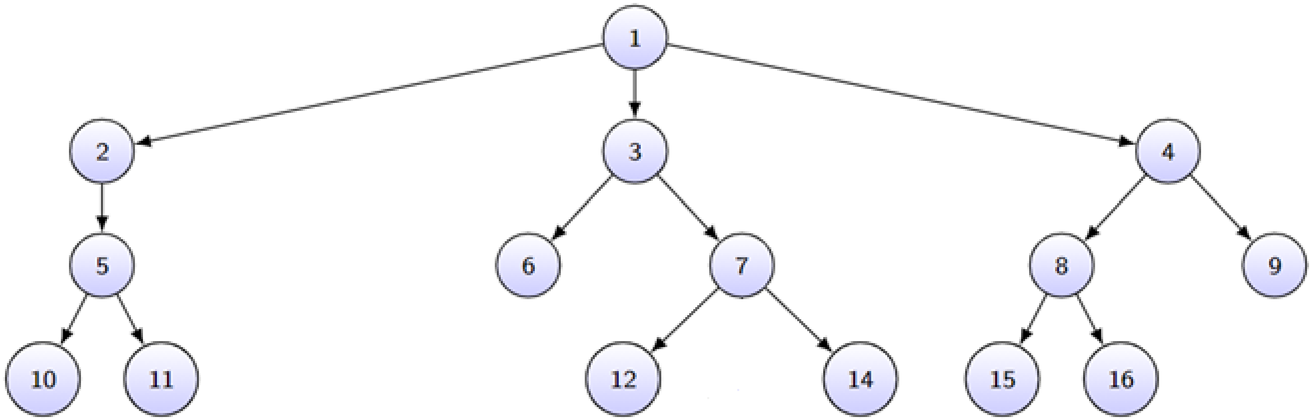
v1.1

INFORMATIQUE 3

V. AVL



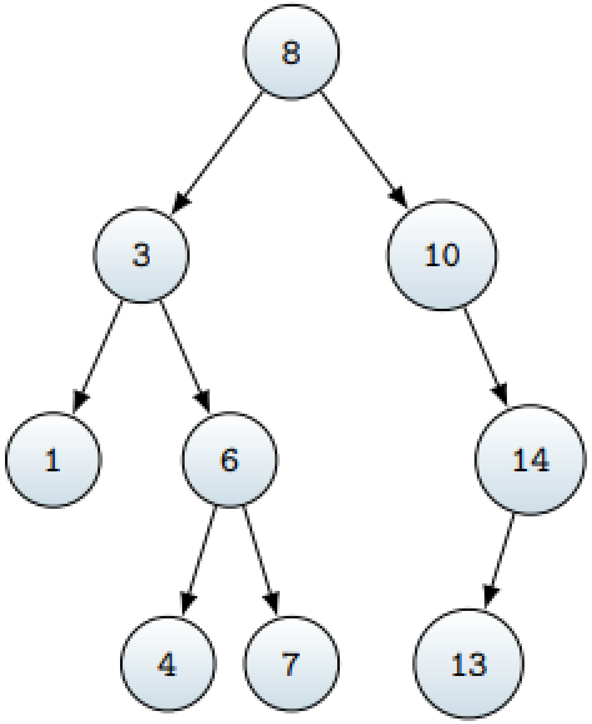
Eva ANSERMIN & Renaud VERIN & Romuald GRIGNON

I. Optimisation de la recherche dans un ABR

E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

ABR : Rappel

- L'arbre binaire de recherche est un type arbre binaire permettant d'optimiser la recherche d'élément dans l'arbre. Il obéit à des règles de construction.

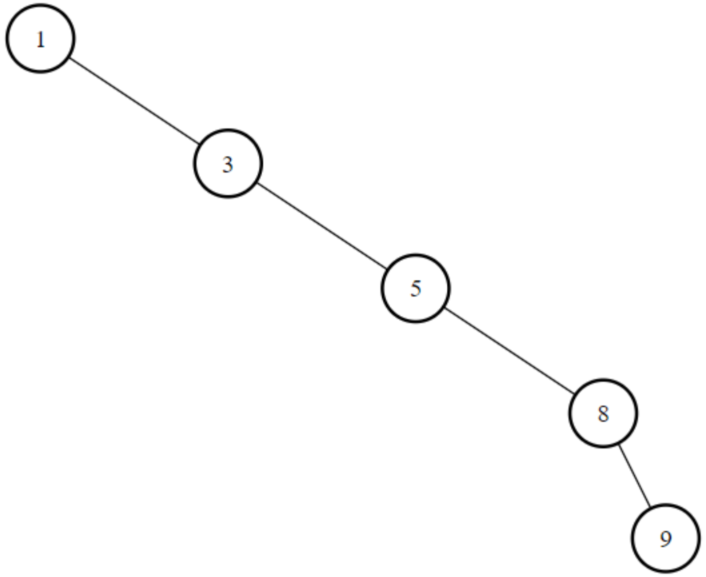


Configuration de l’ABR

- Construire un ABR en insérant les éléments suivant dans l’ordre : 1 , 3 , 5 , 8, 9

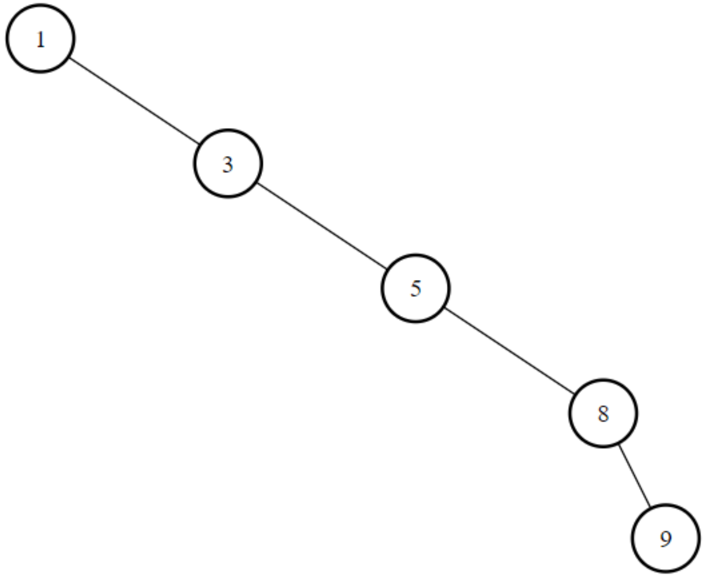
Configuration de l'ABR

- Construire un ABR en insérant les éléments suivant dans l'ordre : 1 , 3 , 5 , 8, 9



Configuration de l'ABR

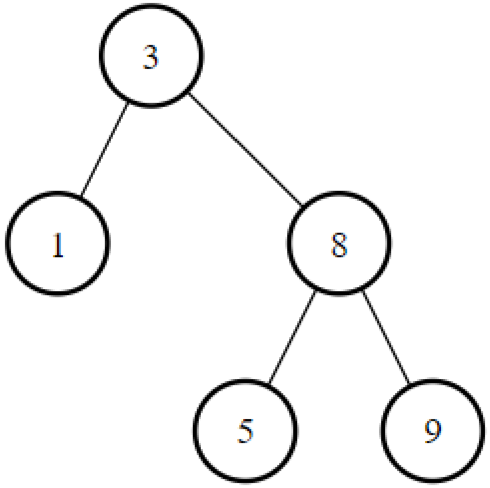
- Construire un ABR en insérant les éléments suivant dans l'ordre : 1 , 3 , 5 , 8, 9



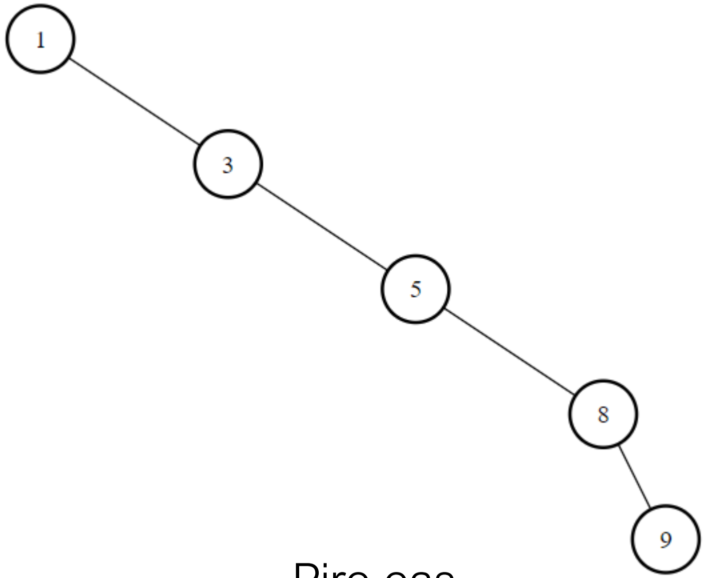
- Dans un arbre filiforme, la complexité de l'algorithme de recherche est en O(n)

Complexité et équilibre

- Complexité: Le nombre d'appels récursifs pour la recherche ou les autres opérations dépend de la configuration de l'ABR.
- Dans le pire des cas, l'arbre est filiforme, l'opération est en O(n).
- Dans le meilleur des cas, l'arbre est *équilibré* entre sa partie droite et gauche (O($\log_2(n)$))



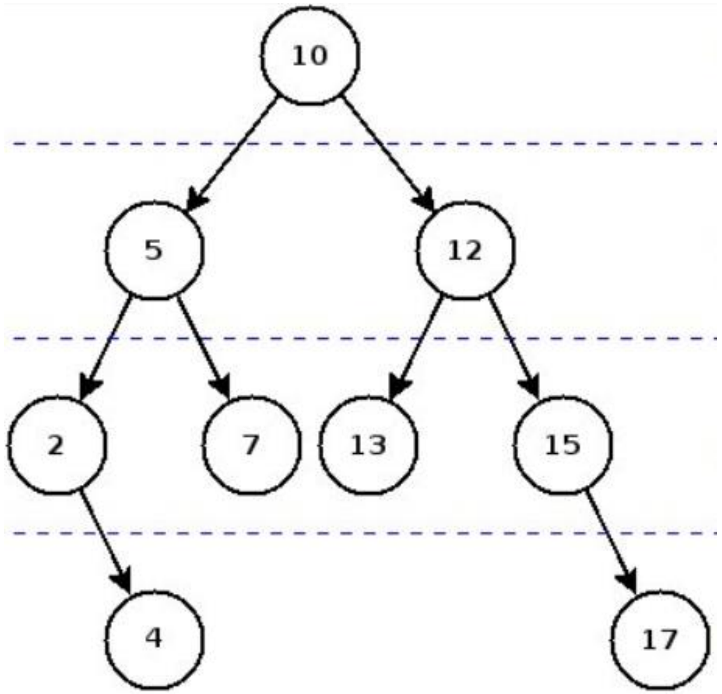
Meilleur cas



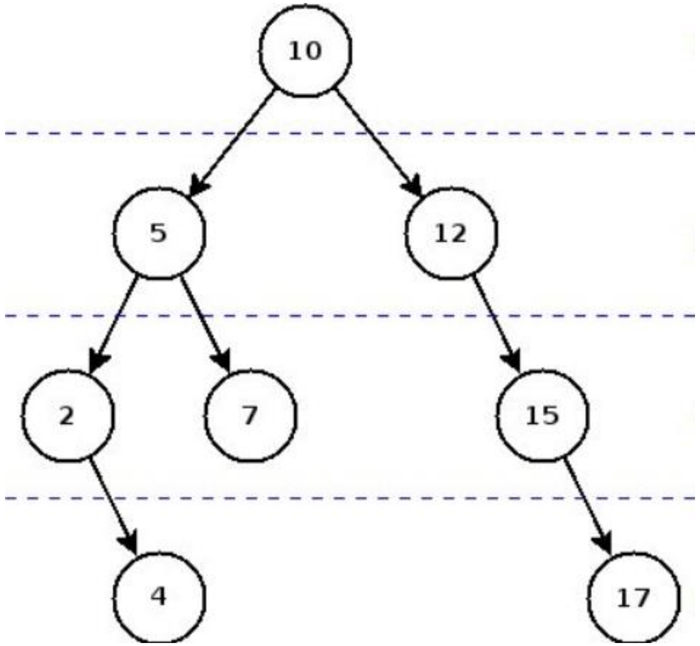
Pire cas

Arbre équilibré

- Un arbre équilibré est un arbre qui maintient une profondeur équilibrée entre ses branches. Chaque nœud interne a le nombre maximum de fils.



Arbre équilibré



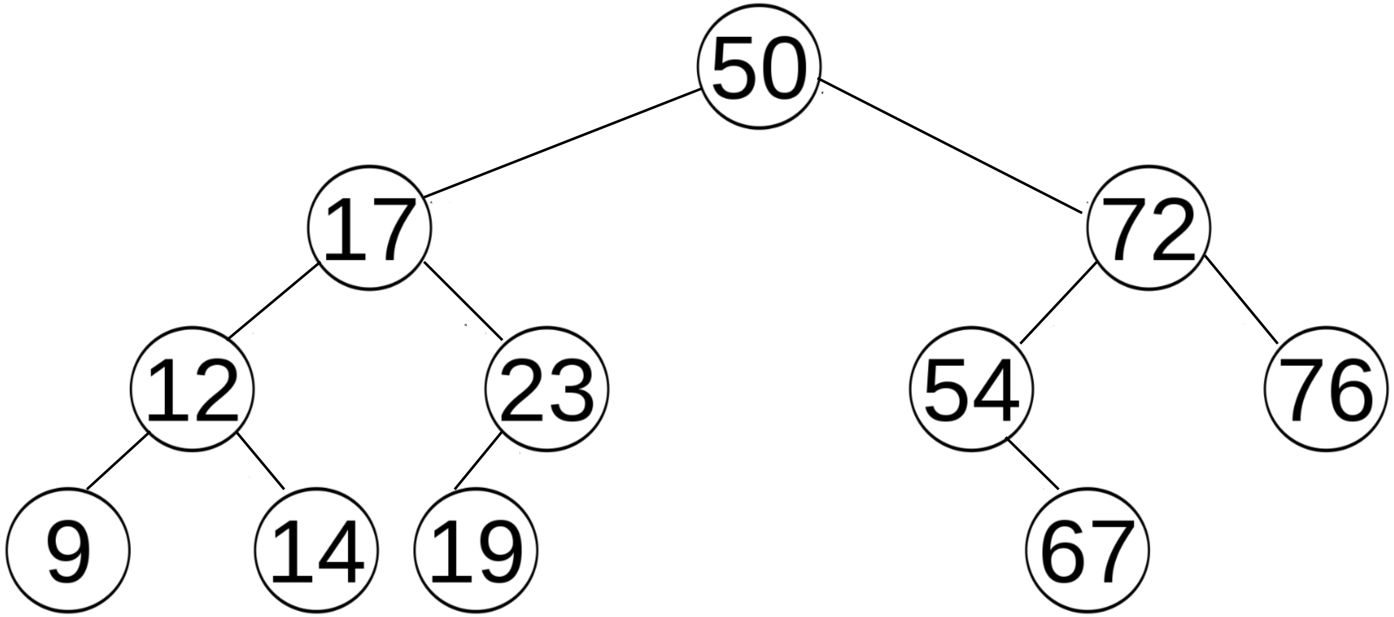
Arbre non-équilibré ou dégénéré

II. AVL : introduction

AVL : définition

- Un AVL, arbre binaire de recherche automatiquement équilibré, est un **arbre binaire de recherche « auto-équilibré »:** il reste équilibré après opération.

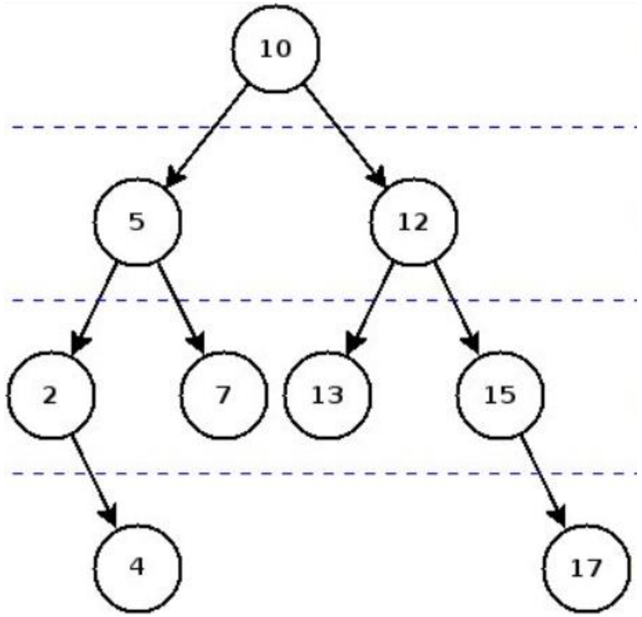
- Une série d'ajouts ou de suppressions dans un ABR peut déséquilibrer l'arbre et conduire à des opérations de complexité O(n) dans le pire des cas. Les arbres AVL utilisent des algorithmes de rééquilibrage pour éviter cela.



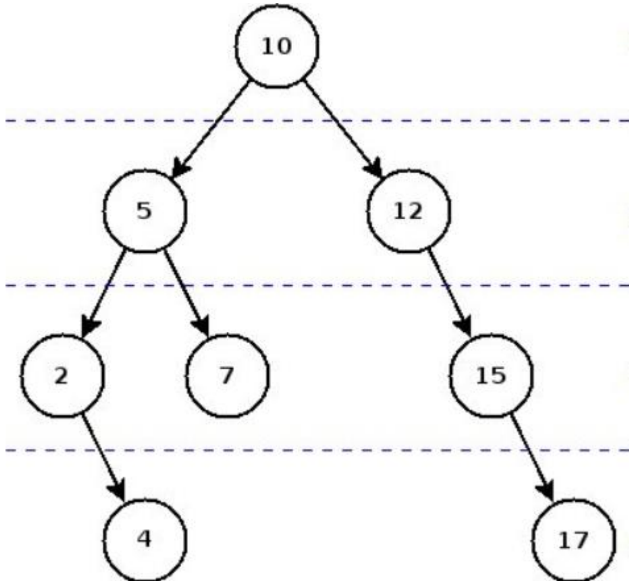
Facteur d'équilibrage

- Pour chaque nœud, on considère la hauteur du nœud.
- Lors d'une opération de transformation, la hauteur d'un nœud peut être modifiée On calcule alors un facteur d'équilibre de l'arbre :

  hauteur du sous arbre droit - hauteur du sous arbre gauche
- Il est recalculé après chaque opération
- Il permet de définir si un rééquilibrage est nécessaire



Arbre équilibré



Arbre non-équilibré ou dégénéré

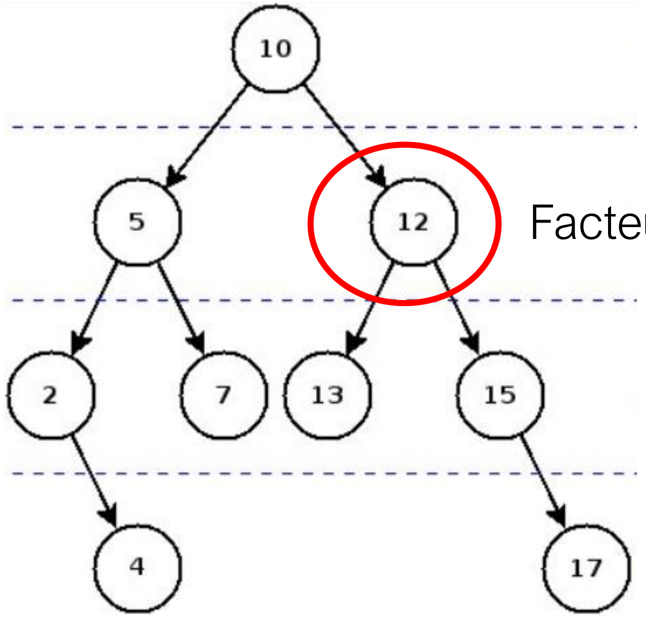
E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Facteur d’équilibrage

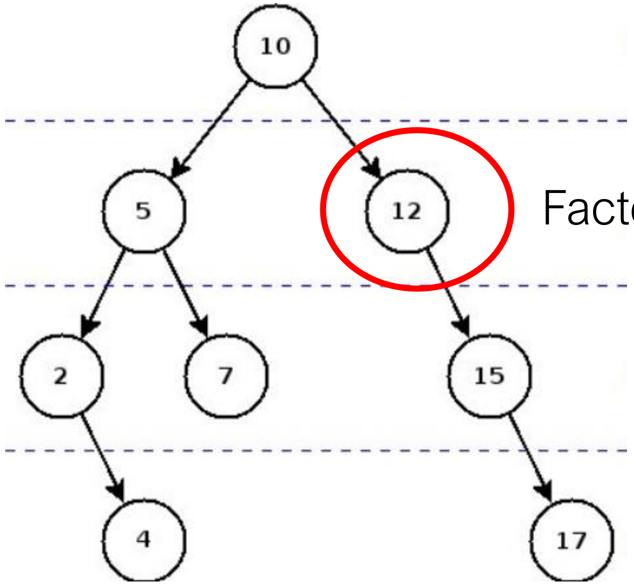
- Pour chaque nœud, on considère la hauteur du nœud
- Lors d’une opération de transformation, la hauteur d’un nœud peut être modifiée On calcule alors un facteur d’équilibre de l’arbre :

hauteur du sous arbre droit - hauteur du sous arbre gauche

- Il est recalculé après chaque opération
- Il permet de définir si un rééquilibrage est nécessaire



Facteur d’équilibre = 1



Facteur d’équilibre = 2

Arbre équilibré

Arbre non-équilibré ou dégénéré

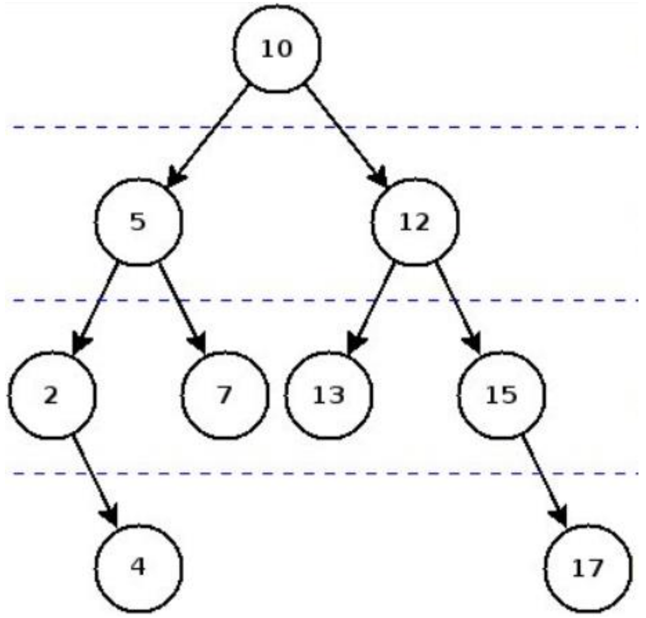
Facteur d’équilibrage

- Pour chaque nœud, on considère la hauteur du nœud
- Lors d’une opération de transformation, la hauteur d’un nœud peut être modifiée On calcule alors un facteur d’équilibre de l’arbre :

  hauteur du sous arbre droit - hauteur du sous arbre gauche
- Il est recalculé après chaque opération
- Il permet de définir si un rééquilibrage est nécessaire

- Un arbre est équilibré ⇔ | facteur d’équilibre | < 2 pour tous les nœuds.

