}$ for girada no sentido horário ou anti-horário sobre o vértice que representa o Ponto Ótimo, esse ponto permanecerá enquanto $\mathbb{Z}$ estiver entre as faixas das Restrições 1 e 2.
De um modo geral, a expressão da F.O pode ser representada da seguinte forma:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \text{Coeficiente angular}(\alpha) = \frac{c_1}{c_2}$$

Matematicamente, temos:

Declividade da Rs_1		**Declividade da FO**		**Declividade da Rs_2**
$x_1 + 2x_2 = 21 \quad \alpha = \frac{1}{2}$	$\leq$	$\frac{4}{5}$	$\leq$	$3x_1 + x_2 = 18 \quad \alpha = 3$

Significa que para sabermos quais alterações podemos realizar na FO, a razão entre c_1/c_2 deve estar sobre esse intervalo.

primeiro exemplo

Suponha que no cenário de exemplo ($z = 4x_1 + 5x_2$) houve uma modificação nos lucros dos itens que compõem a função objetivo, alterando seus valores para ($z = 7x_1 + 8x_2$). A condição continuaria sendo atendida?

$$\max z = 7x_1 + 8x_2 \quad \text{Coeficiente angular}(\alpha) = \frac{7}{8}$$

Matematicamente, temos:

Declividade da Rs_1		**Declividade da FO**		**Declividade da Rs_2**
$\alpha = 0,5$	$\leq$	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\leq$	$\alpha = 3$

Portanto, as alterações ainda seriam válidas e o valor final de z passaria a ser $z = 7(3) + 8(9) \therefore z = 93$

segundo exemplo

Lembrando que ($z = 4x_1 + 5x_2$), quais possíveis variações em c_2 que manteriam a solução básica do modelo original? Obs.: os demais parâmetros permanecem os mesmo.
Substituindo $c_1^0 = 4$ (valor original de c_1) na condição

$$0,5 \leq \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{5} = 0,8 \leq 3$$

tem-se que:

$$\begin{cases} 0,5 \times c_2 \leq 4 \Rightarrow c_2 \leq 8 & (1) \\ 3 \times c_2 \geq 4 \Rightarrow c_2 \geq 1,33 & (2) \end{cases}$$

$$1,33 \leq c_2 \leq 8$$

Portanto, enquanto c_2 atender o intervalo especificado, a solução básica ótima do modelo original ($x_1 = 3$ e $x_2 = 9$), permanecerá inalterada.

terceiro exemplo

Lembrando que ($z = 4x_1 + 5x_2$), quais possíveis variações em c_1 que manteriam a solução básica do modelo original? Obs.: os demais parâmetros permanecem os mesmo.
Substituindo $c_2^0 = 5$ (valor original de c_2) na condição

$$0,5 \leq \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{5} = 0,8 \leq 3$$

tem-se que:

$$0,5 \times 5 \leq c_1 \leq 3 \times 5 \Rightarrow 2,5 \leq c_1 \leq 15$$

$$2,5 \leq c_1 \leq 15$$

Portanto, enquanto c_1 atender o intervalo especificado, a solução básica ótima do modelo original ($x_1 = 3$ e $x_2 = 9$), permanecerá inalterada.

Introdução
Modelo
Análise
1ª Análise - Parâmetros da F.O
2ª Análise - Coeficientes das Restrições
3ª Análise - Limites das Disponibilidades
Referências
Dúvidas?!

Análise dos coeficientes das restrições

A partir de alterações no valor dos coeficientes das restrições podemos realizar a análise de sensibilidade. Este estudo é baseado no conceito de preço sombra (*shadow price*), que pode ser definido como o acréscimo (ou decréscimo) no valor da função objetivo caso seja adicionada (ou retirada) uma unidade na quantidade atual de recursos disponíveis. Ou seja, alterando os valores das variáveis não básicas (variáveis de folga ou de excesso das restrições).

Os acréscimos e decréscimos são calculados por meio das variações de Δx_1 e Δx_2?

As variações estão contidas na própria tabela de solução do Método Simplex

Quando $x_3 = 1$

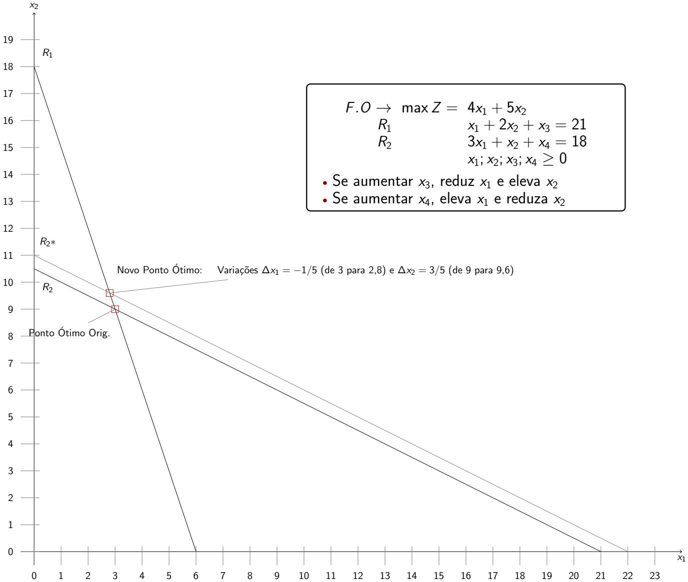
$$\Delta x_1 = -\frac{1}{5} \quad \Delta x_2 = \frac{3}{5} \quad \Delta z = \frac{11}{5}$$

Quando $x_4 = 1$

$$\Delta x_1 = \frac{2}{5} \quad \Delta x_2 = -\frac{1}{5} \quad \Delta z = \frac{3}{5}$$

Tabela Final			
	ML	x_3	x_4
$f(x)$	-57	-11/5	-3/5
x_2	9	3/5	-1/5
x_1	3	-1/5	2/5

Observe que para $f(x)$, os valores devem ser multiplicados por -1 pois a F.O. foi transformada em min ao utilizar o Método Simplex pela tabela de Ventsel [?]



$$
\begin{array}{lll}
F.O \rightarrow & \max Z = & 4x_1 + 5x_2 \\
R_1 & & x_1 + 2x_2 + x_3 = 21 \\
R_2 & & 3x_1 + x_2 + x_4 = 18 \\
 & & x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0
\end{array}
$$

- Se aumentar x_3, reduz x_1 e eleva x_2
- Se aumentar x_4, eleva x_1 e reduza x_2

Interpretando a Análise de Sensibilidade para x_3 e x_4

$$\begin{aligned} FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} \quad &= \quad 4x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad R_1: \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 21 \\ R_2: \quad & 3x_1 + x_2 + \quad x_4 = 18 \\ & x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

		Variações			
	Valores Originais	x_3	**Resultado**	x_4	**Resultado**
x_1	3	-1/5	2,8	2/5	3,4
x_2	9	3/5	9,6	-1/5	8,8
x_3	0	1	1	0	0
x_4	0	0	0	1	1
z	57	11/5	59,2	3/5	57,6

Comparando, percebemos que se aumentarmos em uma unidade a variável de folga x_3 reduzirá a quantidade de x_1 em 1/5 e aumentará a disponibilidade de x_2 em 3/5, obtendo um lucro de 59,2 em z.

Analisando o limite da Disponibilidade de R_1

Suponha que seja necessário alterar uma disponibilidade. Neste caso, quais seriam os valores máximo e mínimo que a disponibilidade apresentada em R_1 poderia alcançar?

Neste caso, o limite da R_1 é dado em função da variação de x_3 em x_1, sendo:

$$\alpha_a \therefore x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \therefore 3 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \therefore -\frac{1}{5}x_3 = -3(-1) \therefore x_3 = \frac{3}{1/5} = 15$$

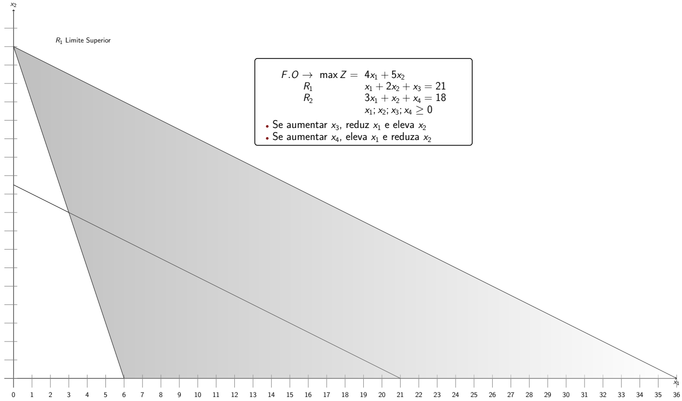
e para x_2, o limite seria:

$$\alpha_b \therefore x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0 \therefore 9 + \frac{3}{5}x_3 = 0 \therefore \frac{3}{5}x_3 = -9 \therefore x_3 = -\frac{9}{3/5} = -15$$

Matematicamente, o máximo decréscimo em x_3 para x_1 será 15 e o máximo acréscimo em x_3 para x_2 também será de -15 (mera coincidência!).

Isso significa que a disponibilidade de 21 pode variar de $21 - 15 = 6$ ou $21 + 15 = 36$ sem sair da região permissiva.