Construction d’un AVL

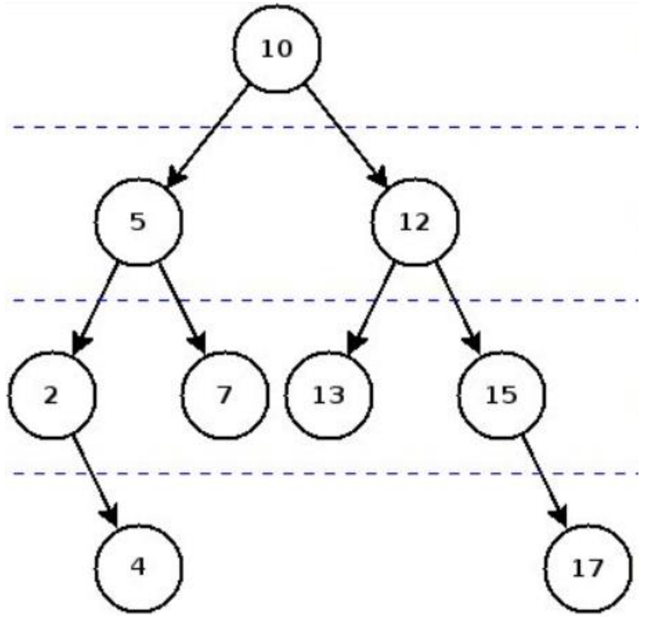


- Structure d’un nœud d’un AVL:

```
Structure Arbre :
        elmt : Element // contenu du nœud
        fg, fd : pointeur sur structure Arbre // fils gauche et droit
        equilibre : entier  // facteur d’équilibre du nœud = hauteur sous arbre droit
- hauteur sous-arbre gauche.
```

Construction d’un AVL

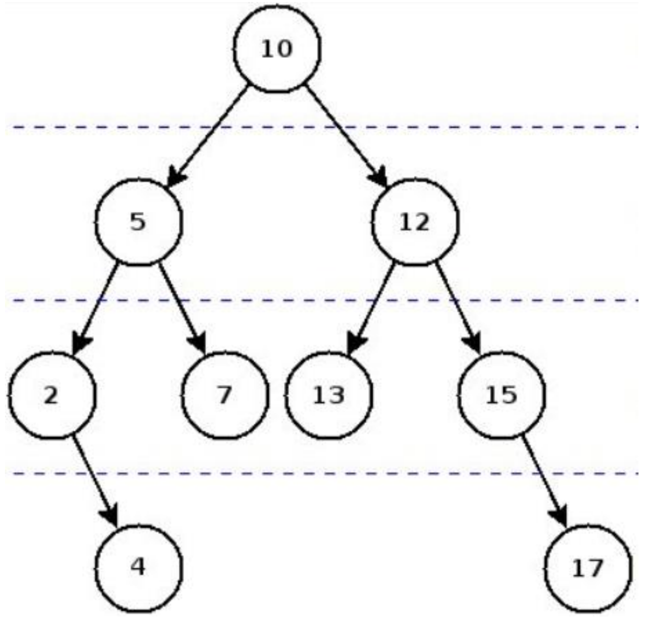
- Déclaration et initialisation d’un nœud




```
FONCTION creerArbre(r: Element) : ptr sur Arbre
VARIABLE
        noeud : ptr sur Arbre
DEBUT
        noeud ← reserverMemoire(Arbre)
        elmt(noeud) ← r
        fg(noeud) ← ??
        fd(noeud) ← ??
        equilibre(noeud) ← ??
        RETOURNER noeud
FIN
```

Construction d’un AVL

- Déclaration et initialisation d’un nœud



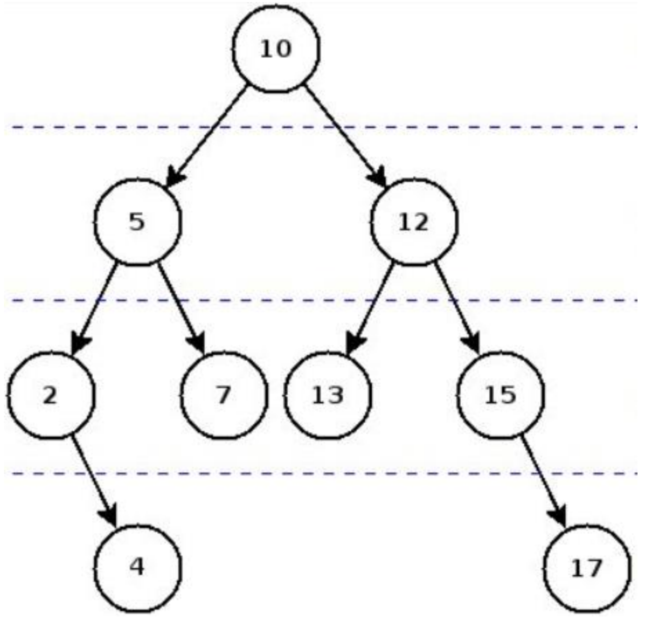

```
FONCTION creerArbre(r: Element) : ptr sur Arbre
VARIABLE
        noeud : ptr sur Arbre
DEBUT
        noeud ← reserverMemoire(Arbre)
        elmt(noeud) ← r
        fg(noeud) ← NULL // Le noeud n’a pas de fils à sa création
        fd(noeud) ← NULL
        equilibre(noeud) ← 0 // Le noeud n’a pas de fils: son equilibre est 0
        RETOURNER noeud
FIN
```


E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

III. AVL : opérations

Opération de recherche

- Puisque l'AVL respecte les propriétés d'un ABR, l'algorithme de recherche ne change pas :
  - Recherche dans le sous-arbre gauche si la valeur recherchée est inférieure au nœud
  - Recherche dans le sous-arbre droit si la valeur recherchée est supérieure au nœud




```
FONCTION recherche(a: pointeur sur Arbre, e: Element) :
pointeur sur Arbre
DEBUT
    SI (a EST EGAL A NULL) Alors
          RETOURNER NULL
    SINON SI (element(a) EST EGAL A e) Alors
          RETOURNER a
    SINON SI (e EST INF. STRICT. A element(a)) ALORS
          RETOURNER recherche(fg(a),e)
    SINON
          RETOURNER recherche(fd(a),e)
    FIN SI
Fin
```

- L'opération de recherche ne modifie pas l'arbre : pas besoin de rééquilibrage.

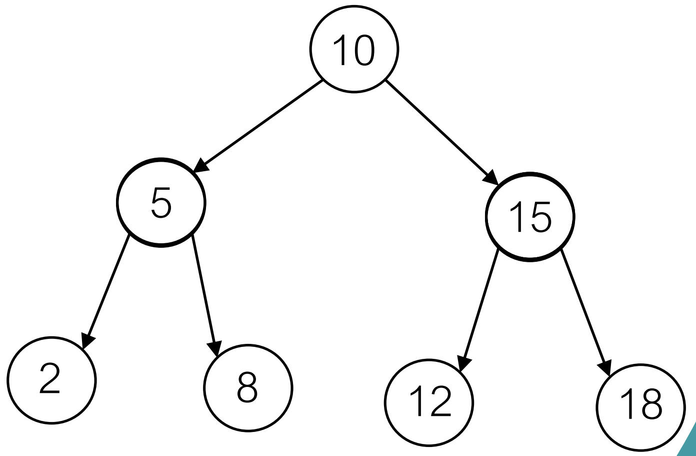
Insertion

- 1ère étape : l'insertion se déroule de la même manière que pour un ABR :

- Algorithme :

```
FONCTION insertionABR(a: pointeur sur Arbre, e: Element) :
pointeur sur Arbre
DEBUT
    SI (a EST EGAL A NULL) ALORS
          RETOURNER creerArbre(e)
    SINON SI (e EST INF. STRICT. A element(a)) ALORS
          fg(a) ← insertionABR(fg(a), e)
    SINON SI (e SUP. STRICT. A element(a)) Alors
           fd(a) ← insertionABR(fd(a), e)
    FIN SI
    RETOURNER a
FIN
```

Exemple : insertionABR(A, 9)

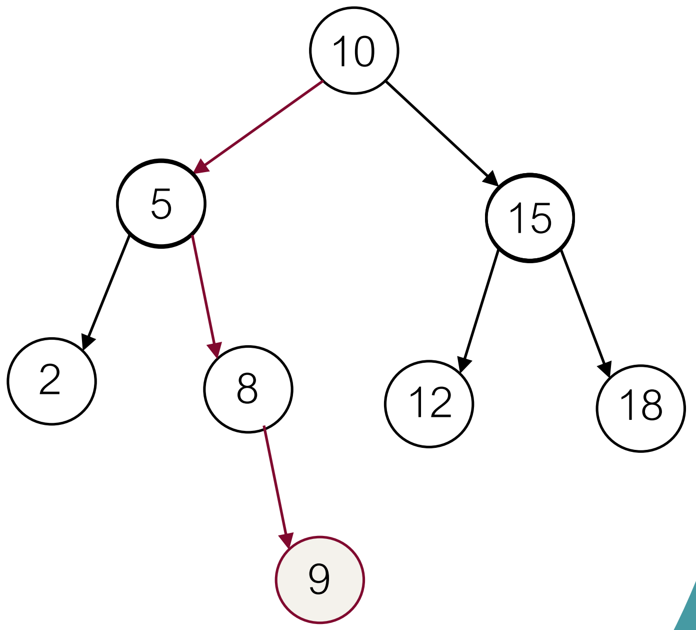


Insertion

- $1^{ère}$ étape : l'insertion se déroule de la même manière que pour un ABR :

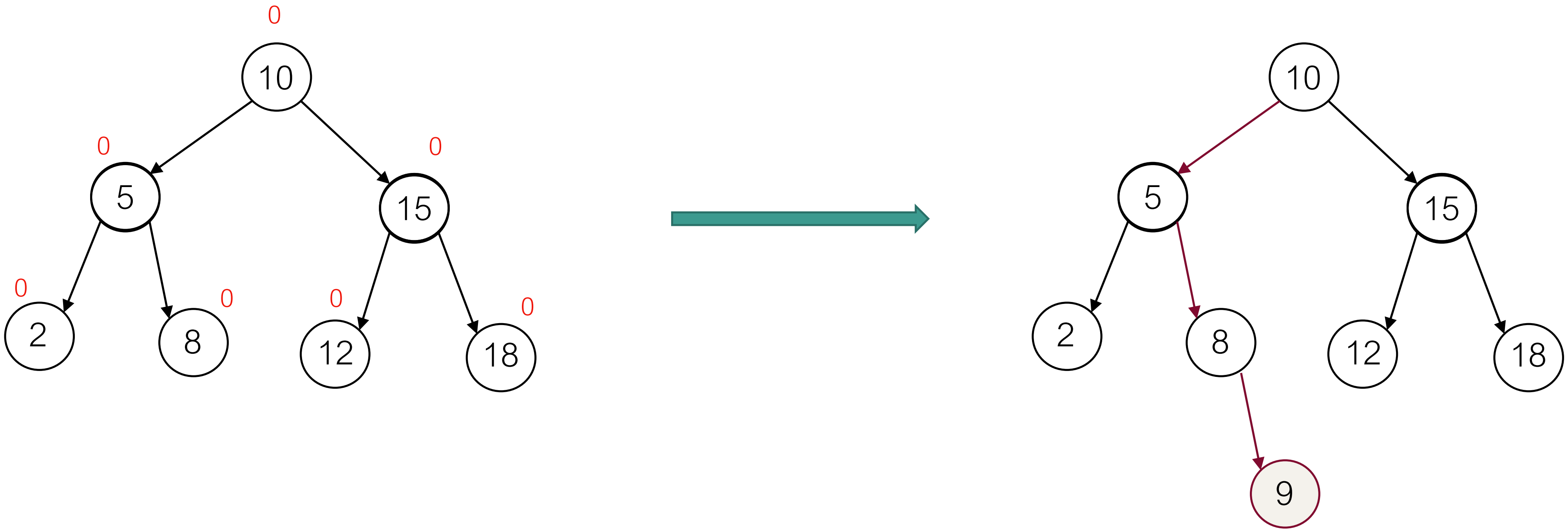
- Algorithme :

```
FONCTION insertionABR(a: pointeur sur Arbre, e: Element) :
pointeur sur Arbre
DEBUT
    SI (a EST EGAL A NULL) ALORS
          RETOURNER creerArbre(e)
    SINON SI (e EST INF. STRICT. A element(a)) ALORS
          fg(a) ← insertionABR(fg(a), e)
    SINON SI (e SUP. STRICT. A element(a)) Alors
           fd(a) ← insertionABR(fd(a), e)
    FIN SI
    RETOURNER a
FIN
```



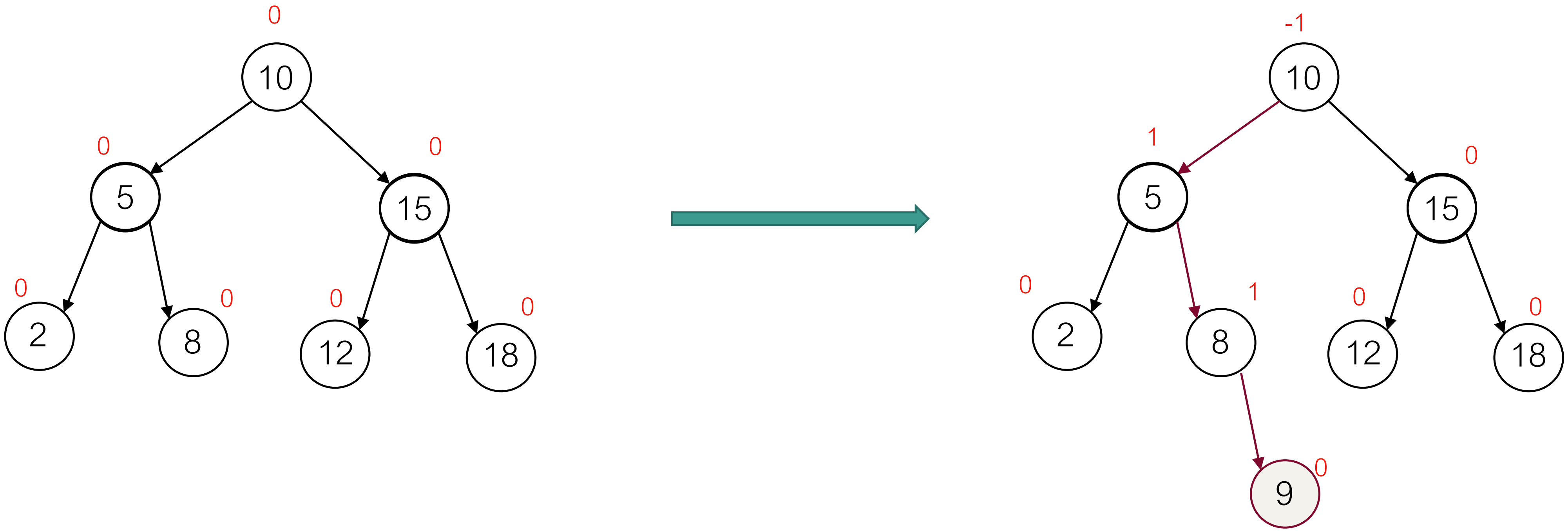
Insertion

- 2ème étape : il faut mettre à jour l'équilibre des nœuds.



Insertion

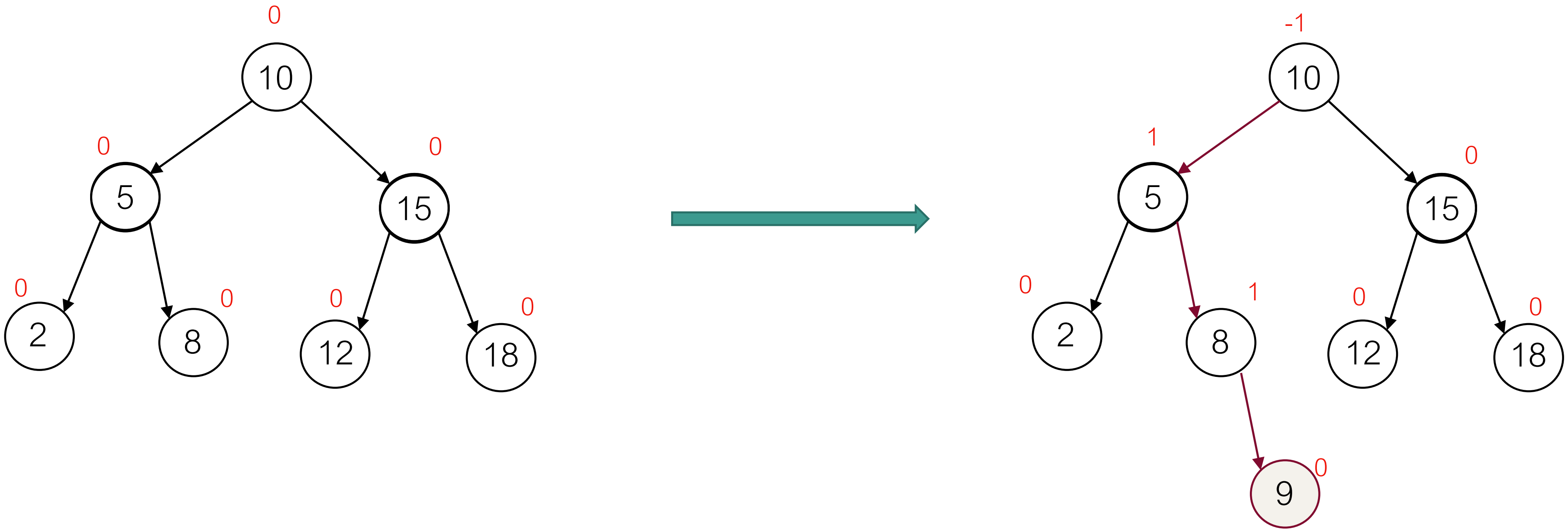
- 2ème étape : il faut mettre à jour l'équilibre des nœuds.



- Seuls les nœuds ancètres ont un facteur d'équilibre modifé.

Insertion

- 2ème étape : il faut mettre à jour l'équilibre des nœuds.



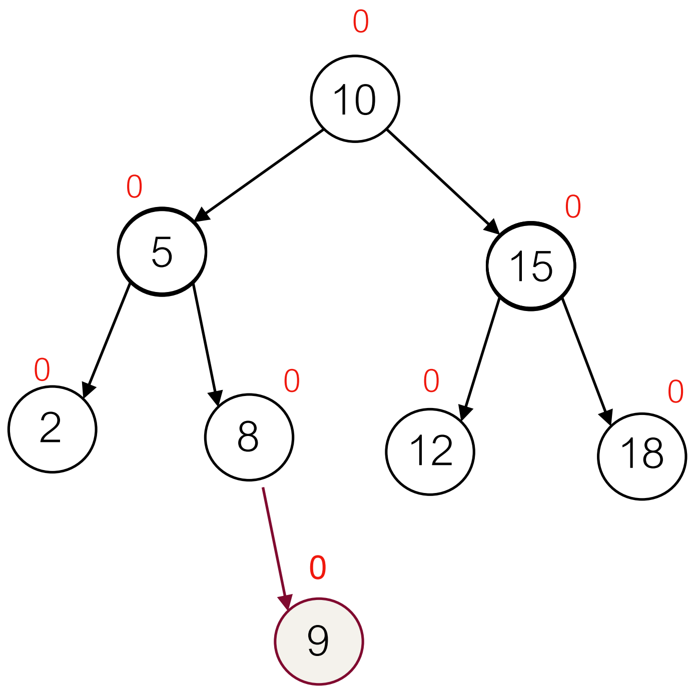
- Dans ce cas, pas besoin de rééquilibrer l'arbre.

Insertion

- 2ème étape : il faut mettre à jour l'équilibre des nœuds.

Principes :

- Le nœud inséré est une feuille : son équilibre est à 0.

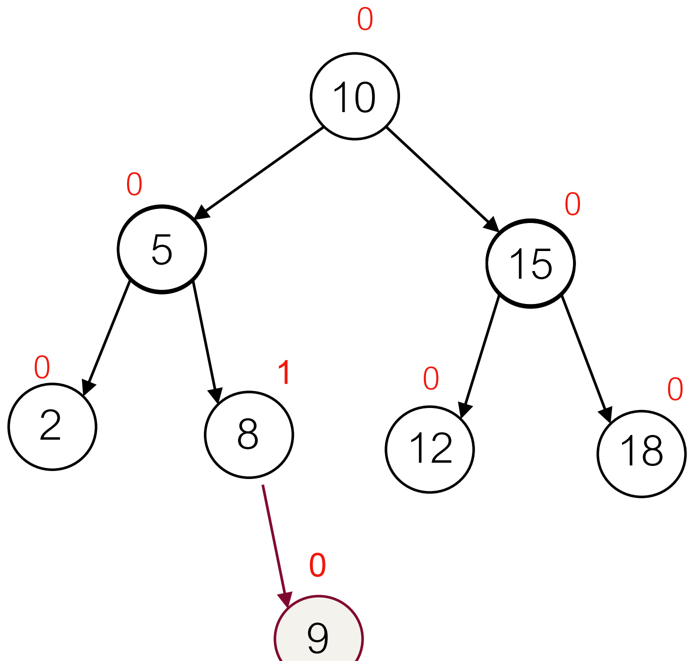


Insertion

- 2ème étape : il faut mettre à jour l'équilibre des nœuds.

Principes :

- Le nœud inseré est une feuille : son équilibre est à 0.
- L' insertion d'un enfant induit un changement dans l'équilibre du nœud parent.
    - -1 si le nouveau nœud est à gauche
    - +1 si le nouveau nœud est à droite



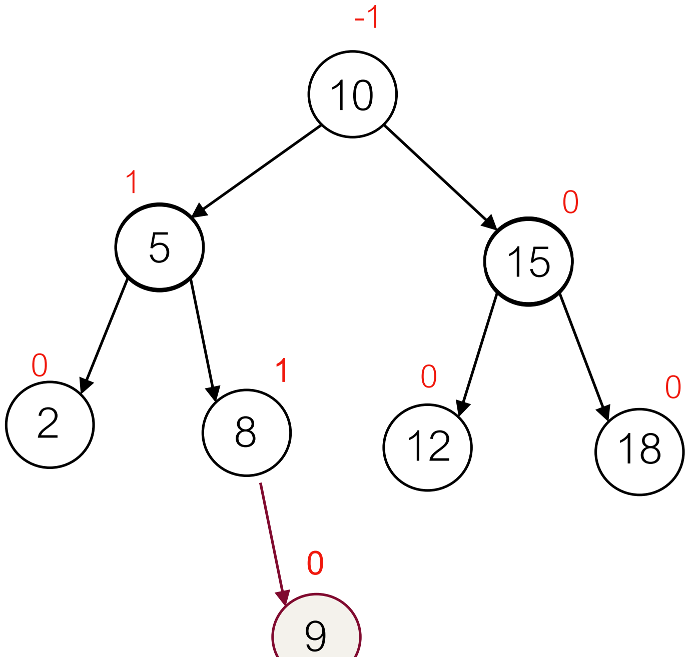
E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Insertion

- 2ème étape : il faut mettre à jour l'équilibre des nœuds.

Principes :

- Le nœud inseré est une feuille : son équilibre est à 0.
- L' insertion d'un enfant induit un changement dans l'équilibre du nœud parent.
  - -1 si le nouveau nœud est à gauche
  - +1 si le nouveau nœud est à droite
- Ce changement est effectué sur tous les ancêtres



Insertion

- 3ème étape : le rééquilibrage.