Observe o gráfico



Analisando o limite da Disponibilidade de R_2

Suponha que seja necessário alterar uma disponibilidade. Neste caso, quais seriam os valores máximo e mínimo que a disponibilidade apresentada em R_2 poderia alcançar?

Neste caso, o limite da R_2 é dado em função da variação de x_4 em x_1, sendo:

$$\alpha_c \therefore x_1 + \frac{2}{5}x_4 = 0 \therefore 3 + \frac{2}{5}x_4 = 0 \therefore \frac{2}{5}x_3 = -3 \therefore x_4 = -\frac{3}{2/5} = -7,5$$

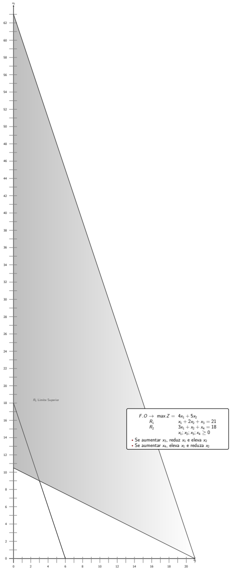
e para x_2, o limite seria:

$$\alpha_d \therefore x_2 - \frac{1}{5}x_4 = 0 \therefore 9 - \frac{1}{5}x_4 = 0 \therefore -\frac{1}{5}x_4 = -9(-1) \therefore x_4 = \frac{9}{1/5} = 45$$

Matematicamente, o máximo decréscimo em x_4 para x_2 será 7,5 e o máximo acréscimo em x_4 para x_2 será 45.

Isso significa que a disponibilidade de 18 pode variar de $18 - 7,5 = 10,5$ ou $18 + 45 = 63$ sem sair da região permissiva.

Observe o gráfico



Analisando o limite da Disponibilidade de R_1

Ainda sobre os limites de R_1, uma vez que o limite superior da R_1 devido a variação de x_3 em x_1 é igual a 15

$$\alpha_a = x_1 + \Delta x_3 \therefore \alpha_a = \frac{x_1}{\Delta x_3} = \frac{3}{1/5} = 15$$

então, para o novo modelo

$$\begin{array}{rrll} FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} & = & 4x_1 + 5x_2 & \\ \text{Sujeito a:} & R_1: & x_1 + 2x_2 + x_3 & = (21+15) \text{ ou } 36 \\ & R_2: & 3x_1 + x_2 + \quad x_4 & = 18 \\ & & x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 & \end{array}$$

$$x_1 = 3 \therefore x_1 + \alpha_a \times \Delta x_3 = x_1^{novo} = 3 + \left(15 \times -\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_1^{novo} = 0$$

$$x_2 = 9 \therefore x_2 + \alpha_a \times \Delta x_3 = x_2^{novo} = 9 + \left(15 \times \frac{3}{5}\right) = 18 \Rightarrow x_2^{novo} = 18$$

$$z = 57 \therefore z + \alpha_a \times \Delta x_3 = z^{novo} = 57 + \left(15 \times \frac{11}{5}\right) = 90 \Rightarrow z^{novo} = 90$$

Analisando o limite da Disponibilidade de R_1

Ainda sobre os limites de R_1, uma vez que o limite inferior da R_1 devido a variação de x_3 em x_2 é igual a - 15

$$\alpha_b = x_2 - \Delta x_3 \therefore \alpha_b = -\frac{x_1}{\Delta x_3} = -\frac{9}{3/5} = -15$$

então, para o novo modelo

$$\begin{array}{rrl} FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} & = & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeito a:} & R_1: & x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = (21 - 15) \text{ ou } 6 \\ & R_2: & 3x_1 + x_2 + \quad x_4 = 18 \\ & & x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$x_1 = 3 \therefore x_1 - \alpha_b \times \Delta x_3 = x_1^{novo} = 3 - \left(15 \times -\frac{1}{5}\right) = 6 \Rightarrow x_1^{novo} = 6$$

$$x_2 = 9 \therefore x_2 - \alpha_b \times \Delta x_3 = x_2^{novo} = 9 - \left(15 \times \frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_2^{novo} = 0$$

$$z = 57 \therefore z - \alpha_b \times \Delta x_3 = z^{novo} = 57 - \left(15 \times \frac{11}{5}\right) = 24 \Rightarrow z^{novo} = 24$$