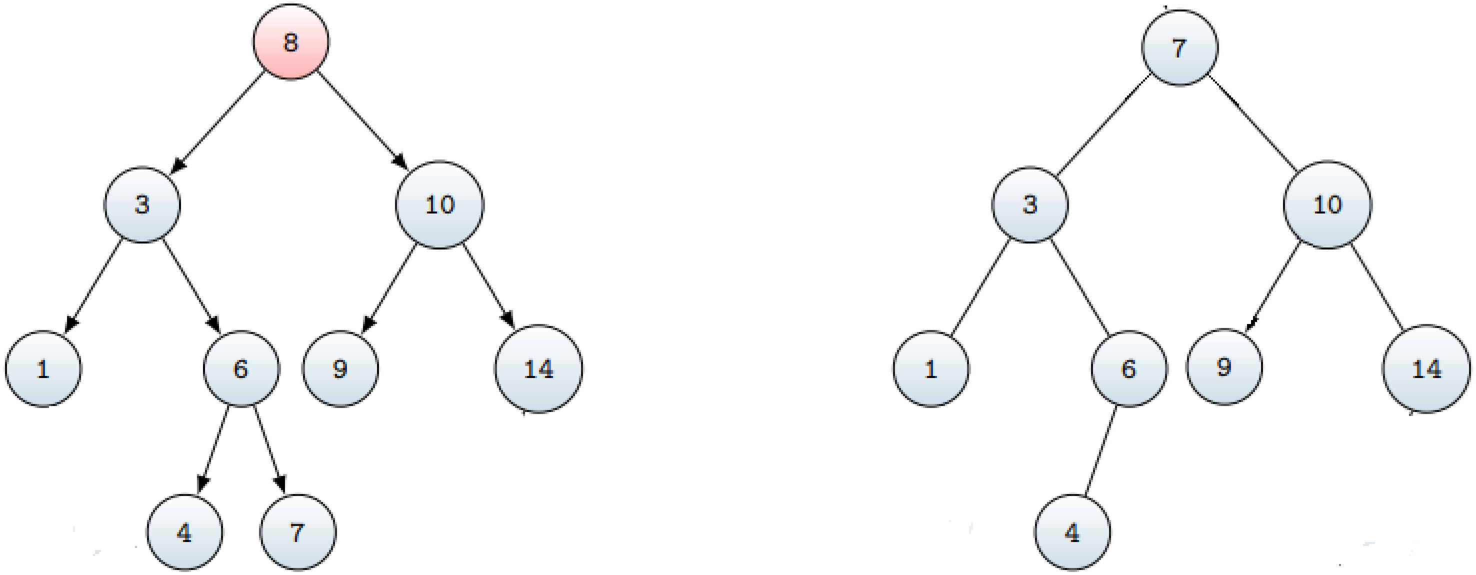
- Algorithme :

```
FONCTION insertionAVL(a: ptr Arbre, e: Element, h: ptr
sur entier) : ptr sur Arbre
DEBUT
    SI (a EST EGAL A NULL) ALORS
          *h=1
          RETOURNER creerArbre(e)
    SINON Si (e INF. STRICT. A element(a)) ALORS
          fg(a) ← insertionAVL(fg(a), e, h)
          *h ← -*h
    SINON Si (e SUP. STRICT. A element(a)) ALORS
          fd(a) ← insertionAVL(fd(a), e, h)
    SINON
          *h= 0
          RETOURNER a
    FIN SI

    SI (*h DIFFERENT DE 0)  ALORS
          equilibre (a) ← equilibre(a) + *h
          a ← equilibrageAVL(a)
          SI (equilibre(a) EST EGAL A 0) ALORS
                *h ← 0
          SINON
                *h ← 1
          FIN SI
    FIN SI
    RETOURNER a
FIN
```

Suppression

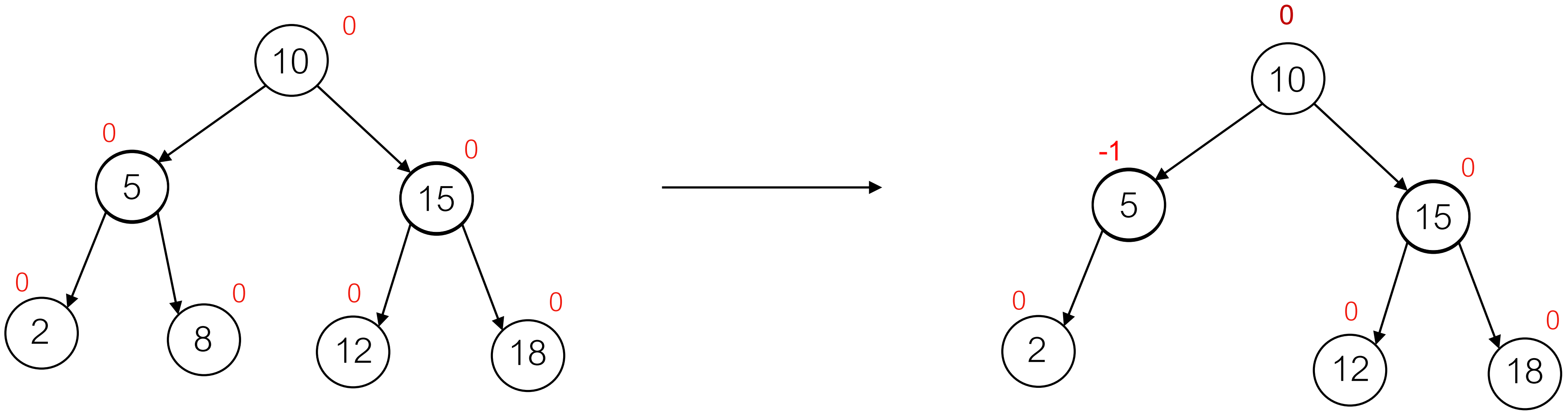
- 1. L'opération de suppression fonctionne comme avec les ABR :
  - Si le nœud à supprimer est une feuille ou n'a qu'un fils, on supprime le nœud / on le remplace par son fils.
  - Sinon on doit échanger les valeurs du nœud à supprimer avec la valeur min du sous arbre droit ou la valeur max du sous arbre gauche.



- Ensuite, un ou plusieurs rééquilibrages peuvent être nécessaires après opération .

Suppression

- 2. Comme pour l'insertion, on met à jour l'équilibre des nœuds en remontant à partir du nœud supprimé :



- 3. On rééquilibre l'AVL si nécessaire (cf. plus bas, fonction *equilibrageAVL*)

Suppression

- Algorithme:

```
FONCTION suppressionAVL(a: ptr sur Arbre, e: element, h: ptr sur Element) : pointeur sur Arbre
VARIABLE
          tmp : ptr sur Arbre
DEBUT
      SI (a EST EGAL A NULL) ALORS
            *h ← 1
            RETOURNER a
      SINON SI (e SUP. STRICT. A element(a)) ALORS                         // parcours pour trouver le noeud
            fd(a) ← suppressionAVL(fd(a), e)
      SINON SI (e INF. STRICT. A element(a))  ALORS
            fg(a) ← suppressionAVL(fg(a), e)
            *h ← -*h
      SINON SI (existeFilsDroit(a)) ALORS                                  // si il y a un fils droit…
            fd(a) ← suppMinAVL( fd(a), h, adresse(element(a)) )        // … on cherche le minimum dedans
      SINON
            tmp ← a             // le noeud n'a qu'un fils gauche ou aucun fils
            a ← fg(a)           // échange avec le fils gauche et suppression
            libérer(tmp)
            *h ← -1
            RETOURNER a
      FIN SI
      SI (*h DIFFERENT DE 0) ALORS
            equilibre(a) ← equilibre (a) + *h
            SI (equilibre(a) EST EGAL A 0) ALORS
                  *h ← -1
            SINON
                  *h ← 0
            FIN SI
      FIN SI
      RETOURNER a
FIN
```

```
SI (a EST EGAL A NULL) ALORS
      RETOURNER a
FIN SI
```

a ← equilibrageAVL(a)

Suppression

- Algorithme:

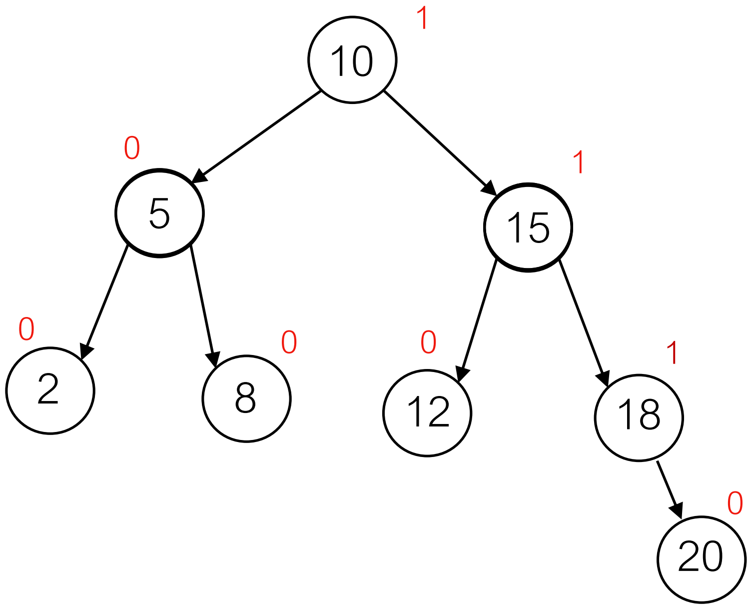
```
FONCTION suppMinAVL(a: Arbre; h: pointeur sur entier, pe: ptr sur  Element) : ptr sur Arbre
VARIABLE
tmp : ptr sur Arbre
DEBUT
      SI (fg(a) EST EGAL A NULL) ALORS               // Si il n'y a plus de fils gauche…
              *pe ← element(a)                       // … alors on a trouvé la plus petite valeur de l'arbre
              *h ← -1
              tmp ← a
              a ← fd(a)                              // on remplace le noeud actuel par le fils droit…
              liberer(tmp)                           // … et on libère la mémoire du noeud
              RETOURNER a
      SINON
              fg(a) ← suppMinAVL(fg(a), h, pe)       // appel récursif sur le sous-arbre de gauche
              *h ← -*h
      FIN SI
      SI (*h DIFFERENT DE 0) ALORS
              equilibre(a) ← equilibre(a) + *h       // mise à jour du facteur d'équilibrage
              SI (equilibre(a) EST EGAL A 0) ALORS
                      *h ← -1
              SINON
                      *h ← 0
              FIN SI
      FIN SI
      RETOURNER a
FIN
```

a ← equilibrageAVL(a)

IV. Equilibrage d’un AVL

Rotation simple

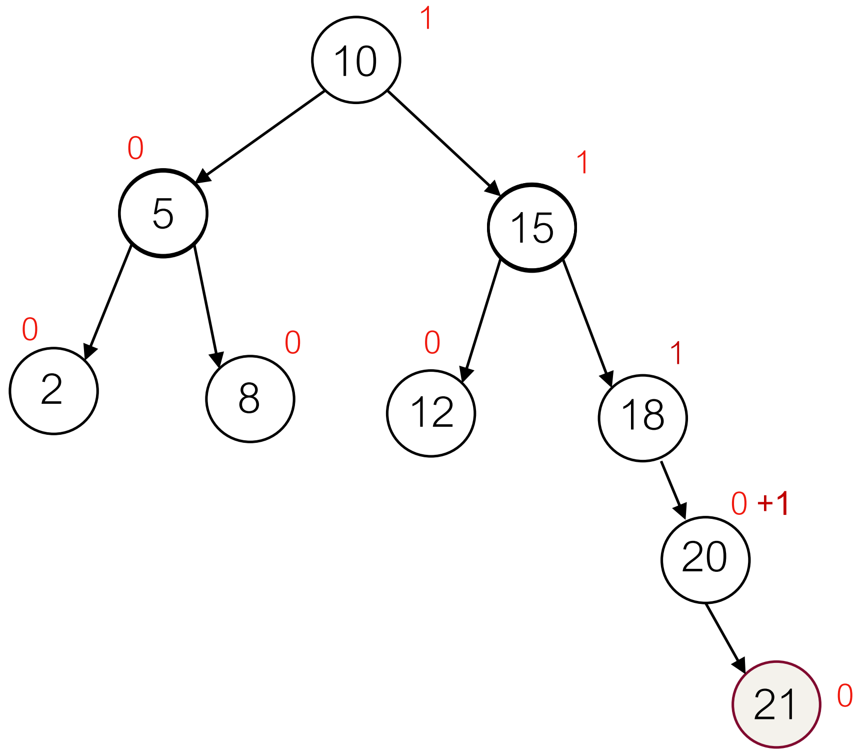
- L'opération de rééquilibrage dépend de la structure de l'arbre après une opération d'insertion/suppression.
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre.



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation simple

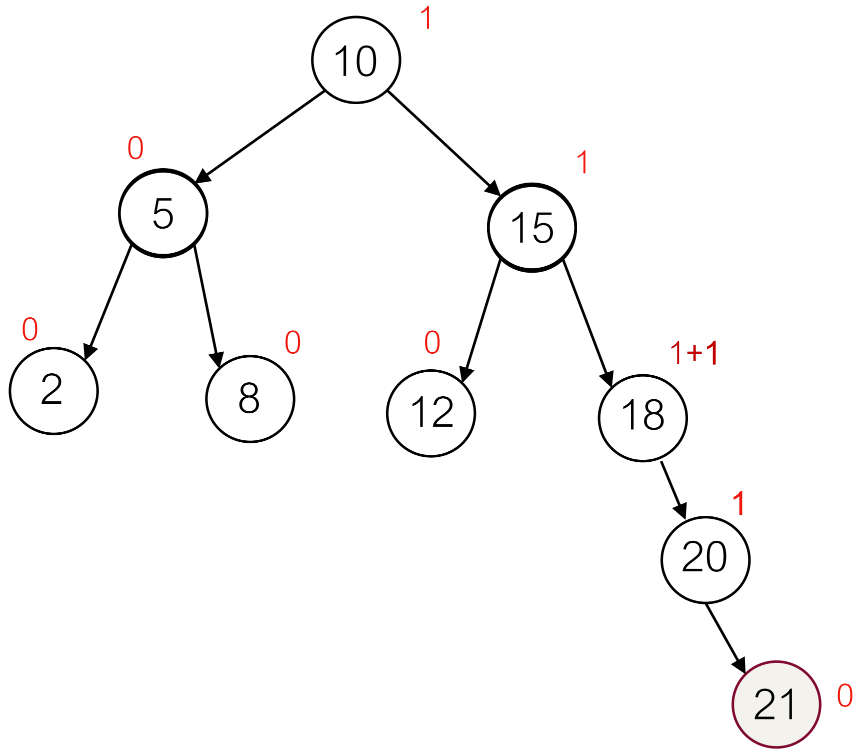
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre.



La modification de l 'équilibre des nœuds se fait en remontant les parents

Rotation simple

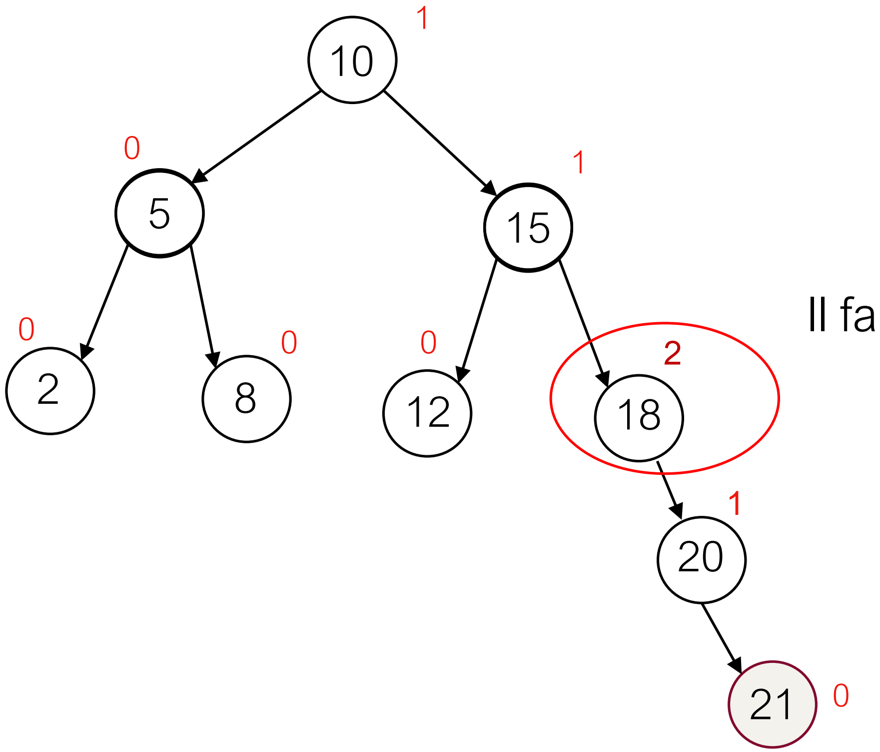
- Cas 1 : L’ élément ajouté est tout à droite de l’arbre.



La modification de l ’équilibre des nœuds se fait en remontant les parents

Rotation simple

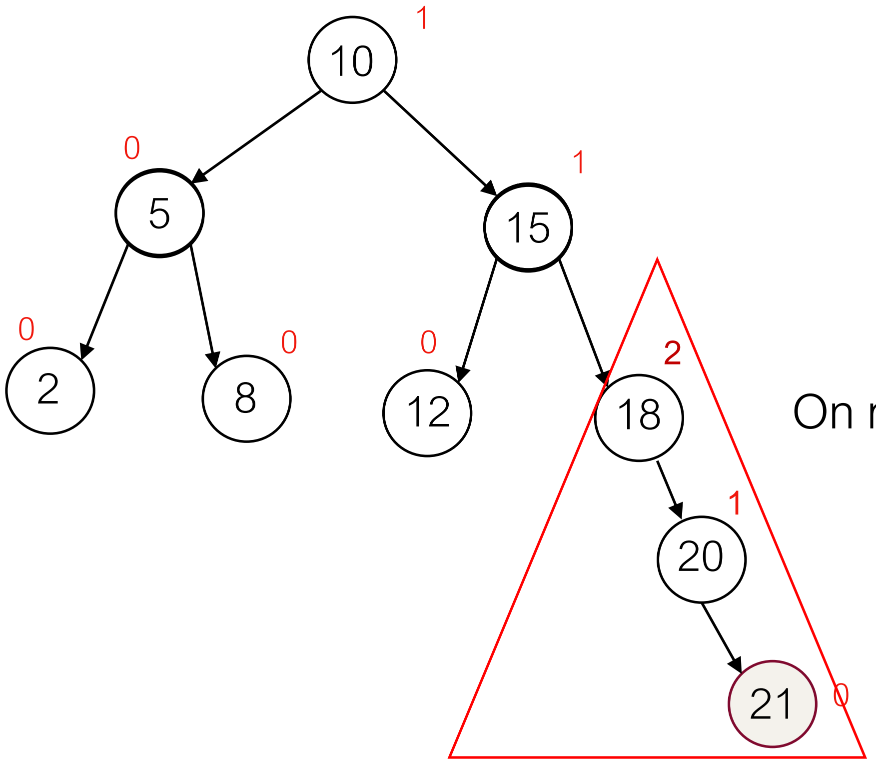
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre.



Il faut rééquilibrer

Rotation simple

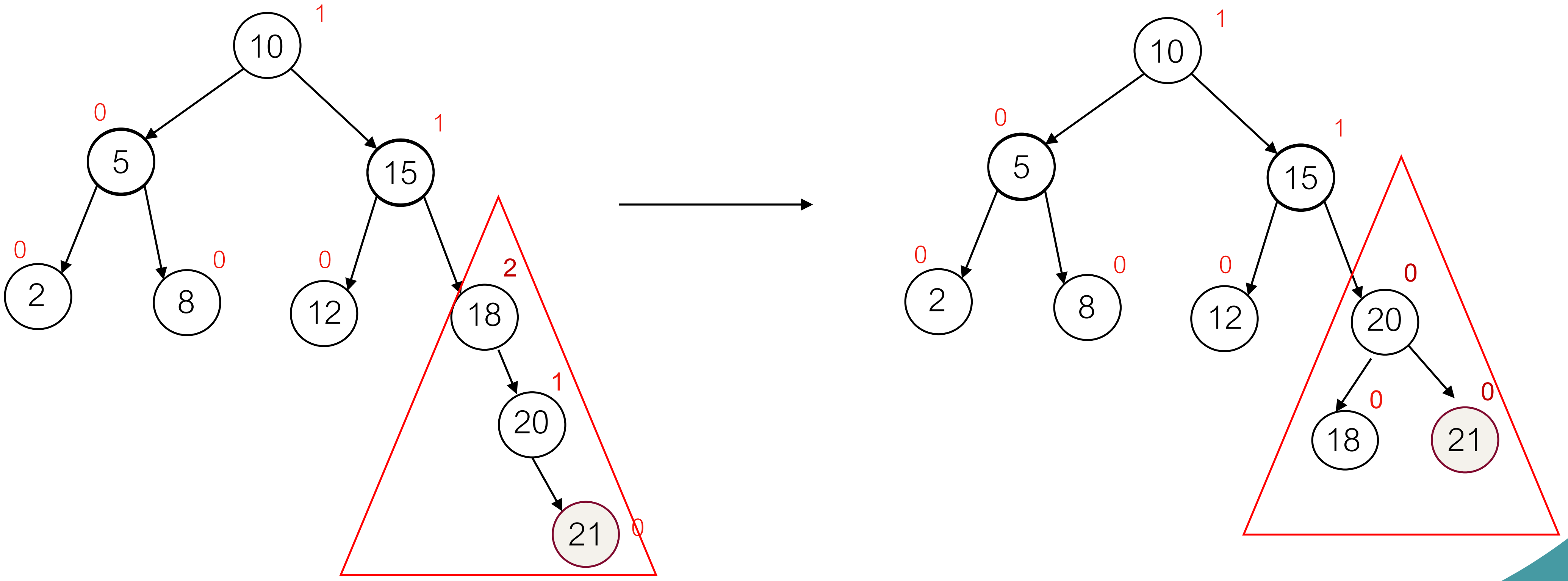
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre.



On modifie ce sous-arbre

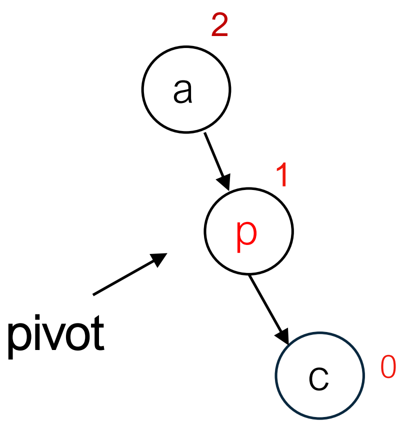
Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche



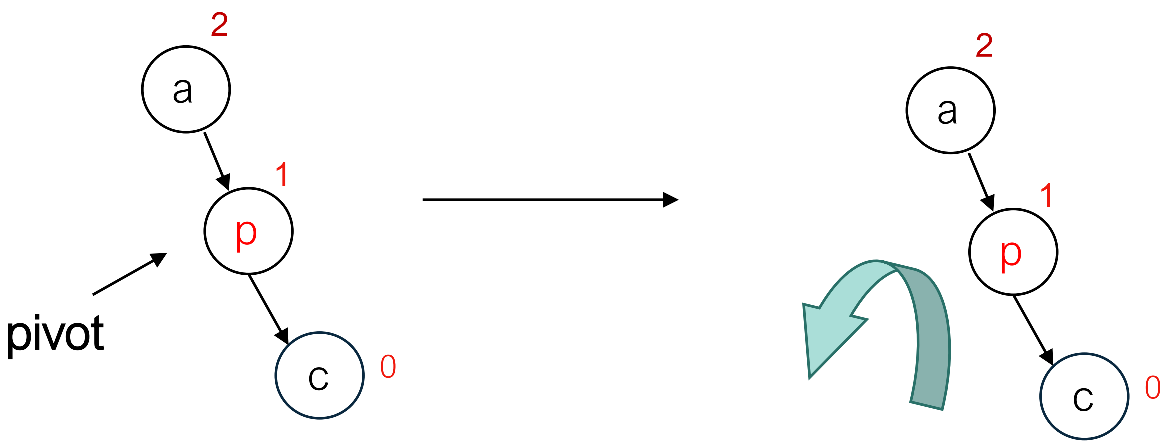
Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
  - L'element intermédiaire doit devenir la racine du sous-arbre équilibré ; l'arbre doit tourner autour de cet élément : c'est le pivot.



Rotation simple

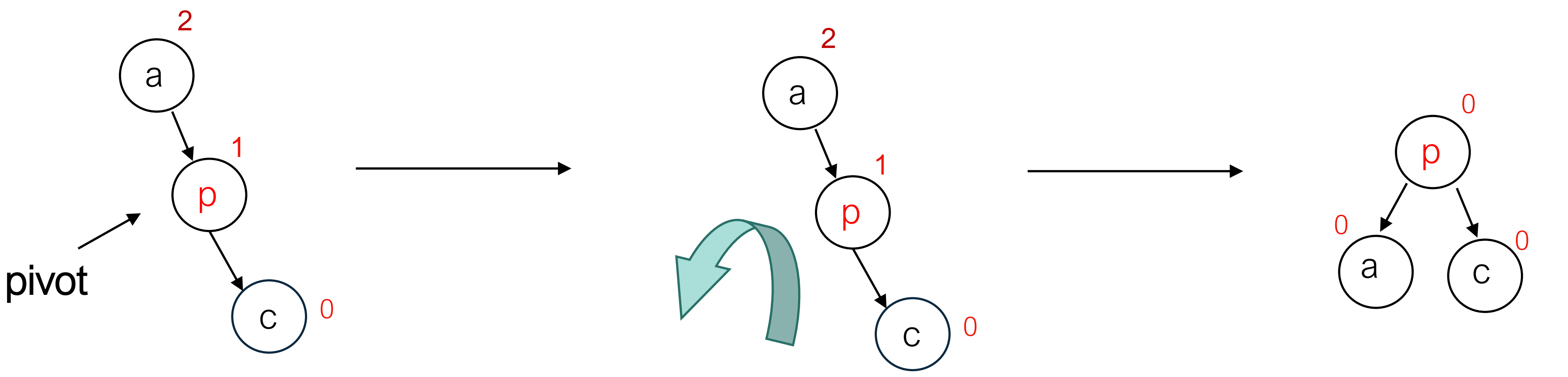
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
    - L'element intermédiaire doit devenir la racine du sous-arbre équilibré ; l'arbre doit tourner autour de cet élément : c'est le pivot.



On tourne le sous arbre vers la gauche autour du **pivot**.

Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
  - L'element intermédiaire doit devenir la racine du sous-arbre équilibré ; l'arbre doit tourner autour de cet élément : c'est le pivot.

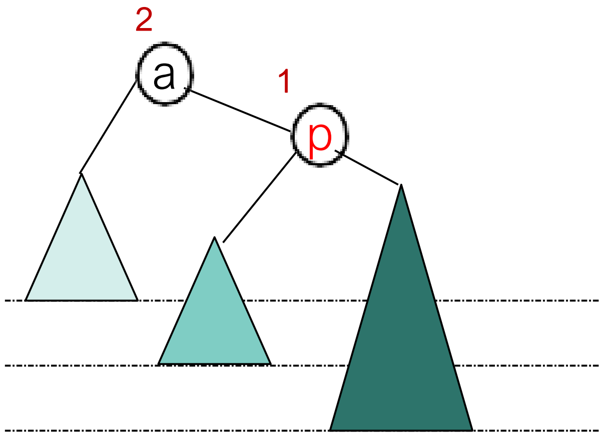


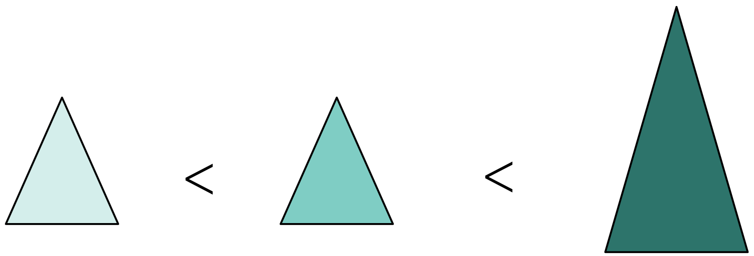
On tourne le sous arbre vers la gauche autour du **pivot**.

Arbre équilibré

Rotation simple

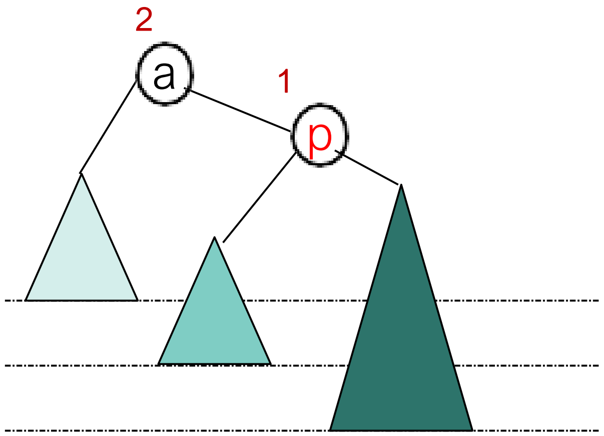
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
    - Schema general de la rotation gauche :



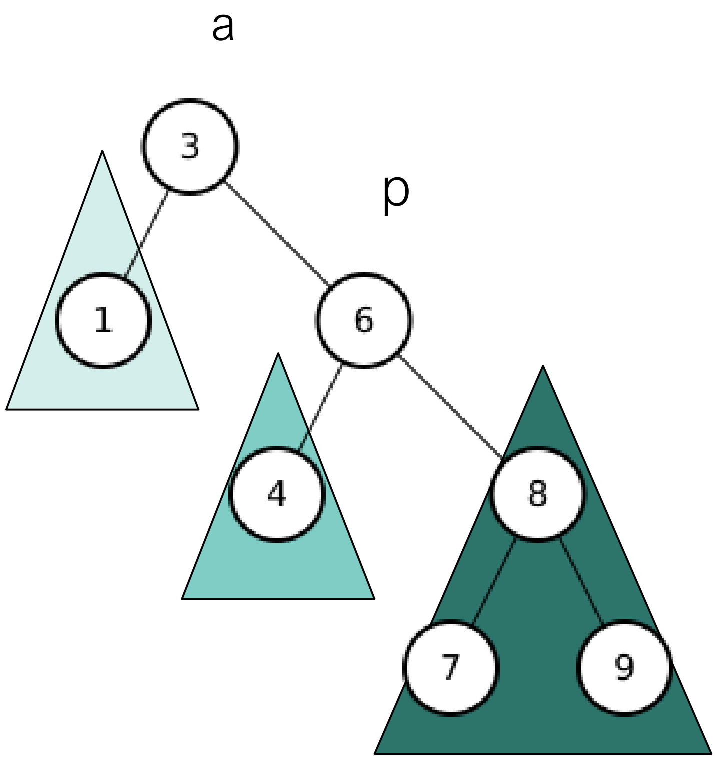


Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
    - Schema general de la rotation gauche :

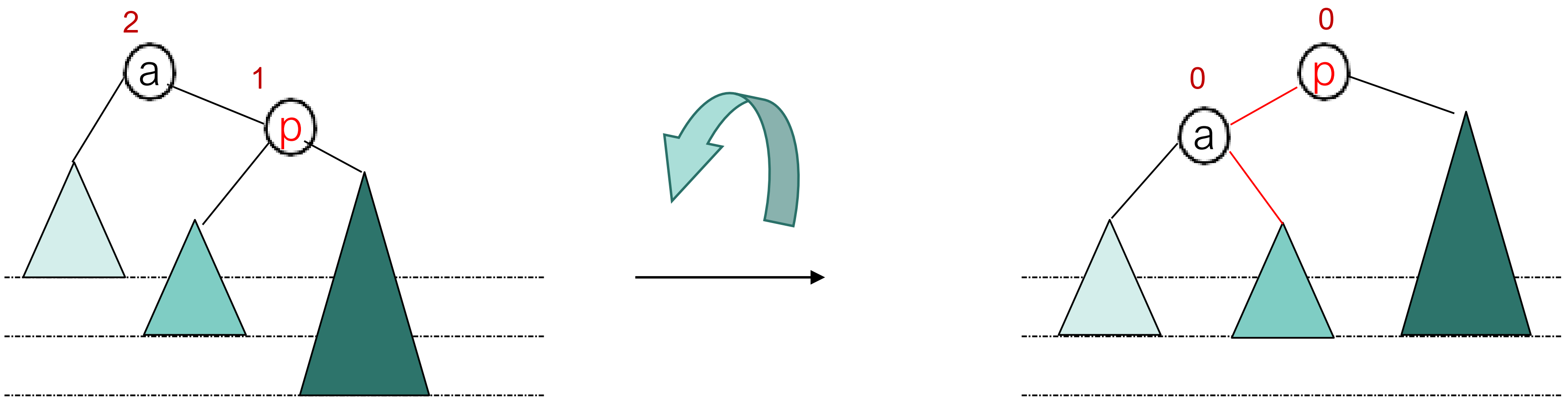


Exemple :



Rotation simple

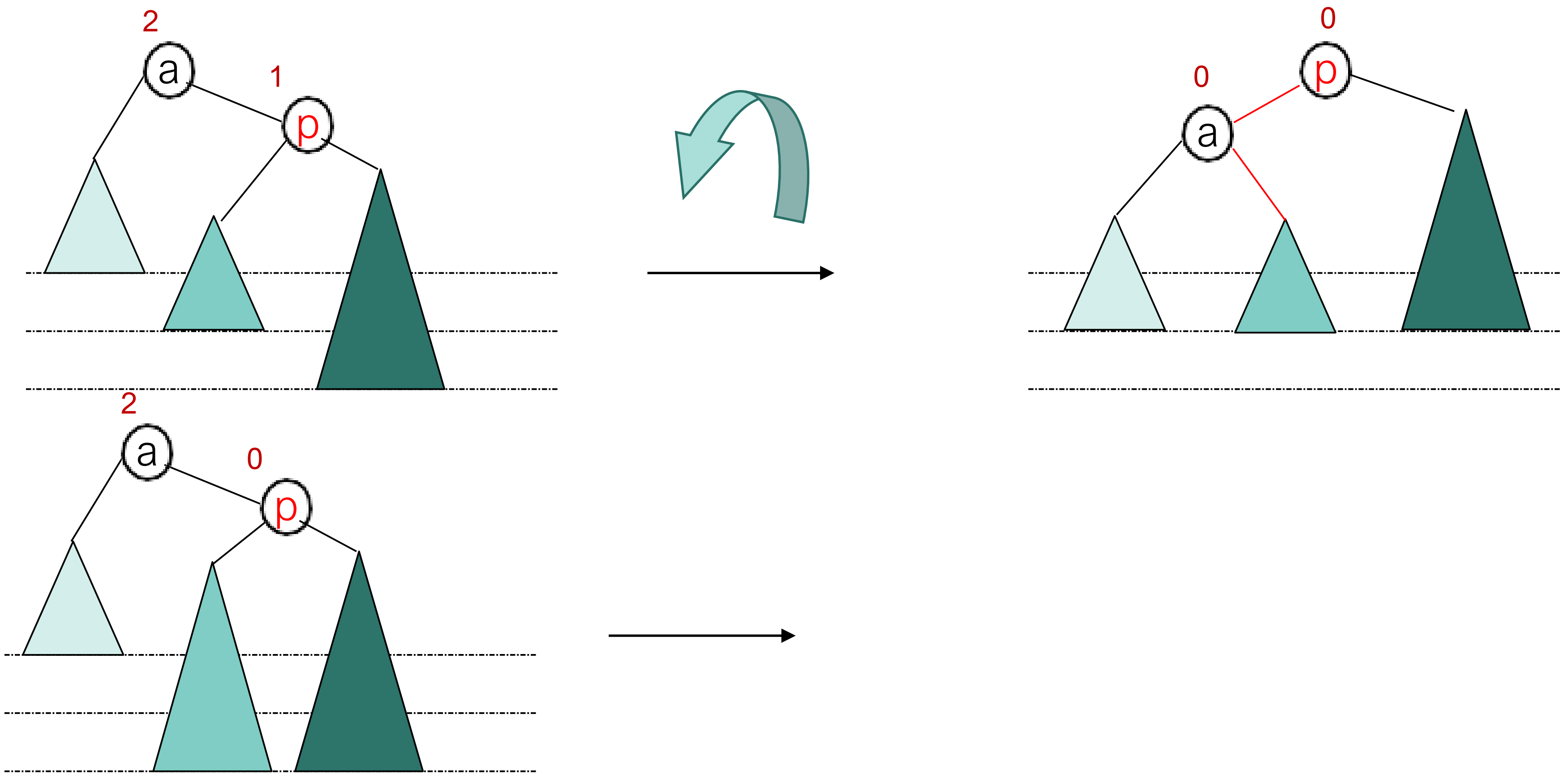
- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
  - Schema general de la rotation gauche :



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

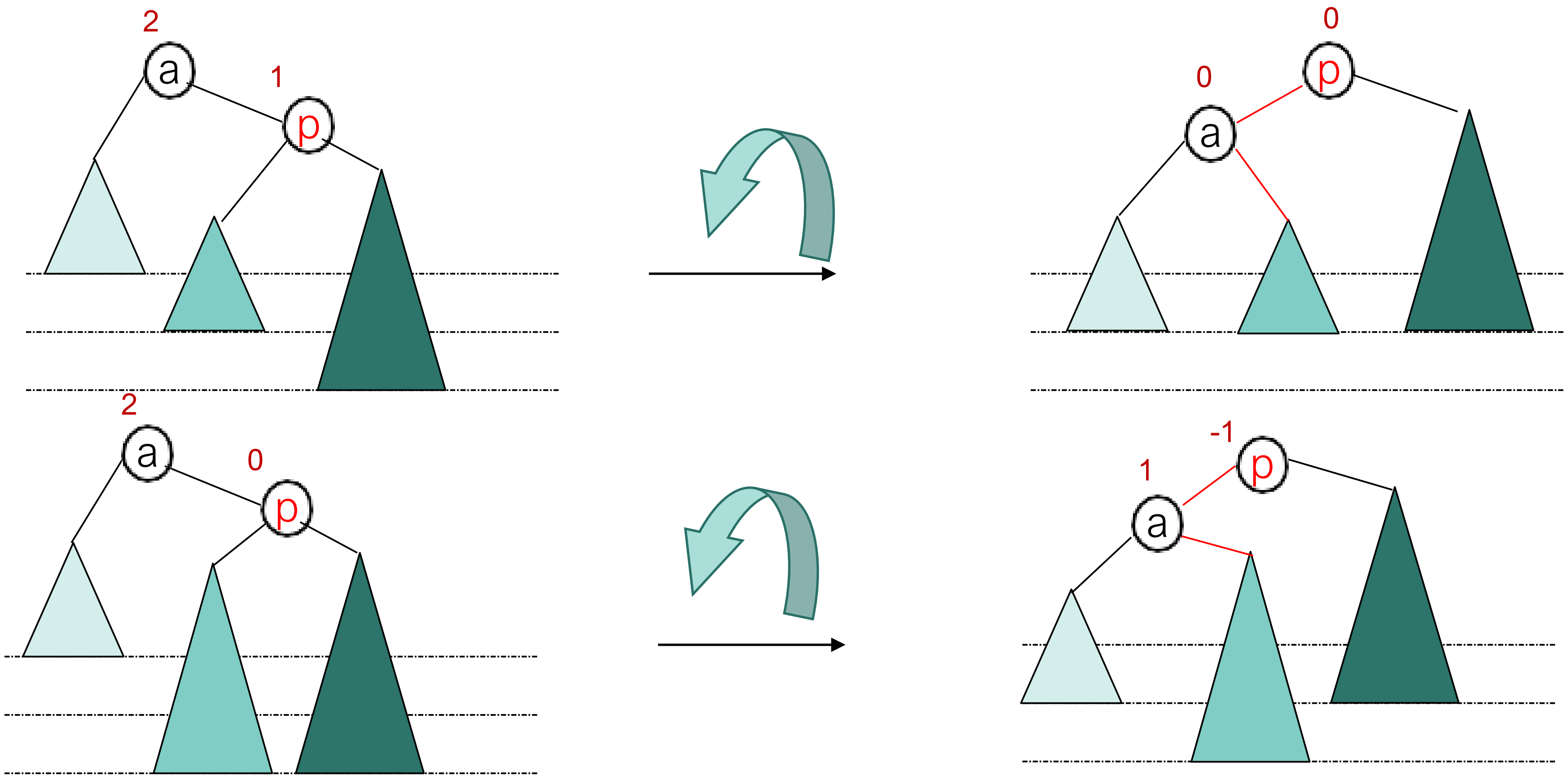
Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
  - Schema general de la rotation gauche :



Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
  - Schema general de la rotation gauche :

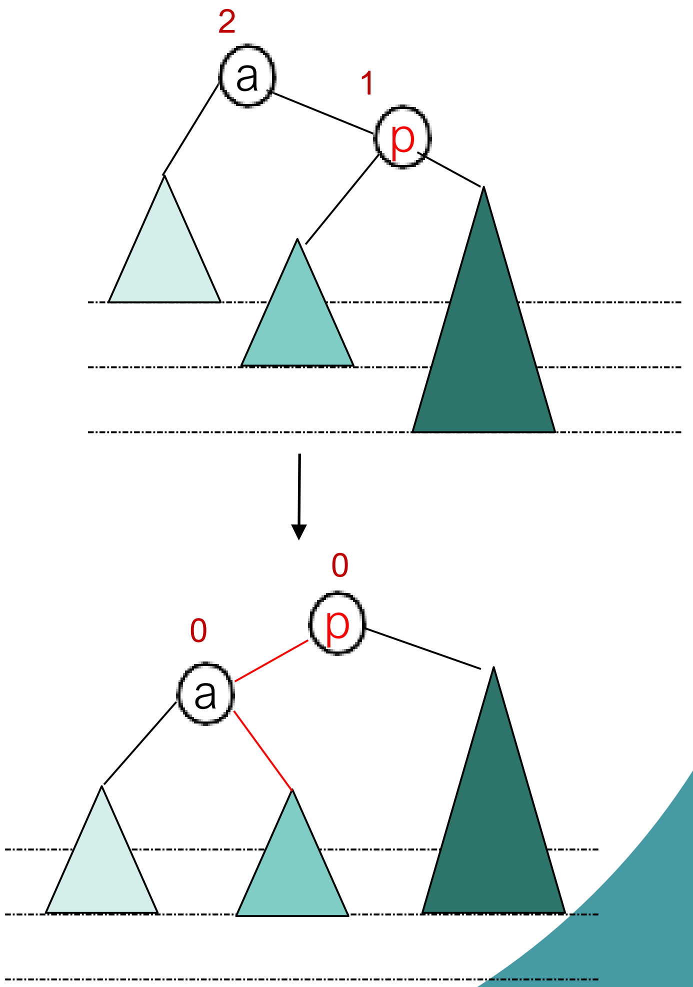


E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation simple

- Cas 1 : L’ élément ajouté est tout à droite de l’arbre rotation simple à gauche
  - Algorithme:

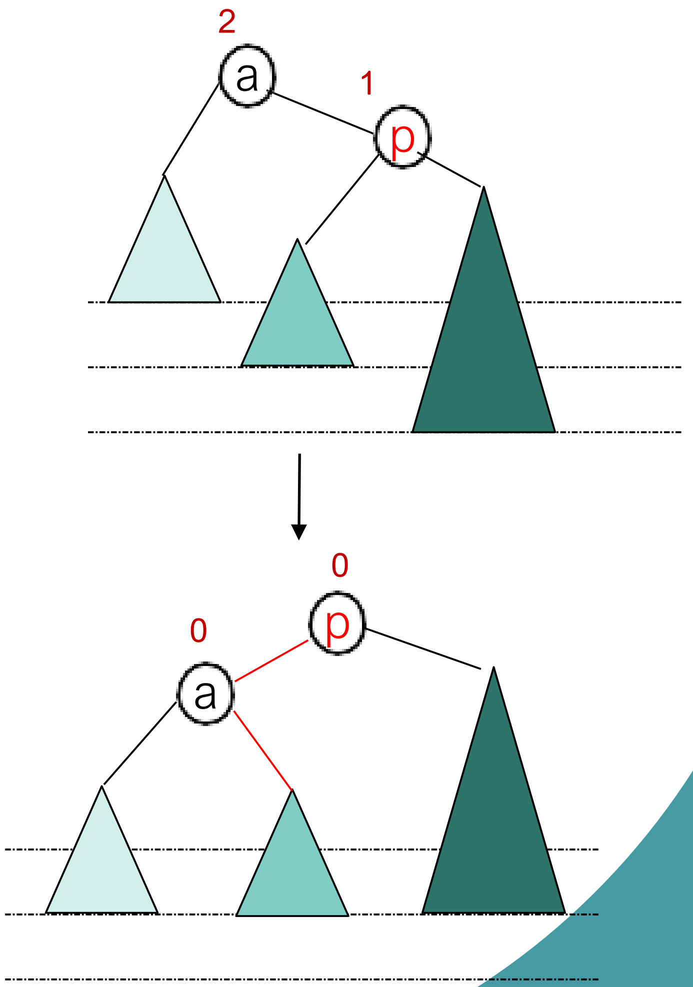
```
FONCTION rotationGauche(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
VARIABLE
     pivot : ptr sur Arbre
     eq_a, eq_p  : entier
DEBUT
   pivot ← ???
   …
   RETOURNER a
FIN
```



Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre **rotation simple à gauche**
  - Algorithme:

```
FONCTION rotationGauche(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
VARIABLE
     pivot : ptr sur Arbre
     eq_a, eq_p  : entier
DEBUT
   pivot      ← fd(a)
   fd(a)      ← fg(pivot)
   fg(pivot) ← a
   …
   a ← pivot
   RETOURNER a
FIN
```

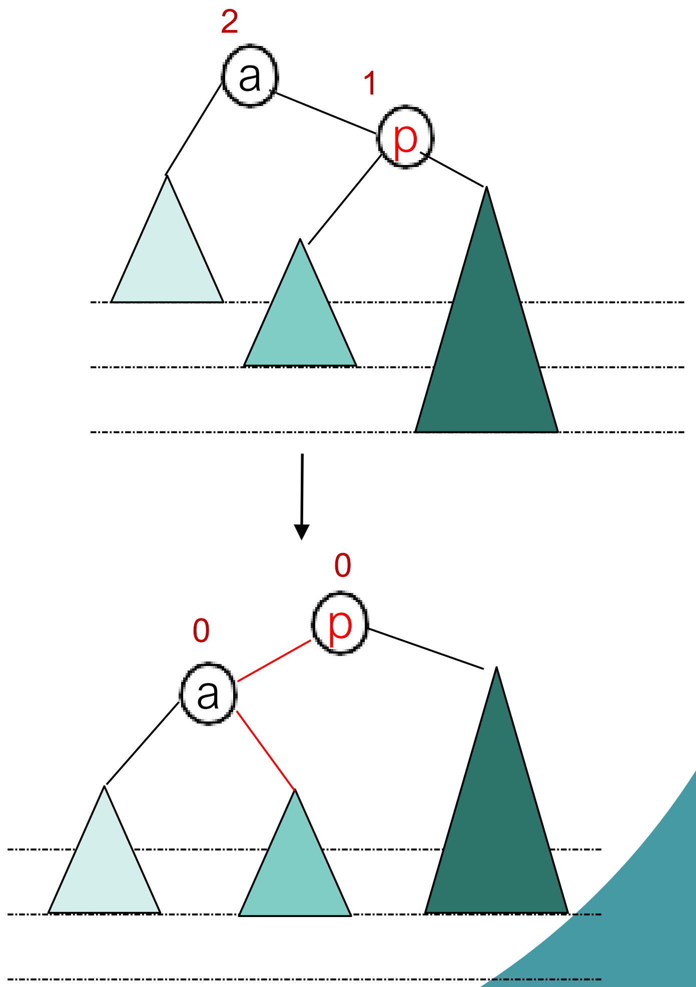


E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation simple

- Cas 1 : L' élément ajouté est tout à droite de l'arbre rotation simple à gauche
  - Algorithme:

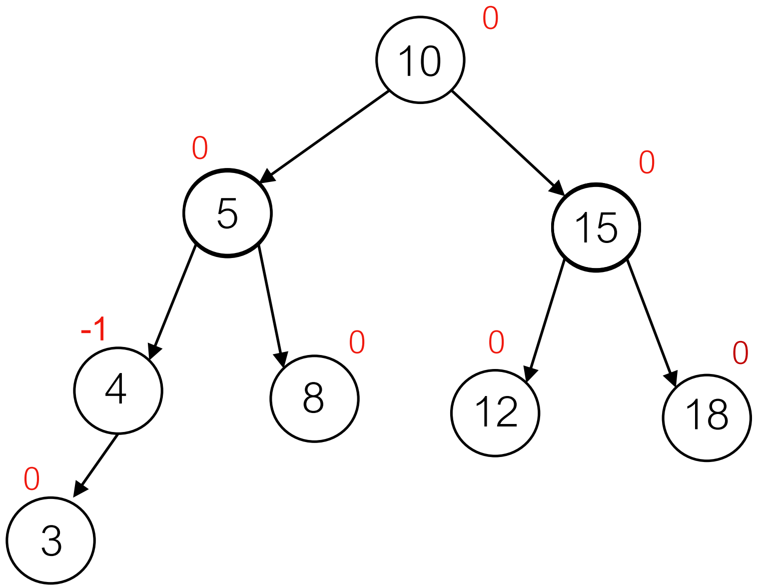
```
FONCTION rotationGauche(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
VARIABLE
     pivot : ptr sur Arbre
     eq_a, eq_p  : entier
DEBUT
   pivot      ← fd(a)
   fd(a)      ← fg(pivot)
   fg(pivot) ← a
   eq_a  ← equilibre(a)
   eq_p  ← equilibre(pivot)
   equilibre(a)     ← eq_a - max(eq_p, 0) - 1
   equilibre(pivot) ← min( eq_a-2, eq_a+eq_p-2, eq_p-1 )
   a ← pivot
   RETOURNER a
FIN
```



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

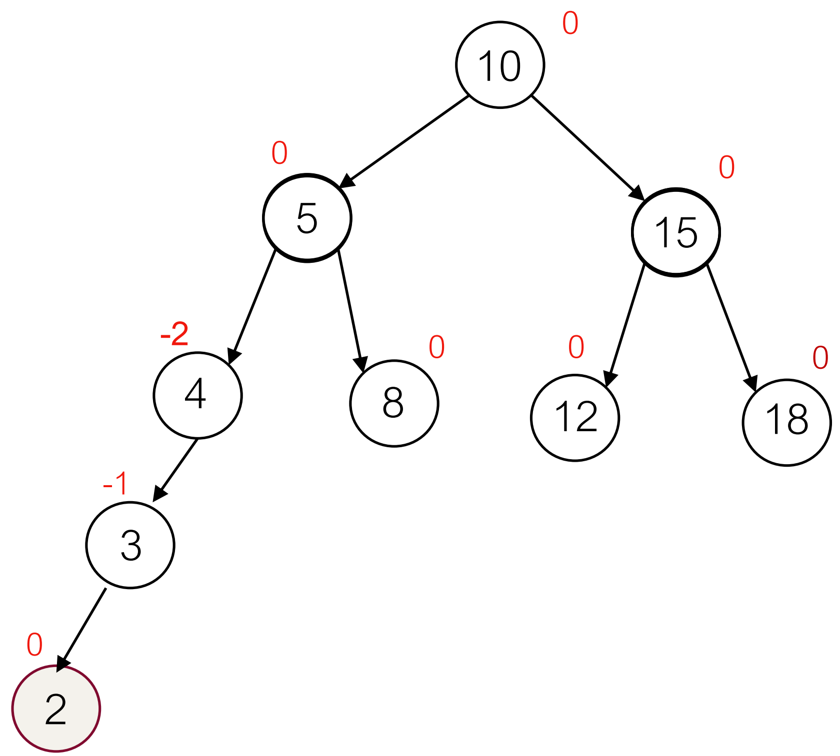
Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre.