Analisando o limite da Disponibilidade de R_2

Para os limites de R_2, uma vez que o limite inferior da R_2 devido a variação de x_4 em x_1 é igual a - 7,5

$$\alpha_c = x_1 - \Delta x_4 \therefore \alpha_c = -\frac{x_1}{\Delta x_4} = -\frac{3}{2/5} = -7,5$$

então, para o novo modelo

$$\begin{array}{rrl} FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} & = & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{Sujeito a:} \quad R_1 : & & x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 21 \\ R_2 : & & 3x_1 + x_2 + \quad x_4 = (18 - 7,5) \text{ ou } 10,5 \\ & & x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$x_1 = 3 \therefore x_1 - \alpha_c \times \Delta x_4 = x_1^{novo} = 3 - \left(\frac{15}{2} \times \frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_1^{novo} = 0$$

$$x_2 = 9 \therefore x_2 - \alpha_c \times \Delta x_4 = x_2^{novo} = 9 - \left(\frac{15}{2} \times -\frac{1}{5}\right) = 10,5 \Rightarrow x_2^{novo} = 10,5$$

$$z = 57 \therefore z - \alpha_c \times \Delta x_4 = z^{novo} = 57 - \left(\frac{15}{2} \times \frac{3}{5}\right) = 53,5 \Rightarrow z^{novo} = 53,5$$

Analisando o limite da Disponibilidade de R_2

Para os limites de R_2, uma vez que o limite superior da R_2 devido a variação de x_4 em x_2 é igual a 45

$$\alpha_d = x_2 + \Delta x_4 \therefore \alpha_d = \frac{x_2}{\Delta x_4} = \frac{9}{1/5} = 45$$

então, para o novo modelo

$$\begin{aligned}
FO \mapsto \text{MAX } \mathbb{Z} \quad &= \quad 4x_1 + 5x_2 \\
\text{Sujeito a:} \quad R_1: \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 21 \\
R_2: \quad & 3x_1 + x_2 + \quad x_4 = (18 + 45) \text{ ou } 63 \\
& x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = 3 \therefore x_1 + \alpha_d \times \Delta x_4 = x_1^{novo} = 3 + \left(45 \times \frac{2}{5}\right) = 21 \Rightarrow x_1^{novo} = 21$$

$$x_2 = 9 \therefore x_2 + \alpha_d \times \Delta x_4 = x_2^{novo} = 9 + \left(45 \times -\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_2^{novo} = 0$$

$$z = 57 \therefore z + \alpha_d \times \Delta x_4 = z^{novo} = 57 + \left(45 \times \frac{3}{5}\right) = 84 \Rightarrow z^{novo} = 84$$

primeiro exemplo

A partir daqui, podemos calcular qualquer variação. Por exemplo, supondo que seja desejável aumentar 10 unidades em x_4, o cenário ainda seria possível? Ou seja, ainda existirá região permissiva?

$$x_1 = 3 \therefore x_1 = 3 + \left(10 \times \frac{2}{5}\right) = 7$$
$$x_2 = 9 \therefore x_2 = 9 + \left(10 \times -\frac{1}{5}\right) = 7$$
$$z = 57 \therefore z = 57 + \left(10 \times \frac{3}{5}\right) = 63$$

Como os resultados foram positivos, então há região permissiva.

segundo exemplo

e se aumentarmos 50 unidades em x_4, o cenário ainda seria possível? Ou seja, ainda existirá região permissiva?

$$x_1 = 3 \therefore x_1 = 3 + \left(50 \times \frac{2}{5}\right) = -1$$

$$x_2 = 9 \therefore x_2 = 9 + \left(50 \times -\frac{1}{5}\right) = 23$$

$$z = 57 \therefore z = 57 + \left(50 \times \frac{3}{5}\right) = 87$$

Como x_1 foi negativo, então não há região permissiva.

terceiro exemplo

e se aumentarmos 50 unidades em x_3 e x_4, o cenário ainda seria possível? Ou seja, ainda existirá região permissiva?

$$x_1 = 3 \therefore x_1 = 3 + \left(50 \times \frac{2}{5}\right) + \left(50 \times -\frac{1}{5}\right) = 13$$
$$x_2 = 9 \therefore x_2 = 9 + \left(50 \times -\frac{1}{5}\right) + \left(50 \times \frac{3}{5}\right) = 29$$
$$z = 57 \therefore z = 57 + \left(50 \times \frac{3}{5}\right) + \left(50 \times \frac{11}{5}\right) = 197$$

- para α_a, os limites para $x_1 = 0$ e $x_2 = 18$
- para α_b, os limites para $x_1 = 6$ e $x_2 = 0$
- para α_c, os limites para $x_1 = 0$ e $x_2 = 10,5$
- para α_d, os limites para $x_1 = 21$ e $x_2 = 0$

Neste caso, o valor obtido em $x_2 = 29$ foi superior aos limites estabelecidos, então não há região permissiva.

Petr Iakovlevitch Ekel
Notas de Aulas - PUC Minas- PPGEE
2008

Dorirley Rodrigo Alves
Notas de aulas - PUC Minas - ICEI
2015

Alguém com dúvida?!