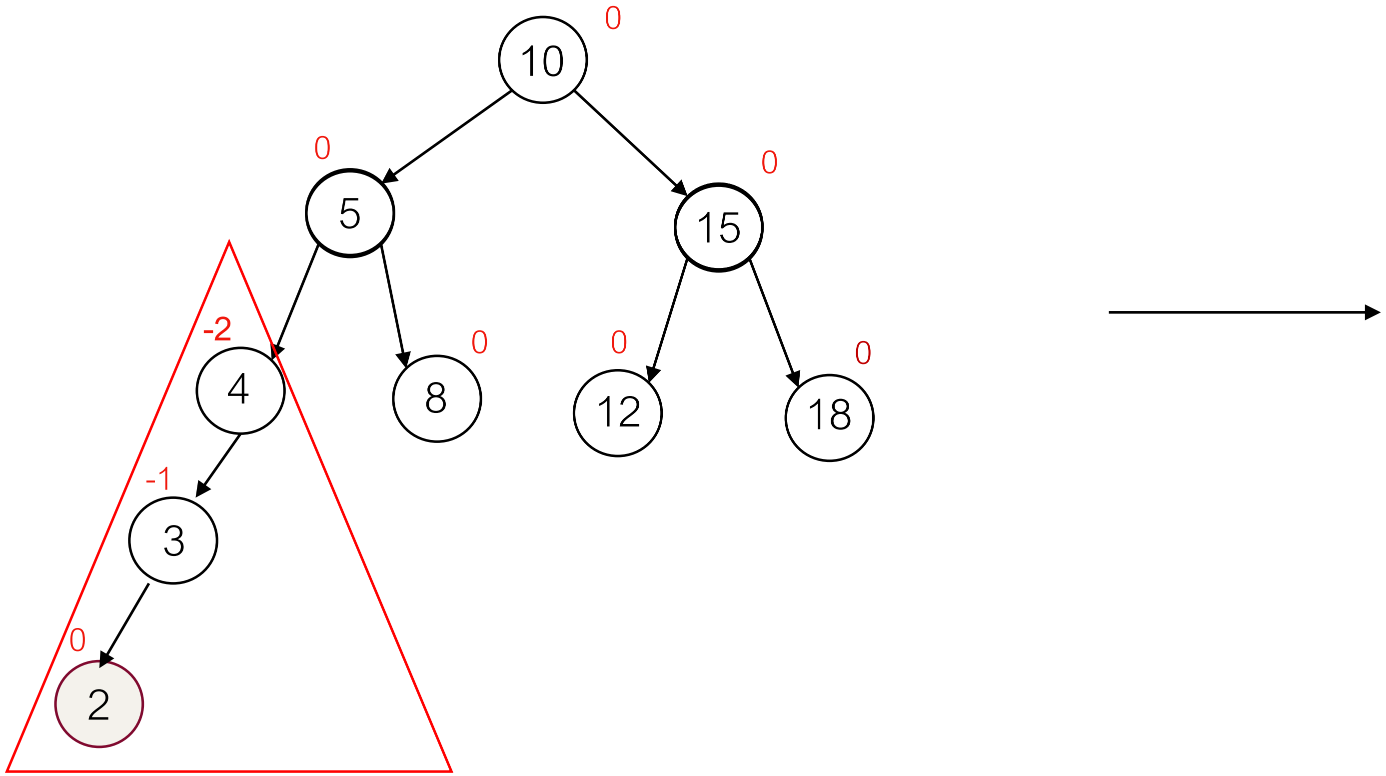
Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre.



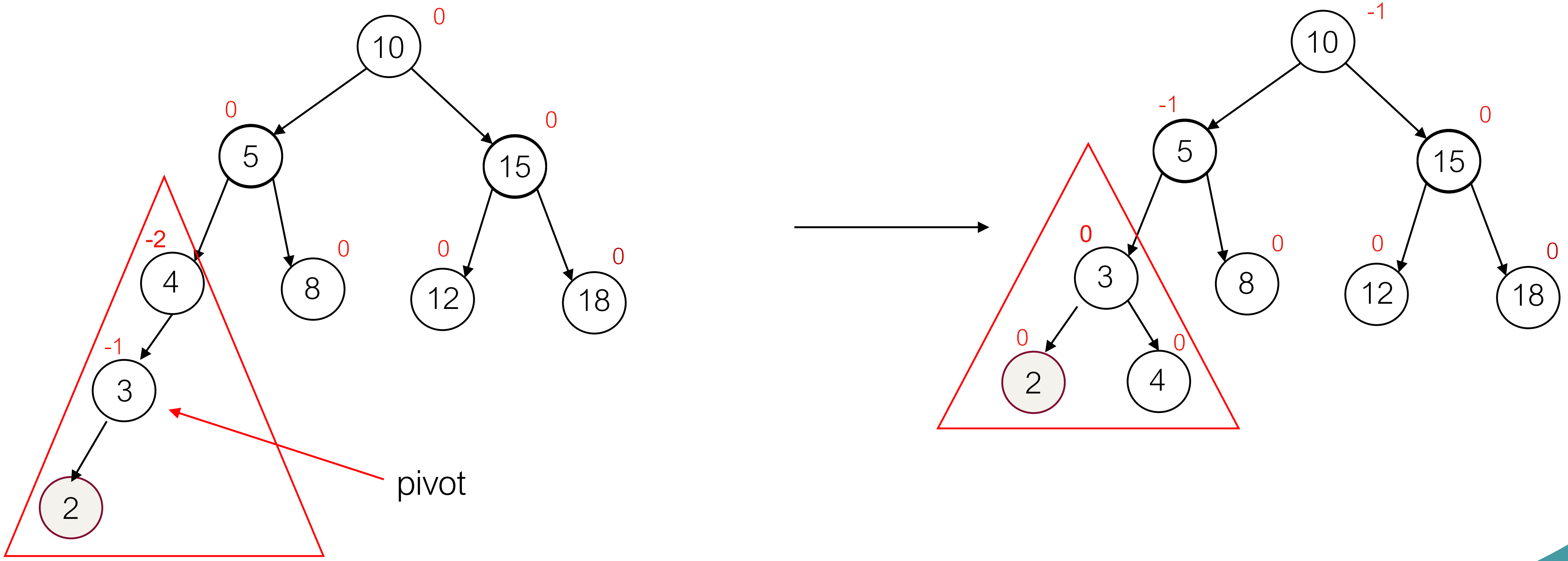
Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre.



Rotation simple

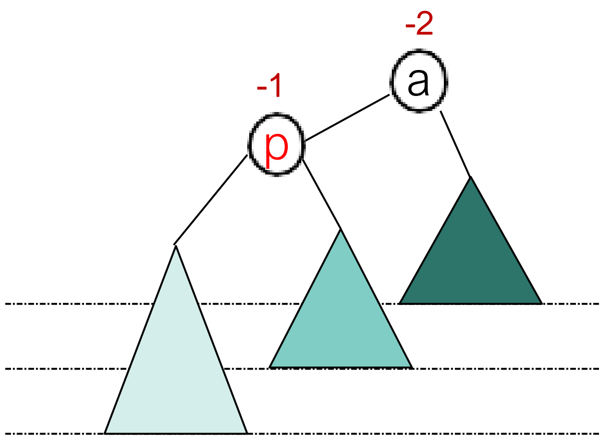
- Cas 2 : L’ élément ajouté est tout à gauche de l’arbre : rotation simple à droite



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

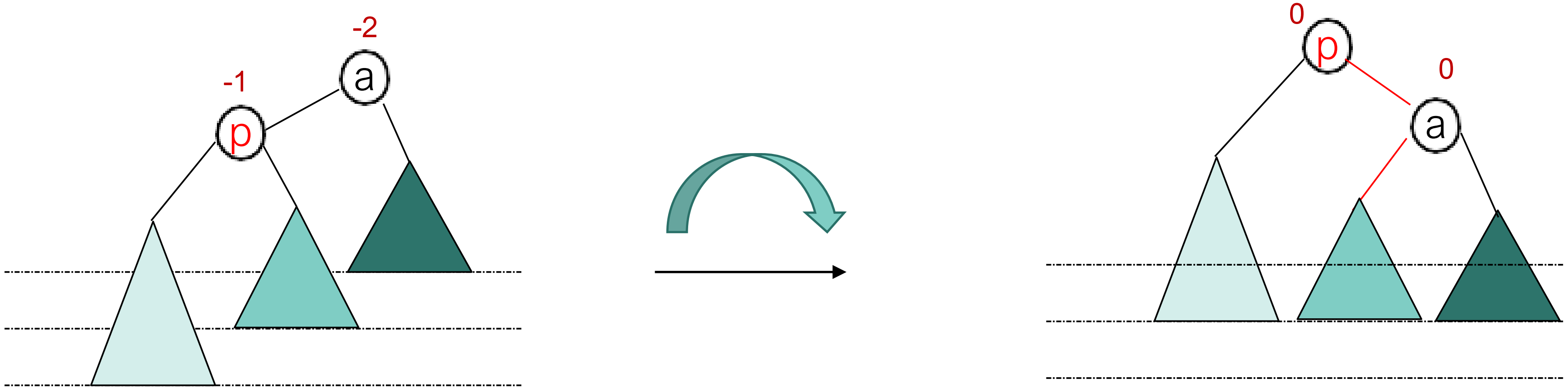
Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
    - Schema general rotation droite :



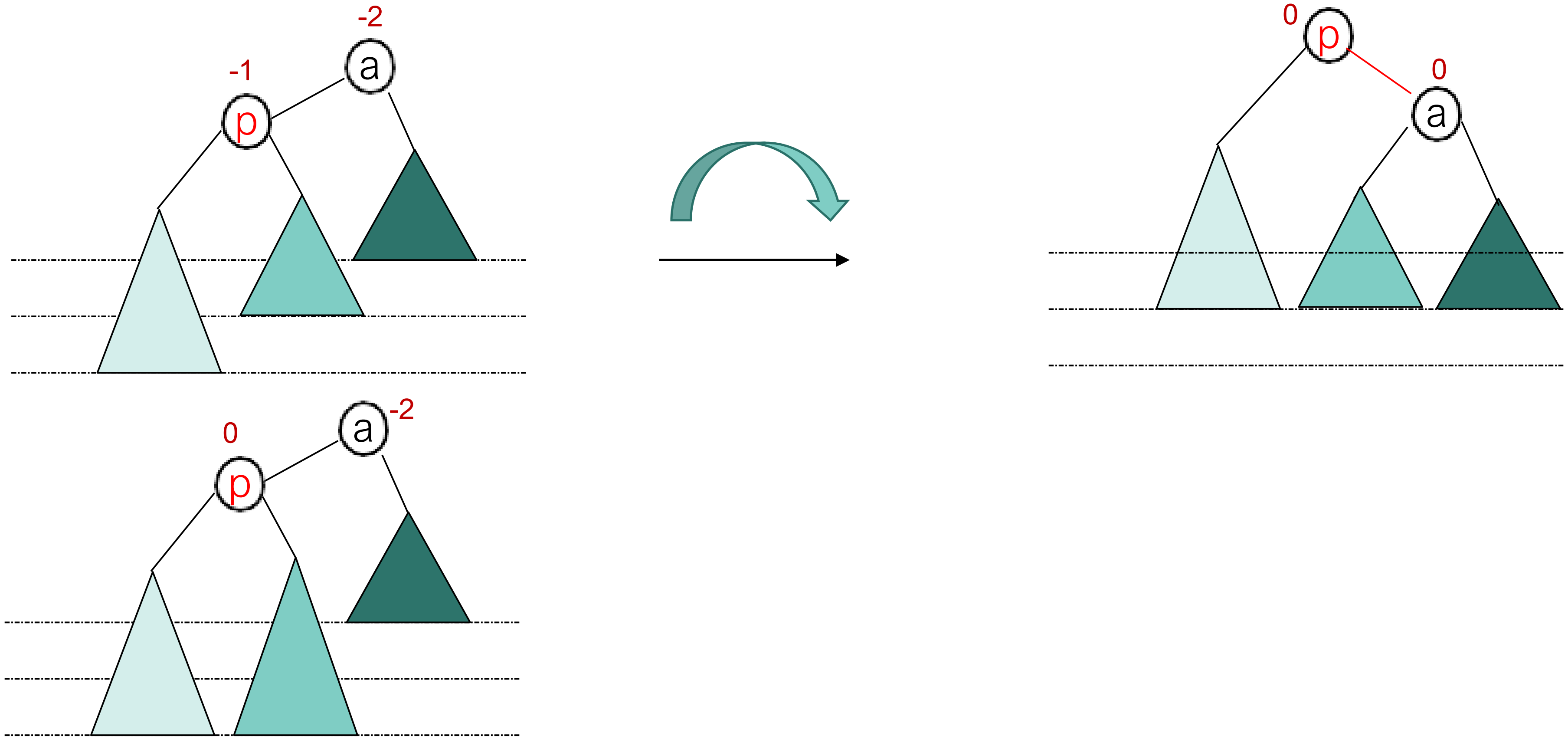
Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
  - Schema general rotation droite :



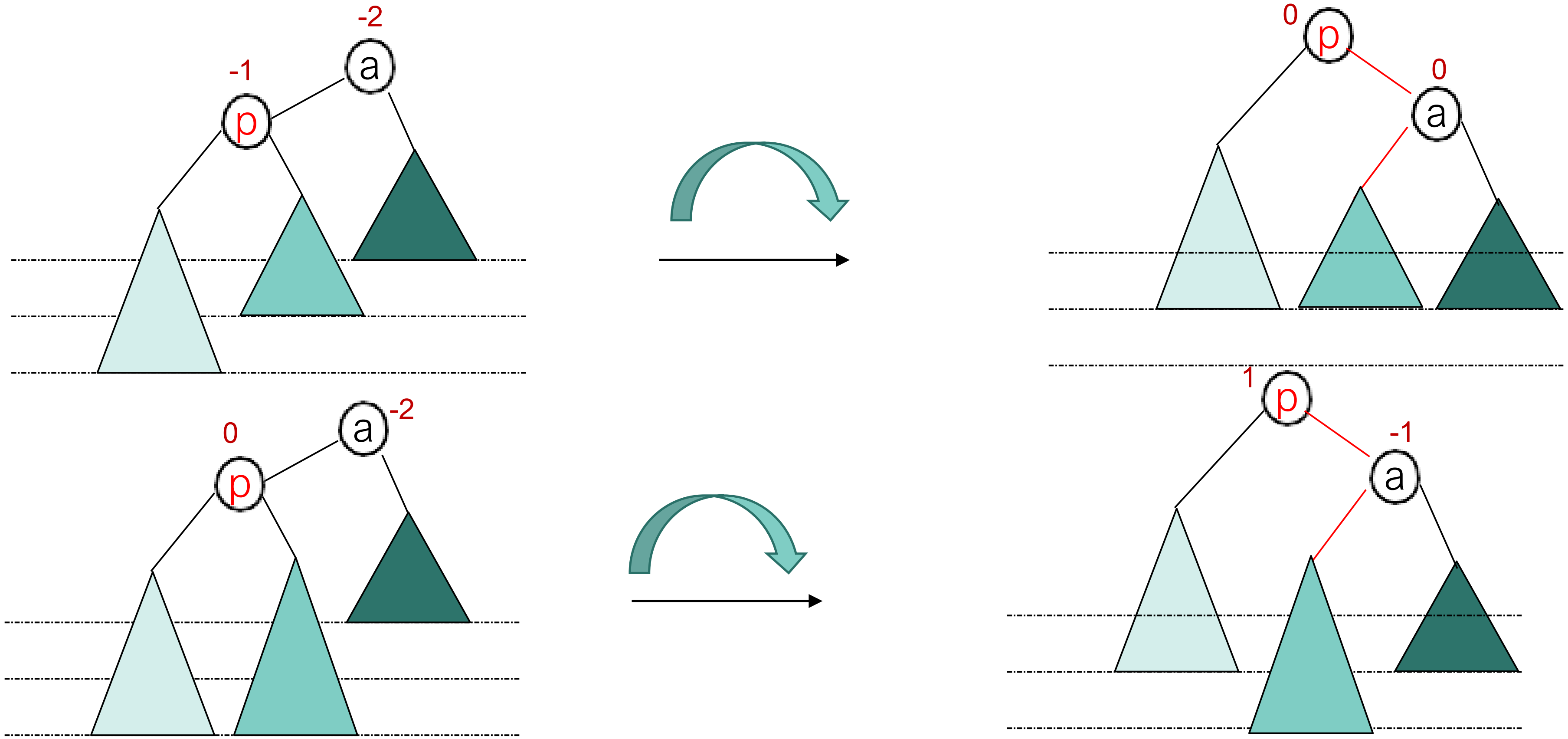
Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
  - Schema general rotation droite :



Rotation simple

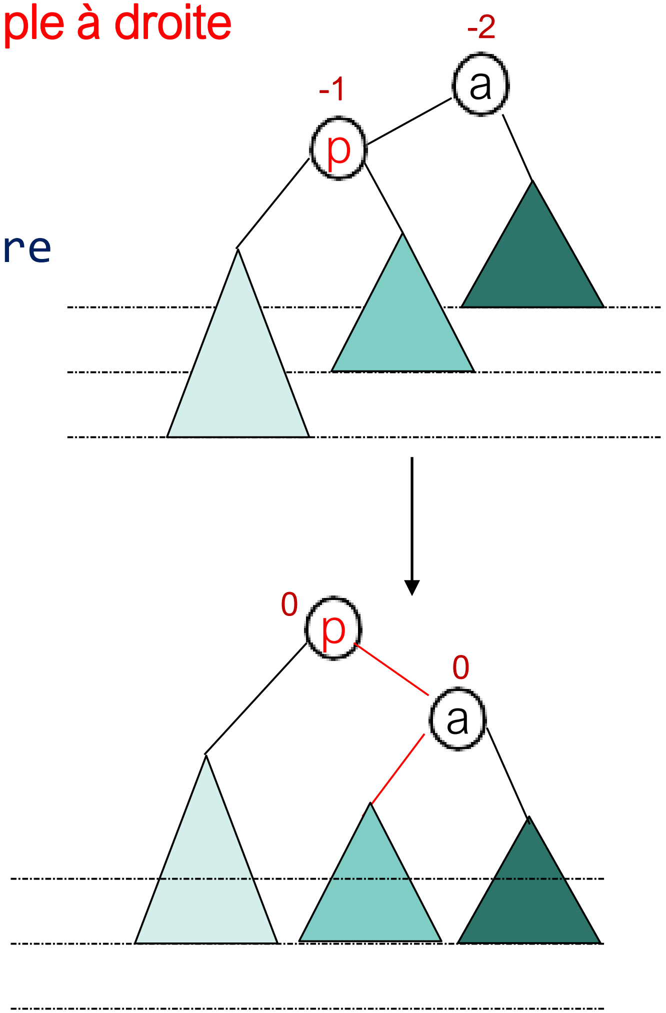
- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
  - Schema general rotation droite :



Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
    - Algorithme:

```
FONCTION rotationDroite(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
VARIABLE
     pivot : ptr sur Arbre
     eq_a, eq_p  : entier
DEBUT
   pivot    ← ???
   …
   RETOURNER a
FIN
```

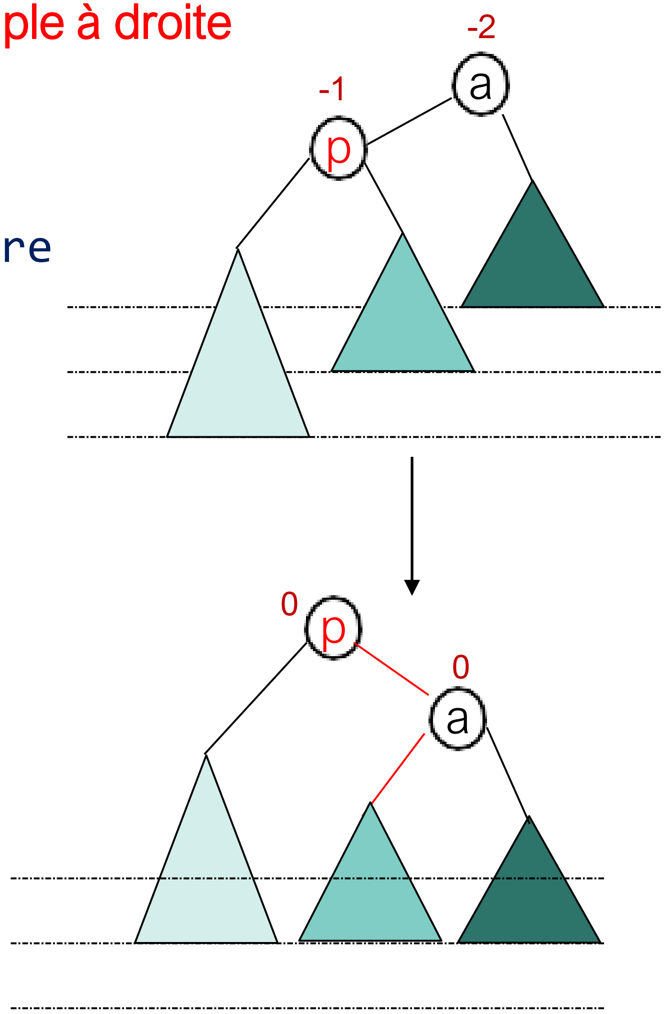


E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
  - Algorithme:

```
FONCTION rotationDroite(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
VARIABLE
     pivot : ptr sur Arbre
     eq_a, eq_p  : entier
DEBUT
   pivot      ← fg(a)
   fg(a)      ← fd(pivot)
   fd(pivot) ← a
   …
   a ← pivot
   RETOURNER a
FIN
```

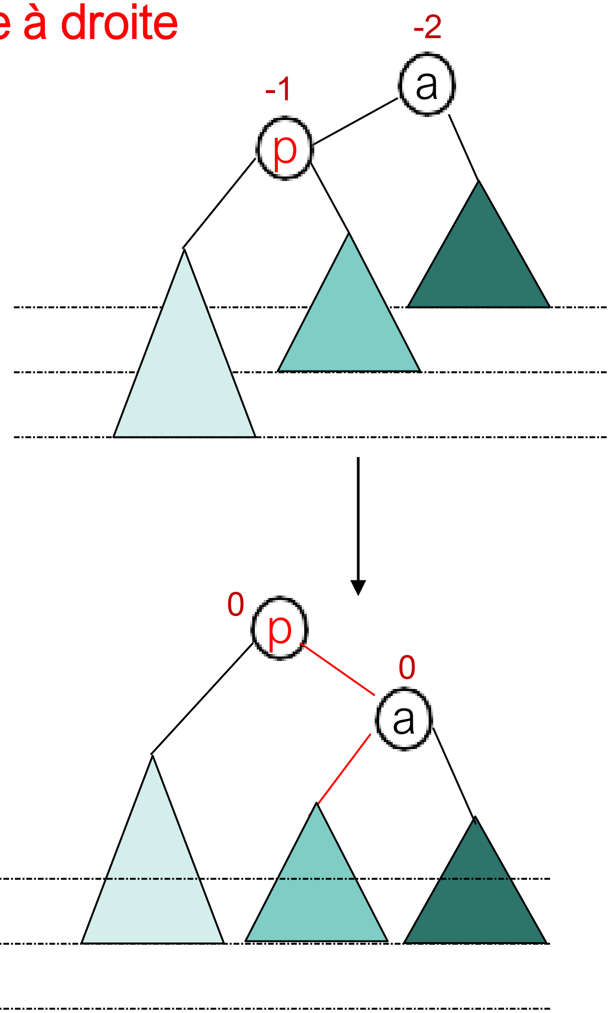


E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation simple

- Cas 2 : L' élément ajouté est tout à gauche de l'arbre : rotation simple à droite
  - Algorithme:

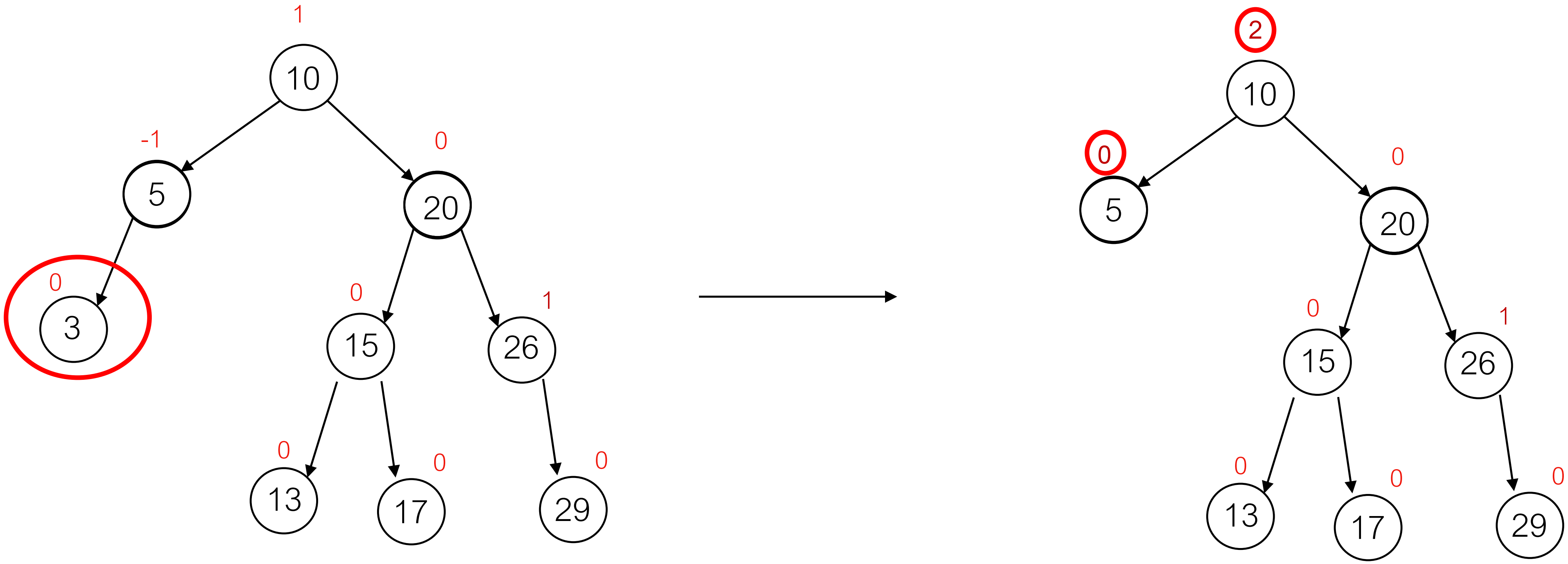
```
FONCTION rotationDroite(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
VARIABLE
     pivot : ptr sur Arbre
     eq_a, eq_p  : entier
DEBUT
   pivot      ← fg(a)
   fg(a)      ← fd(pivot)
   fd(pivot) ← a
   eq_a  ← equilibre(a)
   eq_p  ← equilibre(pivot)
   equilibre(a)     ← eq_a - min(eq_p, 0) + 1
   equilibre(pivot) ← max( eq_a+2, eq_a+eq_p+2, eq_p+1 )
   a ← pivot
   RETOURNER a
FIN
```



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation simple

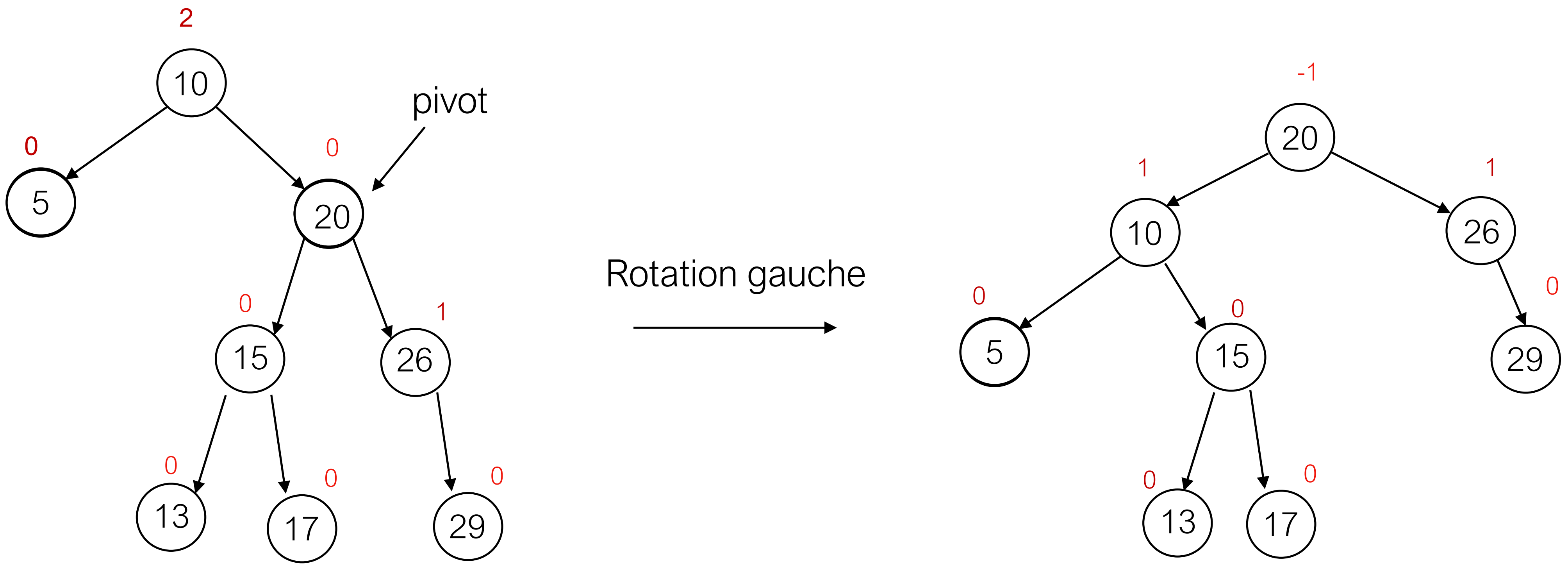
- Autre exemple de rotation simple avec la suppression :



Rotation simple

```
pivot       ← fd(a)
fd(a)       ← fg(pivot)
fg(pivot) ← a
…
a ← pivot
```

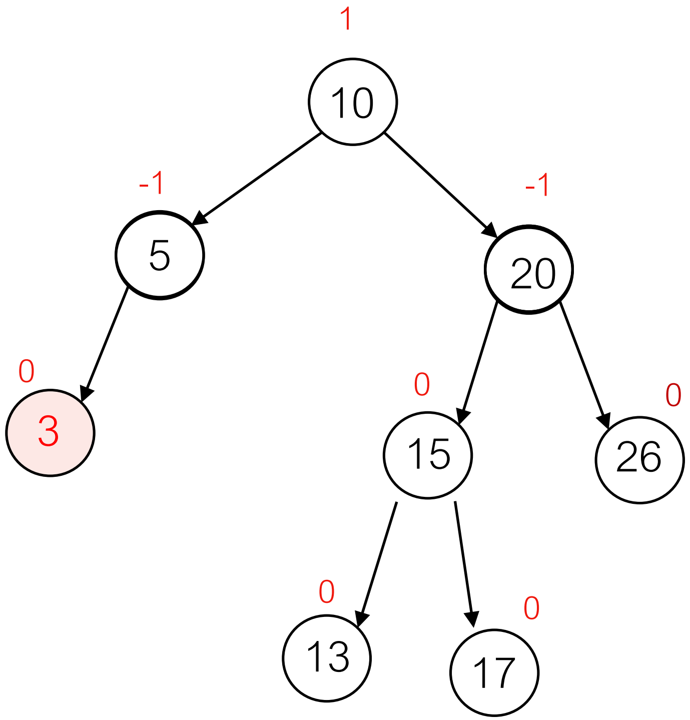
- Autre exemple de rotation simple avec la suppression :



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation double

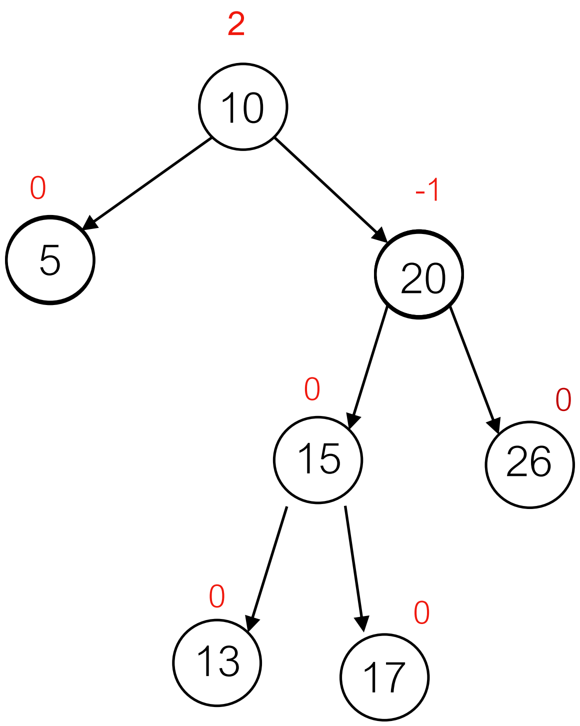
- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant :



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation double

- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant :

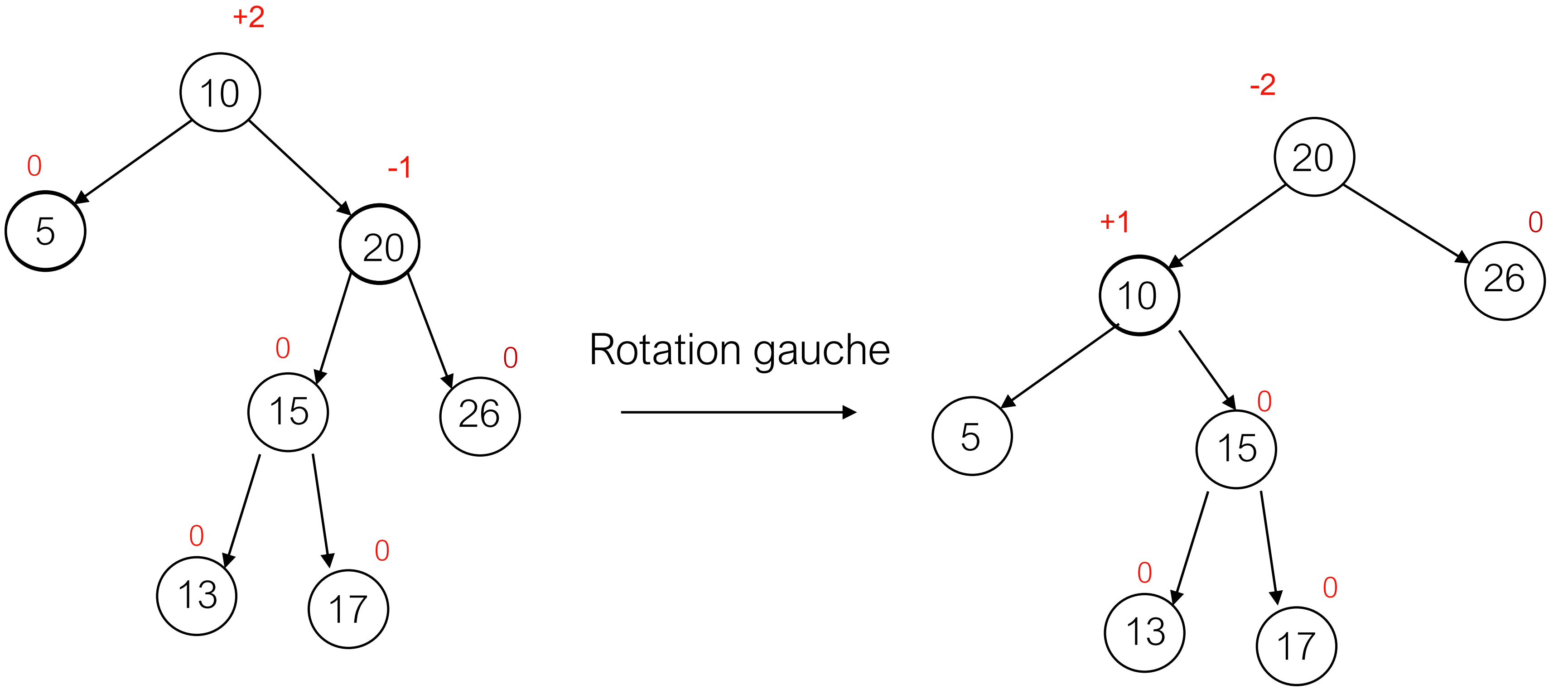


Rotation gauche

Rotation double

- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant :

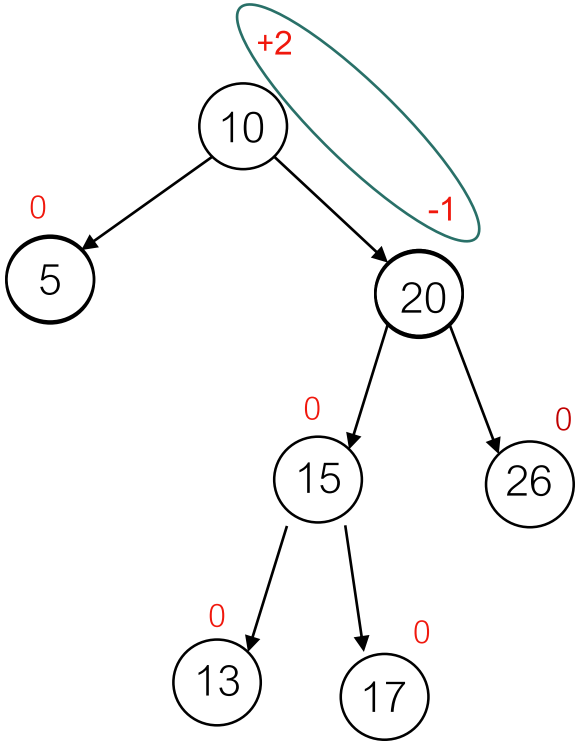
```
pivot        ← fd(a)
fd(a)        ← fg(pivot)
fg(pivot) ← a
…
a ← pivot
```



Rotation double

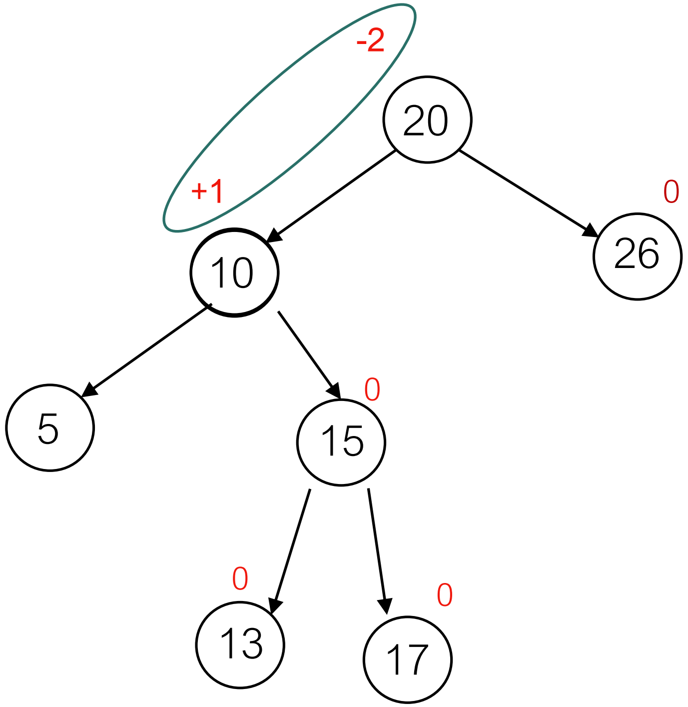
```
pivot       ← fd(a)
fd(a)       ← fg(pivot)
fg(pivot) ← a
…
a ← pivot
```

- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant :



Rotation gauche

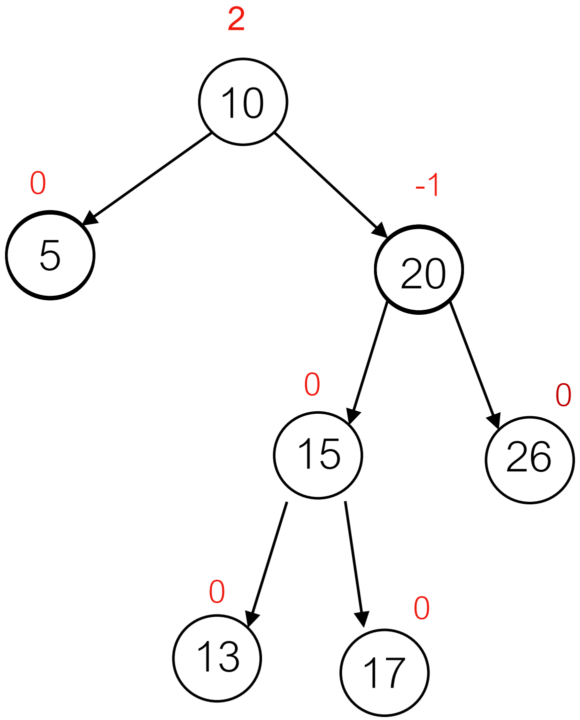
La rotation à gauche ne fonctionne pas !

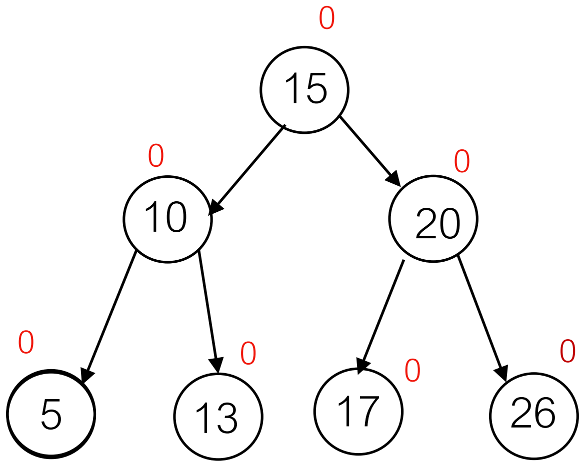


E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation double

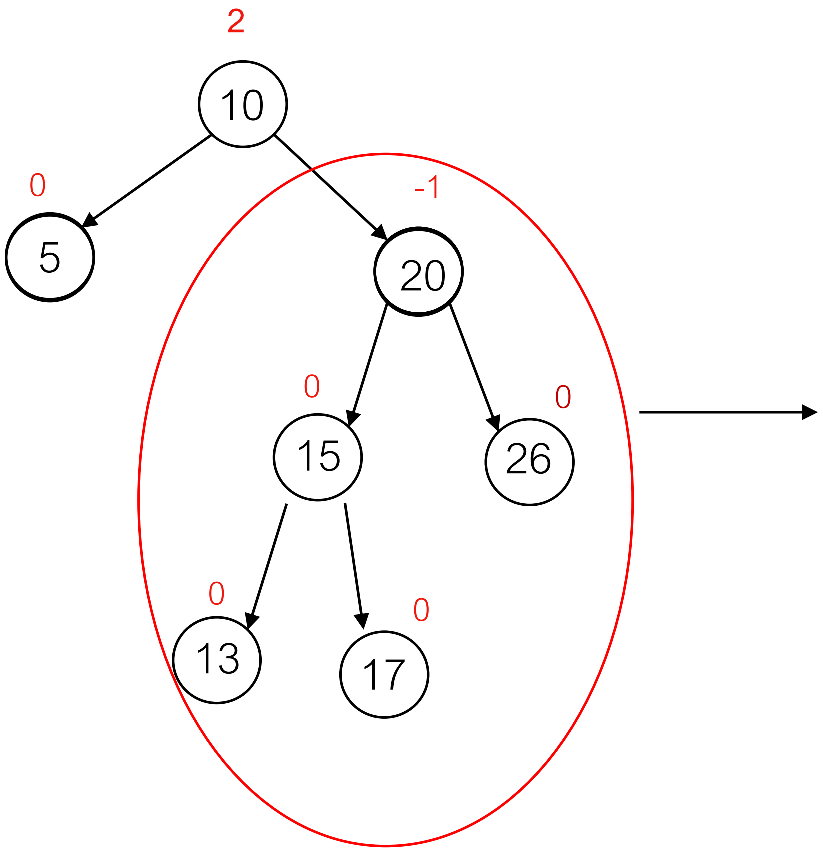
- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant :

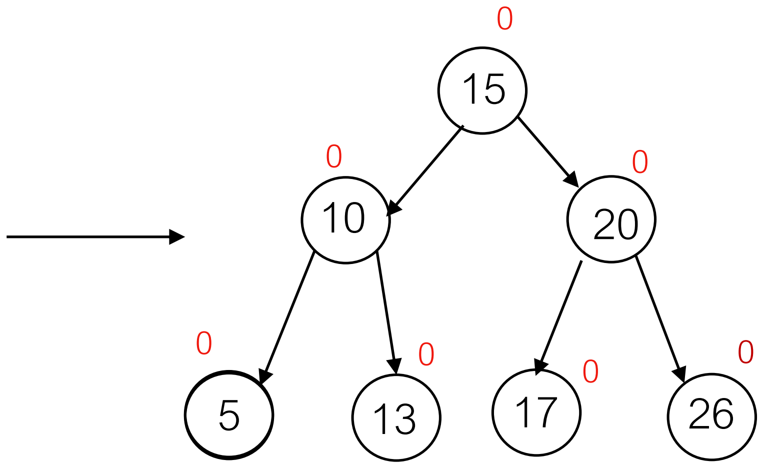




Rotation double

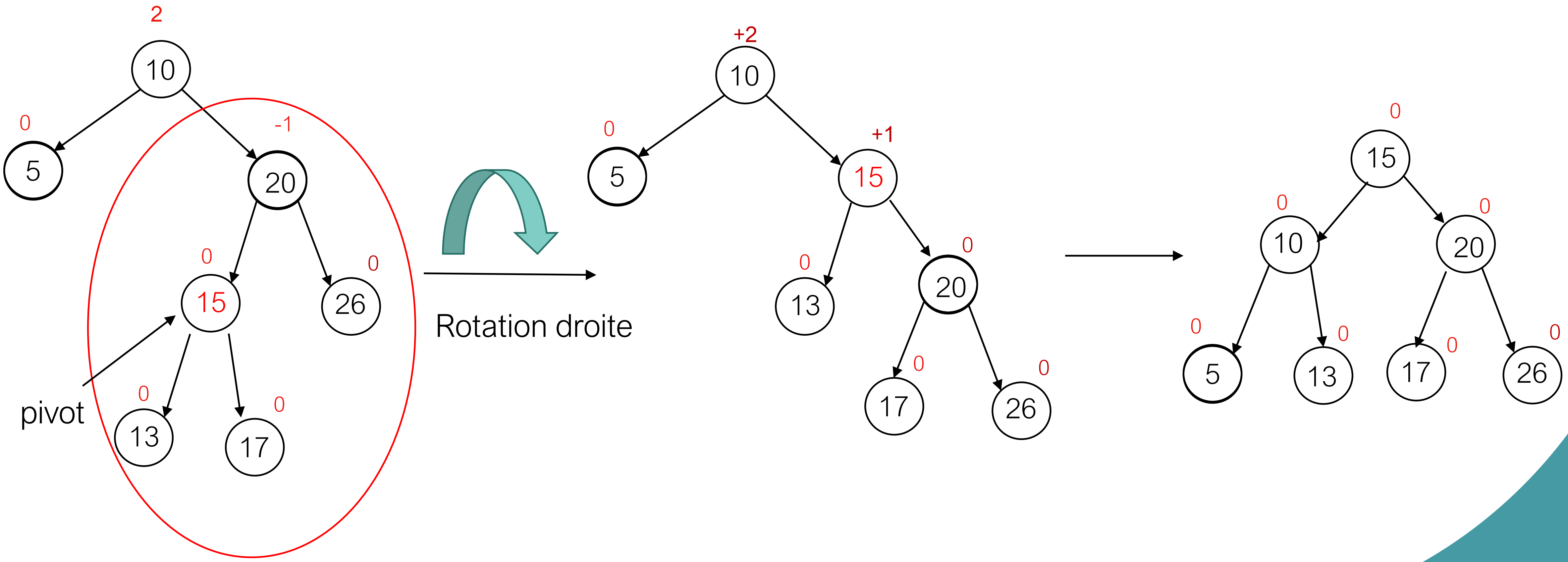
- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant : double rotation gauche





Rotation double

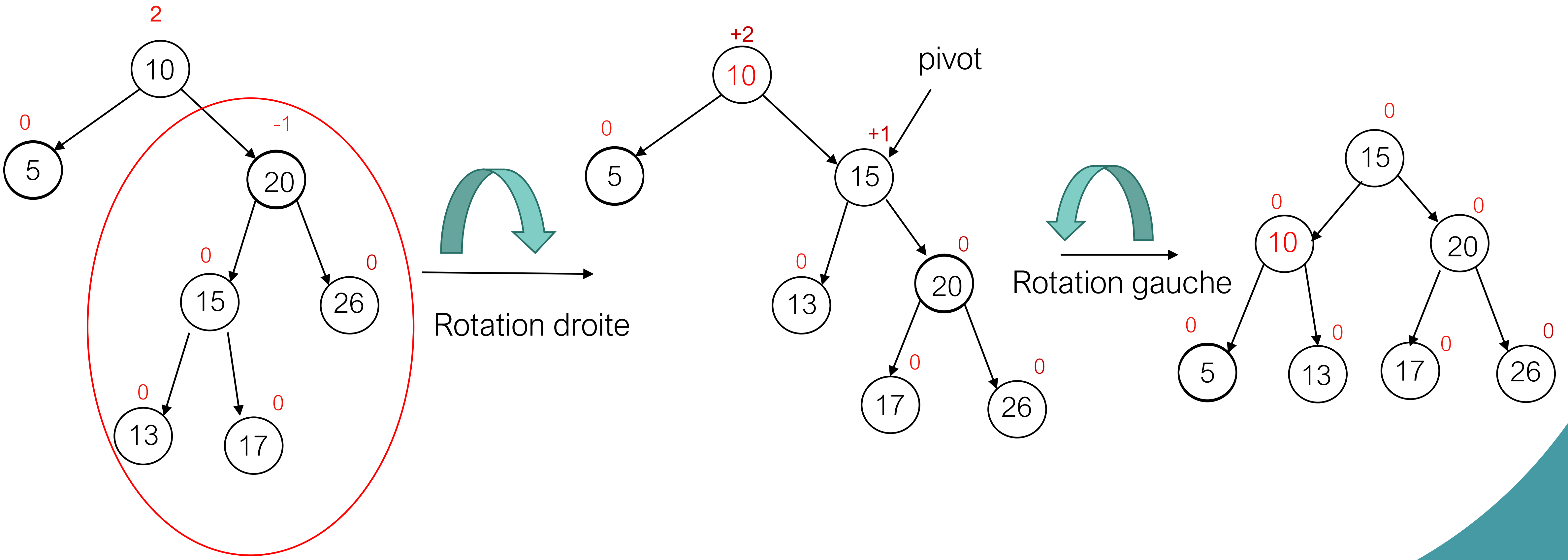
- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant : double rotation gauche



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Rotation double

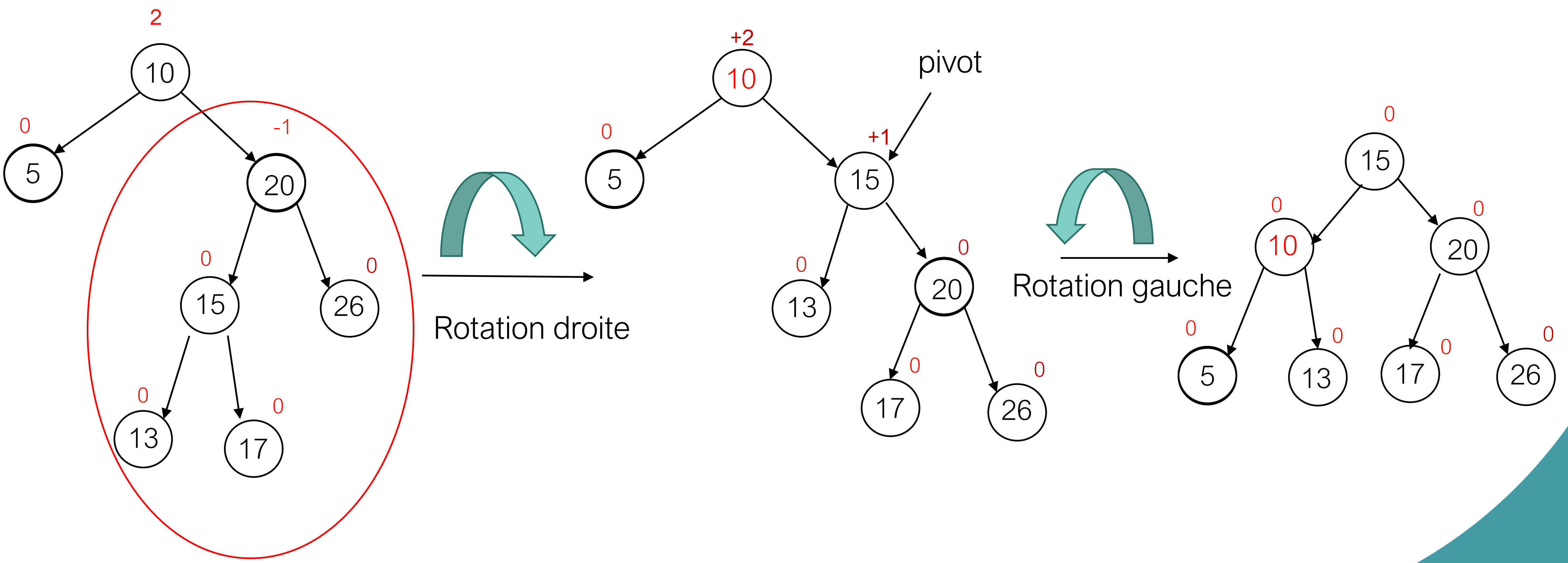
- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant : double rotation gauche



Rotation double

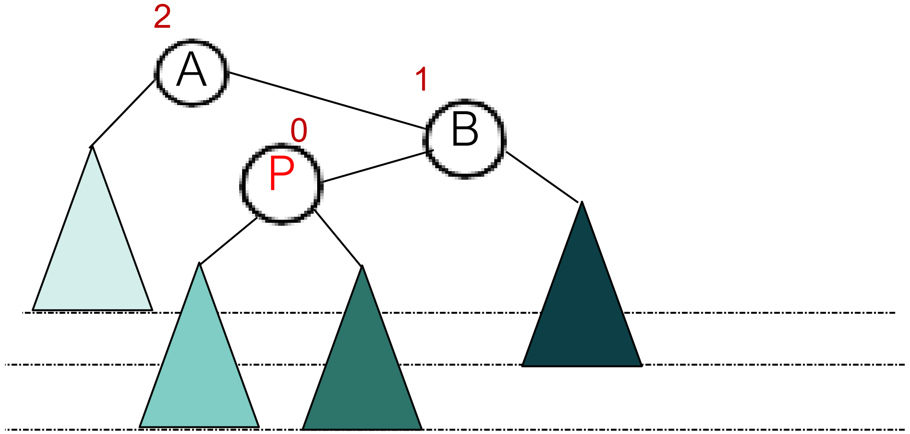
- Cas 3 : élément supprimé dans le sous-arbre gauche suivant : double rotation gauche

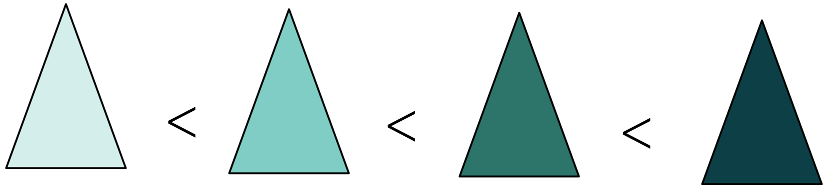
  A.K.A. : rotation droite gauche



Rotation double

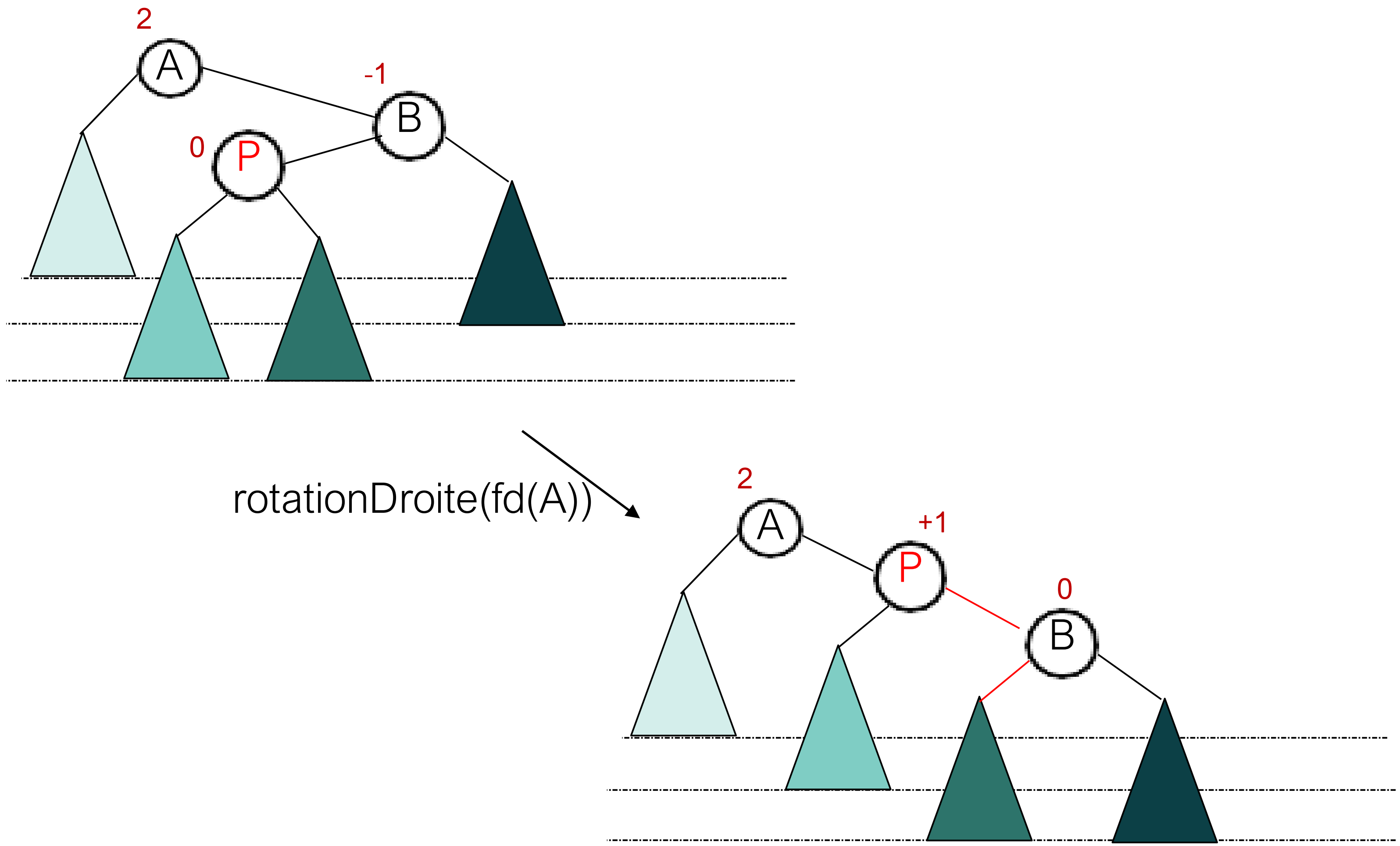
- Cas 3 : hauteur trop importante dans la partie gauche du sous-arbre droit: double rotation gauche





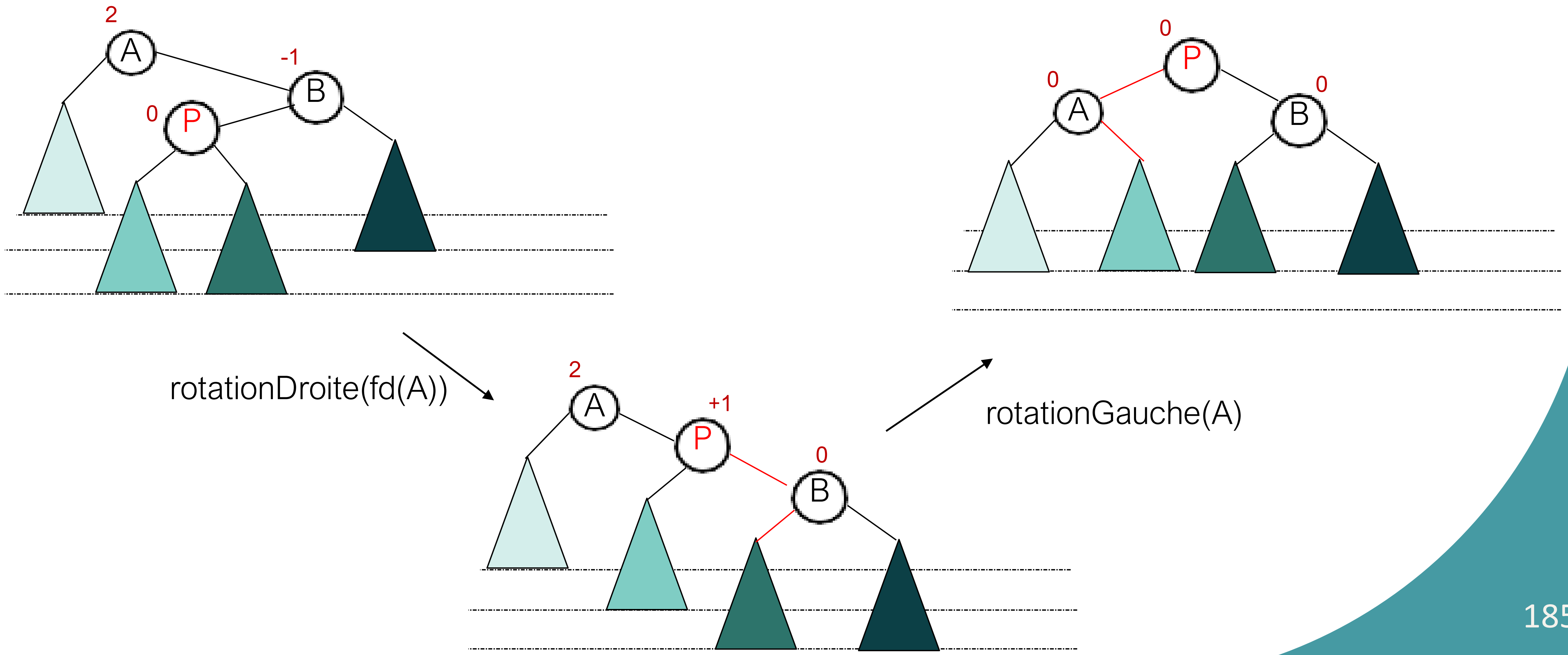
Rotation double

- Cas 3 : hauteur trop importante dans la partie gauche du sous-arbre droit: double rotation gauche



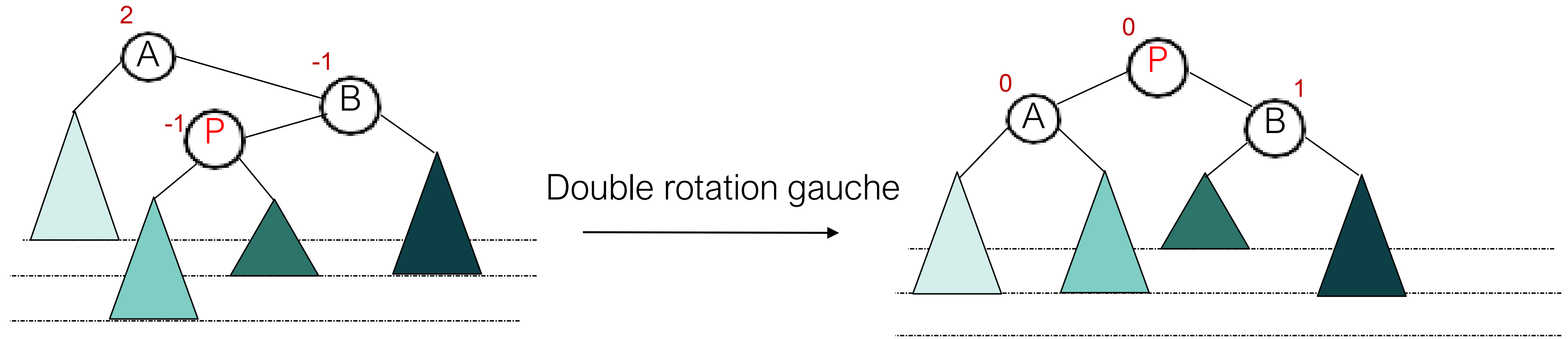
Rotation double

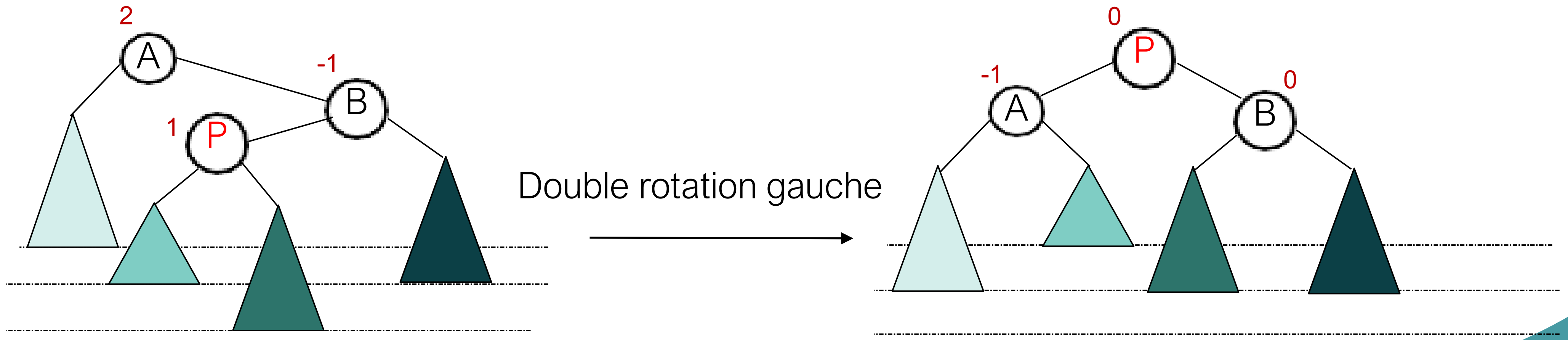
- Cas 3 : hauteur trop importante dans la partie gauche du sous-arbre droit: double rotation gauche



Rotation double

- Cas 3 : hauteur trop importante dans la partie gauche du sous-arbre droit: double rotation gauche



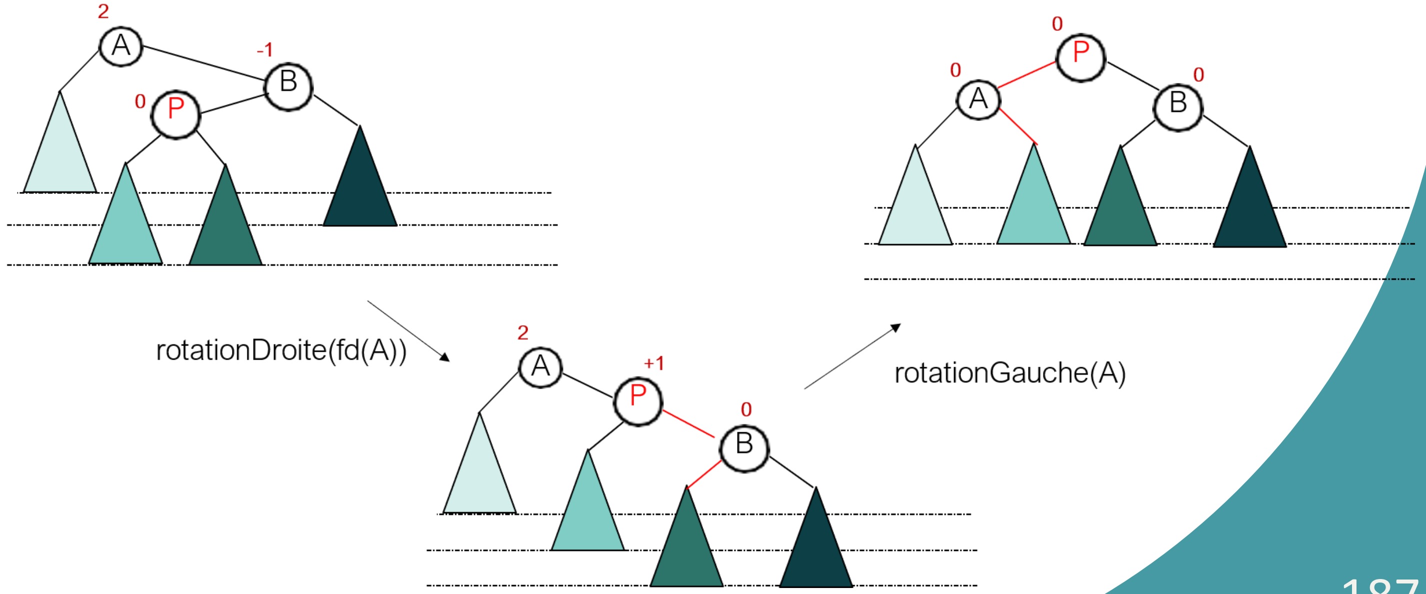


Rotation double

- Cas 3 : hauteur trop importante dans la partie gauche du sous-arbre droit: double rotation gauche

- Algorithme :

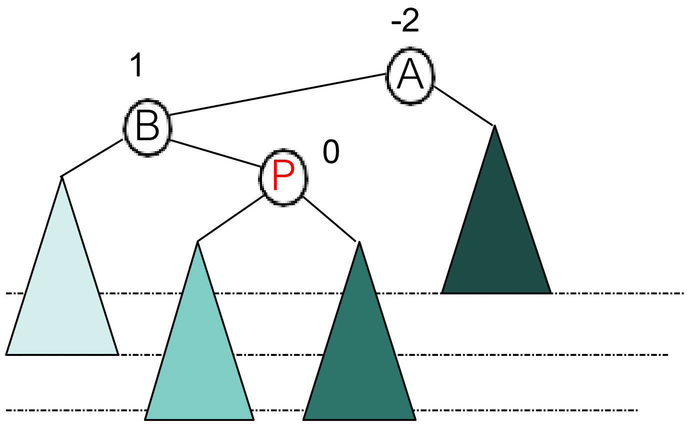
```
FONCTION doubleRotationGauche(a: ptr sur Arbre) :
ptr sur Arbre
DEBUT
     fd(a) ← rotationDroite(fd(a))
     RETOURNER rotationGauche(a)
FIN
```



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

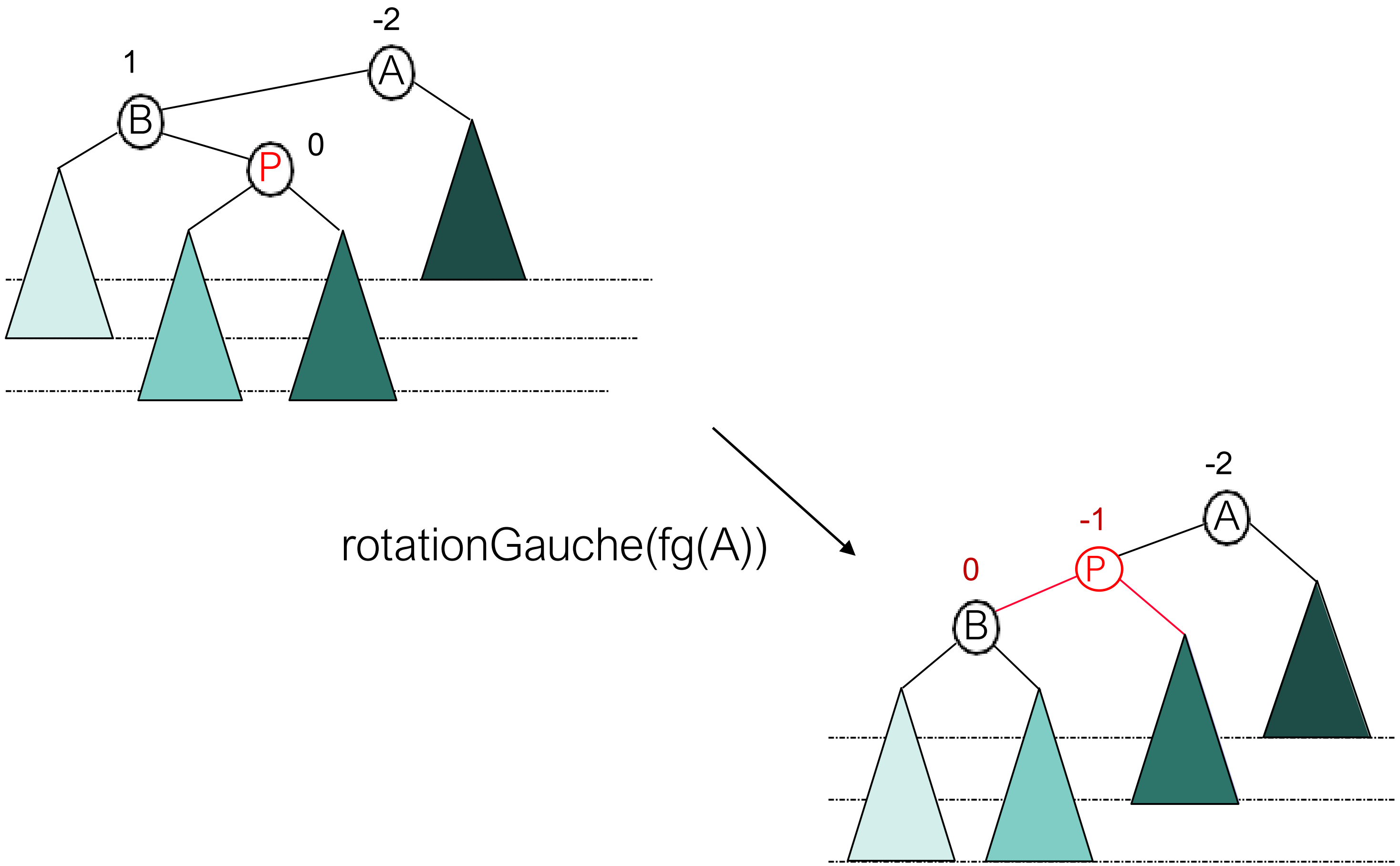
Rotation double

- Cas 4 : hauteur trop importante dans la partie droite du sous-arbre gauche: double rotation droite



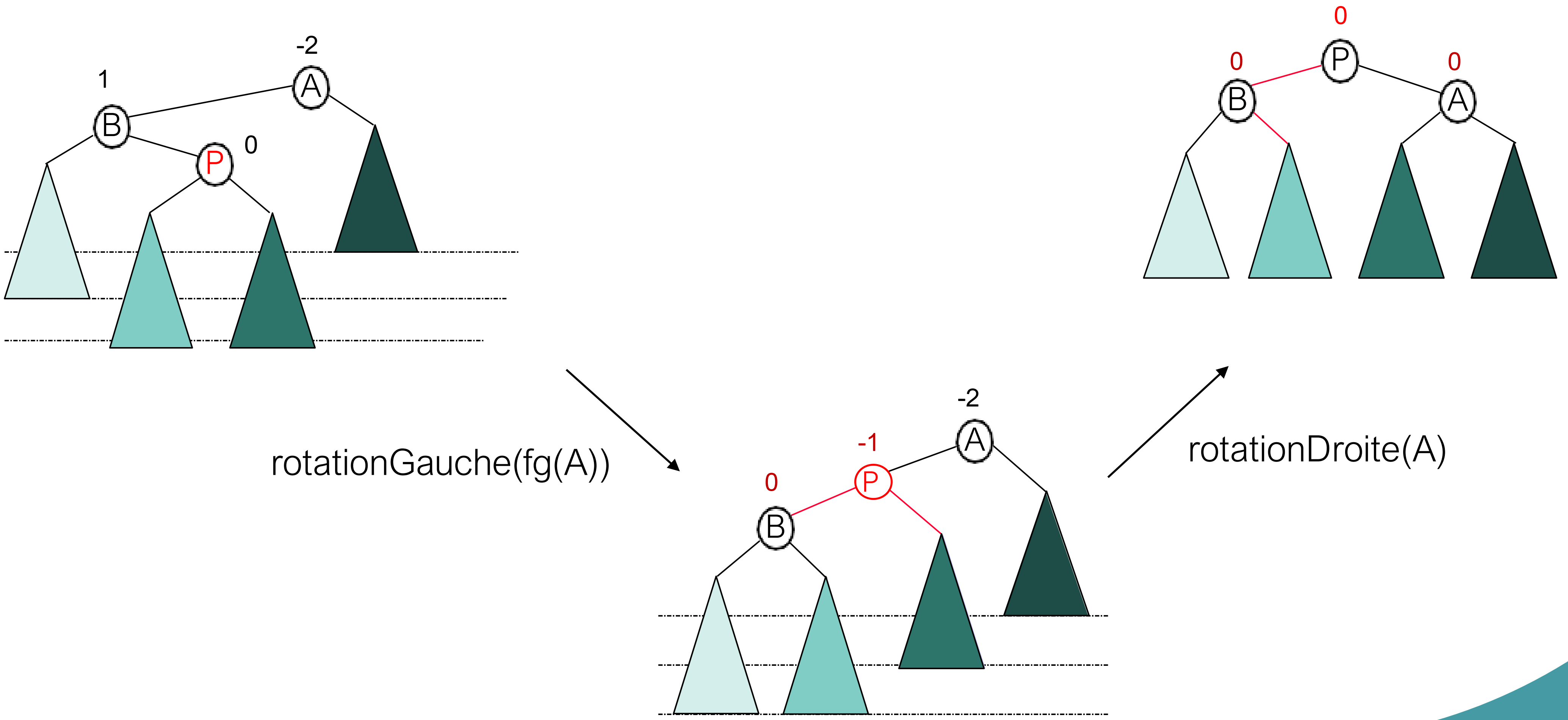
Rotation double

- Cas 4 : hauteur trop importante dans la partie droite du sous-arbre gauche: double rotation droite



Rotation double

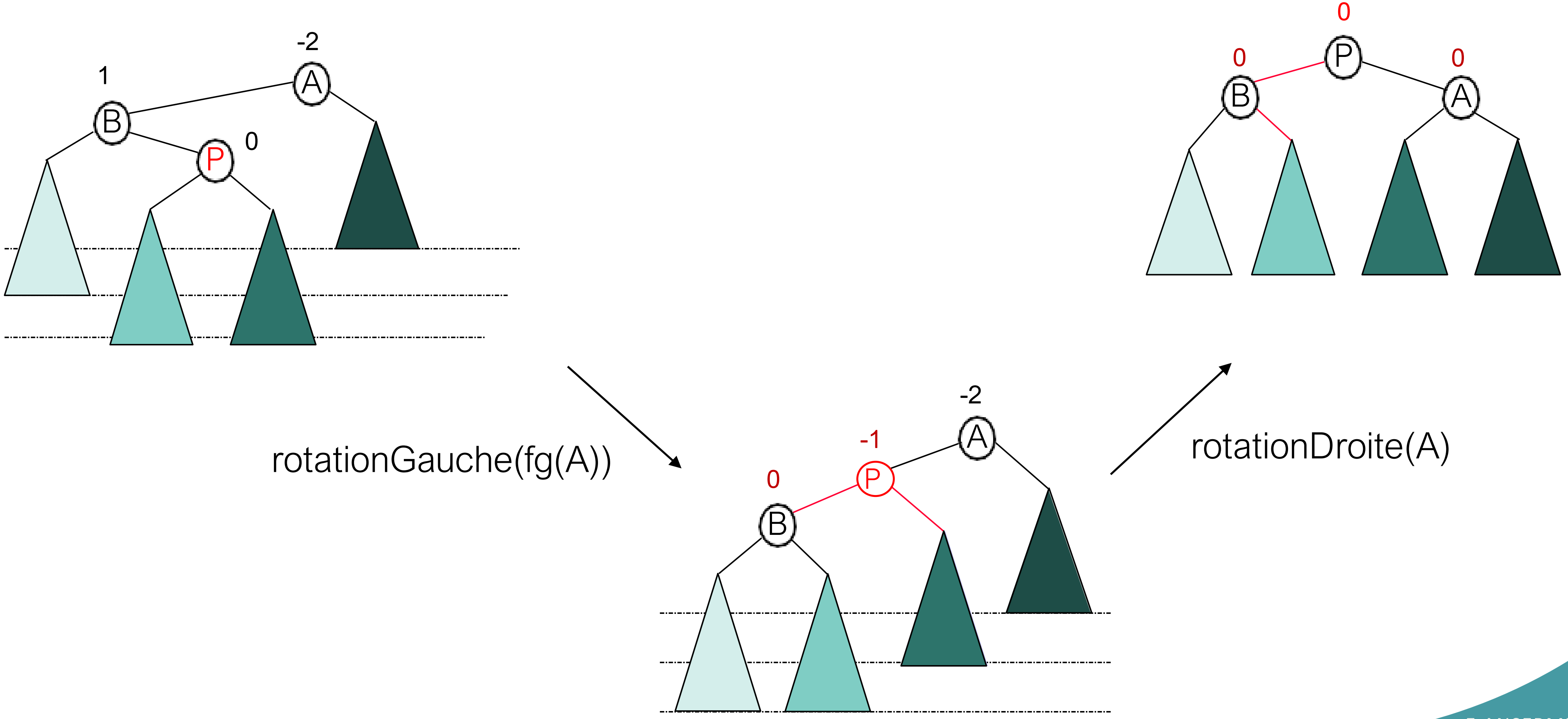
- Cas 4 : hauteur trop importante dans la partie droite du sous-arbre gauche: double rotation droite



Rotation double

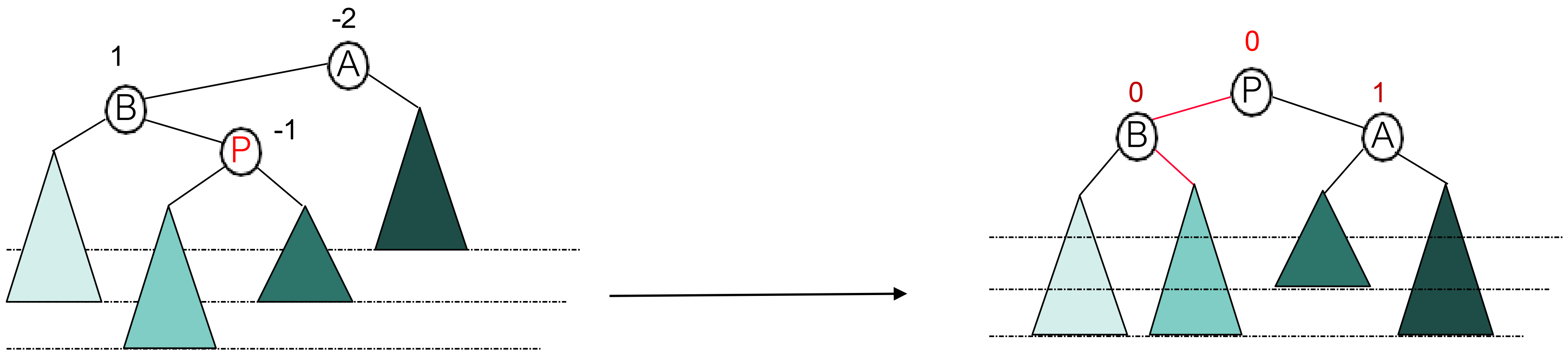
- Cas 4 : hauteur trop importante dans la partie droite du sous-arbre gauche: double rotation droite

A.K.A. : rotation gauche droite

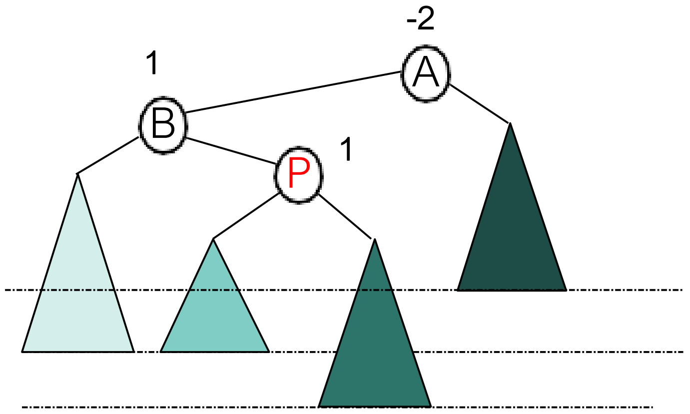


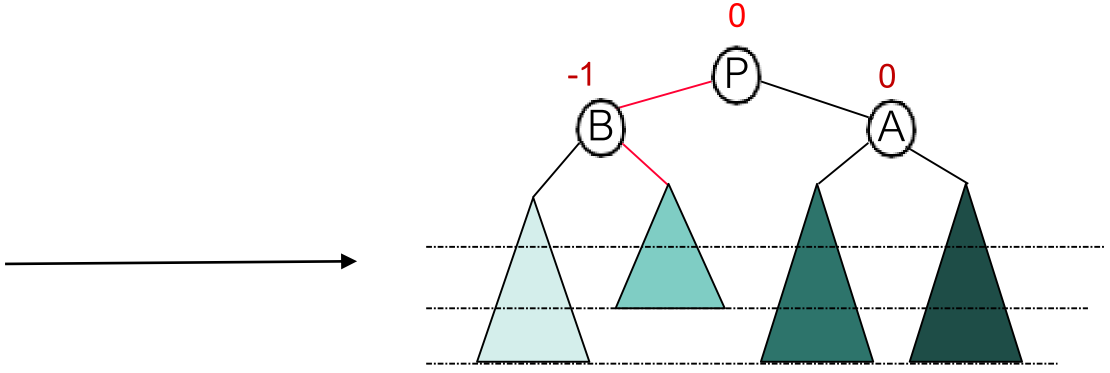
Rotation double

- Cas 4 : hauteur trop importante dans la partie droite du sous-arbre gauche: double rotation droite



Double rotation droite



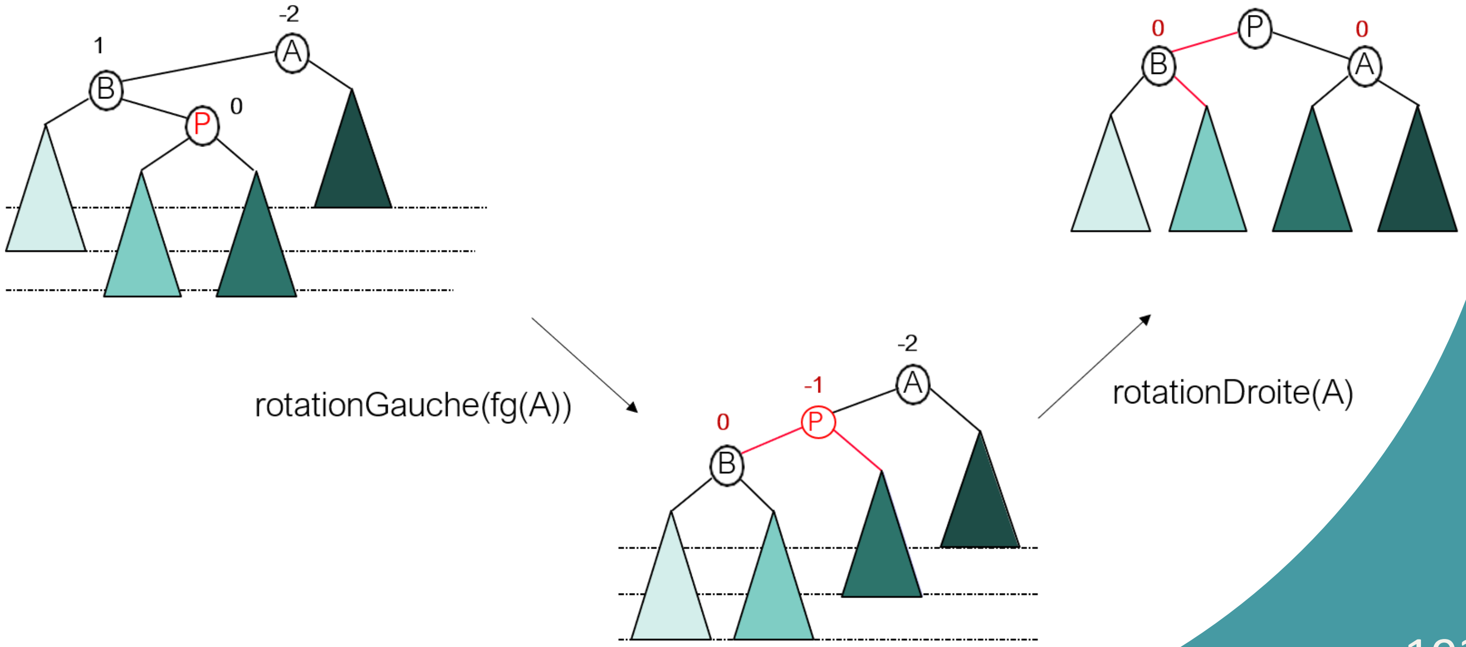


Rotation double

- Cas 4 : hauteur trop importante dans la partie droite du sous-arbre gauche: double rotation droite

- Algorithme :

```
FONCTION doubleRotationDroite(a: ptr sur Arbre) :
ptr sur Arbre
DEBUT
     fg(a) ← rotationGauche(fg(a))
     RETOURNER rotationDroite(a)
FIN
```



E.ANSERMIN | R.VERIN | R.GRIGNON

Choix de la rotation

- La rotation à effectuer dépend de la structure de l'arbre (de quel côté se situe le déséquilibre).

- Pour connaître la rotation à effectuer, il suffit de regarder l'équilibre de la racine (nœud dont l'équilibre vaut +2 ou -2) et de ses fils :

  - SI **equilibre(racine)** EST EGAL A -2
    - → rotation droite

  - SI equilibre(racine) EST EGAL A +2 → rotation gauche
    - → rotation gauche

Choix de la rotation

- La rotation à effectuer dépend de la structure de l'arbre (de quel côté se situe le déséquilibre).
- Pour connaître la rotation à effectuer, il suffit de regarder l'équilibre de la racine (nœud dont l'équilibre vaut +2 ou -2) et de ses fils :
  - SI **equilibre(racine)** EST EGAL A -2
    - → rotation droite
    - SI **equilibre(fg(racine))** EST INF. OU EGAL A **0**
      - → rotation simple
    - SINON
      - → rotation double
  - SI **equilibre(racine)** EST EGAL A +2 → rotation gauche
    - → rotation gauche
    - SI **equilibre(fd(racine))** EST SUP. OU EGAL A **0**
      - → rotation simple
    - SINON
      - → rotation double

Choix de la rotation

- Algorithme :

```
FONCTION equilibrerAVL(a: ptr sur Arbre) : ptr sur Arbre
DEBUT
     SI (equilibre(a) EST SUP. OU EGAL A 2) ALORS        // sous-arbre droit plus profond
          SI (equilibre(fd(A)) SUP. OU EGAL A 0) ALORS
               RETOURNER rotationGauche(a)
          SINON
               RETOURNER doubleRotationGauche(a)
          FIN SI
     SINON SI (equilibre(a) EST INF. OU EGAL A -2) ALORS // sous-arbre gauche plus profond
          SI (equilibre(fg(a)) INF. OU EGAL A 0) ALORS
               RETOURNER rotationDroite(a)
          SINON
               RETOURNER doubleRotationDroite(a)
          FIN SI
     FIN SI
     RETOURNER a
FIN
```

Complexité de l’AVL

- Les opérations de rotations sont à compléxité constante O(1)

- L’opération d’insertion ajoute une hauteur de 1 sur la branche où est inséré l’élément : une rotation suffit pour rééquilibrer l’arbre.

- L’opération de suppression peut exécuter une rotation sur chaque ancêtre du nœud supprimé. Mais celles-ci étant en temps constant, le nombre de rotations dépend de la hauteur de l’arbre.

- Donc, pour un arbre AVL de n nœuds, le temps total d’ajout ou suppression est : $\boldsymbol{O(\log_2(n))}$

Résumé

- Le facteur d’équilibre d’un arbre représente la différence de hauteur entre le sous-arbre gauche et droit : il permet de quantifier l’équilibre de l’arbre.
- Les AVL sont des arbres auto-équilibrés garantissant une structure de l’arbre permettant d’optimiser les opérations de recherche, d’insertion et de suppression.
- L’ AVL exploite des opérations de rotation autour d’un nœud pivot pour rééquilibrer un arbre.
- Il existe d’autre types d’arbres auto-équilibrés comme les arbres rouge-noirs!